*УДК 667.11.021*

# ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ЧАСТИНОК ОРГАНО-МІНЕРАЛЬНИХ ДОБРИВ ПО ФОРМУЮЧІЙ ПОВЕРХНІ

***Тарасюк В.В.***
***Дідух В.Ф.***
*Луцький національний технічний університет*

*В статті приведено теоретичні дослідження складного руху частинки органо-мінеральних добрив при її переміщенні по криволінійній поверхні, яка встановлена під кутом до горизонталі.*

*The theoretical risearch of complex of on organic mineral fertilizer particle when it moves on a curved surface which is set at an angle of the grade contour is submitted in the article.*

### *Постановка проблеми*

Збереження родючості ґрунтів можливе через зниження на них хімічного навантаження при вирощуванні сільськогосподарських культур. У такому випадку, створювати умови живлення рослин при їх посіві, посадці або підживленні, необхідно за допомогою мінеральних добрив не в чистому вигляді, а у складі органо-мінеральних добрив. При цьому, часто в якості органічної складової, використовують озерні сапропелі прісноводних озер. Переваги сапропелю над іншими органічними речовинами полягають у їх структурі, які згідно багатьох дослідників [1] відносять до дрібнодисперсних систем з проявом гелевих властивостей. Вони визначають умови формування гранул органо-мінеральних добрив на основі сапропелю у кулясту форму методом обкочування. При цьому важливим є також масовий вміст мінеральної частини N, P, K у випадку використання, як окремих елементів, а також одночасногму їх додаванні у суміш згідно пропорцій та агроекологічних вимог.

### *Аналіз останніх досліджень*

На вибір методу гранулювання впливає склад суміші та її вологість в цілому і складників зокрема[2,3]. Наявність вологи у сумішах органо-мінеральних добрив на основі сапропелів вказує на її гранулюванні методом обкочування. Але відомі конструкції [4], які призначені для отримання гранул кулястої форми передбачають умови гранулоутворення, що базується на попередньому утворенні агломератів з рівномірно змочених частинок або нашаруванні сухих частинок на змочені ядра – центри грануло утворення. Цей процес обумовлений дією капілярно-адсорбційних сил зчеплення між частинками і подальшим ущільнення структури у складному, щільному динамічному шарі. Конструкції відомих грануляторів мають велику енергоємність і металоємність, не дозволяють забезпечити максимальний вихід якісної продукції.

Проведені експериментальні дослідження з отримання гранул органо-мінеральних добрив на основі сапропелів кулястої форми відповідно до агроекологічних вимог, дозволили визначитись із формою робочої поверхні гранулятора[5].

***Мета досліджень***

Встановлення законів руху частинки коливною криволінійною поверхнею, розміщену під кутом до горизонталі.

***Результати досліджень***

Складність процесу формування гранул кулястої форми полягає у зміні геометричної форми частинки, яка рухається по коливній криволінійній поверхні, розміщеної під кутом до горизонту. Встановлення законів її руху даною поверхнею, дозволить визначити основні кінематичні параметри засобу гранулювання органо-мінеральних добрив на основі сапропелів для забезпечення максимального виходу їх товарної фракції.

При проведені досліджень зробимо наступні допущення:

- частинка є сталої маси, не змінює її протягом всього шляху при переміщенні, та не відривається від поверхні;
- зміна геометричної форми не впливає на траєкторію руху частинки;
- липкість поверхневого шару частинки не змінюється та не вливає на її прискорення при зміні напрямку руху;
- досліджувана траєкторія не виходить за межі допустимих значень вибраних геометричних параметрів поверхні. Вказані допущення дозволяють проводити дослідження до частинки, як матеріальної точки

*Формулювання задачі*. Нахилена під кутом $\beta$ до горизонту циліндрична поверхня, у перерізі якої лежить крива задана її графіком $r = r(\varphi)$ у полярній системі координат $Or\varphi$, коливається відносно осі $Oz$ за законом $\theta = \theta(t)$. У початковий момент часу $t = 0$ у деякому місці поверхні, заданому координатами $(\varphi, z)$, поміщено матеріальну точку масою $m$, що знаходиться в спокої відносно деякої абсолютної інерційної системи координат. Коефіцієнт тертя ковзання між матеріальною точкою і поверхнею дорівнює $f$. Пришвидшення вільного падіння $g$. Необхідно встановити рівняння руху матеріальної точки.

