**Тищенко Л. Н.**

**Слипченко М. В.**

***Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенко***

***УДК 631.362.36; 621.928.9***

# УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ НА ТАРЕЛЬЧАТОМ РАЗБРАСЫВАТЕЛЕ ВИБРОЦЕНРОБЕЖНОГО СЕПАРАТОРА

*Складено інтегро-диференціальне рівняння балансу маси зернової суміші на тарільчастому розкидувачі. Отримані рівняння динаміки зернової суміші на тарільчастому розкидувачі з урахуванням припущень, зроблених в рамках теорії тонких шарів і складених граничних умов.*

*Integrodifferential equation of grain mixture weight balance on the poppet spreader are obtained. Using theory of thin layers assumption and selected border terms equation of grain mixture dynamics at popper spreader are obtained.*

***Постановка проблемы.*** Для повышения эффективности очистки зерновых смесей (ЗС) от легких примесей, совместно с ОАО "Вибросепаратор" (г. Житомир) разработано новое пневмосепарирующее устройство [1-3]. Составление уравнений динамики очистки ЗС требует исследования движения слоя по тарельчатому разбрасывателю (ТР). Решение составленных уравнений динамики вызывает как составления граничных условий, так и привлечения дополнительных соотношений.

***Формулировка целей статьи.*** Получение уравнений динамики ЗС с учетом составленных граничных условий и теории тонких слоев.

***Основная часть.*** Составленные граничные условия [4] не позволяют решить уравнения движения ЗС на ТР, поэтому для определения формы свободной поверхности привлечем дополнительное соотношение, которое можно извлечь из интегрального уравнения баланса массы, суть которого состоит в следующем.

Выделим элементарный геометрический (неподвижный) объем $\Delta V$, ограниченный поверхностями $S_1$, $S_2$, $S_{r1}: r = const$, $S_{r2}: r + \Delta r = const$, $S_{\varphi 1}: \varphi = const$, $S_{\varphi 2}: \varphi + \Delta\varphi$ (рис. 1). Баланс массы зерна в данном объеме определяется притоком зерна через поверхность $\Delta S_1$ и притоком или оттоком его через поверхности $S_{r1}, S_{r2}, S_{\varphi 1}, S_{\varphi 2}$. Массу зерна $\Delta M$ в объеме $\Delta V$ определим интегралом:

$$\Delta M = \int_{\Delta V} \rho(t,r,\varphi,n)dV = \int_{r}^{r+\Delta r}\int_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi}\int_{0}^{h(t,r,\varphi)} \rho(t,r,\varphi,n)\, r^2\sqrt{1+Z'^2}\,dr\,d\varphi\,dn, \tag{1}$$

где Z – кривая, определяющая твердую поверхность тарельчатого разбрасывателя [5].

Приток массы $Q$ к объему $V$ за единицу времени определяется интегралами по соответствующим поверхностям, ограничивающим этот объем:

$$Q = -\int_{\Delta S_1} \tilde{\rho}\vec{w}\cdot\vec{n}_1 dS + \int_{\Delta S_{r2}} \rho\,\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{E}_1 dS - \int_{\Delta S_{r1}} \rho\,\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{E}_1 dS + \int_{\Delta S_{\varphi 2}} \rho\,\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{E}_2 dS - \int_{\Delta S_{\varphi 1}} \rho\,\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{E}_2 dS, \tag{2}$$

где $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ – базисные вектора;

$\vec{w}$, $\vec{\mathrm{v}}$ – трансверсальная и радиальная составляющие скорости;

$\tilde{\rho}$ – средняя плотность внешнего потока зерна [6].

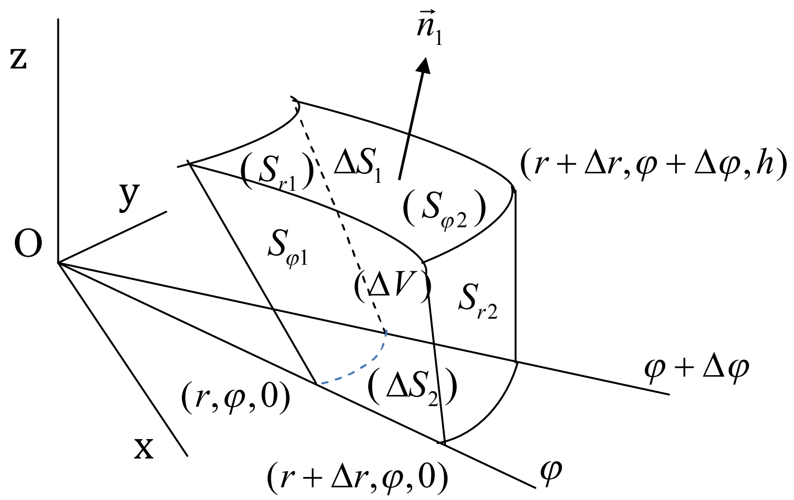


***Рис.1. К составлению уравнения баланса массы зерновой смеси***

Запишем уравнение баланса в общем виде следующим образом:

$$\frac{d\Delta M}{dt} = Q. \tag{3}$$

В случае стационарного движения слоя левая часть уравнения (3) обращается в нуль.

