



Бурдейна О. В.  
Бурдейний В. М.

*Вінницький  
національний технічний  
університет*

Гель П. В.  
Шевчук О. Ф.

*Вінницький  
національний аграрний  
університет*

Burdeyna E. V.  
Burdeynyi V. M.

*Vinnitsia National  
Technical University*

Hel P. V.  
Shevchuck O. F.

*Vinnitsia National  
Agrarian University*

УДК 534.12+517.927.2

## РОЗСІЯННЯ І ДОВЖИНА ЛОКАЛІЗАЦІЇ В СТРІЧКОВОМУ АКУСТИЧНОМУ ХВИЛЕВОДІ З ХАОТИЧНО НЕРЕГУЛЯРНИМИ ГРАНИЦЯМИ

**Анотація.** Застосуванням методу конформних відображень у поєднанні з методом функцій Гріна досліджено розсіяння і пов'язана з ним довжина ослаблення акустичних хвиль, які поширюються у двомірному смужковому хвилеводі. У моделі, яка тут розглядається, в якості джерела розсіяння прийнято хаотичний профіль бічних стінок хвилеводу. Результати отримані у наближенні Барета і виражені у термінах спектральної густини флуктуацій форми граничного контуру.

**Ключові слова:** акустичний хвилевід, конформне відображення, функція Гріна, розсіяння, спектральна густина флуктуацій.

**Вступ.** Поширення хвиль різноманітної природи, в тому числі акустичних, з цілком зрозумілих причин ніколи не було обділено увагою як в теоретичних, так і в експериментальних дослідженнях. Між тим, останні декади відзначаються новим спалахом уваги до проблеми, що не в останню чергу пояснюється потребами техніки і технології, а також в значній мірі тими можливостями, які надають потужні аналітичні методи, наприклад, метод функцій Гріна, поєднані з практично необмеженими перспективами комп'ютерних обчислень і моделювання.

Одна з проблем все ще далеких до вичерпного вивчення стосується впливу різного роду неоднорідностей генетично властивих реальним технічним хвилепровідним системам. Саме структурний безпорядок виявляється фундаментальним для таких тонких ефектів як слаба локалізація хвиль, локалізація Андерсона, особливі стани хвильового руху відомі як фази Беррі і багатьох інших, опис і обширна бібліографія яких подані в [1].

Разом з тим, з прикладних міркувань, пов'язаних з поширенням хвиль принципово

важливим залишається дослідження такого характерного і традиційного параметру як довжина локалізації. Дійсно, в основному ця величина приймає на себе відповідальність за згасання хвиль у обширному переліку конкретних випадків, починаючи з акустопроводів, хвилеводів систем передачі даних, акустично-оптичних перетворювачів, вібраційних сенсорів віддаленого контролю, і закінчуючи технічно, технологічно, екологічно важливих випадків хвиль в атмосфері, хвиль мілкої води в природних чи штучних водоймищах. Вплив розсіяння акустичних хвиль на неоднорідностях профілю і довжина локалізація для описаної нижче моделі акустичного хвилеводу досліджується в даній роботі.

**Модель. Конформне відображення.** Нами розглядається двомірний (плоский) акустопровід чи акустичний хвилевід, який має вигляд прямолінійної у середньому смуги шириною  $d$ , витягнутої вздовж дійсної осі  $x$  комплексної площини  $Z$ . Обидва береги акустопроводу в силу своєї природи чи



технології виготовлення мають геометричну форму, яку ми описуємо випадковими функціями  $y_d(x)$  і  $\tilde{y}_u(x) = 1 - y_u(x)$ . Перша з них стосується нижнього берегу, в той час як друга відноситься до верхнього берегу, причому кожна з цих функцій нормована на ширину каналу.

Оскільки у подальшому розгляді буде виконуватися усереднення по реалізація цих функцій форми, має зміст одразу ж обговорити їх статистичні властивості. Очевидно, ці властивості як похідні від технології виготовлення, функціонального призначення і багатьох інших параметрів, априорі невідомі, а тому повинні розглядатися в якості припущень модельного характеру. Отже, ми вважаємо, що перші центральні моменти випадкових функцій дорівнюють нулю, тобто

