

Тищенко Л. Н.

Ольшанский В. П.

Харьковский  
национальный  
технический  
университет  
сельского хозяйства  
им. П.Василенка

Ольшанский С. В.

Национальный  
технический  
университет  
«Харьковский  
политехнический  
институт»

УДК 631.362

## К РАСЧЕТУ ДВИЖЕНИЯ ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ ПО ВЕРТИКАЛЬНОМУ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМУ РЕШЕТУ ВИБРОСЕПАРАТОРА

Побудовано аналітичний розв'язок спрощених рівнянь Нав'є-Стокса, що описують сталий рух сипучого кільцевого шару зернової суміші на циліндричному решеті віброосепаратора. Одержано формули для розрахунку швидкості потоку, продуктивності решета та інших кінематичних характеристик з урахуванням поділу суміші на проходову та сходову фракції. Проведено розрахунки та аналіз результатів обчислень.

The analytical solution of the simplified Navier-Stokes equations is constructed which the established motion of a loose ring layer of a grain mix on cylindrical sieve is described. The formulas for account velocity of flight, sieve productivity and others kinematical of the characteristics are deduced in view of division of a mix on passing and nishing of a fraction. The accounts are carried out and the results are analyzed.

### Актуальность темы и цель работы.

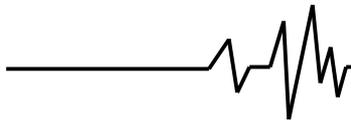
Обычно в двухпоточковых гидродинамических теориях движение сходовой и проходовой фракций зерновой смеси описывают разными системами уравнений течения вязкой жидкости [1,2,3]. Учитывая, что до разделения фракций они находятся в одном слое, ниже предлагается упрощенный вариант теории, когда движение неразделенной на фракции смеси описывается одной системой уравнений течения вязкой жидкости. Отделение проходовой фракции от смеси на решете учитывается в граничном условии на внешней цилиндрической поверхности, как проникание (отбор) части смеси через эту поверхность. При таком подходе приходится решать краевую задачу лишь для одной системы дифференциальных уравнений, что существенно упрощает моделирование процесса сепарации. Целью работы является реализация указанного подхода для вертикального цилиндрического решета виброосепаратора. Ставится задача построения компактных расчетных формул для установившегося осесимметричного движения, в которых учитывается влияние отделения проходовой фракции на кинематические характеристики потока смеси по решету.

**Постановка краевой задачи.** Учитывая осесимметричность и стационарность потока, движение сыпучей зерновой массы описываем системой уравнений [4]:

$$\begin{aligned}
 & u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} = \\
 & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} \right); \\
 & u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} - \frac{u_r u_\varphi}{r} = \\
 & = \nu \left( \nabla^2 u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2} \right); \\
 & u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \\
 & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g + \nu \nabla^2 u_z.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь оператор Лапласа в цилиндрических

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} -$$



координатах  $roz$ , показанных на рисунке 1;  $u_r, u_\phi, u_z$  – радиальная, окружная и осевая проекции скорости потока;  $\nu, \rho$  – усредненные кинематический коэффициент вязкости и плотность смеси;  $g$  – ускорение свободного падения;  $p = p(r, z)$  – давление в цилиндрическом кольцевом слое зерна.

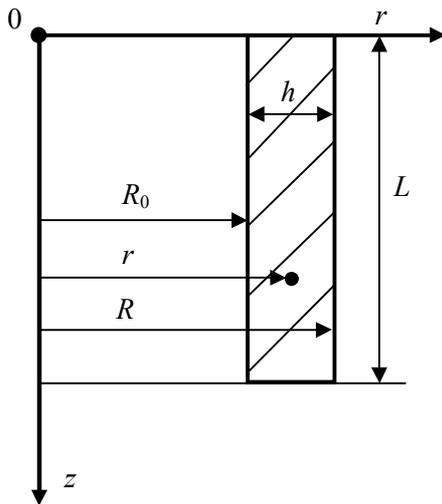


Рис. 1. Расчетная схема

Вопросы теоретического определения  $\nu$  и динамического коэффициента вязкости смеси  $\mu = \rho \cdot \nu$  рассмотрены в работах [1,5,6], где установлена зависимость  $\mu$  от амплитуды и частоты колебаний решета.

