

**Сметанкіна Н. В.***Інститут проблем  
машинобудування  
ім. А. М. Підгорного  
НАН України***Сметанкін В. О.***Харківський  
національний  
технічний  
університет  
сізького  
господарства імені  
Петра Василенка***УДК 539.4:629.73.02****КОЛИВАННЯ ШАРУВАТИХ  
ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ФОРМИ  
ПРИ УДАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

*Предложен метод расчета колебаний слоистых цилиндрических оболочек со сложной формой плана при ударном нагружении. Метод основан на разложении искомым функций в тригонометрические ряды. Динамическое поведение оболочек исследуется в рамках теории первого порядка, учитывающей деформации поперечного сдвига, обжатия по толщине и инерции вращения нормального элемента. Рассмотрены колебания пятислойной оболочки при ударе.*

*The method of calculation of vibrations of laminated cylindrical shells with a complicated shape in plan view is proposed. The method is based on expansion of the sought-for functions into trigonometrical series. Dynamical behavior of shells is investigated within the framework of the first order theory accounting to transverse shear strains, compression on width and normal element rotation inertia in each layer. Vibrations of a five-layer shell at impact are considered.*

Шаруваті конструкції мають ряд суттєвих переваг у порівнянні з однорідними й тому широко застосовуються в різних галузях машинобудування. Розрахунок параметрів динамічного відгуку при ударному навантаженні є важливим напрямком дослідження коливань шаруватих конструкцій. У роботах [1–3] докладно висвітлюються методи теоретичного й експериментального дослідження однорідних і шаруватих конструкцій при ударі в різних діапазонах швидкостей.

У статтях [4, 5] за допомогою методу скінченних елементів розглянуті шаруваті кругові пластини при ударному впливі. Встановлено, що такі пластини мають більш високий опір удару, ніж монолітні пластини рівної маси. Результати скінченно-елементного моделювання добре погоджуються з експериментальними даними. У роботі [6] запропоновано аналітичну модель ударної взаємодії ударника й шаруватих шарнірно опертих прямокутних панелей. Переміщення, напруження й деформації в шарах обчислювалися методом скінченних елементів.

У статті [7] досліджено перехідні процеси у шарнірно опертих шаруватих композитних циліндричних та сферичних оболонкових панелях при низькошвидкісному ударі у гідротеплових середовищах. Скінченно-

елементний аналіз проводиться у рамках геометрично нелінійної теорії. Модель зіткнення заснована на модифікованому контактному законі Герца.

Аналітичні розв'язки задачі про удар із застосуванням перетворення Фур'є або Лапласа за часом і розвиненням шуканих функцій у тригонометричні ряди одержані у статтях [8, 9] для прямокутних шаруватих панелей.

Аналіз наведених робіт дозволяє зробити висновок, що для розрахунку нестационарних коливань шаруватих конструкцій при ударному навантаженні найчастіше використовуються чисельні методи, а саме, метод скінченних елементів. В аналітичному вигляді розв'язок даних задач одержано тільки для шаруватих пластин і оболонок канонічної форми в плані.

Таким чином, розробка методів розв'язання задач нестационарної динаміки шаруватих оболонок складної форми, що дозволяють подати розв'язок у аналітичній формі є актуальним питанням.

У роботі [10] одержаний аналітичний розв'язок задачі про нестационарні коливання шаруватої пластини складної форми у плані при імпульсному навантаженні. У даній роботі запропоновано метод розв'язання задачі про нестационарні коливання шаруватих



незамкнених циліндричних оболонок зі складною формою плану, який дає можливість одержати розв'язок задачі в аналітичному вигляді.

Розглядається незамкнена багатошарова циліндрична оболонка радіуса  $R$ . Оболонка складається з  $l$  ізотропних шарів постійної товщини  $h_i$  та займає на координатній поверхні (зовнішня поверхня першого шару) область  $\Omega$ , що обмежена контуром  $\Gamma: x_\Gamma = x(s), y_\Gamma = y(s)$  ( $s$  – поточна довжина дуги). Координата  $x$  змінюється вздовж твірної, координата  $y$  – вздовж дуги поперечного перерізу оболонки. Додатний напрям осі  $Oz$  збігається з напрямом зовнішньої нормалі до координатної поверхні.