$$\langle y_d \rangle = \langle \tilde{y}_u \rangle = 0 \quad (1.1)$$

причому тут і надалі  $\langle \dots \rangle$  означає усереднення по реалізація або теж саме, що і конфігураційне усереднення. В основному наближенні конфігураційні середні виражаються через інтеграли від парних кореляційних функцій  $\langle y_d(t)y_d(t') \rangle$ ,  $\langle y_d(t)\tilde{y}_u(t') \rangle$ ,  $\langle \tilde{y}_u(t)y_d(t') \rangle$ ,  $\langle \tilde{y}_u(t)\tilde{y}_u(t') \rangle$ . Немає ніяких підстав вважати, що могла б мати місце яка б то не була кореляція між формою верхнього і нижнього берегів хвилеводу. Тому перехресні корелятори факторизуються і, оскільки центральні моменти випадкових функцій дорівнюють нулю, то необхідно розглядати лише  $\langle y_d(t)y_d(t') \rangle$ ,  $\langle \tilde{y}_u(t)\tilde{y}_u(t') \rangle$ . Принагідно зауважимо, що

$$z = w - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y_d(t) \operatorname{cth} \frac{\pi(w-t)}{2} dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}_u(t) \operatorname{th} \frac{\pi(w-t)}{2} dt \quad (1.4)$$

Зауважимо, що тут  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ . Крім цього ми розглядаємо безрозмірні координати, використовуючи середню ширину хвилеводу  $d$  в якості масштабу. В подальших викладках, при необхідності, ми повернемося до фізичних координат.

Конформне відображення (1.4) генерує модифікацію оператора Белтрамі-Лапласа, детально описаною в багатьох роботах, в том числі авторами [3], а тому має зміст подати хвильове рівняння Гельмгольца [4] в його остаточній формі, а саме:

застосовуваний тут підхід дозволяє охопити і можливе існування цих кореляцій, що буде зроблено при іншій нагоді. Стосовно вище відібраних бінарних кореляторів природно допустити, що вони є парними функціями різниці своїх аргументів, а тому можуть бути записані так:

$$\langle y_{d/u}(t)y_{d/u}(t') \rangle = K_{d/u}(|t-t'|) \quad (1.2)$$

Парність функцій  $K_{d/u}(|t-t'|)$  дозволяє розкласти їх у косинусний інтеграл Фур'є

$$K_{d/u}(|t-t'|) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{d/u}(p) \operatorname{Cosp}(t-t') dp \quad (1.3)$$

Тут  $K_{d/u}(p)$  за змістом є не чим іншим як спектральними густинами флуктуацій граничного контуру. Далі буде показано, що саме в термінах спектральних густин виражаються ефекти розсіяння акустичних хвиль на структурних неоднорідності берегів акустопроводу.

Нарешті, маючи на увазі застосування методу конформних відображень, ми вважаємо, що випадкові функції задовольняють умовам теореми[2], яка дозволяє застосування наближених методів конформних відображень так, щоб канонічна прямолінійна смуга комплексної площини  $W$  відображалася в область, яка співпадає з розглядуваною смугою площини  $Z$ .

Як відомо[2], це перетворення з точністю до лінійних за степенями випадкових функцій зводиться до співвідношення:

$$\nabla_w^2 \zeta + k^2 \Theta \zeta = 0 \quad (1.5)$$

з умовами Діріхле, які мають виконуватися на прямолінійних берегах канонічного хвилеводу. Нагадаємо, що тут  $k = \omega/c$  є загальноприйнятим позначенням хвильового числа, а  $\Theta$  є по суті якобіаном переходу до нових змінних.

Рівнянню (1.5) набуває конкретного змісту, якщо відомо якобіан  $\Theta$ . Для його обчислення досить продиференціювати інтегральну форму (1.4) після чого відділити дійсну і уявну частини. Це дає



$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1 - \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ y_d(t) \frac{1 - Ch\pi(u-t)Cos\pi v}{[Ch\pi(u-t) - Cos\pi v]^2} + \tilde{y}_d(t) \frac{1 + Ch\pi(u-t)Cos\pi v}{[Ch\pi(u-t) + Cos\pi v]^2} \right\} dt \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ y_d(t) \frac{Sh\pi(u-t)Sin\pi v}{[Ch\pi(u-t) - Cos\pi v]^2} + \tilde{y}_d(t) \frac{Sh\pi(u-t)Sin\pi v}{[Ch\pi(u-t) + Cos\pi v]^2} \right\} dt \quad (1.7)$$

Нарешті, тут і надалі, з метою компактизації введемо позначення:

$$R_1 = \frac{\partial x}{\partial u} - 1, R_2 = \frac{\partial x}{\partial v} \quad (1.8)$$

для поправок до локальних коефіцієнтів розтягу у точці  $w$ . Явні вирази, які стосуються вище введених величин негайно впливають з порівняння визначень (1.8) та формул (1.6), (1.7) і в силу очевидності ми їх не випишемо.