Проекции скорости должны удовлетворять условию неразрывности потока [4]:

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial}{\partial z}(ru_z) = 0, \quad (2)$$

а также граничным условиям:

$$\begin{aligned} u_r &= u_n; & u_z &= u_z^*; \\ u_\phi &= \omega_1 R \text{ при } r = R \end{aligned} \quad (3)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} - p = 0; \\ \sigma_{r\phi} &= \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) = 0; \\ \sigma_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = 0 \text{ при } r = R_0. \end{aligned} \quad (4)$$

В граничных условиях:  $R$  – радиус решета, которое вращается с угловой

скоростью  $\omega_1$ ;  $R_0$  – усредненный радиус внутренней цилиндрической поверхности смеси, свободной от нормальных и касательных напряжений;  $u_n$  – скорость движения проходовой фракции через решето;  $u_z^*$  – скорость скольжения смеси по поверхности решета вдоль его образующей.

Заметим, что вследствие отделения проходовой фракции от смеси, радиус внутренней поверхности смеси будет зависеть от  $z$ . Но, принимая объемное содержание проходовой фракции значительно меньшим объема содержания сходящей фракции, этой зависимостью пренебрегаем и вводим понятие постоянного усредненного радиуса  $R_0$  внутренней поверхности.

В дальнейшем  $u_n$  и  $u_z^*$  также считаем постоянными величинами.

По условиям стационарности потока проекции скорости не зависят от координаты  $z$ , а осевой перепад давления  $\Delta \bar{p}$  на единице длины (высоты) решета постоянен. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{\partial u_\phi}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\Delta \bar{p} = const. \end{aligned} \quad (5)$$

Условие неразрывности потока (2), с учетом (5), будет выполняться, когда

$$u_r = cr^{-1}, \quad (6)$$

где  $c$  – произвольная постоянная.

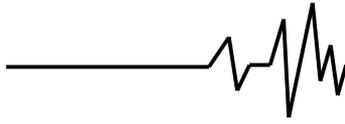
Из первого граничного условия в (3) и формулы (6) следует, что

$$c = Ru_n; \quad u_r = u_n \frac{R}{r}, \quad (7)$$

т.е. радиальная проекция скорости потока обратно пропорциональна  $r$ . В этом отличие предлагаемой теории от изложенной в работах [1,7,8], где  $u_r = 0$ .

Используя (5) и (6), уравнения (1) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{r^3} + \frac{u_\phi^2}{r} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}; \\ \frac{c}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{c}{r^2} u_\phi &= \end{aligned} \quad (8)$$



$$= v \left( \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right);$$

$$\frac{c}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} = g + \frac{\Delta \bar{p}}{\rho} + v \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right).$$

$$p = c_3 - \frac{\rho}{2r^2} \left( c^2 + c_1^2 - \frac{4c_1c_2}{\lambda} r^{2+\lambda} - \frac{c_2^2}{1+\lambda} r^{4+2\lambda} \right). \quad (12)$$

При этом также упрощаются граничные условия в (4), принимая форму

$$p = 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\varphi}{r} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = R_0. \quad (9)$$

**Аналитическое решение упрощенной краевой задачи.** Введя обозначение  $\lambda = c/v$ , после группировки подобных слагаемых, второе уравнение системы (8) сводим к уравнению Эйлера

$$\frac{d^2 u_\varphi}{dr^2} + \frac{1-\lambda}{r} \frac{du_\varphi}{dz} - \frac{1+\lambda}{r^2} u_\varphi = 0.$$

Его общим решением является

$$u_\varphi = c_1 r^{-1} + c_2 r^{1+\lambda}. \quad (10)$$

Используя граничные условия (3) и (9) находим, что

$$c_1 = \omega_1 R^2 \frac{\lambda R_0^{2+\lambda}}{2R^{2+\lambda} + \lambda R_0^{2+\lambda}};$$

$$c_2 = \frac{2\omega_1 R^2}{2R^{2+\lambda} + \lambda R_0^{2+\lambda}}. \quad (11)$$

Из (10) следует, что окружная проекция скорости потока является нелинейной функцией  $r$ , т.е. зависимость  $u_\varphi$  от  $r$  более сложная, чем в абсолютно твердом вращающемся теле. К линейной зависимости  $u_\varphi$  от  $r$  приводит предельный переход  $\lambda \rightarrow 0$  в решениях (10), (11), когда не учитывается отделение проходовой фракции на решетке [7,8].

