Кузьо І. В.

Пукач П. Я.

Національний університет “Львівська політехніка”

УДК 534.1+62-5

НЕЛІНІЙНІ ЗГИННІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩ, ЯКІ ОБЕРТАЮТЬСЯ НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ

Изложена методика исследования изгибистых нелинейных колебаний одномерных упругих сред, которые вращаются вокруг оси с постоянной угловой скоростью. Методика базируется на построении решения соответствующих краевых задач. Базой для получения последнего служат сочетание принципа одночастотности колебаний в нелинейных системах с распределенными параметрами, концепции волнового движения и асимптотических методов нелинейной механики. Приведенные рассуждения позволяют в совокупности получить соотношения для описания основных характеристик динамического процесса.

Methodology of research of bend nonlinear vibrations of unidimensional resilient environments, that pivot with a permanent angulator, is expounded. Methodology is based on the construction of solution of corresponding boundary problems. A base for a receipt last combination to principle of single-frequency of the vibrations in nonlinear systems with the up-diffused parameters, conception of wave motion and asymptotic methods of nonlinear mechanics. The resulted reasonings allow in an aggregate to get correlations for the specification of basic parameters of dynamic process.

Актуальність проблеми та огляд основних результатів. Різні аспекти нелінійних коливальних процесів пружних систем ґрунтовно розглядались багатьма авторами, зокрема, у роботах [1-6] та ін. Однак таке важливе прикладне питання, як вплив швидкості поздовжнього чи обертального руху на динаміку процесу у них не знайшло належного висвітлення. Йдеться в першу чергу про згинні чи крутильні коливання бурильних колон, валів та ін. Деформації, зумовлені обертанням вказаних тіл, можуть привести не тільки до зміни кількісних характеристик коливного процесу, але й впливають на його стійкість. З огляду на вказане дослідження впливу швидкості обертання та деформації гнучких елементів на коливання останніх є актуальною інженерно – технічною задачею.

Метою роботи є розроблення загального підходу, який дає можливість дослідити вплив кутової швидкості обертання, нелінійно пружних характеристик середовищ на їх згинні коливання.

Постановка задачі. Дослідження малих нелінійних згинних коливань одновимірних середовищ з урахуванням поздовжньої сили стиску (розтягу) та кутової швидкості обертання пов'язане із побудовою та дослідженням розв'язку диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\delta u= =\varepsilon f\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right). \qquad (1)$$

У наведеному рівнянні $u(x,t)$- поперечне переміщення перерізу середовища з координатою x в довільний момент часу t; α,β,δ - сталі, які виражаються через геометричні і фізико-механічні параметри середовища, $\varepsilon f\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)$- функція, яка описує нелінійно пружні, дисипативні та іншої природи сили системи, ε - малий параметр, який вказує на їх малу величину у порівнянні із лінійною складовою відновлювальної сили. Зокрема, для бурильної колони, яка обертається із кутовою швидкістю Ω за умови, що швидкістю руху рідини для промивання колони можна знехтувати, маємо $\beta = \frac{\pm F}{S\rho}$ ($+F$ - зусилля стиску, чи відповідно $-F$ розтягу, ρ - маса одиниці об'єму труби разом із рідиною для промивання, S - площа її поперечного перерізу), $\delta = -\Omega^2$, $\alpha^2 = \frac{ES-F}{S^2\rho}\cdot I$ (EI - згинна жорсткість колони). Для рівняння (1) розглядаються квазіоднорідні крайові умови

$$u(x,t)\Big|_{x=j} = \varepsilon f_j\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\Bigg|_{x=j},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Bigg|_{x=j} = \varepsilon g_j\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\Bigg|_{x=j}, \ j = 0, l, \qquad (2)$$

в яких праві частини є відомими гладкими функціями. Дослідження полягають у побудові розв'язку крайової задачі (1), (2).

Методика розв'язування. Враховуючи, що праві частини співвідношень (1) та (2) пропорційні до малого параметра ε, для побудови розв'язку сформульованої вище крайової задачі використаємо загальні ідеї методів збурень [7, 8]. Відповідно до [8] розглянемо спочатку незбурену ($\varepsilon = 0$) крайову задачу, тобто побудуємо розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + \beta \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \delta u_0 = 0 \qquad (3)$$

за однорідних крайових умов

$$u_0(x,t)\Big|_{x=j} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x,t)\Bigg|_{x=j} = 0. \qquad (4)$$

Покажемо, що одночастотний динамічний процес у цьому випадку можна трактувати як накладання двох хвиль (прямої та відбитої) однакових довжин та частот, тобто

$$u_0(x,t) = C_1\cos(\kappa x + \omega t + \varphi) + \\ + C_2\cos(\kappa x - \omega t + \psi), \qquad (5)$$

де $C_1, C_2, \kappa, \omega, \varphi, \psi$ - сталі, зміст і вигляд котрих буде встановлено нижче.

