№ 2 (66) 2012 Вібрації в техніці та технологіях

Ольшанский В. П.

Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. П. Василенко

Ольшанский С. В.

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

УДК 631.362:532

ВБК – МЕТОД ПРИ РАСЧЁТЕ КОЛЕБАНИЙ ЗЕРНОВОГО ПОТОКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ

В елементарних функціях побудовано наближений розв'язок граничної задачі про коливання швидкості руху однорідного кільцевого шару зерна в вертикальному циліндричному решеті. Показано розрахунками, що ВБК – метод призводить до високоточних наближених розв'язків в розглянутому класі задач, які раніше розв'язували із застосуванням спеціальних функцій.

In terms of elementary functions an approximate solution of boundary value problem of the vibrations of the velocity of a uniform annular layer of grain in a vertical cylinder-parameter sieve was constructed. Shown by calculations that WBK - method leads to highly accurate approximate solutions in this class of problems that were previously solved by application of special functions.

Постановка проблемы. Использование адекватных механико-математических моделей движения виброожиженной сыпучей среды упрощает поиск оптимальных режимов виброрешётного разделения зерновой смеси. Поэтому теоретическое моделирование зерновых потоков на рабочих поверхностях виброрешёт относится к актуальным научно-практическим задачам.

Анализ последних исследований и публикаций. Гармонические колебания скорости кольцевого слоя зерновой смеси в вертикальном цилиндрическом виброрешете рассматривали в [1], [2]. Там аналитические решения задач колебаний построены с помощью функций Кельвина. Установлено, что в производственных условиях работы сепараторов расчётные значения параметров модели приводят к большим аргументам цилиндрических функций и их можно вычислять с хорошей точностью по асимптотическим формулам. В [3], [4] и [5] показано, что если в дифференциальном операторе Лапласа в уравнении движения смеси переменный множитель r^{-1}, обратно пропорциональный радиальной координате, заменить постоянным средним его значением, то решение упрощённой краевой задачи можно выразить в элементарных функциях. В связи с малой толщиной сепарируемого слоя зерна по сравнению с радиусом решета, изменение r^{-1} происходит на коротком промежутке и введение усреднения не приводит к существенным погрешностям. В отличие от указанных публикаций, здесь предлагается другой способ приближённого расчёта скорости потока зерновой смеси в установившемся режиме осесимметричного движения методом ВБК [5], который эффективен при наличии большого параметра в дифференциальном уравнении краевой задачи. Таким большим безразмерным параметром в задачах колебаний виброожиженной смеси является $R\sqrt{\omega / \nu}$, где R – радиус решета, которое совершает осевые вертикальные колебания с частотой ω; ν – эффективная кинематическая вибровязкость смеси, постоянная по толщине кольцевого слоя зерна.

Дополнительно отметим, что в [7] ВБК – метод позволил построить приближённое решение краевой задачи о колебаниях скорости потока неоднородной зерновой смеси на плоском виброрешете. Позже он также применялся для расчёта колебаний плоских неоднородных слоёв в [8].

Основная часть работы. Используем расчётную схему, представленную на рис. 1.

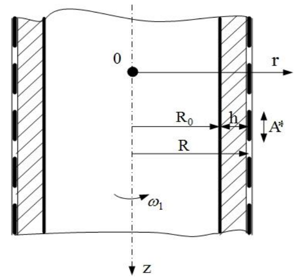

Рис. 1. Расчетная схема вертикального цилиндрического решета с сепарируемой зерновой смесью

Символами r и z обозначены соответственно радиальная и осевая координаты. Решето вращается вокруг оси oz с постоянной угловой скоростью ω_1 и совершает вертикальные колебания с амплитудой A^* и частотой ω. Не учитывая просеивание смеси не решете, толщину кольцевого слоя зерна h принимаем постоянной, так что радиус внутренней поверхности слоя $R_0 = R - h = const.$

В установившемся режиме движения вертикальную проекцию скорости потока смеси $u_z(r,t)$ считаем независимой от координаты z. Аналогично [1] и [2], эту проекцию определяем из решения краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{1}{\nu}\frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{g}{\nu};$$

$$u_z(R,t) = A^*\omega\cos(\omega t); \quad \left.\frac{\partial u_z(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R_0} = 0.$$

Здесь g – ускорение свободного падения; t – время.

