Остапенко В. А.

Днепропетровский национальный университет

УДК 534.0

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВРАЩЕНИЯ ВАЛКОВ ВИБРАЦИОННЫХ КЛАССИФИКАТОРОВ ПРИ ПРОСТОМ РЕЗОНАНСЕ

Розглянуто необхідні і достатні умови існування періодичних режимів обертання валків вібраційних класифікаторів при звичайному резонансі. Рівняння обертання валків є система, яка близька до систем Ляпунова. Одержаний асимптотичний розклад цих періодичних розв'язків у випадку, який розглядається.

Necessary and sufficient conditions of existence of periodic modes for roller's rotation of vibrating qualifiers at simple resonance are considered. The equations of roller's rotation represent the system close to systems of Lyapunov. It is obtained asymptotic expansion of these periodic solutions in a considered case.

Введение. Валковые классификаторы в последние годы находят все большее применение в горной, металлургической и строительной промышленности, так как они обеспечивают высокую эффективность классификации материалов [1-4]. Особенно перспективны валковые классификаторы вибрационного типа в связи с тем, что в таких конструкциях нет необходимости в создании приводов для вращения валков. В этой конструкции жесткая рама классификатора приводится в колебательное движение с помощью дебалансных вибраторов (см. рис. 1).

Вдоль рамы на равных расстояниях расположенные жестко связанные с ней оси валков. Валки свободно посажены на оси. Под действием вибраторов рама и вместе с ней и оси валков совершают движение по эллиптической или, в частности, по круговой траектории в вертикальной плоскости [1,2]. При этом под действием сил инерции в движение приводятся также валки, перекатываясь по осям. В [4] показано, что перекатывание валков по осям происходит с углом запаздывания α по отношению к углу поворота рамы классификатора ψ (см. рис. 2). С точки зрения качественной работы классификатора важно получить условия периодического, синхронного и синфазного вращения валков. Кроме того, необходимо обеспечить устойчивость этих режимов. Проблема построения устойчивого периодического решения уравнения вращения валков при простом резонансе рассматривается в настоящей статье. Построение такого рода решения в нерезонансном случае рассмотрено ранее [7].

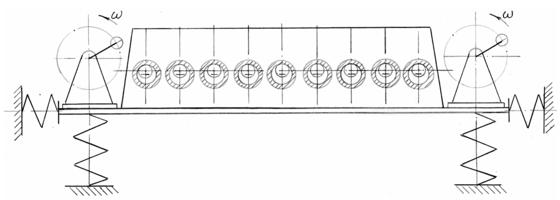

Рис. 1. Кинематическая схема классификатора

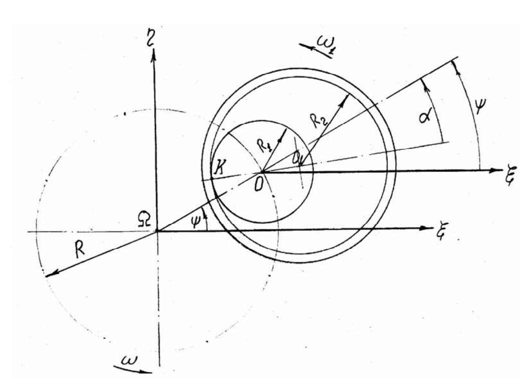

Рис. 2. Схема вращения валка

Постановка проблемы. В работах [1-3] получено уравнение для угла запаздывания вращения валков относительно угла поворота дебалансов. В работах [5,6] показано, что это уравнение может быть представлено в виде системы уравнений, близкой к системе Ляпунова:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + \frac{1}{\lambda} f(y) + \frac{\varepsilon}{\lambda}(\cos y \cos \omega t + \sin y \sin \omega t);$$
$$\frac{dy}{dt} = \lambda x, \tag{1}$$

где

$$f(y) = -A \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\ , \tag{2}$$

ω – угловая скорость вращения вибраторов.

В [6] показано, что простой резонанс в системе возникает при $\lambda = p\omega$, где p – целое положительное число, отличное от единицы.