Удар наноситься індентором масою  $M$  з напівсферичною кінцевою частиною радіуса  $r$ , який скидається з висоти  $H$  на зовнішню поверхню першого шару оболонки. Швидкість його зіткнення з оболонкою визначається за формулою

$$V_z = \sqrt{2gH},$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння. Розглядається низькошвидкісний удар, коли деформації оболонки залишаються пружними.

Передбачається, що область взаємодії індентора й оболонки є круг радіуса  $a(t)$  із центром у точці з координатами  $(x_0, y_0)$  ( $t$  – час). Контактний тиск індентора на оболонку розподілено по площадці навантаження відповідно до закону [11]

$$p_z(x, y, t) = F_0(t) \left[ 1 - \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{a^2(t)} \right]^{1/2}. \quad (1)$$

Рівнодіюча навантаження (1) дорівнює контактній силі впливу індентора на оболонку

$$F_d(t) = \iint_S p_z dS = \frac{2}{3} F_0(t) \pi a^2(t),$$

звідки

$$F_0(t) = \frac{3}{2} \frac{F_d(t)}{\pi a^2(t)}.$$

Радіус області контакту  $a(t)$  обчислюється за формулою

$$a(t) = \left[ \frac{3}{16} F_d(t) (\theta_1 + \theta) \right]^{1/3},$$

де

$$\theta_1 = \frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1}, \quad \theta = \frac{4(1 - \nu^2)}{E};$$

$E_1$  та  $\nu_1$  – модуль пружності й коефіцієнт Пуассона матеріалу першого шару оболонки,  $E$  та  $\nu$  – аналогічні характеристики матеріалу індентора.

Рівняння руху індентора має вигляд

$$M z_{,tt} = M g - F_d(t), \quad z(0) = 0, \quad z_t(0) = V_z, \quad (2)$$

де  $z = z(t)$  – переміщення індентора.

Умова сумісності переміщення індентора й оболонки записується в такому вигляді [12]:

$$w_0 + \alpha_c - z \geq 0. \quad (3)$$

Тут  $\alpha_c$  – контактне зближення індентора й оболонки в точці дотику  $(x_0, y_0)$ ,  $w(x_0, y_0, t)$  – прогин зовнішньої поверхні першого шару оболонки в точці  $(x_0, y_0)$ .

Контакт індентора й оболонки відбувається при перетворенні нерівності (3) на рівність

$$w_0 + \alpha_c - z = 0. \quad (4)$$

Контактне зближення  $\alpha_c$  визначається з розв'язку задачі Герца [13] про вдавнення кулі в пружний півпростір

$$\alpha_c(t) = \kappa_1 F_d^{2/3}(t), \quad \kappa_1 = \left[ \frac{9(\theta + \theta_1)}{256r} \right]^{1/3}.$$

Висновок про застосування залежності Герца до даного випадку зроблений на основі аналізу низки робіт [14–17].

Динамічна поведінка оболонки описується на основі кінематичних гіпотез, які враховують деформації поперечного зсуву, обтиснення по товщині й інерції обертання нормального елемента у межах кожного шару,

$$u_k^i = u_k + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+(k-1)+j} + (z - \delta_{i-1}) u_{3+(k-1)+i}, \quad (5)$$

де  $k = 1, 2, 3$ ,  $i = \overline{1, l}$ ;  $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$ ,  $\delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i$ ;

$u_k = u_k(x, y, t)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – переміщення точки координатної поверхні в напрямку координатних осей;  $u_{3+(k-1)+i} = u_{3+(k-1)+i}(x, y, t)$  ( $k = 1, 2$ ) – кути повороту нормального елемента в  $i$ -му шарі навколо координатних осей  $Ox$  і  $Oy$ ;  $u_{3+2l+i} = u_{3+2l+i}(x, y, t)$  – обтиснення нормального елемента в  $i$ -му шарі.

Деформації оболонки мають вигляд

$$\varepsilon_x^i = u_{1,x}^i, \quad \varepsilon_y^i = \frac{1}{1+z/R} \left( u_{2,y}^i + \frac{1}{R} u_3^i \right), \quad \varepsilon_z^i = u_{3,z}^i,$$

$$\gamma_{xy}^i = \frac{1}{1+z/R} u_{1,y}^i + u_{2,x}^i, \quad \gamma_{xz}^i = u_{1,z}^i + u_{3,x}^i,$$

$$\gamma_{yz}^i = u_{2,z}^i + \frac{1}{1+z/R} u_{3,y}^i - \frac{1}{R(1+z/R)} u_2^i, \quad i = \overline{1, l}.$$

Напруження і деформації в  $i$ -му шарі зв'язані законом Гука [18].



З варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона [18] одержимо рівняння руху оболонки під впливом навантаження  $\mathbf{P}$

$$\begin{aligned} [\mathbf{\Psi}^{\Gamma}] \mathbf{U}_{,tt} - [\mathbf{\Lambda}] \mathbf{U} &= \mathbf{P}, \quad (x, y) \in \Omega, \\ \mathbf{U} &= \mathbf{U}_{,t} = 0, \quad t = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

і систему граничних умов на контурі  $\Gamma$

$$[\mathbf{B}^{\Gamma}] \mathbf{U} = \mathbf{P}^{\Gamma}, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (7)$$

де  $[\mathbf{\Psi}^{\Gamma}]$  та  $[\mathbf{\Lambda}]$  – симетричні матриці;

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \{u_j(x, y, t)\}, \quad \mathbf{P}^{\Gamma} = \{p_j^{\Gamma}(x, y, t)\}, \\ \mathbf{P} &= \{p_j(x, y, t)\}, \quad p_j = 0, \quad j \neq 3, \quad p_3 = p_z(x, y, t); \\ \mathbf{B}_{ij}^{\Gamma} &= \chi_j^1 B_{ij}^u + \chi_j^2 B_{ij}^{\sigma}, \quad i, j = \overline{1, 3l+3}. \end{aligned}$$

Вигляд елементів матриці  $[\mathbf{B}^{\Gamma}]$  та вектора граничних навантажень  $\mathbf{P}^{\Gamma}$  залежить від граничних умов на контурі оболонки. Надаючи різних значень коефіцієнтам  $\chi_j^1$  та  $\chi_j^2$  (7), можна моделювати необхідні граничні умови на контурі оболонки.

Метод розв'язання задачі (6), (7) базується на прийомі розширення заданої області [10, 18]. Вихідна оболонка розширюється до допоміжної оболонки, форма і граничні умови якої обираються таким чином, щоб розв'язок задачі можна було одержати у аналітичній формі. Розв'язок має найбільш простий вигляд, якщо як допоміжну обрати прямокутну в плані шарнірно оперту оболонку. Тоді розв'язок вихідної задачі можна записати у вигляді розвинень у тригонометричні ряди по функціях, що задовольняють граничні умови шарнірного опирання.

Щоб забезпечити виконання вихідних граничних умов (7), до допоміжної оболонки додаються додаткові компенсуючі навантаження  $\mathbf{Q}^{\text{comp}} = \{q_j^{\text{comp}}(x, y, t)\}$ ,

$j = \overline{1, 3l+3}$ , які неперервно розподілені вздовж контуру  $\Gamma$ . Таким чином, задача про коливання оболонки складної форми з довільними граничними умовами зводиться до задачі про коливання прямокутної в плані шарнірно опертої оболонки. Компенсуючі навантаження входять у рівняння руху допоміжної оболонки у вигляді таких інтегральних співвідношень:

$$\begin{aligned} p_j^{\text{comp}}(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{3l+3} \oint_{\Gamma} \zeta_{jk} q_k^{\text{comp}}(s, t) \delta(x - x_{\Gamma}, y - y_{\Gamma}) ds, \\ j, k &= \overline{1, 3l+3}, \end{aligned}$$

де  $\delta(x - x_{\Gamma}, y - y_{\Gamma})$  – двовимірний  $\delta$ -функція.

Ненульові елементи матриці  $\zeta_{jk}$  мають вигляд

$$\begin{aligned} \zeta_{11} &= \zeta_{22} = \zeta_{3+i, 3+i} = \zeta_{3+l+i, 3+l+i} = y'_{\Gamma}, \\ \zeta_{33} &= \zeta_{3+2l+i, 3+2l+i} = 1, \quad \zeta_{12} = \zeta_{3+i, 3+l+i} = x'_{\Gamma}, \\ \zeta_{21} &= \zeta_{3+l+i, 3+i} = -x'_{\Gamma}, \quad i = \overline{1, l}, \end{aligned}$$

$$\text{де } x'_{\Gamma} = \frac{dx_{\Gamma}}{ds}, \quad y'_{\Gamma} = \frac{dy_{\Gamma}}{ds}.$$

