УДК 517.968

РОЗРОБКА АЛГОРИТМУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПРОГНОЗУ ПОТРЕБИ В СІЛЬСЬКОСПОДАРСЬКІЙ ТЕХНІЦІ

Паламарчук І.П

Вінницький національний аграрний університет

Головач І.В

Яременко В.В

Національний університет біоресурсів і природокористування

Івановс Семенс

Латвійський сільськогосподарський університет

Разработаны численные алгоритмы решения системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра I–го рода с неизвестной нижней границей интегрирования, которые возникают в задаче многовариантного прогноза развития машинно-тракторного парка.

Developed numerical algorithms for solving systems of nonlinear Volterra integral equations of the second kind of I with an unknown lower limit of integration that arise in the problem of multivariate prediction of machine-tractor park.

Постановка проблем

Задача оновлення машинно–тракторного парку є актуальною, оскільки він налічує велику кількість тракторів і сільськогосподарських машин, які давно відпрацювали свій амортизаційний термін.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

В багатьох наукових працях задачі оновлення техніки та підрахунку її потреби для виконання необхідного об'єму робіт розглядалися окремо. Як правило, для вирішення згаданих задач застосовувалися лінійні статичні моделі та методи лінійного програмування. В роботі [1] запропонована динамічна інтегральна модель, яка дає можливість задачі оновлення та потреби в техніці об'єднати в одній моделі. Такий підхід дозволяє розглянути машинно–тракторний парк як систему, що розвивається. А це дає можливість для дослідження застосувати сучасні методи теорії динамічних систем.

В згаданій роботі [1] запропонована динамічна модель потреби та оновлення техніки в сільському господарстві на базі системи нелінійних інтегральних рівнянь Вольтера 1 роду та розглянута задача багатоваріантного прогнозу розвитку машинно–тракторного парку в цій моделі.

Постановка завдання

Основним завданням даного дослідження є дослідження теоретичних передумов математичної моделі багатоваріантного розвитку машинно–тракторного парку.

Виклад основного матеріалу дослідження

Задача багатоваріантного прогнозу розвитку машинно–тракторного парку описується наступною системою нелінійних інтегральних рівнянь Вольтера 1 роду:

$$\begin{cases} \int\limits_{z(t)}^{t} \beta_i(\tau,t) X_i(\tau) d\tau = f_i(t), \quad i=\overline{1,n}, & (1) \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{z(t)}^{t} q_k(\tau) X_k(\tau) d\tau = p(t), & (2) \end{cases}$$

відносно невідомих $z(t), \quad X_i(t), \quad i=\overline{1,n}, \quad t\in[t_0,T], \quad t_0<T<\infty$.

Змістовне значення функцій, що входять в дану систему рівнянь, приведено в [1].

В роботі [2] доведено, що систему (1) – (2) можна завжди звести до системи нелінійних інтегральних рівнянь Вольтера ІІ-го роду:

$$\begin{cases} X_i(t) = \frac{1}{|A|} \int\limits_{z(t)}^{t} \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ji}(z(t),t) \cdot b_{jj}(\tau,t,z(t)) X_j(\tau) d\tau + \\ \qquad + \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ji}(z(t),t) r_j(z(t),t), \quad i=\overline{1,n}, \end{cases} \qquad (3)$$

$$p(t) = \int\limits_{z(t)}^{t} \sum\limits_{j=1}^{n} q_j(\tau) X_j(\tau) d\tau. \qquad (4)$$

Всі функції, що входять в систему рівнянь (3)–(4), визначені в роботі [2]. В зазначеній роботі проведено теоретичне дослідження системи рівнянь (3)–(4). Доведена теорема існування і єдності розв'язку даної системи рівнянь, а отже і системи рівнянь (1)–(2).

Конструктивний спосіб доведення теореми дозволяє побудувати ефективний ітераційний алгоритм розв'язування даної системи нелінійних інтегральних рівнянь.

В даній роботі застосовується метод простої ітерації, який широко використовується при розв'язуванні інтегральних рівнянь Вольтера і інших видів операторних рівнянь [5].