Интегрируя первое уравнение системы (8), с учетом (10), получаем распределение давлений в смеси с точностью до произвольной постоянной  $c_3$ :

Постоянную  $c_3$  определяем с помощью первого граничного условия в (9). Она принимает значение

$$c_3 = \frac{\rho}{2R_0^2} \left( c^2 - 4\mu c + c_1^2 - \frac{4c_1c_2}{\lambda} R_0^{2+\lambda} - \frac{c_2^2}{1+\lambda} R_0^{4+2\lambda} \right). \quad (13)$$

Без учета отделения проходовой фракции:  $c = 0$ ;  $\frac{c_1}{\lambda} = \frac{\omega_1 R_0^2}{2}$ ;  $c_2 = \omega_1$ ;  $c_1 = 0$  и из выражений (12), (13) следует, что  $c_3 = -\frac{3}{2} \rho \omega_1^2 R_0^2$ ;  $p = \frac{1}{2} \rho \omega_1^2 (r^2 - R_0^2)$ .

Здесь выражение  $p$  идентично тем, что имеются в работах [1,7], где рассматривалось движение смеси по решетке без учета отделения проходовой фракции.

С учетом введенных выше обозначений третье уравнение системы (8) принимает вид

$$\frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{1-\lambda}{r} \frac{du_z}{dr} = -\frac{1}{v} \left( g + \frac{\Delta \bar{p}}{\rho} \right).$$

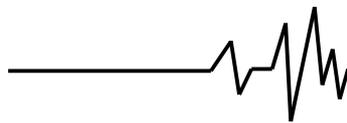
Введением вспомогательной функции  $w = \frac{du_z}{dr}$  его преобразуем в линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dw}{dr} + \frac{1-\lambda}{r} w = -\frac{1}{v} \left( g + \frac{\Delta \bar{p}}{\rho} \right).$$

Решив линейное уравнение, находим общее решение с точностью до постоянной  $c_4$ :

$$w = \frac{du_z}{dr} = -\frac{\rho g + \Delta \bar{p}}{\mu(2-\lambda)} r + c_4 r^{\lambda-1}. \quad (14)$$

Постоянную определяем с помощью третьего граничного условия в (9). Она принимает значение



$$c_4 = \frac{\rho g + \Delta \bar{p}}{\mu(2-\lambda)} R_0^{2-\lambda}.$$

Повторное интегрирование выражения (14) дает

$$u_z = \frac{\rho g + \Delta \bar{p}}{\mu(2-\lambda)\lambda} \left( R_0^{2-\lambda} r^\lambda - \frac{\lambda r^2}{2} \right) + c_5. \quad (15)$$

Здесь  $c_5$  – произвольная постоянная. Ее находим, подставив (15) во второе граничное условие в (3). Получаем

$$c_5 = u_z^* - \frac{\rho g + \Delta \bar{p}}{\mu(2-\lambda)\lambda} \left( R_0^{2-\lambda} R^\lambda - \frac{\lambda R^2}{2} \right).$$

Учитывая это значение  $c_5$  и выражение (15), приходим к компактной формуле для осевой проекции скорости потока

$$u_z = u_z^* + \frac{\rho g + \Delta \bar{p}}{\mu(2-\lambda)\lambda} \left[ R_0^{2-\lambda} (r^\lambda - R^\lambda) + \frac{\lambda}{2} (R^2 - r^2) \right]. \quad (16)$$

Без учета отделения проходовой фракции в выражении (16) появляется неопределенность типа 0/0. Предельным переходом  $\lambda \rightarrow 0$  из (16) получаем

$$u_z = u_z^* + \frac{\rho g + \Delta \bar{p}}{2\mu} \left( R_0^2 \ln \frac{r}{R} + \frac{R^2 - r^2}{2} \right), \quad (17)$$

что согласуется с результатами работы [8].