Воспользуемся теоремой о среднем для интегралов. Тогда, произведя очевидные преобразования, получим в рамках приближения тонкого слоя интегро-дифференциальное уравнение [7]:

$$\int_0^h \rho\, \mathrm{v}^1\, dn + r\int_0^h \frac{\partial \rho\, \mathrm{v}^1}{\partial r}\, dn + \frac{\partial h}{\partial \varphi}\sqrt{1+Z'^2}\; \rho\, \mathrm{v}^2\Big|_{n=h} + \int_0^h \frac{\partial \rho\, \mathrm{v}^2}{\partial \varphi}\sqrt{1+Z'^2}\, dn = \frac{\tilde{\rho} W_z}{\sqrt{1+Z'^2}}. \tag{4}$$

Применяя формулу дифференцирования интеграла по параметру можно уравнение (4) преобразовать к виду:

$$\int_0^h \rho\, \mathrm{v}^1\, dn + r\frac{\partial}{\partial r}\int_0^h \rho\, \mathrm{v}^1\, dn - \rho\, \mathrm{v}^1\Big|_{n=h}\frac{\partial h}{\partial r} + \\ + \frac{\partial}{\partial \varphi}\int_0^h \rho\, \mathrm{v}^2\sqrt{1+Z'^2}\, dn = \frac{\tilde{\rho} W_z}{\sqrt{1+Z'^2}}. \tag{5}$$

Из теории тонких слоев, на твердой поверхности $S_2$ примем следующие предположения [8]. Составляющая скорости, перпендикулярная к $S_2$ считается малой по сравнению с двумя другими компонентами $\left(\left|\mathrm{v}^3\right| << \left|\mathrm{v}^1\right|, \left|\mathrm{v}^2\right|\right)$, производная компонент скорости по нормали к $S_2$ существенно больше производных от этих компонент по двум другим направлениям, глубина слоя существенно меньше характерного линейного размера, связанного с продольным направлением по отношению к $S_2$ (в частности, меньше ее главных радиусов кривизны). В дальнейшем будем рассматривать стационарное движение среды. В этом случае слагаемые, содержащие частные производные по времени в соотношениях, обращаются в нуль.

Примем ряд допущений, вытекающих из теории тонких слоев [8]. Тогда основную систему уравнений, описывающих динамику движения зерновой смеси на тарельчатом разбрасывателе, можно представить в форме:

- уравнение неразрывности:

$$\mathrm{v}^1\frac{\partial}{\partial r}\rho+\rho\frac{\partial \mathrm{v}^1}{\partial r}+\mathrm{v}^3\frac{\partial}{\partial n}\rho+\rho\frac{\partial \mathrm{v}^3}{\partial n}+\mathrm{v}^2\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}+\rho\frac{\partial \mathrm{v}^2}{\partial\varphi}+$$
$$+\left(\left(-\frac{Z'''+Z'''Z'^2-3Z''^2Z'}{\left(1+Z'^2\right)^{5/2}}-\frac{Z''}{\left(1+Z'^2\right)^{3/2}r}+\frac{Z'}{r^2\sqrt{1+Z'^2}}\right)n+\frac{Z'Z''}{1+Z'^2}+\frac{1}{r}\right)\rho\,\mathrm{v}^1=0, \tag{6}$$

радиальная составляющая уравнения движения:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{v}^1}{\partial n^2}-A_1\frac{\partial \mathrm{v}^1}{\partial n}+B_1\,\mathrm{v}^1+F_1=0, \tag{7}$$