Зауважимо, що представлення (5) не суперечить загальній ідеї Ейлера [9] побудови розв'язків рівнянь гіперболічного типу і воно [10-12] в останні роки набуло широкого застосування для дослідження динамічних процесів поздовжньо рухомих середовищ малої згинної жорсткості. До того ж для реальних систем таке представлення має обґрунтовану фізичну інтерпретацію.

Наведене представлення (5) задовольнятиме рівняння (3), якщо хвильове число κ та частота хвильового процесу ω зв'язані дисперсійним співвідношенням

$$\omega^2 - \alpha^2\kappa^4 + \beta\kappa^2 - \delta = 0. \qquad (6)$$

Для визначення хвильового числа κ, зв'язку між C_1 і C_2 та початковими фазами вказаних хвиль (параметрів φ і ψ) із крайових умов (4) при $x = 0$ отримуємо рівняння

$$C_1\cos(\omega t + \varphi) + C_2\cos(-\omega t + \psi) = 0. \qquad (7)$$

Рівняння (7) буде виконуватись для довільного значення часу t, якщо $\varphi + \psi = k\pi$, ($k = 1,2,\dots$) та $C_1 = -C_2 = a$. Нижче, не зменшуючи загальності, вважатимемо що $\psi = -\varphi$, а параметр a називатимемо амплітудним параметром динамічного процесу.

Подібним чином, задовольняючи крайові умови при $x = l$, із урахуванням отриманого вище, маємо

$$\cos(\kappa l + \omega t + \varphi) - \cos(\kappa l - \omega t - \varphi) = 0. \qquad (8)$$

Співвідношення (8) визначає хвильове число $\kappa = \frac{k\pi}{l}$ та дає змогу з врахуванням (6) визначити власну частоту динамічного процесу незбуреної системи у вигляді

$$\omega = \sqrt{\alpha^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - \beta\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \delta}. \qquad (9)$$

Зауваження 1. Враховуючи властивості лінійних систем, загальний (багаточастотний) коливний процес лінійної моделі системи можна описати у вигляді

$$u(x,t) = \sum_k a_k\left[\cos\left(\frac{k\pi x}{l} + \sqrt{\alpha^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - \beta\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \delta}\, t + \varphi_k\right) - \right. \\ \left. -\cos\left(\frac{k\pi x}{l} - \sqrt{\alpha^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - \beta\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \delta}\, t - \varphi_k\right)\right],$$

де параметри a_k, φ_k знаходяться із початкових умов (5).

Зауваження 2. Питання існування та єдиності розв'язків задач, подібних до розглядуваного типу збурених задач (1), (2), були предметом досліджень в роботах [13, 14]. Тому нижче вважатимемо, що функції

$f\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)$, $f_j\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)$, $g_j\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)$, $j=0,l$ володіють усіма необхідними умовами, зокрема, є достатньо гладкими функціями .

Отримані результати є також базою для дослідження впливу малих збурень на динаміку процесу. Для цього, розвиваючи ідею асимптотичного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь [8], його розв'язок у формі, близькій до k- ї форми незбуреного рівняння, будемо шукати у вигляді

$$u(x,t)=a(\cos\psi_1-\cos\psi_2)+\sum_i \varepsilon^i U_i(a,x,\gamma), \quad (10)$$

де $\psi_1=\kappa x+\omega t+\varphi$, $\psi_2=\kappa x-\omega t-\varphi$, $U_i(a,x,\gamma)$ - 2π- періодичні за змінною $\gamma=\omega t+\varphi$ функції, які задовольняють крайові умови, що узгоджуються із (3), тобто

$$U_i(a,x,\gamma)\big|_{x=j}=\bar f_i(a,x,\gamma)\big|_{x=j},$$

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2}(a,x,\gamma)\bigg|_{x=j}=\bar g_i(a,x,\gamma)\big|_{x=j}. \quad (11)$$

