Гель П. В.

Винницкий национальный аграрный университет

Резник С. И.

Винницкий национальный технический университет

УДК 541.124:532.5

К ВОПРОСУ О ТОЧНОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

У статті проведено точне інтегрування рівнянь Нав'є-Стокса для окремого випадку ізотермічного турбулентного потоку нестисливої в'язкої рідини.

In this article the exact integration of the Navier -Stores equations for a separable example isothermic turbulent flow of incompressible viscous liquid is carried out.

Теоретическая гидроаэродинамика давно привлекла к себе пристальнное внимание ученых различных специальностей. Наглядность ее экспериментов, сравнительная простота основных уравнений и четкая постановка задач вселяли надежду получить полное количественное описание динамических явлений, происходящих в жидкой среде или газе. Однако в действительности эта простота оказалась обманчивой.

Одним из наиболее распространенных видов движений жидкости, газа или плазмы являются турбулентные течения. Тем не менее только после классических исследований О. Рейнольдса [1] в самых общих чертах стала ясна сущность этого явления и постепенно была осознана значимость турбулентности как в явлениях природы, так и в разнообразных технологических процессах. Идеи Л. Прандтля, К. Тейлора, А.Н. Колмогарова, Л.Д. Ландау о существовании внутренних масштабов турбулентности позволили создать полуэмпирические методы, являющиеся пока единственно оправдавшим себя способом распространения эмпирических сведений в этой области за непосредственные рамки экспериментальных данных. Знание закономерностей турбулентных течений оказалось и остается важным во многих отраслях науки и техники – прикладной гидроаэродинамике, гидравлике, гидрологии, океанологии, метеорологии, гидроакустике, астрофизике, физике атмосферы, баллистике, авиации, ракетной и других не менее важных отраслях современной техники и промышленности.

В настоящее время, несмотря на громадные усилия ученых и инженеров различных специальностей, теория турбулентных вязких течений все еще остается одной из наиболее фундаментальных и наименее разработанных проблем физической механики.

Силы трения, действующие при движении вязкой жидкости или газа, оказывают значительное влияние на характер движения, а также на механическое и тепловое взаимодействие между твердым телом и жидкой или газообразной средой. Интенсивность действия сил трения зависит от распределения скоростей в потоке и теплового состояния движущейся среды [2,3]. При обтекании вязкой жидкостью или газом поверхности твердого тела, температура которой не равна температуре движущейся среды, в потоке возникают неоднородные поля скорости и температуры, которые взаимодействуют друг с другом.

Неоднородность полей скорости и температуры вызывают в жидкости или газе конвективные ускорения, которые сопровождаются возникновением инерционных сил. Соотношение между силами внутреннего трения и индукционными силами определяют режим течения среды. При ламинарном движении силы внутреннего трения преобладают над инерционными силами, а при турбулентном движении − наоборот. Для нахождения таких характеристик течения, как трение и теплообмен, используются законы механики и термодинамики [3].

Законы механики жидкой и газообразной среды значительно сложнее законов механики твердого тела. В жидкой среде отсутствуют жесткие связи между частицами, как это имеет место в твердом теле. Наоборот, частицы жидкостей и газов обладают очень большой подвижностью относительно друг друга . На основное течение жидкости или газа накладывается беспорядочное молекулярное движение, которое значительно осложняет и сильно утрудняет изучение действительного движения сплошной среды. Сложность и многообразние явлений в непрерывной среде отражается в математической сложности гидродинамических уравнений, которые нелинейны и трудноразрешимы, так как непрерывная среда представляет собой частный случай задачи многих тел [4].

Основными уравнениями гидроаэродинамики являются уравнения Навье-Стокса [2,5]:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}+V_k\frac{\partial V_i}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k x_k}+g_i, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_k}=0, \quad (i,k=1,2,3), \quad (2)$$

где ρ – массовая плотность среды, V_i – i-я компонента мгновенной скорости; t – время; P – давление; ν – коэффициент кинематической вязкости среды; g_i –ускорение массовых сил, действующих вдоль оси x_i. По повторяющимся индексам в одночленах подразумевается суммирование.