Схема методу простої ітерації приведена в конструктивних доведеннях теорем існування і єдності розв'язків систем інтегральних рівнянь Вольтера [3], а також в доведенні теореми в роботі [2]. Для розв'язування системи рівнянь (3)–(4) використано алгоритм, який розроблений на базі алгоритмів, приведених в [3].

Введемо позначення:

$$\frac{1}{|A|} A_{ji}(z(t),t)\, b_{jj}(\tau,t,z(t)) = K_{ji}(\tau,t,z(t)), \quad i,j=\overline{1,n};$$

$$F_i(z(t),t) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}(z(t),t)\, r_j(z(t),t).$$

Тоді система рівнянь (3)–(4) набуде вигляду

$$\begin{cases} X_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{z(t)}^{t} K_{ji}(\tau,t,z(t)) X_j(\tau) d\tau + F_i(z(t),t), \quad i=\overline{1,n}, \qquad (5) \end{cases}$$

$$p(t)=\int_{z(t)}^{t}\sum_{j=1}^{n}q_j(\tau)X_j(\tau)d\tau. \qquad (6)$$

Система рівнянь (5)–(6) розв'язується поточково, з неперервним поповненням інтервалу задання функцій $X_i^0(\tau)$ на передісторії. Для цього розділимо інтервал $[\tau_0,T]$ N рівновіддаленими точками $t_s=t_0+\dfrac{s(T-\tau_0)}{N}$, $s=\overline{1,N}$, з кроком $h=\dfrac{T-\tau_0}{N}$. Нехай M, $M<N$ – номер найбільшого вузла t_M, що належить передісторії $[\tau_0,t_0]$. Тоді розв'язок рівняння (6) на інтервалі $[t_0,T]$ відповідає розв'язку його дискретного аналога в вузлах сітки t_s, $s=\overline{M+1,N}$.

Подамо рівняння (6) у вигляді

$$\int_{z(t)}^{t_s}\sum_{j=1}^{n}q_j(\tau)X_j(\tau)d\tau=p(t)-\int_{t_s}^{t}\sum_{j=1}^{n}q_j(\tau)X_j(\tau)d\tau. \qquad (7)$$

Алгоритм A_1 розв'язування системи рівнянь (6)–(7) складається з наступних етапів:

1) перевірка узгодженості рівнянь (5)–(6) при $s=M$;

2) $s=s+1$;

3) $k=0$, вибір нульового наближення $X_i^0(t_s)$, $i=\overline{1,n}$;

4) $k=k+1$;

5) обчислення $z^{k+1}(t_s)$ з рівняння (7) за допомогою алгоритму A_2, приведеного нижче;

6) визначення $(k+1)$-го наближення $X_i^{k+1}(t_s)$ з рівняння (5) за допомогою алгоритму A_3, приведеного нижче;

7) якщо $\max\limits_{1\le i\le n}\left|X_i^{k+1}(t_s)-X_i^k(t_s)\right|>\varepsilon$, де ε – дана константа, то відбувається повернення на четвертий етап;

8) якщо $s<N$,то відбувається повернення на другий етап.

Опис алгоритму A_2.

Обчислення $z^{k+1}(t_s)$ проводиться з рівняння

$$\int_{z^{k+1}(t_s)}^{t_s}\sum_{j=1}^{n}q_j(\tau)X_j^k(\tau)d\tau=p(t_s).$$

Алгоритм A_2 складається з наступних етапів.

1.Послідовне визначення значень функції $\sum\limits_{j=1}^{n}q_j(t_r)X_j^k(t_r)$ в вузлах сітки t_r, $r=s,\quad s-1,\quad s-2,\dots,$ і, починаючи з $r=s-1$, накопичення суми

$$S_l = \sum_{r=s-1}^{l} \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j(t_{r+1}) X_j^k(t_{r+1}) + q_j(t_r) X_j^k(t_r)}{2} \cdot h,$$

до тих пір, поки при деякому $m < s$ не виконається умова

$$S_{m-1} < p(t_s) < S_m.$$

Тоді t_m дає значення розв'язку $z^{k+1}(t_s)$ з недостачею, а t_{m+1} з надлишком.