Функції $U_i(a,x,\gamma)$ у (11) виражаються через $u_0(a,\psi_1,\psi_2)$, $U_1(a,x,\gamma)$, …, $U_{i-1}(a,x,\gamma)$ та їх похідні. До того ж параметри a і φ у асимптотичному представленні (10) є вже змінними в часі величинами і як функції цієї незалежної змінної величини визначаються диференціальними рівняннями

$$a_t=\varepsilon A_1(a)+\varepsilon^2 A_2(a)+...,$$

$$\varphi_t=\varepsilon B_1(a)+\varepsilon^2 B_2(a)+.... \quad (12)$$

Праві частини вказаних диференціальних рівнянь (12), тобто функції $A_1(a),B_1(a)$, $A_2(a),B_2(a)$, визначаються так, щоб асимптотичне представлення (10) задовольняло з необхідною точністю вихідне рівняння (1) та крайові умови (2), якщо у ці співвідношення замість a і φ підставити функції незалежних змінних. Із останніх двох залежностей (12) випливає, що

$$\psi_{1t}=\omega+\varepsilon B_1(a)+\varepsilon^2 B_2(a)+...,$$

$$\psi_{2t}=-\left(\omega+\varepsilon B_1(a)+\varepsilon^2 B_2(a)+...\right). \quad (13)$$

При дослідженні збуреного рівняння (1) будемо розглядати тільки перше його наближення. Друге та наступні знаходяться відповідно до наведеної нижче схеми з тією лише різницею, що зростає громіздкість викладок проміжних результатів. Шляхом диференціювання залежності (10) за змінними x і t із урахуванням (12), (13), отримуємо

$$u_{tt}(x,t)=a\omega^2(-\cos\psi_1+\cos\psi_2)+$$
$$+\varepsilon\left[-2\omega A_1(a)(\sin\psi_1-\sin\psi_2)-2a\omega B_1(a)\times\right.$$
$$\left.\times(\cos\psi_1-\cos\psi_2)+\omega^2\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial\gamma^2}\right)\right]+\varepsilon^2...,$$

$$u_{xx}(x,t)=-a\kappa^2(\cos\psi_1-\cos\psi_2)+$$
$$+\varepsilon\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\varepsilon^2..., \quad (14)$$

$$u_{xxxx}(x,t)=a\kappa^4(\cos\psi_1-\cos\psi_2)+\varepsilon\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4}+\varepsilon^3.$$

Співвідношення (11) буде розв'язком диференціального рівняння (1), якщо підставити у праву і ліву його частини замість функції $u(x,t)$ та її похідних вирази (10) і (14), а коефіцієнти в отриманій залежності при однакових степенях ε правої і лівої його частин будуть однаковими. Останнє міркування є базою для знаходження зв'язку між невідомими функціями $U_1(a,x,\gamma)$, та $A_1(a),B_1(a)$. Зокрема, одержимо

$$L(U_1)=\frac{\partial^2 U_1}{\partial\gamma^2}\omega^2+\alpha^2\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4}+\beta\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\delta U_1=$$
$$=\bar f_1(a,\psi_1,\psi_2)+2\omega A_1(a)(\sin\psi_1-\sin\psi_2)+$$
$$+2a\omega B_1(a)(\cos\psi_1-\cos\psi_2). \quad (15)$$

Розв'язок неоднорідної крайової задачі (15), (11) шукаємо у вигляді суми

$$U_1(a,x,\gamma)=V_1(a,x,\gamma)+W_1(a,x,\gamma), \quad (16)$$

у котрій функція $W_1(a,x,\gamma)$ є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{\partial^4 W_1(a,x,\gamma)}{\partial x^4}=0 \quad (17)$$

за крайових умов

$$W_1(a,x,\gamma)\big|_{x=j}=\bar f_{1j}(a,x,\gamma)\big|_{x=j},$$

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2}(a,x,\gamma)\bigg|_{x=j}=\bar g_{1j}(a,x,\gamma)\big|_{x=j} \quad (18)$$

Легко переконатись, що функція $W_1(a,x,\gamma)$, яка задовольняє (17) та (18), має вигляд:

$$W_1(a,x,\gamma)=C_0(a,\gamma)+C_1(a,\gamma)x+C_2(a,\gamma)x^2+$$
$$+C_3(a,\gamma)x^3\,, \qquad (19)$$

де

$$C_0(a,\gamma)=\bar{f}_{10}(a,x,\gamma)\Big|_{x=0},\; C_2(a,\gamma)=\bar{f}_{10}(a,x,\gamma)\Big|_{x=0},$$

$$C_3(a,\gamma)=\frac{1}{6l}\left[\bar{g}_{1l}(a,x,\gamma)\Big|_{x=l}-2\bar{f}_{10}(a,x,\gamma)\Big|_{x=0}\right],$$

$$C_1(a,\gamma)=\frac{1}{l}\Big[\bar{g}_{1l}(a,x,\gamma)\Big|_{x=l}-\bar{f}_{10}(a,x,\gamma)\Big|_{x=0}-$$
$$-l^2\bar{f}_{10}(a,x,\gamma)\Big|_{x=0}-\frac{l^2}{6}\left(\bar{g}_{1l}(a,x,\gamma)\Big|_{x=l}-\bar{f}_{10}(a,x,\gamma)\Big|_{x=0}\right)\Big].$$