Будем рассматривать также случай близкий к резонансному, когда

$$p\omega - \lambda = \varepsilon q. \tag{3}$$

Тогда систему (1) можно представить в виде:

$$\frac{dx}{dt} = -p\omega y + \frac{1}{p\omega - \varepsilon q} f(y) +$$
$$+\frac{\varepsilon}{p\omega - \varepsilon q}(\cos y \cos \omega t + \sin y \sin \omega t) + \varepsilon q y\ ; \tag{4}$$
$$\frac{dy}{dt} = p\omega x - \varepsilon q x.$$

Учитывая аналитичность по ε функции $h(\varepsilon) = \dfrac{1}{p\omega - \varepsilon q}$, систему (4) можно представить также в виде

$$\frac{dx}{dt} = -p\omega y + \varepsilon q y + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!q^n}{(p\omega)^{n+1}} \varepsilon^n f(y) +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!q^n}{(p\omega)^{n+1}} \varepsilon^{n+1} (\cos y \cos \omega t + \sin y \sin \omega t)\ ;$$
$$\frac{dy}{dt} = p\omega x - \varepsilon q x. \tag{5}$$

Построение асимптотического разложения решения. Задача заключается в получении условий существования в системе (5) $\frac{2\pi}{\omega}$ периодического по t решения, так как такой же период имеет возмущение этой системы. Для того чтобы решение системы (5) было $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическим по t, необходимо, чтобы решение порождающей системы, то есть системы

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = -\lambda \mathrm{y} + \frac{1}{\lambda}\mathrm{f(y)}\ ; \quad \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = \lambda \mathrm{x} \tag{6}$$

также было $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическим по t. В [6] показано, что система (6) может иметь несколько $\frac{2\pi}{\omega}$ периодических решений. Однако практический интерес представляет только тривиальное ($x^0(t) \equiv 0$; $y^0(t) \equiv 0$) решение системы (6). Поэтому мы ограничиваемся здесь построениями периодических решений, обращающихся при $\varepsilon \to 0$ в тривиальное решение порождающей системы.

А это значит, что решение системы (6) должно отыскиваться в форме

$$x^{(0)}(t,\varepsilon) = \varepsilon x1^{(0)}(t) + \varepsilon^2 x2^{(0)}(t) + \dots\ ;$$
$$y^{(0)}(t,\varepsilon) = \varepsilon y1^{(0)}(t) + \varepsilon^2 y2^{(0)}(t) + \dots \tag{7}$$

После подстановки формы разложения (7) в систему (6) и приравнивания в левых и правых частях получившихся равенств коэффициентов при одинаковых степенях ε, получим следующие системы дифференциальных уравнений для определения коэффициентов разложения (7):

$$\frac{dx1^{(0)}}{dt} = -p\omega y1^{(0)} + \frac{1}{p\omega}\cos \omega t; \qquad \frac{dy1^{(0)}}{dt} = p\omega x1^{(0)};$$

$$\frac{dx2^{(0)}}{dt} = -p\omega y2^{(0)} + q y1^{(0)} + \frac{1}{p\omega} y1^{(0)} \sin \omega t +$$
$$+\frac{q}{(p\omega)^2}\cos \omega t; \qquad \frac{dy2^{(0)}}{dt} = p\omega x2^{(0)} - q x1^{(0)};$$

$$\frac{dx3^{(0)}}{dt} = -p\omega y3^{(0)} + q y2^{(0)} + \frac{A}{3!\,p\omega}(y1^{(0)})^3 +$$
$$+\frac{1}{p\omega}\left(-\frac{1}{2!}(y1^{(0)})^2 + \frac{2!q^2}{(p\omega)^3}\right)\cos \omega t +$$
$$+\frac{1}{p\omega}\left(y2^{(0)} + \frac{q}{p\omega} y1^{(0)}\right)\sin \omega t;$$
$$\frac{dy3^{(0)}}{dt} = p\omega x3^{(0)} - q x2^{(0)};$$

$$\frac{dx4^{(0)}}{dt} = -p\omega y4^{(0)} + q y3^{(0)} + \frac{A}{2p\omega}(y1^{(0)})^2 y2^{(0)} +$$
$$+\frac{qA}{6(p\omega)^2}(y1^{(0)})^3 + \frac{1}{p\omega}\Big[-y1^{(0)}\, y2^{(0)} \cos \omega t + (y3^{(0)} -$$
$$-\frac{1}{3!}(y1^{(0)})^3)\sin \omega t\Big] + \frac{q}{(p\omega)^2}\Big[-\frac{1}{2}(y1^{(0)})^2 \cos \omega t +$$
$$+y2^{(0)} \sin \omega t\Big] + \frac{2q}{(p\omega)^3} y1^{(0)} \sin \omega t + \frac{6q^3}{(p\omega)^4}\cos \omega t;$$

$$\frac{dy4^{(0)}}{dt} = p\omega x4^{(0)} - q x3^{(0)}. \tag{8}$$

....