З умови задоволення вихідних граничних умов на контурі  $\Gamma$  (7) формується система інтегральних рівнянь, з якої визначаються невідомі компенсуючі навантаження,

$$[\mathbf{B}^{\Gamma}] \mathbf{U}[\mathbf{Q}^{\text{comp}}(x, y, t)] = \mathbf{P}^{\Gamma}, \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (8)$$

Метод розв'язання системи (8) полягає у тому, що функції переміщень (5), заданих і компенсуючих навантажень розвиваються в подвійні тригонометричні ряди по функціях, що задовольняють граничні умови допоміжної оболонки,

$$\begin{aligned} u_j(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{jmn}(t) C_{jmn}(x, y), \\ p_j(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}(t) C_{jmn}(x, y), \\ p_j^{\text{comp}}(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}^{\text{comp}}(t) C_{jmn}(x, y), \\ j &= \overline{1, 3l+3}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} C_{1mn} &= \cos \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B}, \\ C_{2mn} &= \sin \frac{m\pi x}{A} \cos \frac{n\pi y}{B}, \\ C_{3mn} &= \sin \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B}, \\ C_{3+i, mn} &= C_{1mn}, \quad C_{3+l+i, mn} = C_{2mn}, \\ C_{3+2l+i, mn} &= C_{3mn}, \quad i = \overline{1, l}, \quad m = \overline{1, m^*}, \quad n = \overline{1, n^*}; \end{aligned}$$

$$p_{jmn}(t) = \frac{4}{AB} \int_0^A \int_0^B p_j(t) C_{jmn}(x, y) dx dy,$$

$$p_{jmn}^{\text{comp}}(t) = \frac{4}{AB} \sum_{k=1}^{3l+3} \oint_{\Gamma} \zeta_{jk} q_k^{\text{comp}}(s, t) C_{jmn}(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}) ds;$$

$A$  – довжина твірної допоміжної оболонки,  $B$  – довжина дуги цієї оболонки.

Коефіцієнти розвинення ударного навантаження мають вигляд

$$p_{jmn} = 0, \quad j = \overline{1, 3l+3}, \quad j \neq 3, \quad p_{3mn} = D_{mn} F_d(t),$$

де



$$D_{mn} = \frac{12}{AB\rho_{mn}^2} \sin \frac{m\pi x_0}{A} \sin \frac{n\pi y_0}{B} \left( \frac{\sin \rho_{mn}}{\rho_{mn}} - \cos \rho_{mn} \right),$$

$$\rho_{mn} = \pi a(t) \sqrt{\frac{m^2}{A^2} + \frac{n^2}{B^2}}.$$

Розв'язок рівняння руху індентора (2) одержимо за допомогою інтегрального перетворення Лапласа

$$z(t) = z(t_0) + z_{,t}(t_0)(t - t_0) + \frac{g}{2}(t - t_0)^2 - \frac{1}{M} \int_{t_0}^t F_d(\tau)(t - \tau) d\tau.$$

Значення невідомої контактної сили  $F_d^{k+1}$  на  $(k+1)$ -му кроці за часом визначається з умови сумісності переміщень індентора й оболонки (4)

$$\kappa_2 F_d^{k+1} + \kappa_1 (F_d^{k+1})^{2/3} + \kappa_3 = 0,$$

де

$$\kappa_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \pi_{33}^{mn} C_{3mn}(x_0, y_0) + \frac{\Delta t^2}{2M},$$

$$\kappa_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{3l+3} \Delta_{3l}^{mn} \phi_{lmn}^k C_{3mn}(x_0, y_0) - z^{k+1} - z_{,t}^{k+1} \Delta t - \frac{g \Delta t^2}{2}.$$

Далі функції компенсуючих навантажень розвиваються в ряд уздовж контуру  $\Gamma$

$$q_j^{\text{comp}}(s, t) = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} q_{j\alpha\mu}(t) b_{\alpha\mu}(s), \quad j = \overline{1, 3l+3},$$

де

$$b_{1\mu} = \sin[\mu\gamma(s)], \quad b_{2\mu} = \cos[\mu\gamma(s)],$$

$$\gamma(s) = 2\pi \int_0^s d\tilde{s} / \oint_{\Gamma} d\tilde{s}, \quad 0 \leq \gamma(s) \leq 2\pi, \quad \mu = \overline{0, \mu^*}.$$