**Функція Гріна.** Для дослідження розсіяння акустичних хвиль та їх поширення у хвилеводі ми використовуємо, як один з найефективніших, метод функцій Гріна. Рекомендуючи для ознайомлення з деталями одне з багатьох джерел, наприклад [5], функцію Гріна  $G(w, w') \equiv G(u, v; u', v')$  кураєвої задачі для прямолінійної смуги з умовами Діріхле визначимо в стандартний спосіб, а саме як розв'язок рівняння:

$$\left[ \nabla_w^2 + k^2 \Theta(u, v) \right] G(w, w') = \delta(u - u') \delta(v - v') \quad (2.1)$$

який підкоряється умовам

$$G(w, w')|_{w \in \Gamma} = G(w, w')|_{w' \in \Gamma} = 0 \quad (2.2)$$

Виділимо у рівнянні (2.1) терм, який відповідає наближенню ефективного поля. Для цього введемо ефективне хвильове число, визначивши його співвідношенням:

$$\tilde{k}^2(u, v) = k^2 \langle \Theta(u, v) \rangle \quad (2.3)$$

де  $\langle \Theta(u, v) \rangle$  - автокореляційна функція, яка є результатом усереднення якобіану переходу по реалізаціях випадкового контуру. Важливо відзначити, що усереднення по реалізаціях, приводить до відновлення трансляційної інваріантності, в силу чого ефективне хвильове число по суті не залежить від координати  $u$ .

З виділенням ефективного поля рівняння (2.1) приводиться до наступного вигляду:

$$\left[ \nabla_w^2 + k^2 \langle \Theta(u, v) \rangle + k^2 W(u, v) \right] G(w, w') = \delta(u - u') \delta(v - v') \quad (2.4)$$

в якому множник

$$W(u, v) = \Theta(u, v) - \langle \Theta(u, v) \rangle \quad (2.5)$$

є відповідальним за флуктуації відносно середнього поля і розглядається як джерело розсіяння.

Для врахування згаданих флуктуацій звернемося до стандартного підходу, який полягає в переході від (2.4) до рівняння Дайсона [5], а саме:

$$G = G^0 - k^2 G^0 W G \quad (2.6)$$

Тут  $G^0 \equiv G^0(w, w') \equiv G^0(u, v; u', v')$  є грініаном нульового наближення, в якому ми явно позначили координати двох точок, від яких залежать функції Гріна  $G$  і  $G^0$  і який є розв'язком рівняння

$$\left[ \nabla_w^2 + k^2 \langle \Theta(u, v) \rangle \right] G^0(w, w') = \delta(u - u') \delta(v - v') \quad (2.7)$$

Підкреслимо, що рівняння (2.6) тлумачиться як вираз операторного характеру, тобто в ньому мається на увазі інтегрування по проміжних координатах, які розглядаються як матричні індекси.

Функція Гріна  $G$  стосується певної реалізації граничного контуру. Проте, інтерес представляє функція Гріна усереднена по реалізаціях. Позначимо цей усереднений Грініан так:

$$\Xi(u, v; u', v') = \langle G \rangle \quad (2.8)$$

Рівняння для  $\Xi$  впливає з усереднення (2.6) по конфігураціях граничного контуру.

$$\Xi = G^0 - k^2 G^0 \langle W \rangle G^0 + k^4 G^0 \langle W G^0 W \rangle G^0 - k^6 G^0 \langle W G^0 W G^0 W \rangle G^0 + \dots \quad (2.9)$$

Має зміст нагадати, що добутки у останньому співвідношенні тлумачаться згідно зауваження поданого після запису рівняння (2.7).

Для компактизації останнього рівняння введемо оператор  $\Sigma$  визначивши його як суму наступного ряду:



$$\begin{aligned} \Sigma = & -k^2 \langle W \rangle + k^4 \langle WG^0W \rangle - \\ & -k^6 \langle WG^0WG^0W \rangle + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

що дозволяє переписати рівняння (2.9) у вигляді

$$\Xi = G^0 + G^0 \Sigma G^0 \quad (2.11)$$

з перенесенням при цьому конфігураційного усереднення на оператор  $\Sigma$ .

Формальне згортання ряду (2.10) для  $\Sigma$  дає

$$\Sigma = -k^2 \left\langle W \left[ I + k^2 G^0 W \right]^{-1} \right\rangle \quad (2.12)$$