Разыскивая решение в виде

$$u_z = \frac{g}{4\nu}\left(R^2 - r^2 + 2R_0^2\ln\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{\sqrt{r}}\mathrm{Re}\left[w(r)e^{i\omega t}\right], \quad (1)$$

где $i = \sqrt{-1}$, для определения неизвестной функции $w(r)$ получаем уравнение:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} - \left(\frac{i\omega}{\nu} - \frac{1}{4r^2}\right)w = 0. \quad (2)$$

Функция $w(r)$ должна также удовлетворять граничным условиям:

$$\mathrm{Re}\,w(R) = A^*\omega\sqrt{R}; \quad \mathrm{Im}\,w(R) = 0; \quad (3)$$

$$\frac{d}{dr}\left.\frac{\mathrm{Re}\,w(r)}{\sqrt{r}}\right|_{r=R_0} = \frac{d}{dr}\left.\frac{\mathrm{Im}\,w(r)}{\sqrt{r}}\right|_{r=R_0} = 0. \quad (4)$$

Согласно методу ВБК [6, стр. 162], фундаментальные решения уравнения (2) имеют вид:

$$w_{1,2}(r) = \pm\exp\left\{\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2\nu}}\left[r + \frac{\nu}{8\omega r} + i\left(r - \frac{\nu}{8\omega r}\right)\right]\right\} + O\left(\frac{\nu^{3/2}}{R^3\omega^{3/2}}\right),$$

что позволяет выразить его общее решение в элементарных функциях:

$$w(r) = (c_1 + ic_2)e^{\alpha+i\beta} + (c_3 + ic_4)e^{-\alpha-i\beta} \quad (5)$$

Здесь

$$\alpha = \alpha(r) = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2\nu}}\left[\left(r + \frac{\nu}{8\omega r}\right) - \left(R_0 + \frac{\nu}{8\omega R_0}\right)\right];$$

$$\beta = \beta(r) = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2\nu}}\left[\left(r - \frac{\nu}{8\omega r}\right) - \left(R_0 - \frac{\nu}{8\omega R_0}\right)\right];$$

c_1, c_2, c_3, c_4 – вещественные произвольные постоянные.

Их находим, удовлетворяя граничным условиям.

Подстановка (5) в (4), с учётом равенств $\alpha(R_0) = \beta(R_0) = 0,$ приводит к уравнениям:

$$c_3\left(\alpha' + \frac{1}{2R_0}\right) - c_4\beta' = c_1\left(\alpha' - \frac{1}{2R_0}\right) - c_2\beta';$$

$$c_3\beta' + c_4\left(\alpha' + \frac{1}{2R_0}\right) = c_1\beta' + c_2\left(\alpha' - \frac{1}{2R_0}\right),$$

в которых

$$\alpha' = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2\nu}}\left(1 - \frac{\nu}{8\omega R_0^2}\right); \; \beta' = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2\nu}}\left(1 + \frac{\nu}{8\omega R_0^2}\right).$$

Решив их, получаем:

$$c_3 = c_1\delta_1 - c_2\delta_2; \quad c_4 = c_1\delta_2 + c_2\delta_1, \quad (6)$$

причём:

$$\delta_1 = \frac{(\alpha')^2 + (\beta')^2 - \frac{1}{4R_0^2}}{\left(\alpha' + \frac{1}{2R_0}\right)^2 + (\beta')^2};$$

$$\delta_2 = \frac{\beta' / R_0}{\left(\alpha' + \frac{1}{2R_0}\right)^2 + (\beta')^2}.$$

Выделив вещественную и мнимую части в (5), имеем:

$$A_1(R) = \operatorname{Re} w(r) = e^{\alpha}\left(c_1\cos\beta - c_2\sin\beta\right) + \\ + e^{-\alpha}\left(c_3\cos\beta + c_4\sin\beta\right);$$
$$(7)$$
$$A_2(R) = \operatorname{Im} w(r) = e^{\alpha}\left(c_1\sin\beta + c_2\cos\beta\right) + \\ + e^{-\alpha}\left(-c_3\sin\beta + c_4\cos\beta\right).$$

