МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Вінницький національний аграрний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА.
ПРИКЛАДИ ТА ЗАДАЧІ

В.М. Дубчак, Л.І. Новицька, О.М. Дячинська

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Вінниця
2021

УДК 51 (072)

ББК 22.11Я73

Рекомендовано Вченою радою Вінницького національного аграрного університету Міністерства освіти і науки України як навчальний посібник для вищих навчальних закладів III-IV ступенів акредитації (протокол № 9 від 23 березня 2021 р.)

Дубчак В.М. Вища математика. Приклади та задачі: Навчальний посібник / В.М. Дубчак, Л.І. Новицька, О.М. Дячинська – Вінниця: ВНАУ, 2021. – 365 с.

Рецензенти:

Коломієць А.М.,	кандидат фізико-математичних наук, професор, проректор з наукової роботи Вінницького державного педагогічного університету ім. Михайла Коцюбинського;
Михалевич В.М.,	доктор технічних наук, професор кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету;
Анісімов В.Ф.,	доктор технічних наук, професор, кафедри агроінженерії та технічного сервісу Вінницького національного аграрного університету.

Посібник містить перелік типових стандартних практичних завдань з вищої математики, по кожному з яких пропонується 100 незалежних варіантів, з метою організації самостійної, домашньої розрахунково-графічної роботи, контрольні питання, тести. Матеріали навчального посібника можуть бути використані для організації роботи студентів усіх спеціальностей інженерно-технологічного факультету ВНАУ, які вивчають основи вищої математики.

Для студентів вищих навчальних закладів III-IV рівнів акредитації денної та заочної форм навчання галузей знань – 20 «Аграрні науки та продовольство», 13 «Механічна інженерія», 14 «Електрична інженерія», спеціальностей 208 «Агроінженерія», 133 «Галузеве машинобудування», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

ISBN 978-966-949-791-8

© В.М. Дубчак, Л.І. Новицька, О.М. Дячинська, 2021

ЗМІСТ

Вступ ………………………………………………………... **5**

Короткий теоретичний курс ……………………………………….. **6**

Розділ 1. Лінійна алгебра……………………………………………….. **6**

Розділ 2. Векторна алгебра……………………………………………... **23**

Розділ 3. Аналітична геометрія на площині та в просторі………………………………………………………….. **31**

Розділ 4. Теорія границь………………………............................ **38**

Розділ 5. Похідна та її застосування…………………………………… **44**

Розділ 6. Неозначений інтеграл………………………………………... **60**

Розділ 7. Означений інтеграл…………………………………………... **71**

Розділ 8. Диференціальні рівняння……………………………………. **90**

Розділ 9. Функції багатьох змінних……………………………………. **108**

Розділ 10. Ряди…………………………………………………………… **131**

Варіанти завдань для самостійного розв'язування…………………. **163**

Завдання 1.1. Обчислення, властивості визначників………………… **163**

Завдання 1.2. Теорія лінійних алгебраїчних рівнянь………………… **168**

Завдання 2.1. Поняття базису простору………………………………. **173**

Завдання 2.2. Застосування типів добутків векторів…………………. **178**

Завдання 2.3. Обчислення об'ємів, площ, знаходження кутів застосуванням добутків векторів…...…………………. **189**

Завдання 3.1. Рівняння площини………………………………………. **194**

Завдання 4.1. Границя функції………………………………………… **198**

Завдання 5.1. Похідна функції…………………………………………. **211**

Завдання 5.2. Застосування похідної для дослідження функцій………………………………………………... **232**

