

УДК 631.356.2

## ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ВЗАЄМОДІЇ ГНУЧКОЇ ОЧИСНОЇ ЛОПАТИ З ГОЛОВКОЮ КОРЕНЕПЛОДУ ПРИ ДООЧИЩЕННІ

*Березовий М.Г*

*Черниш О.М*

*Національний університет біоресурсів і природокористування*

*Скориков М.А*

*Національний інститут винограду і вина "Магарач"*

*Предложена новая теория взаимодействия гибкой очистительной лопасти с поверхностью головки корнеплода в процессе ее очистки от остатков ботвы. На основе полученных дифференциальных уравнений движения лопасти, которая шарнирно установлена на приводном валу с горизонтальной осью вращения, приведены новые математические зависимости, которые обосновывают основные параметры данного технологического процесса.*

*The new theory of interaction of a flexible blade of the root cleaner with a surface of the top of the root is offered during its clearing of residuals of beet tops. On the basis of the obtained differential equations of motion of a articulated blade, which is installed on the drive shaft with a horizontal axis of rotation, the new mathematical associations are submitted which justify the basic parameters of the given technological process.*

### **Постановка проблеми**

Однією із найважливіших культур у сільськогосподарському виробництві України є цукрові буряки. Проте рівень механізації виробництва цієї культури на даний час ще не відповідає агротехнічним вимогам. Якість вороху коренеплодів за показниками втрат цукроносної маси забрудненням гичкою незадовільна. Особливі труднощі виникають при доочищенні головок коренеплодів. Очисники головок коренеплодів при збільшенні робочої швидкості допускають сильні пошкодження головок коренеплодів, які перевищують агротехнічні вимоги [1, 2, 3, 4].

Для вирішення питання підвищення якості процесу відокремлення гички необхідно дослідити взаємодію очисника з головкою коренеплоду та обґрунтувати значення його конструктивних параметрів і режимів роботи. Тому, побудова математичної моделі взаємодії гнучкої очисної лопати з головкою коренеплоду є актуальним науковим завданням.

### **Аналіз останніх досліджень та публікацій**

В [1] розглянута теорія лопатевого очисника головок коренеплодів буряків з горизонтальною віссю обертання і наведені основні аналітичні залежності, що описують удар очисної лопати по головці коренеплоду.

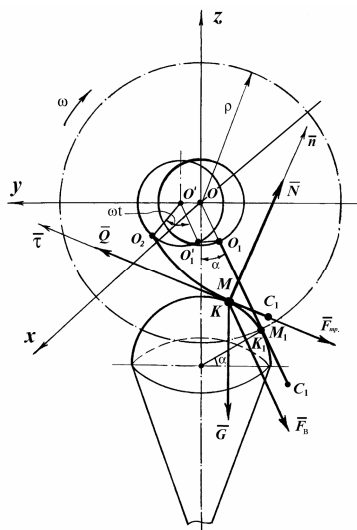
Наступним етапом дослідження є складання диференціальних рівнянь руху точки контакту бича по головці коренеплоду в процесі зчісування з останній залишків гички вважаючи, що цей процес буде відбуватися у поздовжньо – вертикальній площині, тобто, коли площина обертання бичів розташована вздовж рядка.

**Постановка завдання**

Завданням даного дослідження є аналітичне визначення залежностей показників якості процесу доочищення від конструктивних параметрів лопатевого очисника головок коренеплодів.

**Виклад основного матеріалу дослідження**

Зобразимо силову взаємодію бича з головкою коренеплоду при виконанні основного процесу зчісування залишків, тобто при русі бича по поверхні головки коренеплоду (рис. 1).