Комбінуючи (2.12) з формулою (2.11), можемо знайти усереднену функцію Гріна. Проте, при такому підході перестає бути акцентованим полюсний характер функції Гріна. Саме тому, щоб зберегти полюсний характер  $\Xi$ , діючи на основі загальної теорії [1,5], введемо, так звану власну енергетичну частину або масовий оператор  $M$ , визначивши його співвідношенням:

$$\Xi^{-1} = \left( G^0 \right)^{-1} - M \quad (2.13)$$

Масовий оператор знаходимо підстановкою означення (2.13) у (2.11) з подальшим розв'язанням одержаного у такий спосіб операторного рівняння. Такий підхід дає:

$$M = \left[ I + \Sigma G^0 \right]^{-1} \Sigma \quad (2.14)$$

В першому і основному порядку по степенях  $\Sigma$  масовий оператор приймає вигляд

$$M \approx \Sigma \quad (2.15)$$

Звернувшись до рівняння (2.12), переконаємося, що перший ненульовий результат конфігураційного усереднення має квадратичний порядок по степенях флуктуацій і зводиться до наступного результату

$$M = k^4 \langle WG^0W \rangle \quad (2.16)$$

обмежуючись яким, ми нехтуємо вкладом  $O(y_{du}^4)$ , збереження яких не означало б нічого більшого, як формального підвищення точності. Представлення масового оператора у формі (2.16) відоме як наближення Барета і відповідає апроксимації Борна [5].

Отже, що стосується функції Гріна  $\Xi$ , то для її обчислення необхідно знайти масовий оператор як конфігураційне середнє, визначене формулою (2.16), після чого поєднати одержаний у такий спосіб результат зі співвідношенням (2.13). Необхідне усереднення

по реалізаціях виконується у наступному параграфі.

#### Усереднення по реалізаціях.

Обчислення середніх, які формулами (2.3) і (2.16) визначають ефективне поле і масовий оператор можна різними способами. Легко бачити, що кожна з цих величин виражається в термінах частинних похідних перетворюючої функції (1.4). Тому, проблема конфігураційного усереднення була б, по крайній мірі у принципі, розв'язана якби був відомим розподіл частинних похідних. Прямі розрахунки показують, що у прийнятому нами наближенні, за яким ми обмежуємося розглядом лише квадратичних флуктуацій геометричної форми контуру, розподіл частинних похідних зводиться до нормального. Цей факт принципово спрощує усереднення в силу того, що стає можливим використання теорема Віка [6], за якою середнє від добутку нормально розподілених випадкових величин дорівнює сумі всіх можливих добутків бінарних середніх.

Прийнявши до уваги вище сказане, одразу ж одержуємо:

$$\langle \Theta \rangle = 1 + \langle R_1^2 \rangle + \langle R_2^2 \rangle \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \langle W(u_1, v_1) W(u_2, v_2) \rangle = & 4 \langle R_1 R_3 \rangle + \\ & + 2 \left( \langle R_1 R_3 \rangle^2 + \langle R_2 R_3 \rangle^2 + \langle R_1 R_4 \rangle^2 + \langle R_2 R_4 \rangle^2 \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

де  $R_1$  і  $R_2$  визначаються формулами (1.6-1.8), в яких як аргументи взяті координати точки  $(u_1, v_1)$ , в той час як  $R_3$  і  $R_4$  обчислюються відповідно а першою і другою з тих же формул, але у точці  $(u_2, v_2)$ . Зауважимо, що у співвідношенні (3.2) останні доданки мають вищий порядок малості, а саме  $O[y^4(t)]$ , щодо відхилень рельєфу хвилеводу від канонічного, а тому вони, щоб уникнути формального перевищення точності, з подальшому розгляді опускаються і тому у прийнятому нами квадратичному наближенні матимемо:

$$\langle W(u_1, v_1) W(u_2, v_2) \rangle \approx 4 \langle R_1 R_3 \rangle \quad (3.3)$$

Співвідношення (3.1), (3.3), (1.6-1.8) показують, що обчислення автокореляційної функції (3.1) і бінарного корелятора (3.3) зводяться до двократного інтегрування по змінних  $t$  і  $t'$ , які пробігають всі значення дійсної осі площини  $W$ . Перш, ніж записати досліджувані квадратичні середні, зауважимо, що у інтегралах по  $t$  і  $t'$  має зміст виконати



заміни змінних  $u - t \Rightarrow t$  і  $u' - t' \Rightarrow t'$  і після цього використати властивості, окреслені формулами (1.2), (1.3)., що одразу дає принциповий результат, за яким згадані середні залежать лише від  $|u - u'|$ . Це означає, що, як і повинно бути, усереднення по реалізаціях відновлює трансляційну симетрію системи. Крім

цього зауважимо, що структура підінтегральних функцій така, при якій інтегрування може бути виконане в повному обсязі шляхом диференціювання за параметром деяких табличних інтегралів, які ми не випикуємо, а подамо лише остаточні результати:

$$\langle R_1 R_3 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^2 \text{Cosp}(u - u_1)}{\text{Sh}^2 p} \{K_d(p) \text{Ch}[p(1 - v)] \text{Ch}[p(1 - v_1)] + K_u(p) \text{Ch}(pv) \text{Ch}(pv_1)\} dp \quad (3.4)$$

$$\langle R_1^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^2}{\text{Sh}^2 p} \{K_d(p) \text{Ch}^2 [p(1 - v)] + K_u(p) \text{Ch}^2 (pv)\} dp \quad (3.5)$$

$$\langle R_2^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^2}{\text{Sh}^2 p} \{K_d(p) \text{Sh}^2 [p(1 - v)] + K_u(p) \text{Sh}^2 (pv)\} dp \quad (3.6)$$

які встановлюють залежність квадратичних кореляторів від поточних координат.