**Построение формул для расчета производительности решета и других характеристик процесса сепарирования.** Рассмотрим отдельно производительности решета  $Q_n$  и  $Q_c$  по проходовой и сходовой фракциям соответственно. Первую легко определить по формуле

$$Q_n = 2\pi R L u_n, \quad (18)$$

в которой  $L$  – длина (высота) сепарирующей части решета.

Вторую находим интегрированием

$$Q_c = 2\pi \int_{R_0}^R r u_z dr. \quad (19)$$

Подставив (16) в (19) получаем

$$Q_c = \pi(R^2 - R_0^2) u_z^* + \frac{\pi(\rho g + \Delta \bar{p}) R_0^4}{\mu(2-\lambda)} \times \left\{ \frac{2 \left( \frac{R}{R_0} \right)^\lambda - 1}{\lambda} + \frac{\left( \frac{R}{R_0} \right)^\lambda \left[ 1 - \left( \frac{R}{R_0} \right)^2 \right]}{2 + \lambda} \right\} + \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{R}{R_0} \right)^2 - 1 \right]^2. \quad (20)$$

При  $\lambda \rightarrow 0$  в формуле (20) появляется неопределенность вида 0/0. Выполнив предельный переход, получаем

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} Q_c = \pi(R^2 - R_0^2) u_z^* + \frac{\pi(\rho g + \Delta \bar{p})}{2\mu} \times \left( R_0^4 \ln \frac{R}{R_0} + \frac{3R_0^4 + R^4}{4} - R^2 R_0^2 \right),$$

что согласуется с результатами работы [8].

Обычно толщина сепарируемого слоя  $h = R - R_0$  гораздо меньше радиуса решета  $R$ . Это позволяет упростить формулу (20). Отбросив слагаемые высшего порядка малости, находим что

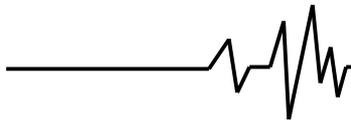
$$Q_c \approx \pi(R^2 - R_0^2) u_z^* + \frac{\pi(\rho g + \Delta \bar{p})}{\mu} \times \left( \frac{2}{3} R h^3 + \frac{1}{4} \lambda h^4 - \frac{2}{3} h^4 \right). \quad (21)$$

Положив  $u_z^* = 0$ , а также приняв во внимание, что  $h \ll R$ , из последнего выражения легко получить формулы  $Q_c$ , которые имеются для цилиндрического решета и наклонного лотка в работе [1].

Скорость движения проходовой фракции через решето  $u_n$  можно выразить через отношение

$$\eta = Q_n Q_c^{-1}. \quad (22)$$

Подстановка (18) и (21) в (22) приводит к формуле:



$$u_n = \frac{\eta h \left[ \left(1 - \frac{h}{2R}\right) u_z^* + \frac{\rho g + \Delta \bar{p}}{3\mu R} h^2 (R - h) \right]}{L - \frac{\rho g + \Delta \bar{p}}{8\mu \nu} h^4 \eta}, \quad (23)$$

которую удобно применять для теоретического определения  $u_n$ , если известно  $\eta$  для сепарируемой смеси.

Покажем, что при постоянной суммарной производительности решета

$$Q = Q_n + Q_c = (1 + \eta) Q_c = const$$

увеличение  $\eta$  приводит к уменьшению усредненной толщины движущегося кольцевого слоя. Обозначим символом  $h_c$  толщину кольцевого слоя при  $\eta = 0$ , когда он движется, как чисто сходовая фракция, без отделения проходовой фракции. Согласно изложенной теории эту толщину можно определить по приближенной формуле

$$h_c = h \left[ (1 + \eta) \left( 1 + \frac{3\lambda h}{8(R - h)} \right) \right]^{1/3}. \quad (24)$$

Из (24) следует, что  $h_c > h$  и неравенство усиливается с возрастанием  $\eta$  и  $\lambda$ . Чтобы оставалась постоянной  $h_c$  при увеличении  $\eta$  нужно уменьшать  $h$ .

Располагая значением  $Q_c$  далее легко вычислить среднюю скорость потока смеси

$$u_{cp} = \frac{Q_c}{\pi(R^2 - R_0^2)} \quad (25)$$

и другие параметры.