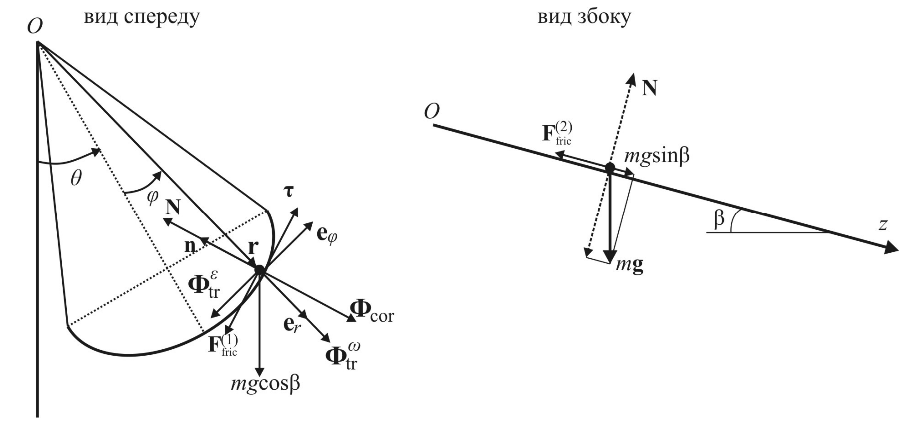


***Рис. 1. Сили, які діють а матеріальну точку при переміщені коливною поверхнею***

***Рух розкладемо на дві складових: у площині $Or\varphi$ та уздовж осі $Oz$.***

*1. Рух у площині* $Or\varphi$. Центр системи відліку помістимо в нерухому точку $O$. Оскільки траєкторія точки, відповідно до умови задачі задана в полярній системі координат, то введемо у розгляд систему одиничних ортогональних векторів $\mathbf{e}_r$ та $\mathbf{e}_\varphi$, спрямованих відповідно вздовж радіуса-вектора точки та перпендикулярно до нього у напрямі відліку полярного кута $\varphi$. Відповідно до [6], $\dfrac{d\mathbf{e}_r}{d\varphi}=\mathbf{e}_\varphi$, $\dfrac{d\mathbf{e}_\varphi}{d\varphi}=-\mathbf{e}_r$. Додатково введемо орти натуральної системи координат: нормаль $\mathbf{n}$, спрямовану у напрямі найбільшої увігнутості траєкторії, та дотичну $\boldsymbol{\tau}$. Ці вектори пов'язані із векторами $\mathbf{e}_r$ та $\mathbf{e}_\varphi$ залежностями

$$\boldsymbol{\tau}=\left(r'_\varphi(\varphi)\mathbf{e}_r+r(\varphi)\mathbf{e}_\varphi\right)\Big/J(\varphi);\ \mathbf{n}=\left(-r(\varphi)\mathbf{e}_r+r'_\varphi(\varphi)\mathbf{e}_\varphi\right)\Big/J(\varphi),$$

де $J(\varphi)=\sqrt{\left[r(\varphi)\right]^2+\left[r'_\varphi(\varphi)\right]^2}$ – якобіан; штрихами позначено похідні за змінними, що розташовані в індексі, тобто $r'_\varphi=\dfrac{dr}{d\varphi}$.

Складова відносної швидкості матеріальної точки у площині $Or\varphi$, відповідно до означення [7], дорівнює

$$\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}^{(1)}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(r\mathbf{e}_r\right)=\frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r+r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}=\dot\varphi\left(r'_\varphi(\varphi)\mathbf{e}_r+r(\varphi)\mathbf{e}_\varphi\right)=\dot\varphi J(\varphi)\boldsymbol{\tau},\tag{1}$$

Тут $\dot\varphi=\dfrac{d\varphi}{dt}$ – похідна за часом від полярного кута $\varphi$, що задає розташування матеріальної точки на її траєкторії.

Відповідно до (1) та означення [7], складова відносного пришвидшення матеріальної точки у площині $Or\varphi$ дорівнює

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{\mathrm{rel}}^{(1)}&=\frac{d\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}^{(1)}}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\dot\varphi\left(r'_\varphi(\varphi)\mathbf{e}_r+r(\varphi)\mathbf{e}_\varphi\right)\right]=\ddot\varphi J(\varphi)\boldsymbol{\tau}+(\dot\varphi)^2\left[\left(r''_\varphi(\varphi)-r(\varphi)\right)\mathbf{e}_r+2r'_\varphi(\varphi)\mathbf{e}_\varphi\right]=\\&=\left[\ddot\varphi J(\varphi)+(\dot\varphi)^2\alpha(\varphi)\right]\boldsymbol{\tau}+\frac{\left(\dot\varphi J(\varphi)\right)^2}{\rho(\varphi)}\mathbf{n},\end{aligned}\tag{2}$$

де $\alpha(\varphi)=r'_\varphi(\varphi)\left(r''_\varphi(\varphi)+r(\varphi)\right)\Big/J(\varphi);\ \rho=\left[J(\varphi)\right]^3\Big/\left(r(\varphi)\left[r(\varphi)-r''_\varphi(\varphi)\right]+2\left[r'_\varphi(\varphi)\right]^2\right)$ – радіус кривини траєкторії.