Для цього слід проектувати (4.1) на систему нормальних мод

На закінчення має зміст підкреслити, що співвідношення (3.4-3.6) стосуються загального, так званого несиметричного, випадку [7], при якому спектральні густини, які відповідають верхньому і нижньому берегам смуги статистично незалежно. Це означає, що спектральні густини виражаються різними функціями. Очевидно, що ними можна охопити і симетричний випадок, тобто такий, при якому  $K_d(p) = K_u(p)$ . Для каналів, які не пройшли спеціальну обробку, немає ніяких підстав вважати, що мала б місце певна асиметрія статистичних властивостей границь, а тому швидше всього для них характерних саме симетричний випадок, проте для загальності ми надалі розглядаємо асиметричний випадок.

$$\zeta_{(n)}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iqu} \zeta_n(v) \quad (4.2)$$

на якій є діагональним Грініан  $G^0$ , з компонентою  $\zeta_n(v)$  відповідальною за коливання поперечні до осі хвилеводу, яка є розв'язком рівняння:

$$\partial_v^2 \zeta_n - q^2 \zeta_n + \tilde{k}^2 \zeta_n = 0 \quad (4.3)$$

Оскільки ці розв'язки невідомі, то, звернувшись до теорії збурень, в якості нульового наближення, ми використовуємо моди геометрично ідеального прямолінійного хвилеводу

$$\zeta_n(v) = \sqrt{2} \text{Sin} \pi n v \quad (4.4)$$

При цьому дисперсійне рівняння приводиться до такого вигляду

$$k^2 d^2 (1 + \langle \Theta \rangle_{nn}) = q^2 + \pi^2 n^2 \equiv q^2 + k_n^2 \quad (4.5)$$

з якого видно, що роль ефективного поля в першому наближенні зводиться до перенормування фазової швидкості.

З врахуванням обговореного вибору системи нормальних мод та, прийнявши до уваги (4.1), для масового оператора в імпульсно-частотному представленні матимемо:

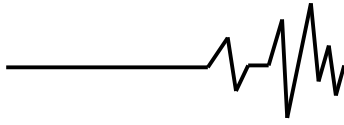
Одержані тут результати дають можливість перейти до обчислення масового оператора.

**Масовий оператор.** Масовий оператор, взятий у основному наближенні по степенях потенціалу розсіяння, в координатному представленні згідно з (2.16) і (3.3) зводиться до наступного вигляду:

$$M = 4k^4 \langle R_1 R_3 \rangle G^0 \quad (4.1)$$

Для подальших викладок важливо виразити масовий оператор у матричній формі.

$$M(q_1, n; q_2, m) = \frac{4k^4}{\pi} \int du_1 dv_1 \int du_2 dv_2 e^{i(q_1 u_1 - q_2 u_2)} \text{Sin} \pi n v_1 \text{Sin} \pi m v_2 \langle R_1 R_3 \rangle \times \\ \times \frac{1}{\pi} \sum_s \int dQ e^{iQ(u_1 - u_2)} G^0(Q, k_s) \text{Sin} \pi s v_1 \text{Sin} \pi s v_2 \quad (4.6)$$



де

$$G^0(Q, k_s) = \left[ k^2 d^2 (1 + \langle \Theta \rangle_{ss}) - Q^2 - k_s^2 \right]^{-1} \quad (4.7)$$

є нульовою функцією Гріна, взятою у тому ж представленні.

Бінарне середнє  $\langle R_1 R_2 \rangle$  залежить від різниці координат  $u_1$  і  $u_2$ . Подамо його у такій формі:

$$\langle R_1 R_2 \rangle = \int \text{Cosp}(u_1 - u_2) F(p; v_1, v_2) dp \quad (4.8)$$

Зауважимо, що функція  $F(p; v_1, v_2)$  є парною щодо змінної  $p$ , а явний вигляд цієї функції легко встановити порівнянням (4.8) зі співвідношенням (3.4).