Обычно в расчетах полагают  $\Delta \bar{p} = 0$ . Скорость скольжения смеси вдоль образующей  $u_z^*$  задают равной нулю когда смесь «прилипает» к поверхности решета. Такое граничное условие принято в гидродинамике. Но если равнодействующая сил взаимодействия зерна с решетом меньше веса смеси, то  $u_z^*$  определяют из условия граничного равновесия [8].

**Численные результаты и выводы.** Расчеты проведены для виброрешета с параметрами [1]:  $R = 0,3075$  м;  $L = 0,5$  м;  $\omega_1 = 11,77$  с<sup>-1</sup>. Осевые колебания его происходили с амплитудой  $A^* = 0,008$  м и

частотой  $\omega = 75,9$  с<sup>-1</sup>. Рассматривали движение зерновой смеси пшеницы, у которой [1]:  $\rho = 750$  кг/м<sup>3</sup>; коэффициент внутреннего трения  $f = 0,5$ ; усредненные радиус и масса зерна соответственно:  $0,001825$  м и  $4 \cdot 10^{-5}$  кг. Вычисленные для них коэффициенты вибровязкости по формулам [6] при  $\xi = 0,9$ ;  $\gamma = 2$  составили:  $\mu = 0,0768$  Па·с – в слое толщиной  $0,004$  м и  $\mu = 0,1012$  Па·с – в слое толщиной  $0,005$  м. В дальнейшем на рисунках 2, 3, 4 цифрой 1 отмечены результаты расчетов для слоя толщиной  $h = 0,004$  м, а цифровой 2 – для слоя толщиной  $h = 0,005$  м.

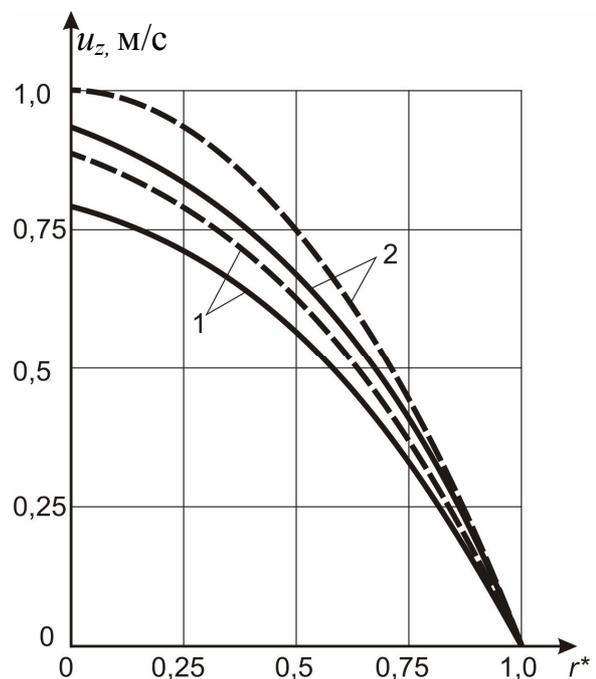
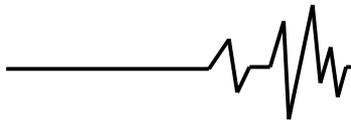


Рис. 2. Профили осевой скорости  $u_z$

На рис. 2 показаны значения осевой скорости движения смеси в зависимости от безразмерной радиальной координаты  $r^* = \frac{1}{h^*}(-R + r + h^*)$ . Сплошными линиями отмечены результаты расчетов по формуле (16), в которой задавали  $\eta = 0,3$ ;  $u_z^* = 0$ ,  $h^* = h$ ,  $\Delta \bar{p} = 0$ . Пунктирными линиями отмечены скорости, вычисленные по формуле (17), где полагали  $R_0 = R - h_c$ , а  $h^* = h_c$  определяли по (24). Сравнение результатов расчета с учетом отделения проходовой



фракции от смеси (сплошные графики) и без него (пунктирные графики) показывает, что при учете отделения фракции уменьшаются скорости движения слоя неразделенной смеси. Это касается и усредненной толщины движущегося слоя, поскольку  $h < h_c$ .

На рис. 3 показаны зависимости отношения  $u_n$  к  $u_{cp}$  при различных  $\eta$ . Значение  $u_{cp}$  вычислили по (25). С увеличением  $\eta$  происходит увеличение отношения скоростей, причем зависимость близка к линейной.