Завдання 6.1 Неозначений інтеграл…………………………………... **240**

Завдання 7.1.	Геометричні додатки означених інтегралів. Обчислення площ…………………………………………..	**262**
Завдання 7.2.	Невластиві інтеграли та їх збіжність…………………..	**271**
Завдання 8.1.	Диференціальні рівняння 1-го порядку………………..	**277**
Завдання 8.2.	Диференціальні рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами……………………………………………	**286**
Завдання 9.1.	Функції багатьох змінних, їх частинні похідні…………………………………………………	**301**
Завдання 9.2.	Рівняння дотичної площини та нормалі…..	**304**
Завдання 10.1.	Знакосталі числові ряди, необхідна та достатні умови їх збіжності……………...	**307**
Завдання 10.2.	Знакозмінні числові ряди, їх умовна збіжність. Ознака Лейбніца……………...	**322**
Завдання 10.3.	Степеневі ряди, їх область збіжності…………………..	**326**
Завдання 10.4.	Ряди Тейлора…………………………………………….	**329**
Завдання 10.5.	Застосування степеневих рядів для розв’язування диференціальних рівнянь……………………………….	**332**
Література	…………………………………………………………….	**335**
Додатки	…………………………………………………………….	**340**
Додаток А	Контрольні питання…………………………………….	**340**
Додаток Б	Тести…………………………………………………...	**347**

ВСТУП

У Законах України «Про освіту», «Про вищу освіту», Національній доктрині розвитку освіти України у XXI столітті зазначено необхідність підвищення професійного та загальнокультурного рівня випускників. Важливим і актуальним сьогодні є створення системи неперервного навчання й виховання для досягнення високих освітніх стандартів, формування інтелектуального потенціалу нації, забезпечення можливостей духовного збагачення особистості.

Вдосконалення навчального процесу, підвищення якості підготовки фахівців у нових умовах розвитку аграрних вищих навчальних закладів вимагають ґрунтовної математичної підготовки. Сучасного інженера неможливо уявити без оволодіння ним знаннями в галузі математичного моделювання виробничих процесів та інформаційних технологій, без уміння аналізувати явища, узагальнювати закономірності, обґрунтовувати власні міркування.

Особливе значення в підготовці фахівців має оволодіння математичними методами, вміння логічного мислення, оскільки інженерна діяльність в аграрному секторі пов'язана зі здатністю досягати кінцевого результату через вплив великої кількості випадкових і неконтрольованих факторів (погодних умов, шкідників, людського фактору та ін.). До того ж ці знання необхідні для вимірювання, вивчення, перетворення й прогнозування технологічних явищ в умовах ринкової економіки та нових умовах господарювання в галузях аграрного виробництва.

Навчальний посібник призначений для організації самостійної роботи студентів усіх спеціальностей, в навчальній програмі яких присутні класичні розділи вищої математики. В роботі наведено теоретичний матеріал, і по кожному з них пропонується 100 незалежних варіантів для організації самостійної роботи, розрахункових завдань, тощо. В кінці роботи наведено перелік рекомендованої літератури для виконання даних завдань.

КОРОТКИЙ ТЕОРЕТИЧНИЙ КУРС

Розділ 1. Лінійна алгебра

1.1. Матриці. Дії над матрицями. Визначники

Матрицею розмірів $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, яка містить m рядків та n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де a_{mn} – довільна компонента (елемент) матриці, m – номер її рядка, n – номер стовпця. Над матрицями виконують такі дії:

Множення матриці на число:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сума (різниця) двох матриць:

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Дія додавання та віднімання виконується тільки для матриць однакової розмірності.

Добуток двох матриць:

$$C = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

де $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$.

Дія множення можлива тільки за умови, коли кількість рядків першої матриці відповідає кількості стовпців другої матриці.

Транспонування матриці

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці другого порядку – це число, яке обчислюється за правилом

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Визначник матриці третього порядку – це число, яке обчислюється за правилом (правило трикутників)

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Теорема про розклад визначника:

Якщо A – квадратна матриця, то її визначник дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого стовпця (рядка) на їх відповідні алгебраїчні доповнення.

Теорема розкладання дає можливість обчислювати визначники квадратних матриць вищих порядків.

Матриця A^{-1} називається оберненою до невиродженої квадратної матриці A, якщо виконується співвідношення:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де Δ – визначник матриці A,

A_{ij} – алгебраїчні доповнення відповідних елементів даної матриці.

