УДК 621.1(075.8)

ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ НА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ

Музичук В.І
Рябошапка В.Б
Бурдейний О.М
Вінницький національний аграрний університет

Наведено математичну модель, що складається з систем нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних та нелінійних алгебраїчних рівнянь, які всі разом описують стаціонарні та перехідні режими роботи теплообмінного обладнання.

A mathematical model, which consists of the systems of nonlinear differential equalizations at the derivatives of part and nonlinear equalizations of algebra, which describe the stationary and transitional modes of operations of heat-exchange equipment all together, is resulted.

Вступ

В останні роки у продовольчому машинобудуванні почалось широке застосування математичних моделей, на яких вивчаються технологічні та теплові процеси, що дає можливість, в порівнянні з фізичними, значно скоротити трудові та матеріальні витрати.

При проектуванні нового та аналізі режимів роботи працюючого теплообмінного обладнання є можливість провести дослідження на математичній моделі від найменшого елементу до повної системи обладнання. Математична модель складається з систем нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних та нелінійних алгебраїчних рівнянь, які всі разом описують стаціонарні та перехідні режими роботи теплообмінного обладнання.

Основна частина

При дослідженні чисельними методами теплообмінного устаткування що використовується в цукрової галузі виникають такі задачі:

- визначення основних параметрів гріючої камери, кип'ятильної труби випарного апарата, повної системи теплообмінного обладнання, яке сумісно працює із зовнішніми споживачами;
- розрахунок залежностей критеріїв ефективності від незалежних змінних та чуттєвість їх до інших параметрів;
- визначення оптимальних параметрів конструкції і режимів роботи;
- визначення усталених та динамічних характеристик теплообмінного обладнання.

В подальшому для розрахунків чисельними методами параметрів теплообмінного обладнання цукрового виробництва розглянемо принципи побудови алгоритмів та складемо алгоритми математичних моделей.

Оскільки кожному рівнянню в частинних похідних нелінійної моделі притаманні свої особливості, а граничні умови роблять кожну задачу не подібну другим, то практично неможливо сформулювати загальні рекомендації, які були б корисні при розв'язанні таких рівнянь.

Однак у всіх випадках корисно мати на увазі наступні правила:

- на початку належить з'ясувати, яка повинна бути точність рішення, якщо вона висока, то для рішення диференціального рівняння у частинних похідних потрібна буде дуже мілка сітка. Треба мати на увазі, що кінцево-різницеві методи дають похибку порядку h^2 (кроку сітки);

- необхідно вивчити форму області, в якій відшукується рішення. Дуже часто наявність симетрії дозволяє зменшити кількість вузлів сітки в 2 або в 4 рази. В результаті заощаджуємо машинний час та будемо використовувати менший об'єм пам'яті ПЕОМ.

- належить також ретельно вибирати початкові значення змінних. При використанні ітеративних методів швидкість збіжності в пряму залежить від близькості початкових даних до рішення. Якщо не вдається одержати рішення, то виявляється корисно розділити рішення задачі на два або більше етапів. На першому етапові за допомогою дуже грубої сітки або розкладання на досить великі елементи одержують достатнє наближення, а потім знаходять рішення на досить мілкій сітці.

- бажаним є вибір методу, який більш усього підходить для рішення вибраної задачі. При цьому завжди може постати питання, який метод необхідно вибрати кінцевих різностей чи кінцевих елементів. Відповідь залежить від того для якого об'єкта складені рівняння та яка форма об'єкта. Якщо об'єкт має правильні форми кінцевих різностей, то цей метод має менший об'єм обчислень та займає менший об'єм пам'яті у ПЕОМ, а, крім того, метод кінцевих різностей з деяким припущенням можна використовувати для більш складних об'єктів.

Рішення системи таких рівнянь може бути всяка сукупність функцій, яка підставлена в систему рівнянь замість невідомих функцій, перетворює цю систему в тотожність. При цьому виникає необхідність дотримуватись таких вимог: записати кожне рівняння моделі відносно головного параметра; замінити частинні похідні функціями рішення точок сітки; виконати перетворення рівняння відносно головного параметра за допомогою початкових та граничних умов; записати значення цих параметрів в сітці у виді початкового рішення; підібрати метод уточнення початкового рішення щоб запобігти розходження процесу рішення.

Витримаємо порядок одержання різницевих рівнянь відносно порядку, який використовується при складанні математичних моделей.

Розглянемо приклад одержання різницевого рівняння з диференціального рівняння температури пари в горючі камері. Головним параметром у цьому рівнянні є температура граючої пари в камері. Відносно неї запишемо різницеве рівняння

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \alpha\left(\frac{\partial^2\theta_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2\theta_n}{\partial z^2}\right), \qquad (1)$$

де θ - температура граючої пари, r - радіус камери, z - висота камери, τ - час, α - коефіцієнт температуропровідності.

Початкові умови

$$\theta_n(z, r, o) = \theta_o, \qquad (2)$$

де θ_o - температура навколишнього середовища.

Граничні умови:

$$\theta_n(z,r,\tau)=\theta_{oi}(z,r,\tau), \tag{3}$$

де θ_{ni} - температура плівки конденсації;

$$\lambda_2\frac{\partial\theta_{ni}}{\partial r}-\lambda\frac{\partial\theta_n}{\partial r}=\rho_n h_n\frac{d\delta}{dr}, \tag{4}$$

де $\lambda,\ \lambda_2$ - коефіцієнти теплопровідності пари та плівки конденсату, ρ_n - густина пари, h_n - теплота пароутворення, δ - товщина плівки.