Для того чтобы решения (7) были $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическими, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты разложений (7) имели период $\frac{2\pi}{\omega}$. Поэтому необходимо отыскивать только $\frac{2\pi}{\omega}$ периодические решения каждой пары уравнений (8).

Обозначим правые части первых уравнений *i*-й пары уравнений (8) через $f_i(t)$, а вторых уравнений – через $F_i(t)$. Тогда необходимые и достаточные условия существования $\frac{2\pi}{\omega}$ периодических решений в каждой *i*-й паре уравнений (8) будут иметь вид [3,4]:

$$J_1^{(i)}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\left[f_i(t)\cos p\omega t+F_i(t)\sin p\omega t\right]dt=0\,;$$

$$J_2^{(i)}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\left[F_i(t)\cos p\omega t-f_i(t)\sin p\omega t\right]dt=0\,.\qquad(9)$$

общее решение первой пары уравнений (8) будет иметь вид:

$$x_1^{(0)}(t)=C_{11}\cos p\omega t-C_{21}\sin p\omega t+\frac{1}{p\omega^2(p^2-1)}\sin\omega t$$

$$y_1^{(0)}(t)=C_{11}\sin p\omega t+C_{21}\cos p\omega t+\frac{1}{\omega^2(p^2-1)}\cos\omega t$$

Эти функции будут периодическими периода $\frac{2\pi}{\omega}$ при любых значениях произвольных постоянных C_{11} и C_{21}. Поэтому значениями этих констант можно распорядиться для того, чтобы обеспечить существование $\frac{2\pi}{\omega}$ периодического решения второй пары уравнений (8).

После подстановки решения первой пары уравнений (8) во вторую пару уравнений (8) и приведения правых частей получившихся уравнений к стандартному виду, вторая пара уравнений (8) примет вид:

$$\frac{dx_2^{(0)}}{dt}=-p\omega y_2^{(0)}+\frac{q}{\omega^2}\left(\frac{1}{p^2-1}+\frac{1}{p^2}\right)\cos\omega t+$$
$$+\frac{1}{2p\omega^3(p^2-1)}\sin 2\omega t+\frac{1}{2p\omega}C_{11}\cos(p-1)\omega t-$$
$$-\frac{1}{2p\omega}C_{21}\sin(p-1)\omega t+qC_{11}\sin p\omega t+qC_{21}\cos p\omega t-$$
$$-\frac{1}{2p\omega}C_{11}\cos(p+1)\omega t+\frac{1}{2p\omega}C_{21}\sin(p+1)\omega t;$$

$$\frac{dy_2^{(0)}}{dt}=p\omega x_2^{(0)}-\frac{q}{p\omega^2(p^2-1)}\sin\omega t-\qquad(10)$$
$$-qC_{11}\cos p\omega t+qC_{21}\sin p\omega t.$$

Здесь и в дальнейшем мы будем приводить правые части каждой *i*-й пары уравнений (8) к стандартному виду. Это значит, что их можно представить в виде выражений:

$$f_i(t)=\sum_{k=1}^{n}(A_{1k}\cos k\omega t+B_{1k}\sin k\omega t);$$

$$F_i(t)=\sum_{k=1}^{n}(A_{2k}\cos k\omega t+B_{2k}\sin k\omega t),\qquad(11)$$

в которых количество слагаемых n будет зависеть от индекса i.