Заміна змінної  $u_1 - u_2 = u$  з врахуванням інтегрального представлення дельта-функції після інтегрування по поздовжніх координатах і хвильовому числу дає:

$$M(q_1, n; q_2, m) = \frac{16k^4}{\pi} \delta(q_1 - q_2) \int dv_1 \int dv_2 \text{Sin} \pi n v_1 \text{Sin} \pi m v_2 \times \sum_s \int dQ F(q_1 + Q; v_1, v_2) G^0(Q, k_s) \text{Sin} \pi s v_1 \text{Sin} \pi s v_2 \quad (4.9)$$

Підстановка  $F(p; v_1, v_2)$  після інтегрування по поперечних координатах дозволяє подати матричний елемент вигляді лінійної комбінації вкладів обох берегів хвилеводу:

$$M(q_1, n; q_2, m) = [M_d(q_1; n, m) + M_u(q_1; n, m)] \delta(q_1 - q_2) \quad (4.10)$$

$$M_{d/u}(q_1; n) = \sum_s \int dQ G^0(Q, k_s) \left\{ \frac{64k^4 \pi^4 n^2 s^2 (q_1 + Q)^4 K_{d/u}(q_1 + Q)}{\left[ (q_1 + Q)^2 + \pi^2 (n - s)^2 \right]^2 \left[ (q_1 + Q)^2 + \pi^2 (n + s)^2 \right]^2} \right\}$$

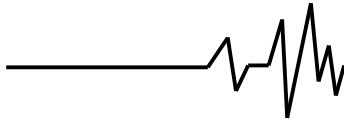
Останнє співвідношення дозволяє перейти до дослідження розсіяння і довжини локалізації.

**Розсіяння і коефіцієнт ослаблення.**

Довжина розсіяння, що те ж саме, що довжина локалізації чи ослаблення, встановлюється переходом від імпульсного-частотного представлення усередненої функції Гріна до її координатного представлення із застосуванням

для цього проектування на раніше встановлену систему нормальних мод, які відповідають основному наближенню ефективного поля. Застосування такого підходу до функції Гріна  $\Xi$ , вираженої в термінах масового оператора за формулою (2.13), при врахуванні трансляційної інваріантності щодо поздовжньої координати приводить до результату

$$\Xi(u, v; u', v') = \sum_{n, m} \frac{1}{2\pi} \int e^{iqu} \zeta_n^*(v) \left[ (G^0)^{-1} - M \right]^{-1} e^{-iqu'} \zeta_m(v') dq \quad (5.1)$$



причому, інтегрант у цьому співвідношенні розглядається як матричний елемент відповідного оператора.

Інтегрування виконується стандартним переходом до контурних інтегралів у комплексній площині змінної  $q$ . Результат інтегрування визначається полюсами функції Гріна, які є розв'язками рівняння:

$$\text{Det} \left[ (G^0)^{-1} - M \right] = 0 \quad (5.2)$$

Масовий оператор  $M$  у рівнянні (5.2) відіграє роль збурення. В основному порядку

$$\Xi(u, v; u', v') = \sum_n \frac{1}{2\pi} \int e^{iq(u-u')} \zeta_n^*(v) \left[ k^2 \left( 1 + \langle \Theta \rangle_{nn} \right) - q^2 - k_n^2 - M(q, n) \right]^{-1} \zeta_n(v') dq \quad (5.3)$$

де збережені лише діагональні елементи масового оператора.

В свою чергу рівняння (5.2) для полюсів функції Гріна приводиться до наступного вигляду:

$$q^2 + k_n^2 - k^2 \left( 1 + \langle \Theta \rangle_{nn} \right) + M(q, n) = 0 \quad (5.4)$$

Розв'язки рівняння (5.4) визначають для підінтегральної функції (5.3) прості полюси двох типів. До першого належать полюси, які для канонічного хвилеводу розташовані на уявній осі. Кожен з таких полюсів не має ніякого відношення до розсіяння дефектами якої б то не було природи, описує експоненційне згасання функції Гріна і стосується тих мод, які не поширюються у хвилеводі. Полюси другого типу у випадку канонічного хвилеводу розташовані на дійсній осі. В силу відсутності уявної частини відповідні їм доданки демонструють осцилюючу поведінку і саме вони стосуються тих хвиль, які поширюються

теорії збурень вклад масового оператора визначається його діагональним елементом, який є лінійним по збуренню. Стосовно недиагональних елементів, то вони з'являються у вищих порядках, починаючи з другого. Структура масового оператора подана формулою (4.1) показує, що недиагональні елементи дають вклад  $O\left(y_{d/lu}^4\right)$ , перебуваючи таким чином за межами раніше прийнятої точності. Приймавши до уваги це зауваження, перепишемо (5.1) у більш конкретній формі так:

вздовж хвилеводу. Ці полюси визначають хвильові числа відкритих каналів. Випадкова форма границь врахована масовим оператором приводить до того, що полюси, які стосуються відкритих каналів, зміщуються з дійсної осі. Уявна частина цих полюсів описує ефект розсіяння і саме з нею пов'язана довжина ослаблення нормальних мод.