Нелинейная система уравнений (1), (2) не только не принадлежит ни к одному из трех основных типов дифференциальных уравнений в частных производных – эллиптическому, параболическому и гиперболическому, но и не является системой типа Коши- Ковалевской [6]. Даже в настоящее время интегрирование уравнений Навье – Стокса в общем виде превышает возможности современной математики с ее мощными аналитическими, топологическими, групповыми методами и методами функционального анализа [7,8,9]. В работе [10] рассмотрены вопросы разрешимости стационарных и нестационарных краевых задач для системы уравнений Навье – Стокса (1), (2).

Правда, для некоторых частных случаев течений вязкой несжимаемой жидкости удалось найти точные аналитические решения, но среди этих частных случаев только совсем немногие не налагают ограничений на величину вязкости. К числу таких случаев принадлежат, например, течение Пуазейля, течение Куэтта, течение Хагена – Пуазейля, течение Хоуарта и течение Хамеля [2,5]. В работе [11] получена формула для продольной компоненты скорости турбулентного потока вязкой несжимающей жидкости.

В данной работе ставится задача получить точное решение уравнений Навье – Стокса, учитывая, что во вязкой жидкости непременно должны возникать вихри [12]. Это заключение следует из уравнения (2), так как его можно записать также в таком виде:

$$div\,\vec{V}=0 \quad (3)$$

а это означает, что:

$$rot\,\vec{V}\neq 0.$$

Рассмотрим изотермическое течение несжимаемой вязкой жидкости, которое характеризуется полем скорости $\vec{V}\,(x_1,x_2,x_3,t)$ и описывается системой уравнений Навье-Стокса (1),(2).

Применив к этой системе операцию ротора, получим:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t}+V_j\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}-\omega_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j}=\nu\nabla^2\omega_i, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_i}=0, \quad (i,j=1,2,3), \quad (6)$$

где

$$\omega_i=\varepsilon_{i\alpha\beta}\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta}; \quad (7)$$

$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta}$ — компоненты вихря;

$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – оператор Лапласа;

$\varepsilon_{i\alpha\beta}$- антисимметрический тензор третьего ранга; $(\alpha,\beta=1,2,3)$.

Пусть имеют место соотношения:

$$\nu_j\frac{\nu\omega_i}{\partial x_j}-\omega_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j}=\lambda_j\omega_j\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}, \quad (8)$$

где λ_j – функция, вводимая из соображений размерности и имеющая размерность длины.

Применив к соотношению (8) масштабное преобразование, пронормируем множитель λ_j на единицу [13,14]. С учетом этого уравнение (5) принимает вид:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \omega_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 \omega_i, \quad (i,j = 1,2,3) \tag{9}$$

Введем теперь новую функцию $\Omega(x_1, x_2, x_3, t)$ удовлетворяющую соотношениям:

$$\omega_i = \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}, \qquad (i = 1,2,3) \tag{10}$$

и уравнению (6). Следуя работе [15], для определения функции $\Omega(x_1, x_2, x_3, t)$ получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_i}\right)^2 = \nu \nabla^2 \Omega\,. \tag{11}$$

Полученное уравнение инвариантно по отношению у группе преобразований (растяжение)[7]:

$$\tilde{x}_i = \sqrt{\nu} x_i, \qquad \tilde{t} = \nu t, \tag{12}$$

поэтому решение уравнения (11) целесообразно искать в такой форме:

$$\Omega(x_1, x_2, x_3, t) = F\big(\theta(x_1, x_2, x_3, t)\big), \tag{13}$$

где $\theta(x_1, x_2, x_3, t)$ – решение однородного уравнения диффузии:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu \nabla^2 \tag{14}$$

Подстановка функционала (13) в уравнение (11) дает:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 = \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \tag{15}$$

Решением последнего уравнения является функция:

$$\Omega(x_1, x_2, x_3, t) = F\big(\theta(x_1, x_2, x_3, t)\big) = C_2 - 2\nu \ln(\theta - C_1), \tag{16}$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Таким образом, решения уравнения (9) можно записать в таком виде:

$$\omega_i = -2\nu \frac{\dfrac{\nu\theta}{\partial x_i}}{\theta - C_1}, \quad (i = 1,2,3). \tag{17}$$