Переносне (транспортне) пришвидшення (тобто пришвидшення, зумовлене обертанням системи координат разом із поверхнею) для матеріальної точки дорівнює

$$\mathbf{a}_{\mathrm{tr}}=-\dot\theta^2 r(\varphi)\mathbf{e}_r+\ddot\theta r(\varphi)\mathbf{e}_\varphi\tag{3}$$

Коріолісове пришвидшення матеріальної точки обчислимо із урахуванням того, що вектор переносної кутової швидкості, відповідно до умови задачі, дорівнює $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{tr}}=-\dot\theta\left[\mathbf{n}\times\boldsymbol{\tau}\right]$. Тобто Коріолісове пришвидшення точки, відповідно до означення [7], дорівнює

$$\mathbf{a}_{\mathrm{cor}}=2\left[\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{tr}}\times\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}\right]=-2\dot\theta J(\varphi)\dot\varphi\left[\left[\mathbf{n}\times\boldsymbol{\tau}\right]\times\boldsymbol{\tau}\right]=2\dot\theta J(\varphi)\dot\varphi\left[\boldsymbol{\tau}\times\left[\mathbf{n}\times\boldsymbol{\tau}\right]\right]=2\dot\theta J(\varphi)\dot\varphi\mathbf{n}.\tag{4}$$

Тут символом «×» позначено операцію векторного добутку.

Отже, відповідно до (3) і (4) та принципу Даламбера переносна та Коріолісова сили інерції дорівнюють:

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{tr}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{tr}} = m\dot{\theta}^2 r(\varphi)\mathbf{e}_r - m\ddot{\theta} r(\varphi)\mathbf{e}_\varphi,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{cor}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{cor}} = -2m\dot{\theta}J(\varphi)\dot{\varphi}\mathbf{n}. \quad (5)$$

Окрім сил інерції (5) на матеріальну точку діють нормальна реакція в'язі (поверхні)

$$N = N\mathbf{n}, \quad (6)$$

сила тертя ковзання, що відповідно до закону Кулона при русі точки вважається рівною

$$\mathbf{F}_{\mathrm{fric}}^{(1)} = -fN\frac{\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}^{(1)}}{\left|\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}^{(1)} + \mathbf{v}_{\mathrm{rel}}^{(2)}\right|}, \quad (7)$$

та сила ваги матеріальної точки, вектор якої у вибраній неінерційній системі координат має вигляд

$$\mathbf{G}^{(1)} = mg\cos\beta\left[\cos(\theta+\varphi)\mathbf{e}_r - \sin(\theta+\varphi)\mathbf{e}_\varphi\right]. \quad (8)$$

Відповідно до другого закону Ньютона, записаного для неінерційної системи відліку, відносне пришвидшення матеріальної точки пропорційне до векторної суми активних сил, реакцій в'язей та сил інерції, що діють на неї, тобто,

$$m\mathbf{a}_{\mathrm{rel}}^{(1)} = \mathbf{F}_{\mathrm{fric}}^{(1)} + \mathbf{G}^{(1)} + N + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{tr}} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{cor}}. \quad (9)$$

*2. Рух уздовж осі $Oz$.* Відповідно до другого закону Ньютона, рух матеріальної точки уздовж осі $Oz$ матиме вигляд

$$m\ddot{z} = mg\sin\beta - F_{\mathrm{fric}}^{(2)}, \quad (10)$$

де

$$\mathbf{F}_{\mathrm{fric}}^{(2)} = -fN\frac{\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}^{(2)}}{\left|\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}^{(1)} + \mathbf{v}_{\mathrm{rel}}^{(2)}\right|},\ \mathbf{v}_{\mathrm{rel}}^{(2)} = \dot{z}\mathbf{e}_z. \quad (11)$$

*3. Об'єднання двох рухів та запис визначальних диференціальних рівнянь.* Запишемо векторну рівність (9) у проекціях на осі натуральної системи координат, означеної векторами $(\mathbf{n},\boldsymbol{\tau})$. Для цього помножимо скалярно рівність (9) спочатку на $\boldsymbol{\tau}$, а потім на $\mathbf{n}$ із урахуванням таких залежностей:

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1,\ \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau} = 1,\ \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau} = 0,\ \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_r = 1,\ \mathbf{e}_\varphi\cdot\mathbf{e}_\varphi = 1,\ \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_\varphi = 0,$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_r = \left(-r(\varphi)\mathbf{e}_r + r'_\varphi(\varphi)\mathbf{e}_\varphi\right)/J(\varphi)\cdot\mathbf{e}_r = -r(\varphi)/J(\varphi);$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_\varphi = \left(-r(\varphi)\mathbf{e}_r + r'_\varphi(\varphi)\mathbf{e}_\varphi\right)/J(\varphi)\cdot\mathbf{e}_\varphi = r'_\varphi(\varphi)/J(\varphi);$$

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{e}_r = \left(r'_\varphi(\varphi)\mathbf{e}_r + r(\varphi)\mathbf{e}_\varphi\right)/J(\varphi)\cdot\mathbf{e}_r = r'_\varphi(\varphi)/J(\varphi);$$

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{e}_\varphi = \left(r'_\varphi(\varphi)\mathbf{e}_r + r(\varphi)\mathbf{e}_\varphi\right)/J(\varphi)\cdot\mathbf{e}_\varphi = r(\varphi)/J(\varphi).$$

Об'єднуючи отримані залежності з рівнянням (10), матимемо систему диференціальних рівнянь відносного руху матеріальної точки в неінерційній системі координат $Or\varphi z$:

$$\ddot{\varphi} J(\varphi) + (\dot{\varphi})^2 \alpha(\varphi) = -f\tilde{N} \frac{\dot{\varphi} J(\varphi)}{\sqrt{\left(\dot{\varphi} J(\varphi)\right)^2 + \dot{z}^2}} + \frac{\ddot{\theta} r(\varphi) r'_{\varphi}(\varphi) - \ddot{\theta}\left(r(\varphi)\right)^2}{J(\varphi)} +$$

$$+\frac{g\cos\beta}{J(\varphi)}\left[r'_{\varphi}(\varphi)\cos(\theta+\varphi) - r(\varphi)\sin(\theta+\varphi)\right], \qquad (12)$$

$$\ddot{z} = g\sin\beta - f\tilde{N}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\left(\dot{\varphi} J(\varphi)\right)^2 + \dot{z}^2}}.$$

де

$$\tilde{N} = \frac{N}{m} = \frac{\left(\dot{\varphi} J(\varphi)\right)^2}{\rho(\varphi)} + \frac{\left[\dot{\theta} r(\varphi)\right]^2}{J(\varphi)} + \frac{\ddot{\theta} r(\varphi) r'_{\varphi}(\varphi)}{J(\varphi)} + 2\dot{\theta} J(\varphi)\dot{\varphi} +$$

$$+\frac{g\cos\beta}{J(\varphi)}\left[r(\varphi)\cos(\theta+\varphi) + r'_{\varphi}(\varphi)\sin(\theta+\varphi)\right]. \qquad (13)$$

Рівняння (12) необхідно розв'язувати з урахуванням умови $\tilde{N} \geq 0$, тобто того, що матеріальна точка не відривається від заданої циліндричної поверхні.

Диференціальні рівняння (12) є нелінійними диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами, тому для їх розв'язування використовуються числові методи. Оптимальним є розв'язування задачі методом Рунге-Кута 4 порядку.

Якщо матеріальна точка поміщена на поверхню без початкової швидкості, то з урахуванням руху поверхні за законом $\theta = \theta(t)$, матимемо такі початкові умови:

$$z(0)=0,\ \dot{z}(0)=0,\ \varphi(0)=\varphi_0,\ \dot{\varphi}(0)=\dot{\theta}(0). \qquad (14)$$

### *Висновок*

Отримано формулу для встановлення траєкторії руху матеріальної частинки по криволінійній коливній поверхні без відриву від неї, що дозволить уточнити як форму криволінійної поверхні, так її геометричні параметри.

### *Література*


*1. М.З. Лопотко, Г.А. Євдокимова, П.Л. Кузьмицький. Сапропели в сельськом хозяйстве. – М.: Наука и техника, 1992.-216 с.*

*2. http: www.saprex.ru*

*3. http: www.sapropek..narod.ru*

*4. П.В. Классен, И.Г. Гришаев, И.П. Шомин. Гранулирование. – М.: Химия, 1991. – 240с.*

*5. Тарасюк В.В. /В.В.Тарасюк, В.Ф.Дідух, І.В. Тарaймович// загальнодержавний міжвідомчий науково-технічний збірник. "Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин". Конструктивні особливості формування гранул при виробництві ОМД на основі сапропелю. – Кіровоград.:,2010. – Вип.. 40, Ч.2. С.226 – 230.*

*6. В.И Смирнов. Курс висшей математики. – Т. 1. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 487 с.*

*7. А.П.Маркеев Теоретическая механика: учебник для университетов. – М.: ЧеРо, 1999 – 572 с.*