**Рис. 1. Схема силовій взаємодії бича з головкою коренеплоду в процесі зчісування залишків гички**

В точці контакту  $K$  будуть діяти наступні сили:

$\bar{F}_g$  – відцентрова сила інерції, яка напрямлена вздовж радіуса  $OK$  обертання бича навколо осі  $O$ ;

$\bar{G}$  – сила ваги бича, яка напрямлена вертикально донизу;

$\bar{N}$  – нормальна реакція взаємодії бича з головкою коренеплоду, напрямлена вздовж нормалі  $\bar{n}$  до головки коренеплоду, проведеної крізь дане положення точки контакту;

$\bar{F}_{mp}$  – сила тертя, яка виникає при русі бича по головці коренеплоду, напрямлена в бік, протилежний напрямку вектора абсолютної швидкості точки  $M$  бича, яка співпадає з точкою контакту  $K$ ;

$\bar{Q}$  – сила зчісування залишків гички з поверхні головки коренеплоду, яка напрямлена в бік вектора абсолютної швидкості точки  $M$  бича.

Знайдемо значення зазначених сил. Для визначення відцентрової сили  $\bar{F}_g$  в будь-якій точці контакту  $K$  необхідно розглянути кінематику руху бича  $O_1C_1$  по головці коренеплоду після ударного контакту в точці  $K_1$ . Оскільки удар відбувається за дуже малий проміжок часу, то за момент удару бич не здійснює ніякого переміщення по головці коренеплоду. Тому за початкове положення бича на головці коренеплоду після удару можна вважати положення ударного контакту  $K_1$ .

Для більш точного дослідження руху бича по головці коренеплоду необхідно скласти диференціальні рівняння руху точки  $M$  по головці коренеплоду, оскільки при такому дослідженні враховуються сили, що викликають такий рух.

Слід відмітити, що основну роль у формуванні сили зчісування  $\bar{Q}$  відіграє відцентрова сила інерції  $\bar{F}_g$ , сила тяги  $\bar{P}$  та обертальний момент бича  $M_{об}$ . Саме завдяки дії цих сил відбувається притискання бича до головки коренеплоду і деформація згину бича. Дійсно, відразу після удару відцентрова сила інерції  $\bar{F}_g$  напрямлена вздовж бича і намагається випрямити бич вздовж радіуса  $\rho$ . Як би ця сила була відсутня, то під дією поступального руху очисника та обертального руху бича навколо осі  $O$  бич при контакті з головкою коренеплоду просто б відхилився на деякий кут в бік, протилежний обертальному руху, і без будь-якого зусилля просковзнув би по головці коренеплоду, не змінюючи своєї прямолінійної форми, оскільки підвіска  $O_1$  – шарнірна.

Отже під дією відцентрової сили  $\bar{F}_g$  при наїзді на головку коренеплоду бич залишається випрямленим вздовж радіуса  $\rho$ , а тому, внаслідок подальшого поступального і обертального рухів, бич проковзує по головці коренеплоду, зазнаючи при цьому певної деформації згину, яка створює зусилля зчісування залишків гички.

Величина відцентрової сили інерції  $\bar{F}_g$  в початковій точці контакту  $K_1$  (точка  $M_1$ ) дорівнює [6]

$$F_{g1} = m\omega^2 \cdot \rho, \quad (1)$$

де  $m$  – маса бича.

Визначимо відцентрову силу  $\bar{F}_g$  точки  $M$  в будь-якій точці  $K$  контакту бича з головкою коренеплоду. Дана сила буде дорівнювати

$$F_g = m\omega^2 \cdot O'K, \quad (2)$$

де  $O'K$  – відстань від точки  $K$  до точки  $O'$ .

Як видно з схеми рис. 1, дана відстань приблизно дорівнює

$$O'K \approx OK_1 - K_1K + OO', \quad (3)$$

де  $OK_1 = \rho$ .

Тоді, враховуючи, що  $OO' = V_{II} \cdot t$  та  $KK_1 \approx V_{II} \cdot t$  і (3), отримуємо:

$$O'K \approx \rho. \quad (4)$$

Таким чином відцентрова сила інерції  $\bar{F}_g$  в кожній точці контакту  $K$  наближено залишається постійною за величиною та напрямом і дорівнює

$$F_g \approx m\omega^2 \cdot \rho. \quad (5)$$

При цьому масу бича  $m$  вважаємо зосередженою на робочій частині бича.