Тоді, враховуючи (19), функція $V_1(a,x,\gamma)$ повинна бути розв'язком однорідної крайової задачі

$$L(V_1)=\hat{f}_1(a,x,\gamma)+2\omega A_1(a)(\sin\psi_1+\sin\psi_2)+$$
$$+2a\omega B_1(a)(\cos\psi_1-\cos\psi_2), \qquad (20)$$

$$V_1(a,x,\gamma)\Big|_{x=j}=0, \qquad \frac{\partial^2 V_1(a,x,\gamma)}{\partial x^2}\Bigg|_{x=j}=0,$$

де

$$\hat{f}_1(a,x,\gamma)=\bar{f}_1(a,x,\gamma)-\frac{\partial^2 W_1}{\partial\gamma^2}\omega^2+$$
$$+\beta\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2}+\delta W_1.$$

Отримані вище співвідношення є базовими для знаходження невідомих функцій, які описують закони зміни основних параметрів, що визначають динамічний процес, тобто функцій $A_1(a)$, $B_1(a)$. Для цього накладемо на періодичну по γ функцію $V_1(a,x,\gamma)$ у формулі (16) додаткову умову: її розвинення не містить першої гармоніки γ. Вказана властивість буде справджуватися, якщо виконуються співвідношення

$$\int_0^{2\pi}V_1(a,x,\gamma)\cos\gamma\,d\gamma=0\,,\;\int_0^{2\pi}V_1(a,x,\gamma)\sin\gamma\,d\gamma=0\,.$$

Із фізичних міркувань вказані умови еквівалентні наступному: амплітуда згинних коливань середовища є у два рази більшою за головну частину амплітуди прямої чи відбитої хвилі. Одночасно ці умови дозволяють знайти із рівняння (20) невідомі функції $A_1(a)$ та $B_1(a)$ наступним чином:

$$A_1(a)=\frac{1}{4\pi\omega l}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}\hat{f}_1(a,x,\gamma)\sin\kappa x\cos\gamma\,dxd\gamma\,,$$

$$B_1(a)=\frac{1}{4\pi\omega l\,a}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}\hat{f}_1(a,x,\gamma)\sin\kappa x\sin\gamma\,dxd\gamma\,.$$

Із урахуванням отриманих рівностей шляхом представлення лівої частини рівняння (20) та невідомої функції $V_1(a,x,\gamma)$ у ряди

$$\hat{f}_1(a,x,\gamma)=\sum_{m=1,n=2}\hat{f}_{1mn}(a)\sin m\kappa x\exp(in\gamma)\,,$$

$$V_1(a,x,\gamma)=\sum_{m=1,n=2}V_{1mn}(a)\sin m\kappa x\exp(in\gamma)$$

після нескладних обчислень отримуємо невідомі коефіцієнти $V_{1mn}(a)$ у наступному вигляді:

$$V_{1mn}(a)=\frac{\hat{f}_{1mn}(a)}{\alpha^2(m\kappa)^4-\beta(m\kappa)^2-n^2\omega^2+\delta}\,,$$

$$\alpha^2(m\kappa)^4-\beta(m\kappa)^2-n^2\omega^2+\delta\neq 0\,,$$

де

$$\hat{f}_{1mn}(a)=\frac{1}{\pi l}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}\hat{f}_1(a,x,\gamma)\sin m\kappa x\times$$
$$\times\exp(-in\gamma)dxd\gamma\,.$$

Нижче на рис. 1 та на рис. 2 представлено відповідно залежності критичних значень кутової швидкості ω^* та сили F^* (за яких проходить зрив коливань) від параметрів системи.