Тогда условия (9) сводятся к условиям

$$\frac{\pi}{\omega}(A_{1p}+B_{2p})=0;\quad \frac{\pi}{\omega}(A_{2p}-B_{1p})=0,$$

то есть к условиям:

$$A_{1p}=-B_{2p};\quad A_{2p}=B_{1p}\,.\qquad(12)$$

В частности если $p\neq 2$, коэффициенты A_{ip} и B_{ip} в системе (10) имеют вид:

$$A_{1p}=qC_{21};\quad B_{1p}=qC_{11};\quad A_{2p}=-qC_{11};\quad B_{2p}=qC_{21}\,.$$

Поэтому условия (9) могут быть выполнены только при

$$C_{11}=0;\qquad C_{21}=0\,.\qquad(13)$$

Следовательно, система (8) имеет $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическое решение лишь при выполнении условий (13), поэтому она принимает вид:

$$\frac{dx_2^{(0)}}{dt}=-p\omega y_2^{(0)}+\frac{q}{\omega^2}\left(\frac{1}{p^2-1}+\frac{1}{p^2}\right)\cos\omega t+$$
$$+\frac{1}{2p\omega^3(p^2-1)}\sin 2\omega t;$$

$$\frac{dy_2^{(0)}}{dt}=p\omega x_2^{(0)}-\frac{q}{p\omega^2(p^2-1)}\sin\omega t,\qquad(14)$$

а решение первой пары уравнений (8) будет иметь вид:

$$x_1^{(0)}(t)=\frac{1}{p\omega^2(p^2-1)}\sin\omega t\,;$$

$$y_1^{(0)}(t)=\frac{1}{\omega^2(p^2-1)}\cos\omega t.\qquad(15)$$

Общее решение системы (14) может быть представлено в виде:

$$x_2^{(0)}(t)=C_{11}\cos p\omega t-C_{21}\sin p\omega t+\varphi_2(t)\,;$$

$$y_2^{(0)}(t)=C_{11}\sin p\omega t+C_{21}\cos p\omega t+\psi_2(t)\qquad(16)$$

и будет $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическим при любых значениях постоянных C_{11} и C_{21}.

Частное решение неоднородной системы (14) будем искать в виде:

$$\varphi_2(t) = A_2 \sin \omega t + C_2 \cos 2\omega t;$$

$$\psi_2(t) = B_2 \cos \omega t + D_2 \sin 2\omega t. \qquad (17)$$

После подстановки формы решения (17) в систему (14) получим

$$A_2 = -\frac{q}{\omega^3 p^2 (p^2-1)}; \quad B_2 = \frac{pq}{\omega^3 (p^2-1)^2};$$

$$C_2 = \frac{1}{p\omega^4 (p^2-1)(p^2-4)};$$

$$D_2 = \frac{1}{2\omega^4 (p^2-1)(p^2-4)}. \qquad (18)$$

При таких значениях постоянных A_2, B_2, C_2, D_2 решение (16) с функциями φ_2 и ψ_2 из (17) будет $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическим при любых значениях произвольных постоянных C_{11} и C_{21}, если только $p \neq 2$.

При $p = 2$ изменятся значения коэффициентов в выражениях (11). Именно, при $p = 2$ будем иметь:

$$A_{1p} = qC_{21}; \quad B_{1p} = qC_{11} + Q_2;$$

$$A_{2p} = -qC_{11}; \quad B_{2p} = qC_{21}.$$

Поэтому из условий (12) следует:

$$C_{21} = 0;$$

$$C_{11} = -\frac{Q_2}{2q} = -\frac{1}{4pq\omega^3 (p^2-1)}. \qquad (19)$$

Следовательно, при $p = 2$ решение первой пары уравнений (8) примет вид:

$$x_1^{(0)} = -\frac{1}{4pq\omega^3 (p^2-1)} \cos \omega t + \frac{1}{p\omega^2 (p^2-1)} \sin \omega t;$$

$$y_1^{(0)} = -\frac{1}{4pq\omega^3 (p^2-1)} \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2 (p^2-1)} \cos \omega t, \qquad (20)$$

а система (10) запишется в виде:

$$\frac{dx_2^{(0)}}{dt} = -2\omega y_2^{(0)} + \frac{1}{12q\omega^2}\left(7q^2 - \frac{1}{8\omega^2}\right) \cos \omega t +$$

$$+ \frac{1}{24\omega^3} \sin 2\omega t + \frac{1}{96q\omega^4} \cos 3\omega t;$$

$$\frac{dy_2^{(0)}}{dt} = 2\omega x_2^{(0)} - \frac{q}{6\omega^2} \sin \omega t + \frac{1}{24\omega^3} \cos 2\omega t. \qquad (21)$$