Відцентрова сила інерції, яка виникає від обертання маси бича ближче до осі підвісу  $O_1$  викликає натяг бича і зрівноважується реакцією в шарнірі  $O_1$ .

Деформація згину бича виникає внаслідок притискання бича в точці контакту  $K$  силами інерції  $\bar{F}_g$  та ваги бича  $\bar{G}$  під дією тягової сили  $\bar{P}$  поступального руху очисника та обертального моменту бича  $M_{об}$ .

Сила деформації згину буде дорівнювати силі зчісування  $\bar{Q}$ . Отже сила  $\bar{P}$  поступального руху очисника та обертальний момент бича  $M_{об.}$  входять в складову сили  $\bar{Q}$  і тому вони на рис. 1 не зображені.

Сила тертя, як відомо, дорівнює

$$F_{mp.} = f \cdot N, \quad (6)$$

де  $f$  – коефіцієнт тертя поверхні бича по поверхні головки коренеплоду;  $N$  – нормальна реакція в точці контакту  $K$  бича з головкою коренеплоду.

Таким чином, диференціальне рівняння руху точки контакту  $K$  по головці коренеплоду в векторній формі буде мати такий вигляд:

$$m \bar{a} = \bar{F}_e + \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_{mp.} + \bar{Q}, \quad (7)$$

де  $\bar{a}$  – абсолютне прискорення руху точки контакту  $K$  по головці коренеплоду;  $m$  – маса бича.

Оскільки в даному випадку маємо плоску систему сил, що розташована в площині  $уOz$ , то диференціальне рівняння руху (7) зводиться до системи двох диференціальних рівнянь другого порядку наступного вигляду

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} &= F_{ey} + G_y + N_y + F_{mp.y} + Q_y, \\ m \ddot{z} &= F_{ez} + G_z + N_z + F_{mp.z} + Q_z, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

де  $F_{ey}, G_y, N_y, F_{mp.y}, Q_y$  – проекції векторів сил  $\bar{F}_e, \bar{G}, \bar{N}, \bar{F}_{mp.}, \bar{Q}$  на вісь  $Oy$  відповідно;  $F_{ez}, G_z, N_z, F_{mp.z}, Q_z$  – проекції векторів згаданих сил на вісь  $Oz$  відповідно.

Враховуючи значення проекцій векторів сил, що входять в систему диференціальних рівнянь (8), та вирази (5) і (6), згадана система набуває такого вигляду

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} &= -m\omega^2 \rho \sin \alpha + N \cos(y, \hat{N}) - fN \cos(x, \hat{V}) + Q \cos(x, \hat{V}), \\ m \ddot{z} &= -m\omega^2 \rho \cos \alpha - mg + N \cos(z, \hat{N}) - fN \cos(z, \hat{V}) + Q \cos(z, \hat{V}), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

де  $\cos(y, \hat{N}), \cos(z, \hat{N})$  – напрямні косинуси вектора сили  $\bar{N}$  до осей  $Oy$  і  $Oz$  відповідно;  $\cos(x, \hat{V}), \cos(z, \hat{V})$  – напрямні косинуси вектора швидкості  $\bar{V}$  руху точки контакту  $K$  по головці коренеплоду до осей  $Oy$  і  $Oz$  відповідно;  $x, z$  – проекції вектора швидкості  $\bar{V}$  на осі координат  $Oy$  та  $Oz$  відповідно.

З [2] відомо, що згадані напрямні косинуси дорівнюють

$$\cos(y, \hat{N}) = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{1}{\Delta f}; \quad \cos(z, \hat{N}) = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{1}{\Delta f}; \quad (10)$$

$$\cos(x, \hat{V}) = \frac{x}{V}; \quad \cos(z, \hat{V}) = \frac{z}{V},$$

де  $f(y, z) = 0$  – рівняння в'язі (поверхні, по якій рухається матеріальна точка);  $\Delta f$  – модуль градієнта функції  $f(y, z)$ ;  $V$  – модуль вектора швидкості точки.

