УДК 681.3.06

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЕКОНОМІЧНОГО ЗМІСТУ ЗАСОБАМИ СИСТЕМИ MATHCAD

В.Г.Дзісь, *к.т.н., доц.,*
О.В.Дзісь, *студент,*
В.В Кучмар, *завідувач лабораторіями*
Вінницький національний аграрний університет
Вінницький національний технічний університет

Algorithms for solving differential equations with economic content using Mathcad are considered.
Рассмотрено решение дифференциальных уравнений экономического характера средствами системы Mathcad.

Вступ. Динамічні властивості економічних систем можуть бути описані диференціальними, інтегрально-диференціальними рівняннями та їх системами, які моделюють конкретні виробничі і соціальні ситуації у підприємницькій діяльності, виникнення банківського капіталу, монополії покупців і продавців, поведінка макроекономічних показників [1]. Так як диференціальні рівняння дають, як правило, гладкі розв'язки і в них відбиваються локальні початкові умови, то безпосередньо за ними тяжко зробити глобальні прогнози, які підтверджувалися б експериментальними даними. Диференціальні рівняння вищих порядків та їх системи, які фактично, враховують значення економічних показників за попередні періоди, дають більш надійні прогнози. Більшість диференціальних рівнянь та їх систем, що описують динаміку економічних систем, не мають аналітичних розв'язків, або їх розв'язки дуже громіздкі. У зв'язку з цим важливо мати можливість розв'язання відповідних диференціальних рівнянь та їх систем чисельними методами. Таку можливість надає нам **Mathcad** [2,3].

Постановка задачі. Розкрити можливості пакету прикладних математичних програм **Mathcad** для розв'язування диференціальних рівнянь та їх систем чисельними методами, описати прості алгоритми для розв'язування рівнянь, що моделюють динаміку економічних процесів.

Результати. Система Mathcad має можливість розв'язувати диференціальні рівняння та їх системи у символьній і числовій формах. Символьні методи розв'язування рівнянь нажаль обмежені, але натомість розвинуті чисельні методи для розв'язування диференціальних рівнянь та їх систем типу задачі Коші, так і крайових задач із заданими граничними умовами. Чисельні методи розв'язування задач типу задачі Коші для ЗДР (загальних диференціальних рівнянь) – давно і детально розроблена технологія [4]. Значну роль тут відіграє форма подання результатів і аналіз розв'язків в залежності від значень параметрів системи.

З більшістю ЗДР взагалі жодних обчислювальних проблем зазвичай не виникає (вони розв'язуються за допомогою простого алгоритму Рунге–Кути), а для ЗДР особливого типу, так званих „жорстких" – необхідно застосовувати спеціальні методи. Всі ці алгоритми закладені в Mathcad, причому користувачеві дозволено вибирати конкретний із них виходячи із типу рівняння.

В Mathcad вбудовано близько 20 різноманітних функцій для розв'язування диференціальних рівнянь та їх систем чисельними методами. Найчастіше із них використовують:

rkfixed(y, x1, x2, n, D) – розв'язування задачі на відрізку методом Рунге-Кутти з постійним кроком;

odesolve(x1, x2, [n]) – розв'язування задачі Коші і крайової задачі для диференціальних рівнянь, використовується в блоці Given, де ***y*** – вектор початкових умов Y_0,; x_1**,** x_2 – початкова і кінцева точки відрізка інтегрування; n – число вузлів на відрізку $[x_1, x_2]$; D – ім'я вектора-функції $D(x,y)$ правої частини рівняння, що містить вирази для похідних.

Результати роботи функцій – матриці, формат яких залежить від типу задачі, наприклад, для диференціальних рівнянь *першого порядку*, їх перший стовпець містить координати вузлів сітки X_i, другий стовпець – обчислені наближені значення розв'язку Y_i, матриця розв'язку містить *n+1* рядок.

Приклади розв'язування рівнянь та їх систем наведено на рисунках 1,2,3,4.

$f(y,t) := 2 \cdot y \cdot t^2 - \frac{1.3 \cdot t}{y}$ <==Права частина рівняння