где приняты следующие обозначения:

$$A_1=A_1(r)=\left(-\frac{Z'^2}{r^2\left(1+Z'^2\right)}-\frac{3Z''^2}{\left(1+Z'^2\right)^3}\right)n-\frac{3Z''}{\left(1+Z'^2\right)^{3/2}}-\frac{Z'}{r\sqrt{1+Z'^2}}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}B_1=B_1(r)=&-\Big\{r\Big[\left(\nu+\mu/3\right)Z'^4-2Z'^3Z''r\mu+\left(Z''^2r^2\mu+2\nu+2\mu/3\right)Z'^2-\\&-2\mu Z'Z''r+\mu/3+\nu-Z''^2r^2\mu\Big]\left(1+Z'^2\right)^{11/2}+\Big[7\left(1+Z'^2\right)^4Z''^3\left(2Z'^2-1\right)nr^3-\\&-5\left(1+Z'^2\right)^5Z''^2Z'nr^2-2/3\left(1+Z'^2\right)^6Z''\left(3Z'^2+1\right)nr+2/3\left(1+Z'1^2\right)^7Z'n\mu+\\&+\Big[\left(1+Z'^2\right)^6Z''nr+2\left(1+Z'^2\right)^7Z'n\Big]\nu\Big\}r^{-3}\mu^{-1}\left(1+Z'^2\right)^{-17/2},\end{aligned} \tag{9}$$

$$F_1=\left(-\frac{Z'\rho\,r\Omega^2}{2\left(1+Z'^2\right)\mu}+\frac{Z'^2\rho\,g}{4\left(1+Z'^2\right)\mu}\right)n+\frac{\rho r^2\Omega^2}{4\sqrt{1+Z'^2}\,\mu}-\frac{Z'\rho\,r\,g}{4\sqrt{1+Z'^2}\,\mu}, \tag{10}$$

трансверсальная составляющая уравнения движения:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{v}^2}{\partial n^2}+\left(-\frac{Z''}{\left(1+Z'^2\right)^{3/2}}+\left(-\frac{Z''^2}{\left(1+Z'^2\right)^3}-\frac{2Z'^2}{r^2\left(1+Z'^2\right)}\right)n-\frac{2Z'}{r\sqrt{1+Z'^2}}\right)\frac{\partial \mathrm{v}^2}{\partial n}=0, \tag{11}$$

нормальная составляющая уравнения движения:

$$\left(\nu+\mu/3\right)\frac{\partial^2 \mathrm{v}^3}{\partial n^2}+$$
$$+\left(-\frac{Z''\mu}{\left(1+Z'^2\right)^{3/2}}-\frac{\mu Z'}{r\sqrt{1+Z'^2}}+\left(-\frac{Z''^2\mu}{\left(1+Z'^2\right)^3}-\frac{\mu Z'^2}{r^2\left(1+Z'^2\right)}\right)n\right)\frac{\partial \mathrm{v}^3}{\partial n}+ \tag{12}$$
$$+\left\{\left(\frac{Z''^2n}{\left(1+Z'^2\right)^2}-\frac{Z''}{\sqrt{1+Z'^2}}\right)\mathrm{v}^1-\left(\frac{rZ'}{\sqrt{1+Z'^2}}-\frac{Z'^2n}{1+Z'^2}\right)\left(\mathrm{v}^2\right)^2+\right.$$

$$+\left[\left(\frac{Z'Z''r^2}{2\left(1+Z'^2\right)^{3/2}}+\frac{Z'^2r}{\sqrt{1+Z'^2}}\right)n-\frac{Z'}{2r^2}\right]\Omega\,\mathrm{v}^2+$$

$$+\left(\left(\frac{Z'Z''r^2}{4\left(1+Z'^2\right)^{3/2}}+\frac{Z1^2r}{2\sqrt{1+Z1^2}}\right)n-\frac{r^2Z'}{4}\right)\Omega^2+$$

$$+\left(\left(\frac{Z'r}{4\left(1+Z'^2\right)^{3/2}}+\frac{Z'}{4\sqrt{1+Z'^2}}\right)n-1/4r\right)g\Bigg\}\rho=0.$$

Уравнения динамики дополняют граничные условия [4]. В случае стационарного движения имеем $V=0$, а также при $n=h$:

$$\left(\frac{Z'^3+Z'+Z''r}{1+Z'^2}h-r\sqrt{1+Z'^2}\right)\rho\,\mathrm{v}^3+\left(\frac{Z'^3+Z'+Z''r}{\left(1+Z'^2\right)^{3/2}}h-r\right)\tilde{\rho}W_z=0, \tag{13}$$

$$\left(1+Z'^2-\frac{2Z''h}{\sqrt{1+Z'^2}}\right)\mu\frac{\partial\,\mathrm{v}^1}{\partial n}=0, \tag{14}$$

$$\left(r^2-\frac{2Z'rh}{\sqrt{1+Z'^2}}\right)\mu\frac{\partial\,\mathrm{v}^2}{\partial n}=0, \tag{15}$$

$$\left[\left(\frac{Z''r}{1+Z'^2}+Z'\right)h-r\sqrt{1+Z'^2}\right]p+$$

$$+\left[\frac{\mu-3\nu}{3\left(1+Z'^2\right)}rhZ''-\left(\frac{\mu}{3}+\nu\right)hZ'+\left(\sqrt{1+Z'^2}\mu/3+\sqrt{1+Z'^2}\nu\right)r\right]\frac{\partial\,\mathrm{v}^3}{\partial n}+$$