Оскільки спочатку було прийнято, що головка коренеплоду має сферичну форму, то рівнянням в'язі є сфера, що має таке рівняння

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \quad (11)$$

де  $R$  – радіус сферичної головки коренеплоду.

Для площини  $yOz$   $x = 0$ , і тому рівняння сфери (45) переходить в рівняння кола

$$f(y, z) = y^2 + z^2 - R^2 = 0. \quad (12)$$

Згідно [2], модуль градієнта функції та модуль швидкості будуть дорівнювати

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}, \quad (13)$$

$$V = \sqrt{y^2 + z^2}. \quad (14)$$

Підставимо (10) в (9) та додамо до системи диференціальних рівнянь (9) рівняння в'язі (12), отримуємо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -m\omega^2 \rho \sin \alpha + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - fN \frac{\dot{x}}{V} + Q \frac{\dot{x}}{V}, \\ m\ddot{z} &= -m\omega^2 \rho \cos \alpha - mg + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} - fN \frac{\dot{z}}{V} + Q \frac{\dot{z}}{V}, \\ y^2 + z^2 - R^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Обчислимо частинні похідні та градієнт функції, які входять в систему рівнянь (15).  
Матимемо:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z. \quad (16)$$

Тоді, згідно (13)

$$\Delta f = \sqrt{(2y)^2 + (2z)^2} = 2R. \quad (17)$$

Підставимо вирази (16), (17) в (15). Тоді система диференціальних рівнянь (15) набуває такого вигляду

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -m\omega^2 \rho \sin \alpha + \frac{y}{R} \cdot N - fN \frac{\dot{x}}{V} + Q \frac{\dot{x}}{V}, \\ m\ddot{z} &= -m\omega^2 \rho \cos \alpha - mg + \frac{z}{R} \cdot N - fN \frac{\dot{z}}{V} + Q \frac{\dot{z}}{V}, \\ y^2 + z^2 - R^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Система рівнянь (18) є системою трьох рівнянь з трьома невідомими  $y$ ,  $z$  і  $N$ . Тому вона є визначеною і має єдиний розв'язок.

Виключимо з отриманої системи рівнянь (18) невідомі величини  $N$  та  $z$ , звівши таким чином дану систему до одного диференціального рівняння з однією невідомою функцією  $y(t)$ . Для цього слід продиференціювати два рази по  $t$  рівняння в'язі (12). Якщо продиференціювати дане рівняння один раз, то отримуємо

$$2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0, \quad (19)$$

звідки знаходимо

$$y\ddot{x} + z\ddot{z} = 0. \quad (20)$$

Якщо продиференціювати рівняння (20), то матимемо

$$y\ddot{\dot{x}} + \dot{y}^2 + z\ddot{\dot{z}} + \dot{z}^2 = 0, \quad (21)$$

або

$$(y\ddot{\dot{x}} + z\ddot{\dot{z}}) + (\dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 0. \quad (22)$$

Оскільки  $\dot{y}^2 + \dot{z}^2 = V^2$ , то отримаємо

$$V^2 = -(y\ddot{\dot{x}} + z\ddot{\dot{z}}). \quad (23)$$

Помножимо перше рівняння системи (18) на  $y$ , друге на  $z$  і почленно додамо їх, отримуємо

$$m(y\ddot{\dot{x}} + z\ddot{\dot{z}}) = -(m\omega^2 \rho \cdot y \sin \alpha + m\omega^2 \rho \cdot z \cos \alpha) - mgz + \\ + \frac{N}{R}(y^2 + z^2) - f \frac{N}{V}(y\dot{x} + z\dot{z}) + \frac{Q}{V}(y\dot{x} + z\dot{z}), \quad (24)$$

звідки, враховуючи вирази (20) та (23), матимемо

$$-mV^2 = -m\omega^2 \rho (y \cdot \sin \alpha + z \cdot \cos \alpha) - mgz + RN. \quad (25)$$

З виразу (25) знаходимо нормальну реакцію  $N$ . Вона дорівнює

$$N = \frac{1}{R} [m\omega^2 \rho (y \cdot \sin \alpha + z \cdot \cos \alpha) + mgz - mV^2]. \quad (26)$$