$t0 := 0$, $y0 := 1$ <== Початкові умови

Given

$t1 := 1.5$ <=== Кінцевава точка інтервалу

$y'(t) = f(y(t),t)$ <== Записано диферінціальне рівняння

$y(t0) = y0$ <== Задано значення функції на початку інтервалу

$y := \mathrm{Odesolve}(t, t1)$

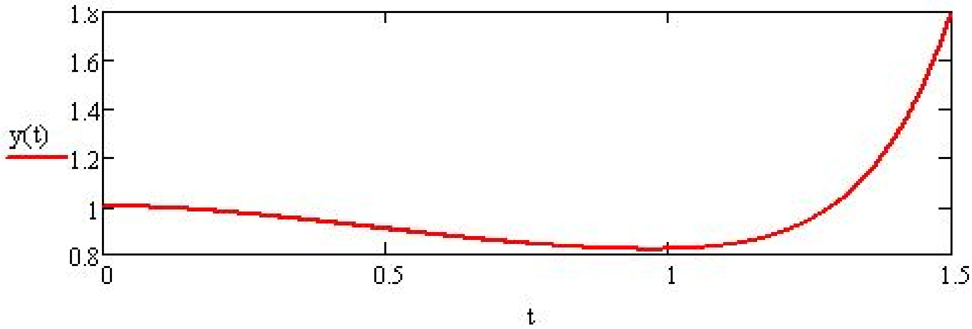
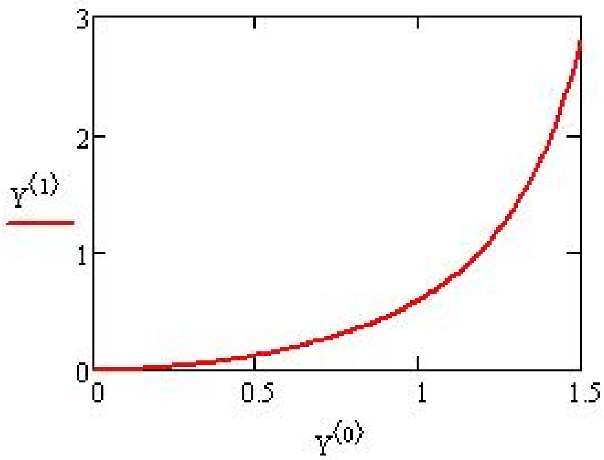


Рис.1. Розв'язування диференціального рівняння $y' = 2 \cdot y \cdot t^2 - \frac{1.3 \cdot t}{y}$

$y := 0$ <== Початкова умова $D(t,y) := y \cdot t^3 + t$ <==Права частина рівняння

$Y := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 1.5, 100, D)$



Y =

	0 (t)	1 (y)
0	0	0
1	0.015	$1.125 \cdot 10^{-4}$
2	0.03	$4.5 \cdot 10^{-4}$
3	0.045	$1.013 \cdot 10^{-3}$
4	0.06	$1.8 \cdot 10^{-3}$
5	0.075	$2.813 \cdot 10^{-3}$
6	0.09	$4.05 \cdot 10^{-3}$
7	0.105	$5.513 \cdot 10^{-3}$
8	0.12	$7.2 \cdot 10^{-3}$
9	0.135	$9.113 \cdot 10^{-3}$
10	0.15	...

Рис.2. Розв'язування диференціального рівняння $y' = y \cdot t^3 + t$

Розв'язування системи диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутти (функція rkfixed).

Розв'язок Z - матриця розмірністю $N \times 4$. В її перший стовпець $Z^{\langle 0 \rangle}$ записано час t, а другий $Z^{\langle 1 \rangle}$, третій $Z^{\langle 2 \rangle}$ та четвертий $Z^{\langle 3 \rangle}$ значення функцій Y_0, Y_1, Y_2 що відповідають моментам часу t.

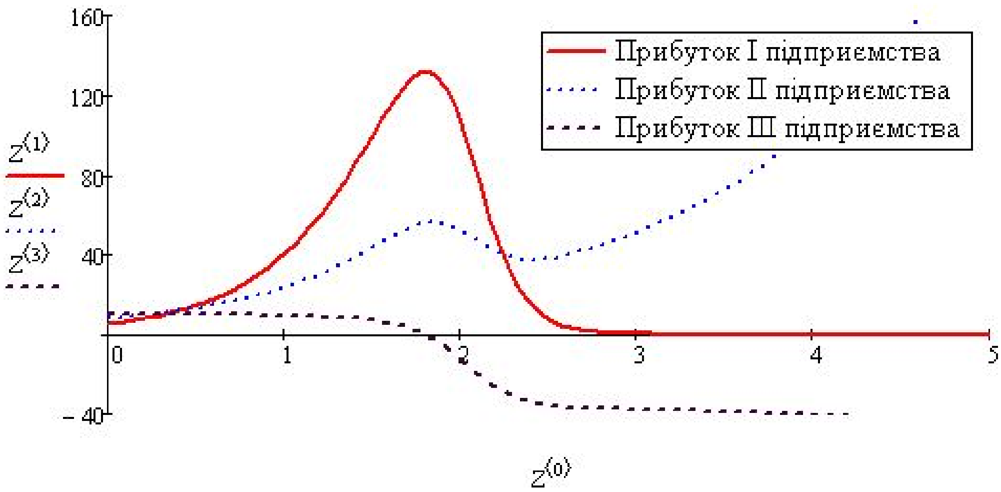
$N := 100 \qquad t1 := 0 \qquad t2 := 5$