Ввівши позначення

$$\tilde{k}_s^2 = k^2 \left( 1 + \langle \Theta \rangle_{ss} \right) - k_s^2 \quad (5.5)$$

після підстановки цього у (5.4). матимемо:

$$q^2 - \tilde{k}_n^2 + M(q, n) = 0 \quad (5.6)$$

Грінівський фактор  $G^0(Q, k_s)$

співвідношення (4.4) можна перетворити так, як прописує тотожність Дірака, тобто привести до такого вигляду:

$$G^0(Q, k_s) = \left( \tilde{k}_s^2 - Q^2 \right)^{-1} = \frac{1}{2} P \frac{1}{\tilde{k}_s^2 - Q^2} + \frac{i\pi}{2Q} \left[ \delta(\tilde{k}_s - Q) + \delta(\tilde{k}_s + Q) \right] \quad (5.7)$$

де  $P(\dots)$  символізує головне значення. Це означає що масовий оператор є комплексною величиною, а тому має місце співвідношення

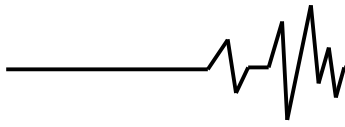
$$M(q, n) = \text{Re} M(q, n) + i \text{Im} M(q, n) \quad (5.8)$$

Дійсна частина масового оператора, як це видно з (5.6), приводить до перенормування частот відкритих каналів. Що ж до уявної частини, то саме вона приймає на себе відповідальність за ефекти розсіяння на неоднорідних стінках і ослаблення акустичної хвилі. Наявність уявної частини ініціює

зміщення полюсів з дійсної осі, а тому розв'язки рівняння (5.6) повинні мати наступну структуру

$$\tilde{q}_n = q_n + i\gamma_n \quad (5.9)$$

Оскільки розсіяння розглядається як ефект вищого порядку, то розв'язки рівняння (5.6) мають бути близькими до тих, які стосуються канонічного хвилеводу. Тому, розв'язуючи (5.6), масовий оператор слід обчислювати при тому значенні  $q$ , яке відповідає хвильовому вектору канонічного хвилеводу з перенормованою фазовою швидкістю.



Поєднавши (5.8-5.9) з (5.6) після відділення дійсною та уявної частини, знаходимо як хвильове число, зміщене ефектом розсіяння

$$q_n = \sqrt{\tilde{k}_n^2 - \text{Re}M(\tilde{k}_n, n)} \quad (5.10)$$

так і, що по суті основним у контексті даної роботи, уявну частину хвильового вектора

$$\gamma_n \equiv \frac{1}{X_n} = -\frac{1}{2q_n} \text{Im}M(q_n, n) \quad (5.11)$$

Уявну частину масового оператора знаходимо підстановкою (5.7) у (4.7) з подальшим інтегруванням по змінній  $Q$ , що дає для довжини ослаблення наступне співвідношення:

$$\frac{1}{X_{f/b}} = 16\pi^5 k^4 \sum_s \frac{1}{q_n \tilde{k}_s} (q_n \pm \tilde{k}_s)^4 \left\{ \frac{k_n^2 k_s^2 [K_d(q_n \pm \tilde{k}_n) + K_u(q_n \pm \tilde{k}_n)]}{\left[ (q_n \pm \tilde{k}_s)^2 + k_{n-s}^2 \right]^2 \left[ (q_n \pm \tilde{k}_s)^2 + k_{n+s}^2 \right]^2} \right\} \quad (5.12)$$

Уявна частина (5.8) складається з двох доданків. Один з них відповідальний за розсіяння вперед, в той час коли інший описує розсіяння назад. Формула (5.12) охоплює обидва випадки так, що верхній знак асоціюється з розсіянням вперед, а нижній-назад. Нарешті, важливо, що у остаточному результаті (5.12) індекс сумування  $s$  пробігає лише ті значення, які відповідають відкритим каналам адже для закритих каналів хвиля згасає безвідносно до регулярності берегів хвилеводу. Крім цього слід зауважити, що довжина локалізації, визначена формулою (5.12) виражена безрозмірним числом. Для одержання результату в фізичній мірі слід використати масштабний множник, який дорівнює усередненій ширині акустопроводу  $d$ .