Зробимо подальші перетворення. З виразу (20) отримуємо

$$\ddot{z} = -\frac{y\dot{x}}{z}, \quad (27)$$

тоді

$$\dot{z}^2 = \frac{(y\dot{x})^2}{z^2}, \quad (28)$$

або

$$\dot{z}^2 = \frac{(y\dot{x})^2}{R^2 - y^2}. \quad (29)$$

Таким чином для величини швидкості руху  $V$  можемо отримати такий вираз

$$V^2 = \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{y}^2 + \frac{(y\dot{x})^2}{R^2 - y^2}. \quad (30)$$

Підставляючи вираз (26) в перше рівняння системи (18), отримуємо

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 \rho \cdot \sin \alpha + \left( \frac{y}{R} - f \frac{\dot{x}}{V} \right) [m\omega^2 \rho (y \sin \alpha + z \cos \alpha) + \\ + mgz - mV^2] \frac{1}{R} + Q \frac{\dot{x}}{V}. \quad (31)$$

Оскільки  $z = \sqrt{R^2 - y^2}$ , то, враховуючи вираз (30), остаточно матимемо

$$m\ddot{z} = -m\omega^2 \rho \cdot \sin \alpha + \left( \frac{y}{R} - \frac{f \cdot \sqrt{R^2 - y^2}}{\sqrt{(R^2 - y^2)^2 + (y\dot{z})^2}} \right) \times \\ \times \left\{ m\omega^2 \rho \left( y \cdot \sin \alpha + \sqrt{R^2 - y^2} \cdot \cos \alpha \right) + mg\sqrt{R^2 - y^2} - \right. \\ \left. - \frac{m \left[ (R^2 - y^2)^2 + (y\dot{z})^2 \right]}{R^2 - y^2} \right\} \frac{1}{R} + Q \cdot \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{\sqrt{(R^2 - y^2)^2 + (y\dot{z})^2}}. \quad (32)$$

Таким чином, отримано диференціальне рівняння другого порядку (32), в якому невідома лише одна функція  $y$ , тобто отримано диференціальне рівняння в так званій нормальній формі, коли вища похідна виражається через нижчі похідні і шукану функцію [4].

Невідому силу  $Q$ , що входить в рівняння (32), потрібно знаходити з умов деформації згину бича.

Тому для розв'язування даного рівняння потрібно спочатку знайти силу  $Q$ , або виразити її через відомі величини.

Оскільки рівняння (32) є нелінійним, то його можна розв'язати лише чисельними методами на персональному комп'ютері при заданих початкових умовах, що буде предметом наступного дослідження.

### Висновки

1. Отримане нове диференційне рівняння другого порядку в нормальній формі, яке описує процес динамічної взаємодії гнучкої очисної лопаті з головками коренеплодів цукрових буряків.

2. Отримане диференційне рівняння створило теоретичні передумови для побудови математичної моделі динамічної взаємодії, яка дозволить встановити вплив конструктивних параметрів на показники якості процесу очищення головок коренеплодів цукрових буряків.

### Література

1. Булгаков В.М., Головач І.В., Уточнена теорія очистки головок коренеплодів на корені гнучкою лопаттю .– Збірник наукових праць Національного аграрного університету “Механізація сільськогосподарського виробництва”, Том XIII, Київ, 2002. – с. 11 – 42.
2. Василенко П.М. Введение в земледельческую механику. К.: Сільгоспосвіта, 1996. – 252 с.
3. Булгаков В.М. Теорія бурякозбиральних машин. Монографія. – Київ: Видавничий центр НАУ, 2005. – 245 с.
4. Погорельий Л. В., Татьяна Н. В. Свеклоуборочные машины: история, конструкция, теория, прогноз. – К.: Феникс, 2004. – 232 с.
5. Фильчаков П. Ф. Справочник по высшей математике / П. Ф. Фильчаков – К.: Наукова думка, 1974 – 743 с.
6. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебн. для высш. технич. заведений / С. М. Тарг – М.: Высш. шк., 1986. – 416 с.