Частное решение системы (21) будем искать в виде:

$$\varphi_2(t) = A_2 \sin \omega t + C_2 \cos 2\omega t + E_2 \sin 3\omega t;$$

$$\psi_2(t) = B_2 \cos \omega t + D_2 \sin 2\omega t + H_2 \cos 3\omega t. \qquad (22)$$

Подстановка (22) в систему (21) позволяет определить коэффициенты в формулах (22):

$$A_2 = \frac{1}{288q\omega^5} - \frac{q}{12\omega^3}; \quad B_2 = \frac{q}{3\omega^3} - \frac{1}{144q\omega^5};$$

$$D_2 = C_2 + \frac{1}{48\omega^4}; \quad E_2 = \frac{1}{160q\omega^5}; \quad H_2 = -\frac{1}{240q\omega^5}.$$

Таким образом, общим решением системы (10) при $p = 2$ будут функции:

$$x_2^{(0)} = C_{12} \cos 2\omega t - C_{22} \sin 2\omega t + A_2 \sin \omega t +$$

$$+ E_2 \sin 3\omega t; \quad y_2^{(0)} = \left(C_{12} + \frac{1}{48\omega^4}\right) \sin 2\omega t + \qquad (24)$$

$$+ C_{22} \cos 2\omega t + B_2 \cos \omega t + H_2 \cos 3\omega t.$$

При произвольных значениях постоянных C_{12} и C_{22} функции (24) будут $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическими.

Таким образом, оказывается, что в рассматриваемой системе уже на этом этапе анализа возникает два существенно различных резонанса: при $p = 2$ и при $p \neq 2$. Это значит, что анализ третьей пары уравнений (8) необходимо проводить отдельно для $p = 2$ и $p \neq 2$.

При $p = 2$ общим решением третьей пары уравнений (8) будут функции:

$$x_3^{(0)} = C_{13} \cos p\omega t - C_{23} \sin p\omega t + \varphi_3(t);$$

$$y_3^{(0)}(t) = C_{13} \sin p\omega t + C_{23} \cos p\omega t + \psi_3(t), \qquad (25)$$

где частное решение неоднородной системы следует искать в виде:

$$\varphi_3(t) = a_3 + A_3 \sin \omega t + B_3 \cos \omega t + E_3 \sin 2\omega t +$$

$$+ G_3 \cos 2\omega t + N_3 \sin 3\omega t + M_3 \cos 3\omega t + L_3 \cos 4\omega t;$$

$$\psi_3(t) = b_3 + C_3 \sin \omega t + D_3 \cos \omega t + H_3 \sin 2\omega t +$$

$$+ R_3 \cos 2\omega t + I_3 \sin 3\omega t + J_3 \cos 3\omega t + F_3 \sin 4\omega t. \qquad (26)$$

После подстановки формы решения (26) в третью пару уравнений (8), которая получается при $p = 2$, получим значения коэффициентов в формулах (26). В связи с громоздкостью выражений и ограниченным объемом статьи они здесь не приводятся.

При $p \neq 2$ общее решение третьей пары уравнений (8) также будет иметь вид (25). Представив правые части третьей пары уравнений (8) в виде (33) при $p \neq 3$ будем иметь из (12):

$$A_{1p} = qC_{22}; \quad B_{1p} = qC_{12}; \quad A_{2p} = -qC_{12}; \quad B_{2p} = qC_{22}.$$

Поэтому из необходимых и достаточных условий (12) существования в третьей паре уравнений (8) $\frac{2\pi}{\omega}$ периодических решений следует

$$C_{12} = 0; \; C_{22} = 0. \qquad (27)$$

При получающихся $p=3$ равенствах (12) во избежание появления в решении вековых членов необходимо принять имеем:

$$A_{1p} = qC_{22} + V_{31};\quad B_{1p} = qC_{12};\quad A_{2p} = -qC_{12};$$
$$B_{2p} = qC_{22},$$