Учитывая (6), после подстановки (7) в (3), получаем два уравнения:

$$c_1 f(R) - c_2\varphi(R) = A^*\omega\sqrt{R},$$
$$(8)$$
$$c_1\varphi(R) + c_2 f(R) = 0,$$

где

$$f(R) = \exp(\alpha(R))\cos(\beta(R)) + \\ + \exp(-\alpha(R))\left[\delta_1\cos(\beta(R)) + \delta_2\sin(\beta(R))\right];$$
$$\varphi(R) = \exp(\alpha(R))\sin(\beta(R)) + \\ + \exp(-\alpha(R))\left[\delta_2\cos(\beta(R)) - \delta_1\sin(\beta(R))\right].$$

Из (8) находим:

$$c_1 = \frac{A^*\omega\sqrt{R} f(R)}{f^2(R) + \varphi^2(R)}; \quad c_2 = -\frac{A^*\omega\sqrt{R}\varphi(R)}{f^2(R) + \varphi^2(R)}. \quad (9)$$

Вычислив значения констант по формулам (6) и (9), далее несложно провести расчёт проекции скорости потока, которая представляется выражением:

$$u_z(r,t) = \frac{g}{4\nu}\left(R^2 - r^2 + 2R_0^2\ln\frac{r}{R}\right) + \\ + \frac{1}{\sqrt{r}}\left[A_1(r)\cos(\omega t) - A_2(r)\sin(\omega t)\right]. \quad (10)$$

При записи его учли (1) и (7).

И так, полученное приближённое решение не связано с вычислением специальных функций. Чтобы убедиться в его хорошей точности провели расчёт $u_z(r,t)$ при $\rho = 750$ кг/м^3; $h = 0{,}007$ м; $\rho\nu = 0{,}66$ Па с; $R = 0{,}3075$ м; $A^* = 0{,}006$ м; $\omega = 96{,}9$ с$^{-1}$.

Результаты компьютерных расчётов по формуле (10) графически представлены на рис. 2-4. На рис. 2 показано, что скорости и амплитуды её колебаний существенно изменяются с удалением от поверхности виброрешета.

Распределение скорости по толщине слоя меняется с течением времени, что подтверждается графиками на рис. 3. Это изменение сопутствует сегрегации зерновой смеси и просеиванию её на виброрешете.

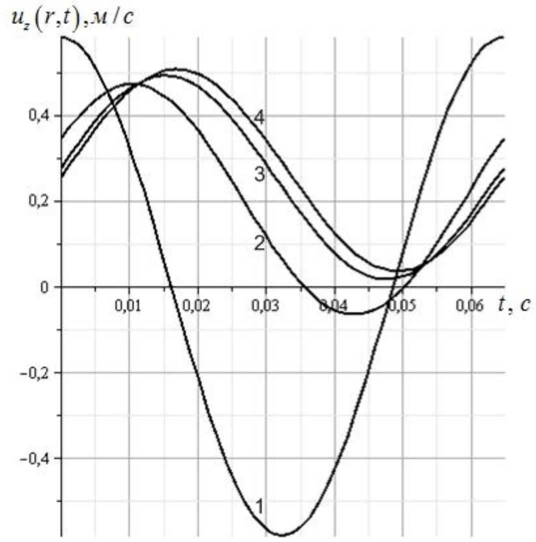

Рис. 2. Зависимости колебаний скорости зерновой смеси пшеницы от времени для различных r ***:1,2,3,4 -*** $= R;\ R_0 + \dfrac{h}{2};\ R_0 + \dfrac{h}{4};\ R_0$