Приклад 1.1. Знайти значення виразу $Y = -3A + B^T$, де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$Y = -3\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -15 & -24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 7 \\ -15 & -23 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.2. Знайти добуток двох матриць C та D,

де

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 3+0\cdot 1+(-3)\cdot(-1) & 1\cdot(-4)+0\cdot(-2)+(-3)\cdot 2 & 1\cdot 7+0\cdot 0+(-3)\cdot(-3) \\ (-1)\cdot 3+4\cdot 1+2\cdot(-1) & (-1)\cdot(-4)+4\cdot(-2)+2\cdot 2 & (-1)\cdot 7+4\cdot 0+2\cdot(-3) \\ 0\cdot 3+3\cdot 1+5\cdot(-1) & 0\cdot(-4)+3\cdot(-2)+5\cdot 2 & 0\cdot 7+3\cdot 0+5\cdot(-3) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 6 & -10 & 16 \\ -1 & 0 & -13 \\ -2 & 4 & -15 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.3. Знайти $\det A$, $\det D$, де

$$A=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix},\ D=\begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}=24+5=29,$$

$$\det D=\begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=3\cdot(-2)\cdot(-3)+1\cdot 2\cdot 7+(-4)\cdot(-1)\cdot 0-(-1)\cdot(-2)\cdot 7-$$
$$-3\cdot 0\cdot 2-1\cdot(-4)\cdot(-3)=18+14-14-12=6.$$

Приклад 1.4. Знайти матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Обчислимо

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix}=15-10=5.$$

$\det A\neq 0$ – отже обернена матриця існує.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10,\ A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Переконаємося, що знайдена матриця A^{-1} справді є оберненою до матриці A. Знайдемо добуток AA^{-1}

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Задача 1.1. Галузь з трьох заводів виготовляє два види продукції. Матрицею A подано об’єми виготовленої продукції на кожному заводі за перший місяць, матрицею B – за другий місяць:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти: а) об’єм продукції за два місяці; б) приріст об’ємів виробництва за другий місяць у порівнянні з першим за видами продукції і заводами; в) вартісне вираження виробленої продукції за два місяці (у доларах), якщо $\mu = 27$ – курс долара по відношенню до гривні [39].

Розв’язання

а) Об’єм продукції за два місяці визначається сумою матриць *A* та *B*:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

б) Приріст об’ємів виробництва за другий місяць у порівнянні з першим виражається різницею матриць

$$D = B - A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Додатні елементи показують, що на заводі об’єм продукції збільшився, від’ємні – зменшився, нульові – не змінився.

в) Для знаходження вартісного вираження виробленої продукції за два місяці потрібно знайти добуток $\mu \cdot C$.

$$P = \mu C = \begin{pmatrix} 135 & 189 \\ 27 & 108 \\ 189 & 243 \end{pmatrix}.$$

1.2. Системи лінійних рівнянь та методи їх розв’язування

Система лінійних алгебраїчних рівнянь – це сукупність скінченної кількості лінійних рівнянь, розв’язком яких вважають точку, координати якої задовольняють будь-яке рівняння даної системи. Зокрема, систему трьох лінійних рівнянь з трьома змінними (невідомими) записують у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \tag{1.1}$$

де a_{ij} і b_i – задані коефіцієнти системи. Числа b_i називають також вільними членами системи.

У вищій математиці серед класичних методів розв'язування систем алгебраїчних рівнянь розглядають наступні методи: метод Крамера, матричний та Гауса.

1) Метод Крамера. Даний метод поміж інших вважається найбільш розповсюдженим і нескладним, оскільки потребує застосування техніки правильного обчислення визначників. Його недоліком є те, що для систем вищих порядків даний метод не є оптимальним, оскільки визначники вищих порядків потребують значних обчислень.

Формули Крамера для системи (1.1) мають вигляд:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, y = \frac{\Delta y}{\Delta}, z = \frac{\Delta z}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ – визначник системи (1.1),

$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \\ b_2 a_{22} a_{23} \\ b_3 a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} b_1 a_{13} \\ a_{21} b_2 a_{23} \\ a_{31} b_3 a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} b_1 \\ a_{21} a_{22} b_2 \\ a_{31} a_{32} b_3 \end{vmatrix}$ – визначники, які дістають з визначника Δ заміною першого, другого та третього стовпців, відповідно, стовпцем вільних членів.

Приклад 1.5. Користуючись формулами Крамера, розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x-3y+z=1 \\ 3x+y-3z=-8 \\ 3x+2y+z=-1 \end{cases}.$$

Розв'язання

Обчислимо визначники системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 41, \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -8 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -41,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -8 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 82.$$

Тоді за формулами Крамера маємо

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-41}{41} = -1, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{0}{41} = 0, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{82}{41} = 2.$$

Таким чином, $x=-1,\ \ y=0,\ \ z=2$ – розв’язок системи.