Используя соотношения (7),(10) и (17), перейдем к исходным искомым величинам – компонентам поля скорости $V_i(x_1, x_2, x_3, t)$ и давлению P:

$$\begin{cases} V_1 = \omega_1\left(1 + \dfrac{\omega_1 \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_3}\dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \omega_2 \dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_3}\dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \omega_3 \dfrac{\partial \omega_3}{\partial x_2}\dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_3}}{\dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_3}\dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_1}\dfrac{\partial \omega_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_3}\dfrac{\nu \partial}{\partial x_1}}\right), & (18) \\ V_2 = \omega_2\left(1 + \dfrac{\omega_1 \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \omega_2 \dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_1}\dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_3} + \omega_3 \dfrac{\partial \omega_3}{\partial x_1}\dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_3}}{\dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_3}\dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_1}\dfrac{\partial \omega_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_3}\dfrac{\partial \omega_3}{\partial x_1}}\right), & (19) \\ V_3 = \omega_3\left(1 + \dfrac{\omega_1 \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial \omega_3}{\partial x_1} + \omega_2 \dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_1}\dfrac{\partial \omega_3}{\partial x_2} + \omega_3 \dfrac{\partial \omega_3}{\partial x_1}\dfrac{\partial \omega_3}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_3}\dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_1}\dfrac{\partial \omega_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_3}\dfrac{\partial \omega_3}{\partial x_1}}\right), & (20) \end{cases}$$

Если решение уравнения (14) выбрать в таком виде [16]:

$$\theta(x_1,x_2,x_3,t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\nu t}}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x_1-\xi)^2+(x_2-\eta)^2+(x_3-\varsigma)^2}{4\nu t}\right)\psi(\xi,\eta,\varsigma)d\xi d\eta d\varsigma \quad (21)$$

можно получить явные выражения для компонента поля скорости $\vec{V}(x_1,x_2,x_3,t)$.

Поле давления можно определить, зная компоненты поля скорости:

$$P(x_1,x_2,x_3,t) = \frac{\rho}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu^2 V_i V_j}{\nu x_i' x_j'} \frac{dx_1' x_2' x_3'}{\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2}} \quad (22)$$

где ρ – массовая плотность сплошной среды.

В рассматриваемом случае на течение жидкости или газа не накладывается условие стационарности, как это имеет место для большинства известных случаев точного интегрирования уравнений Навье-Стокса [2,3,5]. Кроме того, интегралы системы Навье-Стокса (1), (2) получены для пространственного течения без каких-либо ограничений на величину коэффициента кинематической вязкости среды. При решении конкретных задач необходимо учесть соответствующие начально-краевые условия, оказывающие определяющее влияние на эволюцию течения сплошной среды.

Литература

1. Reynolds O. An experimental investigation circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels // Phil. Trans. Roy. Soc. − 1883. − №174, p. 935 – 982.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. − М.: Наука, 1973. − 848с.
3. Романенко П.Н. Тепломассообмен и трение при градиентном течении жидкостей. М.: Єнергия, 1971. − 568 с.
4. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975. − 392 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. − М.: Наука, 1974. − 711с.
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. − М.: Наука, 1981. − 512с.
7. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. − М.: Наука, 1978. − 248с.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. − М.:Изд. Моск. унив., 1960. − 119 с.
9. Foias C. Ergodic problems in functional spaces related to Navier − Stokes equations // Proc. Intern. Conf. Anal. rel. Topics. − Tokyo, 1969. − p.290 – 304.
10. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. − Л.: Наука, 1970. − 288с.
11. Гель П.В., Резник С.И. О возможном механизме турбулентного перемешивания в пограничном слое несжимаемой жидкости // Вібрації в механіці та технологіях. − 2010. − №4 (60). − с.9 – 12.
12. Лаврентьев М. А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. − М.: Наука, 1973. −416с.
13. Алабужев П.М., Геронимус В.Б., Минкевич Л.М.,Шеховцов Б.А. Теории подобия и размерностей. Моделирование. − М.: Высш. шк., 1968. − 208с.
14. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.М. Теория солитонов: Метод обратной задачи. − М.: Наука, 1980. − 320с.
15. Коул Дж. О квазилинейном параболическом уравнении, встречающемся в аэродинамике // Механика, сб. переводов, 1953. − №2(18) , с.23-29.
16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. − М.: Наука, 1966. − 724 с.