$$+\left[\left(-\frac{4\mu Z'}{3\left(1+Z'^2\right)^2}+\frac{2\nu Z'}{\left(1+Z'^2\right)^2}\right)rhZ''^2+ \right. \tag{16}$$

$$+\left(\left(-\frac{2\mu Z'}{3\sqrt{1+Z'^2}}+\frac{\nu Z'}{\sqrt{1+Z'^2}}\right)r+\left(\frac{2\left(Z'^2+2\right)\mu}{3\left(1+Z'^2\right)}-\frac{\left(Z'^2+2\right)\nu}{1+Z'^2}\right)h\right)Z''+$$

$$\left.+Z'''\frac{2\mu-3\nu}{3\left(1+Z'^2\right)}rh+\sqrt{1+Z'^2}\nu-\frac{2\mu}{3}\sqrt{1+Z_1^{\,2}}\right]\mathrm{v}^1=0,$$

при $n=0$:

$$\left[\left(1+Z'^2\right)\left(\sigma^{31}\right)^2+r^2\left(\sigma^{32}\right)^2\right]^{1/2}=f_e\left|\sigma^{33}\right|, \tag{17}$$

$$\mathrm{v}^3(r,\varphi,0)=0. \tag{18}$$

Дифференциальные уравнения (6)-(12) можно рассматривать как обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие в качестве параметров переменные *r*, *φ*. При фиксированных указанных параметрах можно получить однозначные решения данных уравнений при выполнении граничных условий (13)-(18).

После решения предыдущей задачи, используя уравнение (4), определяем форму свободной поверхности $S_1$.

Решение уравнения баланса слоя зерновой смеси на тарельчатом разбрасывателе позволяет определить форму свободной поверхности и приступить к нахождению траекторий и скоростей движения зерновой смеси.

***Выводы.*** Применение теории тонких слое и составление уравнения баланса массы ЗС позволили получить уравнения неразрывности и движения, которые описывают динамику ЗС на ТР. Последующее решение полученных уравнений позволяет определить форму свободной поверхности слоя ЗС на ТР, а также вычислить скорости и траектории частиц ЗС. Это является исходными данными для задачи о динамики очистки ЗС при сходе с ТР.

### *Литература*


1. Пат. 50587 Україна, МПК[9] B07B 1/00, B07B 4/00. Вібровідцентровий сепаратор / Тіщенко Л.М., Пастушенко М.Г., Харченко С.О., Сліпченко М.В.; заявник та власник Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка. № u 201000743; заявл. 26.01.10; опубл. 10.06.10, Бюл. №11/2010.
2. Тищенко Л.Н., Слипченко М.В. К исследованию динамики продуваемого слоя зерновой смеси / Л.Н. Тищенко, М.В. Слипченко // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: ТДАТУ, Вип. 10 - Т.7 – Мелітополь, 2010. – С. 201-209.
3. Тищенко Л.Н., Слипченко М.В. Динамика извлечения легких примесей пневмосепарирующим устройством виброцентробежного сепаратора / Л.Н. Тищенко, М.В. Слипченко // Вібрації в техниці та технологіях, № 1 (61), 2011. – С. 186-193.
4. Тищенко Л.Н., Слипченко М.В. К составлению граничних условий и уравнений динамики зерновой смеси на тарельчатом разбрасывателе виброцентробежного сепаратора / Л.Н. Тищенко, М.В. Слипченко // Науковий вісник луганського національного університету: ЛНАУ, № 30 – Луганск, 2011. – С. 296-304.
5. Тищенко Л.Н., Слипченко М.В. К построению внутренних поверхностей тарельчатого разбрасывателя виброцентробежного сепаратора / Л.Н. Тищенко, М.В. Слипченко // Вібрації в техниці та технологіях, № 3 (63), 2011. – С. 119-125.
6. Тищенко Л.Н., Слипченко М.В. К определению осредненных компонентов тензора вязких напряжений зерновой смеси на разбрасывателе пневмосепарирующего устройства. / Л.Н. Тищенко, М.В. Слипченко // Вісник ХНТУСГ ім. П. Василенка: ХНТУСГ, Вип. 119 – Харків, 2011. – С. 21-27.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. / Г.М. Фихтенгольц – Т.1. М.: ГИТТЛ, 1951. – 696 с.
8. Бояджиев Х., Бешков В. Массоперенос в движущихся пленках жидкости. / Х. Бояджиев, В. Бешков – М.: Мир, 1988. – 136 с.