2) Матричний метод базується на обчисленні та використанні оберненої матриці до матриці системи A. Систему лінійних рівнянь можна записати у вигляді матричної рівності

$$A \cdot X = B,$$

де A – квадратна матриця $n-$го порядку, складена з коефіцієнтів при невідомих, X – матриця розмінності $(n\times 1)$, складена з невідомих; B матриця розмірності $(n\times 1)$, складена з вільних членів системи.

Розв’язок невиродженої системи лінійних алгебраїчних рівнянь, записаної у вигляді матричної рівності, знаходять за формулою:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Приклад 1.6. Розв’язати систему рівнянь матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_2 - x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases}.$$

Розв'язання

Запишемо систему в матричному вигляді $AX = B$,

де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Оскільки для матриці A їй обернену ми знайшли в прикладі (1.4), тому маємо

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \\ 2 - \frac{12}{5} + \frac{12}{5} \\ 0 - \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 1,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = -1$ – розв'язок системи.

3) Метод Гауса. Цей метод є ефективним при розв'язуванні систем вищих порядків. Суть методу полягає в тому, щоб застосуванням так званих елементарних перетворень над рядками розширеної матриці системи $\overline{A} = \overline{A|B}$ звести дану матрицю до трапецієвидного вигляду, коли всі числа, що розташовані нижче головної діагоналі – нулі. З третього рядка знаходиться невідома, потім з другого рядка при знайденій x_3 знаходиться невідома x_2, і, нарешті, при знайдених x_3 та x_2 знаходиться невідома x_1. Цим реалізується прямий хід методу Гауса. Зворотній хід даного методу полягає у тому, що продовжуючи застосування елементарних перетворень, розширена матриця зводиться до такого вигляду, в якому сама матриця A стане діагональною, тобто її ненульові компоненти мають бути розташовані тільки по головній діагоналі.

Тоді кожна з шуканих невідомих знаходиться безпосередньо з відповідного рядка такої утвореної матриці.

До елементарних перетворень рядків розширеної матриці системи належать такі перетворення:

1. Перестановка місцями відповідних чисел двох довільних рядків.
2. Множення всіх чисел довільного рядка на відмінне від нуля число.
3. Додавання чи віднімання до чисел довільного рядка відповідних чисел будь-якого іншого рядка, домножених на стале число.

Приклад 1.7. Розв'язати систему рівнянь методом Гауса

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_2 - x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases}$$

Розв'язання

Реалізуємо прямий хід метода Гауса

$$\overline{A} = A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

З третього рядка останньої матриці маємо $x_3 = -1$. З другого рядка $x_2 + 3x_3 = -1$, звідки $x_2 = 2$. Нарешті, з першого рядка маємо: $x_1 + x_3 = 0$, звідки $x_1 = 1$. Реалізуємо зворотній хід методу Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = E|X,$$

тоді маємо шукані розв'язки $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

Пропонуємо розглянути модифікацію суті алгоритму метода Гауса [13], коли для розв'язування системи n алгебраїчних рівнянь з n невідомими задану початкову систему замінюють іншою системою з деякими іншими невідомими, але, що важливо і позитивно, ця допоміжна система вже буде системою $(n-1)$-го порядку. Знайдені розв'язки такої новоутвореної системи надають можливість визначити якусь, наприклад, останню невідому основної початкової системи, що, по суті, відповідає одному з фрагментів алгоритму метода Гауса.