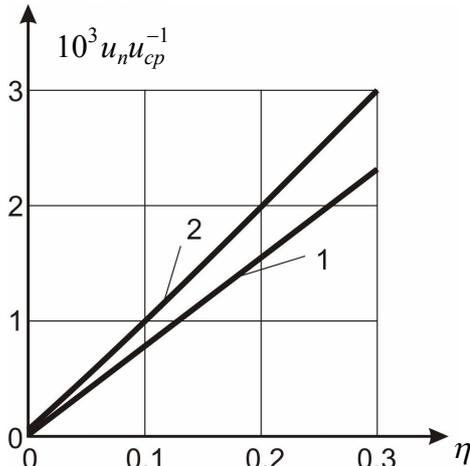


Рис. 3. Графики зависимости  $u_n u_{cp}^{-1}$  от  $\eta$

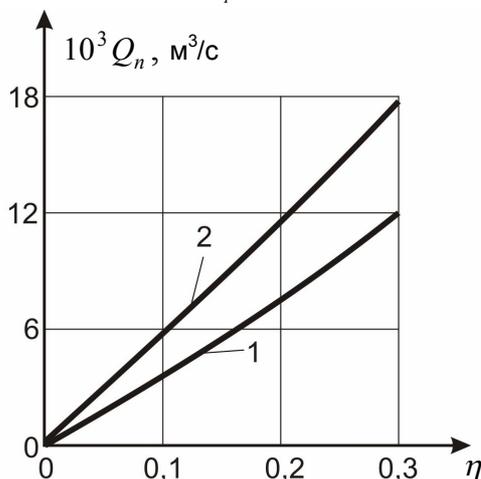


Рис. 4. Графики зависимости  $Q_n$  от  $\eta$

На рис. 4 представлены графики производительности решета  $Q_n$  по отделению проходовой фракции при различных  $\eta$ . Зависимости являются нелинейными, где с увеличением  $\eta$  существенно повышается производительность решета.

Расчеты показали, что изложенная теория, приводящая к компактным расчетным формулам, позволяет учитывать отделение проходовой фракции от смеси на решете, т.е. более полно описывает процесс сепарирования зерна по сравнению с другими техническими теориями.

#### Литература

1. Тищенко Л. Н. Интенсификация сепарирования зерна. – Харьков: Основа, 2004. – 224 с.
2. Тищенко Л. Н. К нелинейной двухпоточковой теории виброцентробежной сепарации зерновых смесей // Вибрации в технике и технологиях. – 2003. – № 6 (32). – С. 13-17.
3. Тищенко Л. Н. К двухпоточковой теории виброцентробежной сепарации неидеальных зерновых смесей // Констрування, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин. Збірник наукових праць КДТУ. – Кіровоград: КДТУ, 2003. – Вип. 33. – С. 131-140.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 847 с.
5. Тищенко Л. Н., Абдуева Ф. М., Ольшанский В. П. К расчету вязкости псевдооживленной сыпучей зерновой смеси при виброцентробежном сепарировании // Вісник ХНТУСГ. Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв. – Харків: ХНТУСГ, 2007. – Вип. 58. – С. 44-51.
6. Тищенко Л. Н., Абдуева Ф. М., Ольшанский В. П. Сравнение двух способов определения коэффициента вибровязкости псевдооживленной зерновой смеси при виброцентробежном сепарировании // Вібратиї та технологіях. – 2008. – № 1 (50). – С. 96-100.
7. Тищенко Л. Н., Абдуева Ф. М., Ольшанский В. П. О решениях упрощенных уравнений Навье-Стокса в гидродинамической модели движения зерновой смеси // Механізація сільськогосподарського виробництва. Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства. – Харків: ХНТУСГ, 2008. – Вип. 75. Том 1. – С. 217-223.
8. Тищенко Л. Н., Абдуева Ф. М., Ольшанский В. П. К исследованию движения зерновой смеси по модернизированным решетам виброцентробежного сепаратора при малой загрузке // Збірник наукових праць Луганського національного аграрного університету. Серія: технічні науки, № 87. – Луганськ: ЛНАУ, 2008. – С. 366-373.