Виберемо сітку з кроком h_r та h_z відповідно вздовж радіуса r та висоти z гріючої камери, а також інтервал зміни часу k, і в подальшому будемо використовувати її для одержання рівнянь для усіх параметрів гріючої камери.

Представимо частинні похідні в різницевому виді:

$$\frac{\partial\theta_n}{\partial r}=\frac{\theta_{n(i,j=1)}-\theta_{n(i,j)}}{k}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2\theta_n}{\partial r^2}=\frac{\theta_{n(i=1,j)}2\theta_{n(i,j)}+\theta_{n(i-1,j)}}{h_z^2}; \tag{6}$$

$$\frac{\partial\theta_n}{\partial r}=\frac{\theta_{n(i,j)}-\theta_{n(i-1,j)}}{h_r}; \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2\theta_n}{\partial z^2}=\frac{\theta_{n(i,j+1)}-2\theta_{n(i,j)}+\theta_{n(i,j-1)}}{h_z^2}. \tag{8}$$

Похідні по сітці замінимо центрально-різницевими, а похідні за часом правою різницевою похідною. Підставляємо значення похідних у різницевому виді в початкове (вихідне) рівняння

$$\frac{\theta_{n(i,j=1)}-\theta_{n(i,j)}}{k}=\alpha\left(\frac{\theta_{n(i+1,j)}-2\theta_{n(i,j)}+\theta_{n(i-1,j)}}{h_r^2}+\frac{1}{r}\frac{\theta_{n(i,1)}-\theta_{n(i-1,j)}}{h_r}\right)+ \\ +\frac{\theta_{n(i,j+1)}-2\theta_{n(i,j)}+\theta_{n(i,j-1)}}{h_z^2}. \tag{9}$$

Виконаємо перетворення рівняння відносно основного параметра, тобто відносно температури пари $\theta_{n(i,j)}$

$$\theta_{n(i,j)}=\left(\alpha\left(\frac{\theta_{n(i+1,j)}+\theta_{n(i-1,j)}}{h_r^2}-\frac{\theta_{n(i-1,j)}}{rh_r}+\frac{\theta_{n(i,j+1)}+\theta_{n(i,j-1)}}{h_z^2}\right)-\frac{\theta_{n(i,j-1)}}{k}\right)\cdot \\ \cdot\frac{1}{\left(\frac{2\alpha}{h_r^2}-\frac{1}{k}+\frac{2\alpha}{h_z^2}-\frac{1}{rh_r}\right)}. \tag{10}$$

В результаті одержуємо функцію відносно основного параметра температури гріючої пари в кожній точці сітки гріючої камери. Цей кінцево-різницевий вираз, справедливий для всіх внутрішніх вузлів, дозволяє явним чином виразити температуру пари в гріючій камері в момент часу $(\tau + k)$ через температуру в момент часу τ із похибкою, яку можна обчислити за формулою

$$e = \frac{k^2}{h^2}. \tag{11}$$

Відстань треба вибирати відповідно часу та координат r і z так, щоб похибка була в інтервалі $e<0,5$, бо при $e=0,5$ виникають деякі коливання результатів рішення.

Аналогічно одержимо кінцево-різницевий вираз для визначення товщини плівки конденсації

$$\delta_{(i,j)} = \left(\lambda \frac{\theta_{n(i,j)} - \theta_{n(i-1,j)}}{h_r} - \lambda_2 \frac{\theta_{nl(i,j)} - \theta_{nl(i-1,j)}}{h_r} \right) \cdot \frac{k}{\rho_{n(i,j)^h}} + \delta_{n(i-1,j)}. \tag{12}$$

Висновок

Численні методи дослідження в порівнянні з експериментальними показали, що вони забезпечують набагато меншу вартість, тому що витрати на вартість машинного часу на багато порядків менший чим вартість експерименту на реальному обладнанні. Слідує відзначити, що значення цього фактору зростає при збільшені масштабів та ускладненні, потребуючого вивчення фізичного процесу.

Дослідження за допомогою чисельних методів можливо провести досить швидко, тому що за допомогою сучасних ПОЕМ в короткий час одержують сотні розрахунків а з них вибирають оптимальну конструкцію, в той час як при експерименті це дослідження забрало б набагато більше часу.

Рішення задачі чисельними методами дає детальну та повну інформацію про фізичний процес. З його допомогою є можливість одержати значення усіх змінних параметрів (таких як швидкість, тиск, температура, концентрація, витрати пари та розчину). На відміну від експерименту для визначення параметрів практично доступна вся область, яка досліджується, та відсутні збурення процесу, що вносять датчики при експерименті.

Приведений метод дає можливість одержати дані про реальний процес, що далеко не завжди можливо при експерименті.

Чисельні методи дослідження не можуть бути використані для тих об’єктів, для яких ще не розроблені математичні моделі.

Література

1. Исаченко В.П., Осипов В.А., Сукомел А.С., Теплопередача. – М.: Энергоиздат, 1981. – 485 с.

2. Журенко А.І. Математичне моделювання випарних установок. – К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка»»,2004. - 144 с.

3. Математична модель статики теплового режиму випарних установок // Наук. Вісн. НТУУ «КПІ», 2004. №1 С. 30-36.