1. Нехай спочатку задана означена алгебраїчна система (1.2), тобто така система, для якої $rangA = rang\overline{A} = n$ (тут A та $\overline{A}$ – відповідно матриця та розширена матриця початкової системи):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1,n}x_n = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2,n}x_n = в_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{n,n}x_n = в_n \end{cases} \tag{1.2}$$

Помножимо відповідно перше рівняння даної системи на невідомий скаляр α_1, друге рівняння – на скаляр α_2, і т.д., передостаннє рівняння – на α_{n-1}, і, нарешті, останнє рівняння помножимо на 1. Отримуємо наступний вираз:

$$\alpha_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1,n-1}x_{n-1}) + \alpha_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2,n-1}x_{n-1}) + ... +$$
$$\alpha_{n-1}(a_{n-1.1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + ... + a_{n-1,n-1}x_{n-1}) + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{n,n-1}x_{n-1}) = 0$$

Перегруповуючи доданки в останній рівності з коефіцієнтами-алгебраїчними виразами при відповідних початкових невідомих стартової алгебраїчної системи, прирівнюємо до 0 дані алгебраїчні вирази і отримуємо нову алгебраїчну систему (1.3) на один порядок меншу стосовно невідомих $\alpha_1,...,\alpha_{n-1}$:

$$\left.\begin{matrix} x_1 : a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + ... + a_{n-1,1}\alpha_{n-1} + a_{n1} = 0 \\ x_2 : a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{n-1,2}\alpha_{n-1} + a_{n2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} : a_{1n-1}\alpha_1 + a_{2,n-1}\alpha_2 + ... + a_{n-1,\text{n-1}}\alpha_{n-1} + a_{n,n-1} = 0 \end{matrix}\right\} \tag{1.3}$$

Найдені значення проміжних скалярів $\alpha_1,...,\alpha_{n-1}$ надають можливість скласти і розв'язати лінійне алгебраїчне рівняння відносно невідомої x_n:

$$(\sum_{i=1}^{\text{n-1}} a_{in}\alpha_i + a_{nn})x_n = \sum_{i=1}^{\text{n-1}} \alpha_i в_i + в_n, \qquad \sum_{i=1}^{\text{n-1}} a_{in}\alpha_i + a_{nn} \neq 0,$$

звідки

$$x_n = \frac{\sum_{i=1}^{\text{n-1}} \alpha_i в_i + в_n}{\sum_{i=1}^{\text{n-1}} a_{in}\alpha_i + a_{nn}}.$$

При встановленому значенні останньої невідомої початкова система зменшує свій порядок на одиницю, і алгоритм приведеного модифікованого методу продовжується, при цьому порядок наступної допоміжної системи відносно набору своїх скалярних невідомих теж зменшиться на одиницю.

Приклад 1.8. Розв'язати наведеним методом задану систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}.$$

Розв'язання

Маємо $\alpha_1(2x_1 - 3x_2) + \alpha_2(3x_1 + x_2) + (4x_1 - 2x_2) = 0$, звідки стосовно невідомих скалярів утворюється допоміжна система

$$\left.\begin{aligned} x_1 &: 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4 = 0 \\ x_2 &: -3\alpha_1 + \alpha_2 - 2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{10}{11}, \alpha_2 = -\frac{8}{11}.$$

Стосовно третьої невідомої маємо алгебраїчне рівняння вигляду: $\frac{10}{11}x_3 - \frac{16}{11}x_3 - 3x_3 = \frac{50}{11} - \frac{16}{11} + 4$,

звідки

$$-39x_3 = 78 \quad \text{або} \quad x_3 = -2.$$

Найдене значення третьої невідомої підставимо в початкову систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2 = -5 \\ 3x_1 + x_2 - 4 = 2 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -7 \\ 3x_1 + x_2 = 6 \end{cases}.$$

Маємо: $2\alpha_1 x_1 + 3x_1 = 0$, звідки $\alpha_1 = -\frac{3}{2}$.

$$\begin{cases} -3x_1 + \frac{9}{2}x_2 = \frac{21}{2} \\ 3x_1 + x_2 = 6 \end{cases}, \qquad \frac{11}{2}x_2 = \frac{33}{2} \Rightarrow \qquad x_2 = 3.$$

Підставляючи найдене значення x_2, маємо рівняння щодо першої невідомої: $2x_1 + 9 = -7$, звідки $x_1 = 1$.

2. Нехай тепер $|A| = 0 \Rightarrow rangA = rang\overline{A} = k < n$.