где

$$V_{31} = \frac{A}{24p\omega^7(p^2-1)^3} - \frac{1}{8p\omega^5(p^2-1)^2} - \frac{D_2}{2p\omega}.$$

Поэтому в данном случае из необходимых и достаточных условий (12) существования $\frac{2\pi}{\omega}$ периодических решений в третьей паре уравнений (8) следует

$$C_{12} = 0;\ C_{22} = -\frac{V_{31}}{2q}. \qquad (28)$$

Частное решение третьей пары уравнений (8) ищется в виде:

$$x_3^{(0)}(t) = A_3 \sin\omega t + C_3\cos 2\omega t + E_3 \sin 3\omega t +$$
$$+N_3\cos 4\omega t;\quad y_3^{(0)}(t) = B_3\cos\omega t + \qquad (29)$$
$$+D_3 \sin 2\omega t + H_3\cos 3\omega t + M_3 \sin 4\omega t.$$

При этом значения коэффициентов в решении (29) получаются разными при $p=2$, $p=3$ и $p>3$.

Аналогично, при анализе четвертой пары уравнений (8) уже необходимо рассматривать эту пару уравнений отдельно при $p=2$, $p=3$, $p=4$ и $p>4$. При этом решения этой пары уравнений для всех четырех случаев получаются различные.

В общем случае, при рассмотрении *n*-й пары уравнений (8) необходимо отдельно рассматривать случаи $p=2$, $p=3$,..., $p=n$ и $p>n$.

Заключение. Таким образом, показано, что для рассматриваемой системы, близкой к системе Ляпунова, для каждого фиксированного *p* существует единственное $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическое решение, которое обращается в тривиальное порождающее решение при $\varepsilon \to 0$. Это решение существенно зависит от значения константы *p*. В зависимости от этого значения в каждой паре уравнений (46) может возникать или не возникать резонанс. Поэтому при рассмотрении каждой *n*-й пары уравнений (8) необходимо отдельно рассматривать случаи, когда $p = n$ или когда $p \neq n$. В свою очередь, если резонанс возникает при $p < n$, необходимо по-разному строить решения в зависимости от того, возникал или не возникал резонанс при $p < n$.

Следовательно, оказывается, что в общем виде решение проблемы простого резонанса для вибрационных роликовых классификаторов является многозначным. А это обстоятельство позволяет из множества резонансных режимов выбирать такой, который в наибольшей степени отвечает условиям оптимальной работы классификатора.

При отыскании коэффициентов асимптотического разложения решения (7) используемая здесь методика позволяет достичь практически любой асимптотической точности.

Библиографические ссылки

1. Остапенко В.А. Математическая модель свободного качения валков вибрационных классификаторов. Вестник Херсонского национального технического университета, №2(25), 2006, Херсон, сс. 372–376.
2. Надутый В.П., Остапенко В.А., Ягнюков В.Ф. Математическая модель движения валков валковых классификаторов вибрационного типа. Вибрации в технике и технологиях. №1 (43) 2006 сс.97-99.
3. Надутый В.П., Остапенко В.А., Ягнюков В.Ф. Синтез параметров валковых классификаторов вибрационного типа. К., Наукова думка, 2006, с. 189.
4. Naduty V.P., Ostapenko V.A., Yadnyukov V.F. Dynamics of periodic rotations of rollers of the vibrating classifiers. Proceedings of 8th International Conference on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz, Poland, 2005, pp. 316-323.
5. Остапенко В.А. Асимптотическое разложение периодического решения порождающего уравнения вращения валков вибрационных классификаторов. Вибрации в технике и технологиях №4 (42) 2005, сс. 90–94.
6. Остапенко В.А. Асимптотические методы исследования периодических режимов работы вибрационных механизмов. Вибрации в технике и технологиях. №3 (48) 2007, сс.3-7.
7. Остапенко В.А. Нерезонансный режим периодических вращений валков вибрационных классификаторов. Вибрации в технике и технологиях. №2 (51) 2008, сс. 34–38.
8. Ostapenko V.A. The asymptotic solution for the equation of roller's rotation of vibrating qualifiers at a simple resonance. Proceedings of 9th International Conference on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz, Poland, 2007, pp. 339-346.