Вектор початкових умов: $Y := \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$ <=== I підприємство <=== II підприємство <=== III підприємство

$$D(t, Y) := \begin{pmatrix} 0.16 \cdot Y_0 - 0.03 \cdot Y_1 + 0.2 \cdot Y_0 Y_2 \\ -0.15 \cdot Y_0 + 0.7 \cdot Y_1 + 0.05 \cdot Y_0 \cdot Y_2 \\ -0.3 \cdot Y_0 - 0.04 Y_1 + 0.03 \cdot Y_0 \cdot Y_2 \end{pmatrix}$$

<=== Вектор D(t,Y), - містить праві частини (значення похідних) системи диференціальних рівнянь

$Z := \mathrm{rkfixed}(Y, t1, t2, N - 1, D)$



	t	y_0	y_1	y_2
	0	1	2	3
0	0	5	8	10
1	0.051	5.563	8.383	9.983
2	0.101	6.189	8.79	9.966
3	0.152	6.885	9.223	9.947
4	0.202	7.658	9.684	9.927
5	0.253	8.518	10.176	9.906
6	0.303	9.473	10.701	9.884
7	0.354	10.533	11.263	9.86
8	0.404	11.711	11.864	9.834
9	0.455	13.018	12.507	9.806
10	0.505	14.467	13.197	...

Z =

Рис. 3. Розв'язування системи диференціальних рівнянь $\begin{cases} y_0' = 0.16y_0 - 0.03y_1 + 0.21y_0y_2 \\ y_1' = -0.15y_0 - 0.7y_1 + 0.05y_0y_2 \\ y_2' = -0.3y_0 - 0.04y_1 + 0.03y_0y_2 \end{cases}$

Given

$$2\cdot\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2y(t)\cdot t - t = 0 \qquad y(0) = 1 \quad y(5) = 2 \qquad y := \mathrm{Odesolve}(t, 5)$$

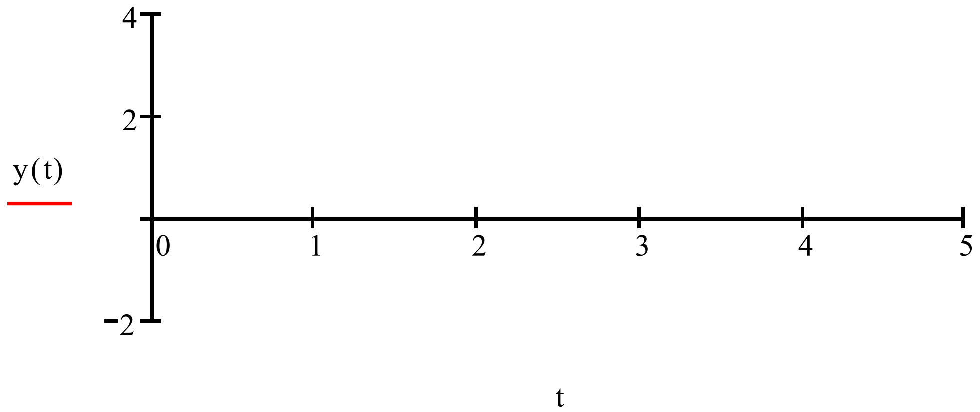


Рис. 4. Розв’язування диференціального рівняння другого порядку $2\cdot y'' + 2\cdot y\cdot t - t = 0$ **з крайовими умовами**

Моделі, засновані на задачі Коші для ЗДР, часто називають динамічними системами, підкреслюючи, що вони містять похідні за часом t і описують динаміку деяких параметрів. Проблеми, пов'язані з динамічними системами, насправді вельми різноманітні і часто не зводяться до простої інтеграції ЗДР.

Висновки. Система **Mathcad** – це потужне й у той же час просте універсальне середовище для розв’язання задач у різних галузях науки і техніки, економіки і фінансів, фізики і екології, математики і статистики. **Mathcad** дозволяє виконувати як чисельні обчислення, так і символьні перетворення, має надзвичайно розвинуті графічні засоби, отже доцільно проводити математичні розрахунки економічного характеру засобами системи **Mathcad.**

Список використаної літератури

1. Качура Є.В., Косарєв В.М. Моделювання макроекономічної динаміки: Навч. Посібн. – Київ: Центр навчальної літератури. 2003.– 236с.

2. Салманов О.Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel.– СПб.: БХВ–Петербург, 2003. – 464с.

3. Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов, инженеров и конструкторов.– Петербург: БХВ – Петербург 2007.– 698с.

4. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках: Бейсик, Фортран, Паскаль.–Томск, МП «Раско», 1991.– 272с.

УДК 330.42

ПОРІВНЯЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕФЕКТИВНОСТІ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ В СИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧАХ

***В.М. Дубчак**, к.т.н., доц.,*
***В.П.Сологуб**, студ.*
Вінницький національний аграрний університет

The mathematical models of concrete economic tasks are examined on the basis of the known laws of physics, investigated and compared inter se the brought models over oriented on a vertical line opposition.

Рассматриваются математеческие модели конкретных экономических задач на основании известных законов физики, исследуются и сравниваются между собой противоположно ориентированные по вертикали приведенные модели.

Вступ. Дана робота має своєю ціллю застосувати методів інтегрального числення у поєднані з відомими законами фізики і порівнянні відповідних, визначених згідно цих законів, значень числових характеристик симетричних геометричних об'єктів з діаметрально протилежною орієнтацією їх розташування у просторі [1,2].

Постановка задачі №1(обчислення роботи). Порівняти величини економічних затрат робіт, необхідних для викачування однакової за щільністю рідини води, пального з двох однакових за геометрією резервуарів, виконаних у вигляді конуса, для одного із них вершина направлена догори, для іншого – ця вершина направлена донизу (див.рис.1).

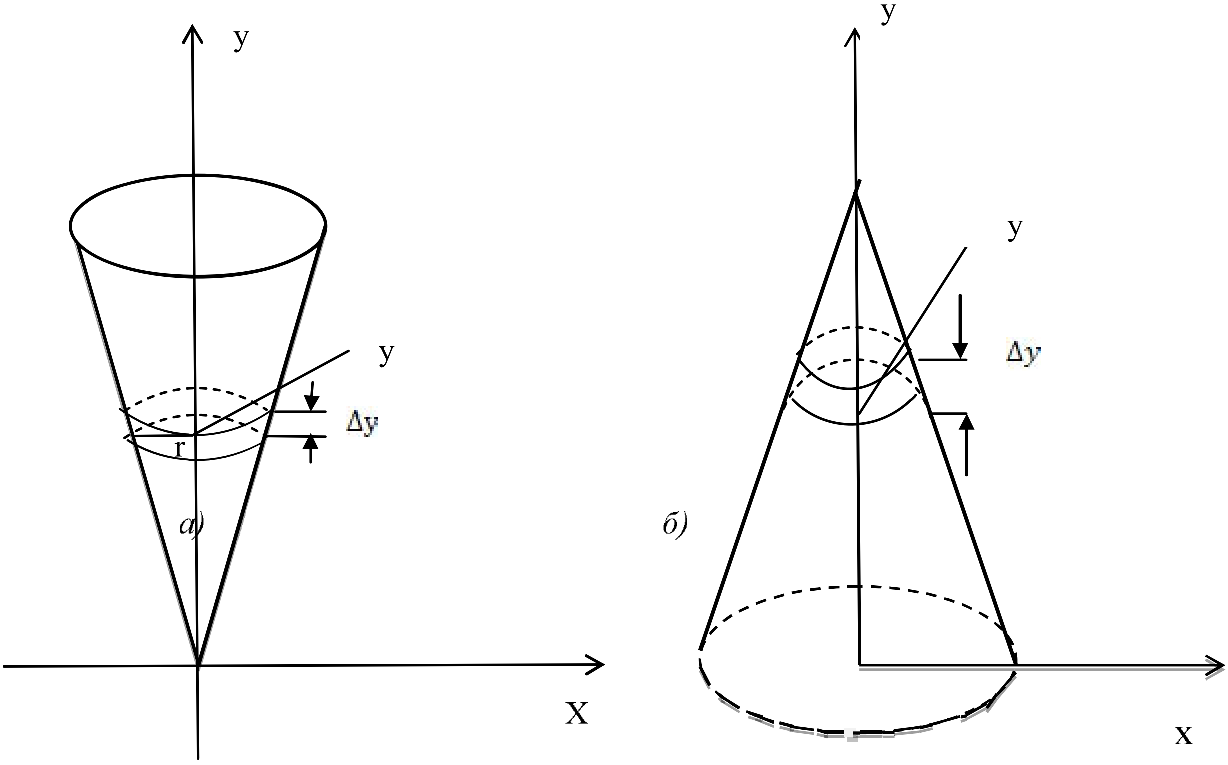


Рис.1 Розташування однакових за геометрією макетів резервуарів з рідиною стосовно вертикалі

Результати. При обчисленні величини роботи застосуємо відому формулу [3].

$$A = mgh,$$

m – маса рідини, g – стала вільного падіння, h – висота підйому даної рідини.