Граничні функції, що входять у вихідні граничні умови на контурі  $\Gamma$  (7), також розвиваються в ряд уздовж контуру  $\Gamma$ . У результаті система (8) на кожному кроці за часом перетворюється на систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів розвинення компенсуючих навантажень у ряд уздовж контуру  $\Gamma$ . Система рівнянь руху (6) перетворюється на систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яка інтегрується методом розвинення розв'язку в ряд Тейлора [12, 18]. Таким чином, після обчислення компенсуючих навантажень розв'язок задачі набуває вигляду

$$u_j(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{AB} \sum_{k=1}^{3l+3} \pi_{jk}^{mn} \sum_{l=1}^{3l+3} \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \theta_{k\alpha\mu}^{mn} q_{\alpha\mu}(t) + \varepsilon_{jmn}(t) \right) C_{jmn}(x, y), \quad j = \overline{1, 3l+3},$$

де  $\pi_{jk}^{mn}$ ,  $\theta_{k\alpha\mu}^{mn}$ ,  $\varepsilon_{jmn}$  – елементи матриць, отриманих у результаті чисельних перетворень.

Після обчислення компенсуючих навантажень, визначаються переміщення (1), деформації і напруження у шарах вихідної оболонки.

Як чисельний приклад, розглянуто коливання п'ятишарової вільно опертої оболонки. Форма плану оболонки наведена на рис. 1. Оболонка має наступні геометричні параметри:  $R = 2$  м,  $l_1 = 0,62$  м,  $l_2 = 0,68$  м,  $l_3 = 0,64$  м,  $l_4 = 0,75$  м,  $R_1 = 0,05$  м,  $R_2 = 0,03$  м,  $R_3 = 0,04$  м,  $R_4 = 0,045$  м.

Несучі шари оболонки виготовлені із силікатного скла ( $i = 1, 3, 5$ ) і з'єднані шарами з полімерних матеріалів ( $i = 2, 4$ ). Шари мають такі характеристики:  $E_i = 6,12 \cdot 10^4$  МПа,  $i = 1, 3, 5$ ,  $E_i = 280$  МПа,  $i = 2, 4$  (модулі пружності);  $\nu_i = 0,22$ ,  $i = 1, 3, 5$ ,  $\nu_i = 0,39$ ,  $i = 2, 4$  (коефіцієнти Пуассона);  $\rho_i = 2500$  кг/м<sup>3</sup>,  $i = 1, 3, 5$ ,  $\rho_i = 1200$  кг/м<sup>3</sup>,  $i = 2, 4$  (густина матеріалів шарів);  $h_1 = 5$  мм,  $h_2 = h_4 = 4$  мм,  $h_3 = 15$  мм,  $h_5 = 6$  мм.

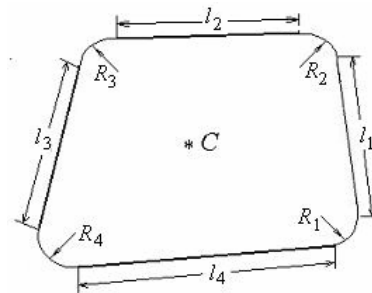


Рис. 1. Форма плану оболонки

Індентор виготовлений з органічного скла і має такі механічні й геометричні характеристики:  $E = 5,7 \cdot 10^3$  МПа,  $\nu = 0,38$ ,  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup> (густина матеріалу індентора),  $M = 0,123$  кг,  $r = 0,03$  м. Висота скидання індентора  $H = 1$  м.

На рис. 2 наведені залежності напружень  $\sigma_x^5$  (суцільна лінія) та  $\sigma_y^5$  (штрихова лінія) від часу у точці С (рис. 1) на зовнішній поверхні п'ятого шару.

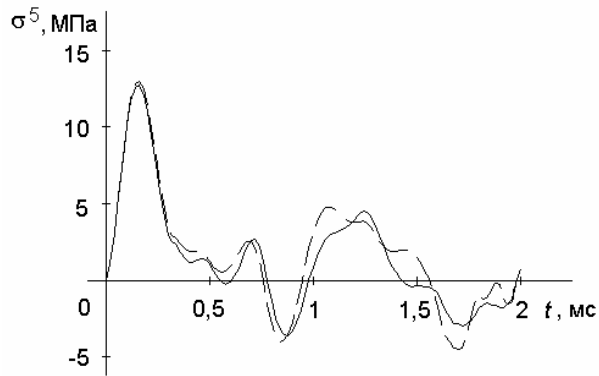
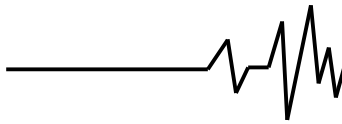