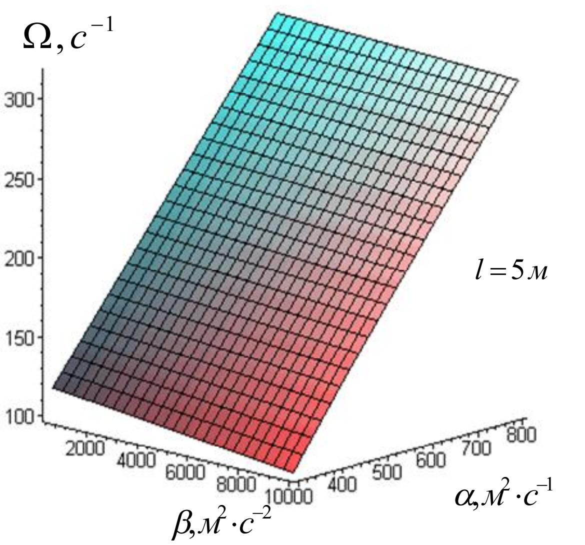

Рис. 1. Залежність від параметрів системи критичних значень кутової швидкості обертання Ω колони для буріння, за яких проходить зрив коливань

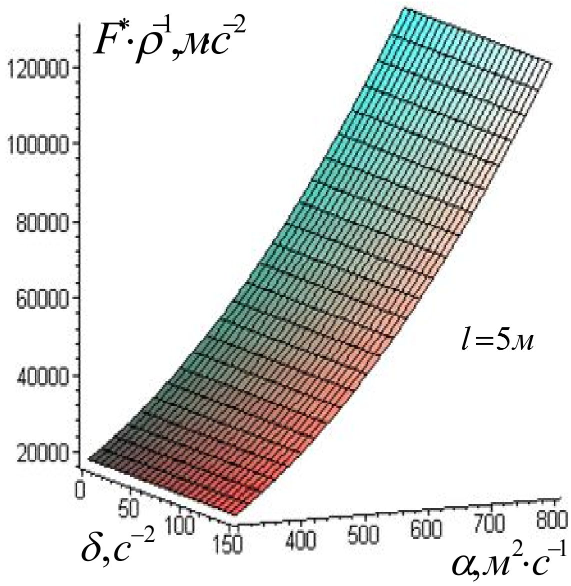

Рис. 2. Залежність від параметрів системи критичних значень стискаючої сили, за яких проходить зрив коливань

Висновки. Отримані результати показують: а) нехтування кутовою швидкістю обертання бурової колони може привести до зміни як кількісних, так і якісних характеристик її коливань; б) критична стискаюча сила у більшій мірі залежить від жорсткості колони, ніж від кутової швидкості обертання. Запропонована у цій статті методика може бути базою для розв'язання більш складних задач - дослідження впливу періодичних сил на динаміку процесу, швидкості руху рідини для промивання та ін.

Література

1. Андронов И. В. Неквазилинейная асимптотика задач о колебаниях балок и пластин на нелинейном упругом основании / Андронов И. В., Буланова Н. С. // Доп. НАН України. – К., 1995. – № 9. – С. 28–30.

2. Болотин В. В. Прогнозирование ресурса упругих систем / Болотин В. В. – М.: Машиностроение, 1984. – 402 с.

3. Гробов В. А. Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин / Гробов Валериан Александрович. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 165 с.

4. Доценко П. Д. О колебаниях и устойчивости прямолинейного трубопровода / Доценко П. Д. // Прикладная механика. – 1971. – Вып. 3. – С. 85–91.

5. Писаренко Г. С. Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале. – К.: Изд-во АН УССР, 1970. – 379 с.

6. Улитин Г. М. Ударные процессы в буровых установках / Улитин Г. М., Петтик Ю. В. // Вибрации в технике и технологиях. – 2000. – № 1 (13). – С. 70–74.

7. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике.- М.: Мир,- 1972.- 272 с.

8. Митропольский Ю. О., Мосеенков Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных.- К.: Вища школа, 1976.- 596 с.

9. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики/ Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.

10. Кузьо І. В. Динамічні процеси у середовищах, які характеризуються поздовжнім рухом, та вплив крайових умов на амплітуду і частоту їх коливань / І. В. Кузьо, Є. В. Харченко, М. Б. Сокіл // Вібрації в техніці і технологіях. – 2007. – № 3 (48). – С. 53–56.

11. Сокіл М. Б. Хвильова теорія руху в дослідженні коливань гнучких елементів приводу та транспортування з урахуванням їх поздовжнього руху / М. Б. Сокіл, О. І. Хитряк // Військово-технічний збірник. – Львів: АСВ, 2011. – Вип. 1. – С. 102–105.

12. Chen L. Q. Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings // Appl. Mech. Rev. – 2005.– Volume 58.2. – P. 91–116.

13. Пукач П. Я. Змішана задача для одного сильно нелінійного рівняння типу коливань балки в обмеженій області // Прикл. проблеми механіки та математики – Вип. 4. – 2006. – С. 59–69.

14. Пукач П. Я. Мішана задача для нелінійного рівняння типу коливань балки в необмеженій області // Математичні студії. – 2007.– 27, № 2. – С. 139–148.