2.Уточнення розв'язку на інтервалі $[t_m, \quad t_{m+1}]$ через інтегрування інтерполюючої функції $\sum_{j=1}^{n} q_j(\tau) X_j^k(\tau)$ за формулою, приведеною в [3].

Опис алгоритму A_3.

Визначення $X_i^{k+1}(t_s)$ здійснюється з системи рівнянь:

$$X_i^{k+1}(t_s) - \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{s-1}}^{t_s} K_{ji}\left(\tau, t_s, z^{k+1}(t_s)\right) X_j(\tau) X_j^{k+1}(\tau) d\tau =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{z^{k+1}(t_s)}^{t_{s-1}} K_{ji}\left(\tau, t_s, z^{k+1}(t_s)\right) X_j^0 d\tau + F_i\left(t_s, z^{k+1}(t_s)\right), \quad i = \overline{1, n}, \tag{8}$$

Алгоритм A_3 складається з наступних етапів:

1. Знаходимо значення $K_{ji}\left(\tau, t_s, z^{k+1}(t_s)\right)$, $F_i\left(t_s, z^{k+1}(t_s)\right)$, $X_j^0(\tau)$ в вузлах сітки t_r.

2. Застосовуючи до (8) квадратурну формулу трапеції, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$D\overline{X} = \overline{b}, \tag{9}$$

де

$$X_i = X_i(t_s), \quad D = \{d_{ji}\}_{j,i=1}^{n},$$

$$d_{ji}(t_s) = -\frac{h}{2} K_{ji}\left(t_s, t_s, z^{k+1}(t_s)\right),$$

$$d_{ii}(t_s) = 1 - \frac{h}{2} K_{ii}\left(t_s, t_s, z^{k+1}(t_s)\right),$$

$$b_i(t_s) = F_i\left(t_s, z^{k+1}(t_s)\right) + \sum_{j=1}^{n} \left\{ \left[t_{n_r} - z^{k+1}(t_s) + \frac{h}{2} \right] \times \right.$$
$$\left. \times K_{ji}\left(t_{n_r}, t_s, z^{k+1}(t_s)\right) X(t_{n_r}) + h \sum_{l=n_r+1}^{s-1} K_{ji}\left(t_l, t_s, z^{k+1}(t_s)\right) X(t_l) \right\},$$

$$n_r = \left[\frac{z^{k+1}(t_s) - \tau_0}{h} \right] + 1, \quad i, j = \overline{1, n},$$

$[\cdot]$ – ціла частина числа.

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь (9) можна розв'язати будь–яким відомим методом, наприклад методом Гаусса.

В [3] показано, що алгоритми типу A_3 є асимптотично $\left(при \quad h_\tau \to 0\right)$ оптимальними по точності алгоритмами розв'язування подібних систем рівнянь.

Висновки

1. Таким чином, приведені чисельні алгоритми дозволяють знайти невідомі функції, що входять в систему нелінійних інтегральних рівнянь Вольтера II-го роду.

2. Отримані чисельні алгоритми дають можливість в подальшому побудувати математичну модель багатоваріантного прогнозу розвитку машинно–тракторного парку для конкретного регіону.

Література

1. *Головач І. В. Інтегральна динамічна модель потреби та оновлення техніки в сільському господарстві. // Збірник наукових праць Національного аграрного університету "Механізація сільськогосподарського виробництва" . Том V. "Сучасні проблеми механізації сільського господарства". – Київ : НАУ, 1999. – с. 290–293.*
2. *Головач І. В. Дослідження задачі прогнозу в інтегральній моделі потреби в техніці та оновлення машинно–тракторного парку. // Збірник наукових праць Національного аграрного університету "Механізація сільськогосподарського виробництва", Том VI "Теорія і розрахунок сільськогосподарських машин". – Київ : НАУ, 1999. – с. 208–213.*
3. *Яценко Ю.П. Интегральные модели систем с управляемой памятью. – Киев: Наукова думка, 1991. – 218 с.*
4. *Фильчаков П. Ф. Справочник по высшей математике / П. Ф. Фильчаков – К.: Наукова думка, 1974 – 743 с.*
5. *Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, том 1 (2-е изд.). М.: Физматлит, 1962.*