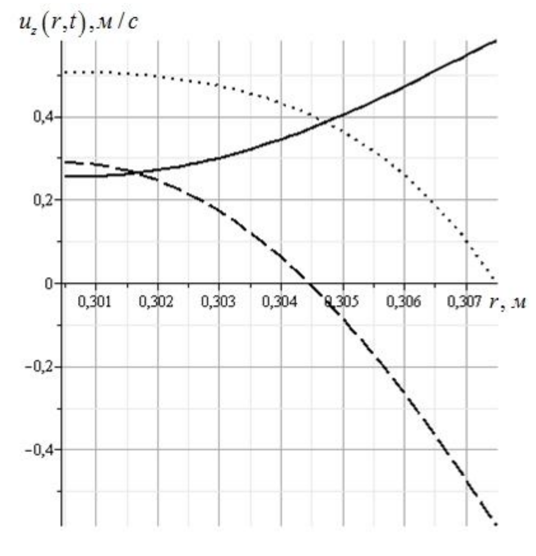

Рис. 3. Профили скорости потока зерновой смеси пшеницы по толщине слоя в различные моменты времени: —— $t = 0$ ***;*** ····· $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$ ***;*** – – – $t = \dfrac{\pi}{\omega}$

При заданных параметрах расчёта, формула (10) позволяет построить поверхность скорости потока зерновой смеси. Результаты такого построения представлены на рис. 4. Графики на рис. 2 являются сечениями этой поверхности плоскостями $r = const$, а на рис. 3 – плоскостями $t = const$.

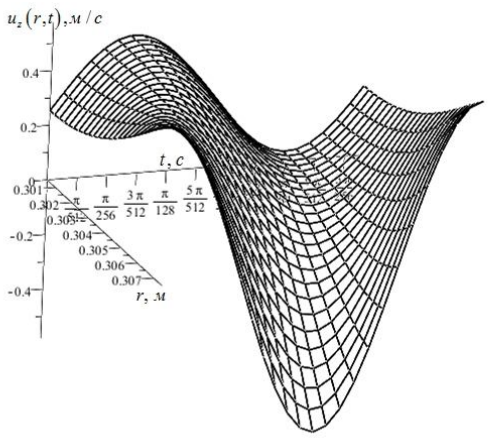

Рис. 4. Поверхность скорости потока $u_z(r,t)$

Выводы. Построенное выше приближённое решение отражает затухающий характер вибрационного поля с удалением от источника вибраций. Оно позволяет определять влияние различных параметров модели на распространение вибраций в движущемся слое зерновой смеси по рабочей поверхности решета.

Литература

1. Ольшанский В.П. Колебания скорости потока сепарируемой зерновой смеси на цилиндрическом виброрешете / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПІ». Динаміка та міцність машин. – Харків: НТУ, 2010. – Вип. 69. – С. 100-108.

2. Тищенко Л.Н. Кинетика сепарируемых зерновых смесей в вертикальных цилиндрических виброрешётах / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вібрації в техніці та технологіях. – 2011. - № 1(61). – С. 177-181.

3. Ольшанский В.П. Приближённый расчёт колебаний зерновой смеси в цилиндрическом виброрешете / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вісник ХНТУСГ: Технічний сервіс АПК, техніка та технології у сільськогосподарському машинобудуванні – Харків: ХНТУСГ. – 2011. – Вип. 115. – С. 48-54.

4. Тищенко Л.Н. Гармонические колебания сепарируемой зерновой смеси при неравномерном вращении цилиндрического решета / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні: Український міжвідомчий науково-технічний збірник. – 2011. – № 45. – С. 135-140.

5. Ольшанський В.П. Спрощений розрахунок коливань зернової суміші, які спричинені нерівномірним обертанням циліндричного решета / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський // Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин. – Кіровоград: КНТУ. – Вип. 41. Ч.1. – С. 173-178.

6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке – М. Наука, 1976. – 576 с.

7. Ольшанский В.П. Кинетика неоднородного псевдоожиженного слоя зерна, сепарируемого плоским решетом / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський // Вісник ХНТУСГ: Технічний сервіс АПК, техніка та технології у сільськогосподарському машинобудуванні. – Харків: ХНТУСГ. – 2011. – Вип. 118. – С. 245 - 253.

8. Тищенко Л.Н. Колебания зерновых потоков на виброрешётах / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский. – Харьков: “Міськдрук”, 2012. – 267 с.