**Аналіз результатів.** Співвідношення (5.12) показує, що довжина ослаблення акустичної хвилі за рахунок розсіяння на флуктуаціях профілю границь хвилеводу з точністю до квадратичних кореляцій повністю визначається статистичними властивостями випадкових функцій, які утворюють береги акустопроводу. В силу цього довжина локалізації виявляється чутливою до спектральної густини бінарної кореляційної функції флуктуацій. Нами досліджено найбільш вживані при інтерпретації експериментальних даних спектральні густини гауссівського, пуассонівського, лоренцівського, фріделівського типу, а також типу «білий шум». Отримані результати показують, що у відсутності інших механізмів розсіяння або, коли ці механізми ефективні в іншій області спектру хвильових чисел, стає можливою оцінка середніх квадратичних розмірів шершавостей граничного профілю, так само, як і довжини їх кореляцій.

Має зміст підкреслити, що загальне співвідношення (5.12) дозволяє розглянути окремі випадки, зокрема ті, які стосуються одного відкритого каналу, багатоканального розсіяння ( $s_{\max} \gg 1$ ). В останньому випадку результат зводиться до швидкозбіжних рядів, що спрощує чисельні оцінки.

#### Список використаних джерел

1. Izrailev F.M., A.A. Krochin, N.M. Makarov, "Anomalous Localization in Low-Dimensional Systems with Correlated Disorder" arXiv:1110.1762v1[cond-mat.diss-nn], 2011, pp168.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексной переменной, «Наука», 1987, 688 с.
3. Бурдейна О.В., Гель П.В., Бурдейний В.М., «Застосування конформних відображень до дослідження частотного спектру деяких двомірних систем», Вібрації в техніці та технологіях, №2 (62), 2011, с. 12-16.
4. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, ИЛ, т 1, 1958, 942 с.
5. Baker M., Sutilief S., Green's Functions in Physics, Pub. Washington's University, 2003, p. 332.
6. Бонч-Бруевич В.Л., Тябликов С.В., Метод функций Грина в статистической механике, Госфизматгиз, М., 1961, 312 с.
7. Izrailev F.F., Makarov N.M., Rendon M., Square-gradient mechanism of surface scattering in quasi-1D rough waveguides, arXiv:cond-mat/0612653v1[cjnd-mat.mcs-hall] 27 Dec 2006.

#### Список джерел в транслітерації

1. Izrailev F.M., A.A. Krochin, N.M. Makarov, "Anomalous Localization in Low-





Dimensional Systems with Correlated Disorder” arXiv:1110.1762v1[cond-mat.diss-nn],2011,pp168.

2. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Metody teorii funktsii kompleksnoj peremennoj, «Nauka», 1987, 688 s.

3. Burdejna O.V., Gel' P.V., Burdejnij V.M., «Zastosuvannja konformnih vidobrazhen' do doslidzhennja chastotnogo spektru dejakih dvomirnih sistem», Vibracii v tehnici ta tehnologijah,#2(62),2011, s. 12-16.

4. Mors F.M., Feshbah G. Metody teoreticheskoy fiziki, IL, t 1,1958, 942s.

5. Baker M., Sutlief S., Green's Functions in Physics, Pub. Washington's University, 2003, p. 332.

6. Bonch-Bruevich V.L., Tjablikov S.V., Metod funktsij Grina v statisticheskoy mehanike, Gosfizmatgiz, M., 1961, 312 s.

7. Izrailev F.F., Makarov N.M., Rendon M., Square-gradient mechanism of surface scattering in quasi-1D rough waveguides, arXiv:cond-mat/0612653v1[cjnd-mat.mcs-hall] 27 Dec 2006.

#### **РАССЕЯНИЕ И ДЛИНА ЛОКАЛИЗАЦИИ В ПОЛОСКОВОМ АКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С ХАОТИЧЕСКИ НЕРЕГУЛЯРНЫМИ ГРАНИЦАМИ**

**Аннотация.** Применением метода конформных отображений в сочетании с техникою функций Грина исследовано рассеяние и связанная с ним длина ослабления

акустических волн, распространяющихся в двумерном полосковом волноводе. В рассматриваемой модели источником рассеяния принимается хаотичный профиль границ волновода. Результаты получены в приближении Барета и выражены в терминах спектральной плотности флуктуаций формы граничного контура.

**Ключевые слова:** акустический волновод, конформное отображение, функция Грина, рассеяние, спектральная плотность флуктуаций.

#### **SCATTERING AND LOCALISATION LENGTH IN STRIP ACOUSTIC WAVEGUIDE WITH RANDOMLY IRREGULAR BOUNDARIES**

**Annotation.** Scattering and attenuation length of acoustic waves propagating along a two-dimensional stripe waveguide have been investigated. Disordered waveguide's profile was considered as the main source of scattering. Applying of conform mapping approach allowed the authors to reduce irregular waveguide to the canonical one. The results have been obtained involving Green's functions method in Barnet approximation. The attenuation length is expressed in terms of binary correlations spectral density.

**Key words:** acoustic waveguide, conform mapping, Green function, scattering, spectral density of fluctuations.