Рис. 2. Змінення у часі напружень  $\sigma_x^5$  та  $\sigma_y^5$

Таким чином, розроблено метод дослідження нестационарних коливань шаруватих циліндричних оболонок зі складною формою плану. Запропонований метод можна застосувати до розрахунку оболонок різної форми з різними граничними умовами при проектуванні оболонкових елементів енергетичних, транспортних і будівельних конструкцій під дією інтенсивних швидкоплинних навантажень.

#### Література

1. Abrate S. Impact on composite structures.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 306 p.
2. Fields J.E., Walley S.M., Proud W.G., Goldrein H.T., Siviour C.R. Review of experimental techniques for high rate deformation and shock studies // Int. J. Impact Eng.– 2004.– V. 30, N 7.– P. 725-775.
3. Alhazza Kh.A., Alhazza A.A. A review of the vibrations of plates and shells // Shock and Vibration Digest.– 2004.– V. 36, N 5.– P. 377-395.
4. Qiu X., Deshpande V.S., Fleck N.A. Dynamic response of a clamped circular sandwich plate subject to shock loading // Trans. ASME. J. Appl. Mechanics.– 2004.– V. 71, N 5.– P. 637-645
5. McShane G.J., Radford D.D., Deshpande V.S., Fleck N.A. The response of clamped sandwich plates with lattice cores subjected to shock loading // Europ. J. Mechanics – A/Solids.– 2006.– V. 25, N 2.– P. 215-229.
6. Malekzadeh K., Khalili M.R., Mittal R.K. Analytical prediction of low-velocity impact response of composite sandwich panels using new

TDOF spring–mass–damper model // J. Compos. Mater. – 2006.– V. 40, N 18.– P. 1671-1689.

7. Naidu N.V.S., Sinha P.K. Nonlinear impact behaviour of laminated composite shells in hygrothermal environments // Int. J. Crashworthiness.– 2005.– V. 10, N 4.– P. 389-402.

8. Anderson T., Madenci E., Burton W.S., Fish J.C. Analytical solution of finite-geometry composite panels under transient surface loading // Int. J. Solids Structures.– 1998.– V. 35, N 12.– P. 1219-1239.

9. Anderson T., Madenci E. Graphite/epoxy foam sandwich panels under quasi-static indentation // Eng. Fract. Mech.– 2000.– V. 67, N 4.– P. 329-344.

10. Smetankina N.V., Shupikov A.N., Sotrikhin S.Yu., Yareschenko V.G. A noncanonically shape laminated plate subjected to impact loading: Theory and experiment // Trans. ASME. J. Appl. Mechanics.– 2008.– V. 75, N 5.– P. 051004-1–051004-9.

11. Smetankina N.V., Shupikov A.N., Sotrikhin S.Yu., Yareschenko V.G. Dynamic response of an elliptic plate to impact loading. Theory and experiment // Int. J. Impact Eng.– 2007.– V. 34, N 2.– P. 264-276.

12. Шупиков А.Н., Бузько Я.П., Сметанкина Н.В., Угримов С.В. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация. – Харьков: Изд. ХНЭУ, 2004.– 252 с.

13. Динник А.Н. Избранные труды: в 2 т. Т. 1. – К.: Изд-во АН УССР, 1952. – 350 с.

14. Tan T.M., Sun C.T. Use of statical indentation laws in the impact analysis of laminated composite plates // ASME J. Appl. Mechanics.– 1988.– V. 52, N 1.– P. 6-12.

15. Lin H.J., Lee Y.J., Use of statical indentation laws in the impact analysis of composite laminated plates and shells // ASME J. Appl. Mechanics.–1990.– V. 57, N 3.– P. 787-789.

16. Fischer-Cripps A.C. The Hertzian contact surface // J. Materials Sci.– 1999. – V. 34, N 1. – P. 129-137.

17. Fu G. An extension of Hertz's theory in contact mechanics // Trans. ASME. J. Appl. Mechanics. – 2007. – V. 74, № 2. – P. 373-374.

18. Сметанкина Н.В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек: монография. – Харьков: МІСЬКДРУК, 2011.– 376 с.