До речі питання щодо визначення сумісності чи несумісності, означеності чи неозначеності також може бути визначеним застосуванням модифікації методу. Наприклад, стосовно неозначених алгебраїчних систем знаходження набору допоміжних скалярів і їх підстановка при знаходженні останньої невідомої призведе до розв’язування рівняння вигляду $0 \cdot x_n = 0$, яке справедливе для будь-якого значення шуканої невідомої, що відповідає випадку неозначеної системи. Щодо несумісних систем аналогічне рівняння набуде вигляду $0 \cdot x_n = \lambda, \lambda \neq 0$, при цьому визначення останньої невідомої стає неможливим.

В цьому випадку початкова алгебраїчна система (1.2) може бути переписана в еквівалентній алгебраїчній формі вигляду (тут $(n-k)$ рівнянь початкової системи є лінійно залежними від інших рівнянь і тому можуть бути відкинутими). Тому маємо алгебраїчну систему (1.4) з k рівнянь стосовно n невідомих

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1,n}x_n = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2,n}x_n = в_2 \\ .... \\ \\ a_{k-1,1}x_1 + a_{к-1,2}x_2 + ... + a_{к-1,n}x_n = в_{к-1} \\ a_{k,1}x_1 + a_{к,2}x_2 + ... + a_{к,n}x_n = в_к \end{cases} \tag{1.4}$$

В системі (1.4) визначимо k базових невідомих (наприклад, перші k із n невідомих нехай такими будуть) з матрицею H при цих невідомих, також $|H| = \det H \neq 0$. Останню систему перепишемо у вигляді (1.5) стосовно базових невідомих, вважаючи всі інші невідомі вільними:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1,\kappa}x_\kappa = в_1 - a_{1,\kappa+1}x_{\kappa+1} - ... - a_{1,n}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2,\kappa}x_\kappa = в_2 - a_{2,\kappa+1}x_{\kappa+1} - ... - a_{2,n}x_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \\ a_{\mathrm{k}-1,1}x_1 + a_{\kappa-1,2}x_2 + ... + a_{\kappa-1,\kappa}x_{\mathrm{к}} = в_{\kappa-1} - a_{\kappa-1,\kappa+1}x_{\kappa+1} - ... - a_{\kappa-1,n}x_m \\ a_{\mathrm{k},1}x_1 + a_{\kappa,2}x_2 + ... + a_{\kappa,n}x_{\mathrm{n}} = в_\kappa - a_{\kappa,\kappa+1}x_{\kappa+1} - ... - a_{\kappa,n}x_m \end{cases} \qquad (1.5)$$

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1\kappa} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2\kappa} \\ . & . & . & . \\ a_{\kappa 1} & a_{\kappa 2} & . & a_{\kappa\kappa} \end{pmatrix}, \quad |H| = \det H \neq 0.$$

Аналогічно попереднім діям помножимо кожне з рівнянь системи (1.5) на відповідні скалярні невідомі $\alpha_1,...,\alpha_{\kappa-1}$, а останнє рівняння помножимо на 1 і додамо відповідні праві та ліві частини даних рівнянь. Знову, перегруповуючи доданки, прирівнюємо алгебраїчні вирази при стартових невідомих і отримуємо систему (1.6):

$$\left.\begin{array}{l} x_1 : a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + ... + a_{\kappa-1,1}\alpha_{\kappa-1} + a_{\kappa,1} = 0 \\ x_2 : a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{\kappa-1,2}\alpha_{\kappa-1} + a_{\kappa 2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{\kappa-1} : a_{1\kappa-1}\alpha_1 + a_{2,\kappa-1}\alpha_2 + ... + a_{\kappa-1,\mathrm{к}-1}\alpha_{n-1} + a_{\kappa,\kappa-1} = 0 \end{array}\right\} \qquad (1.6)$$

Розв’язок даної системи визначають проміжні невідомі $\alpha_1,...,\alpha_{\kappa-1}$, за допомогою яких маємо алгебраїчне рівняння стосовно останньої з набору базових невідомих, а саме:

$$(\sum_{i=1}^{\text{к-1}} a_{i\kappa}\alpha_i + a_{\kappa,\kappa})x_\kappa = \sum_{i=1}^{\text{к-1}} \alpha_i в_i + в_\kappa - (\sum_{i=1}^{\text{к-1}} a_{i,\kappa+1}\alpha_i + a_{\kappa,\kappa+1})x_{\kappa+1} - \ldots$$

$$\ldots - (\sum_{i=1}^{\text{к-1}} a_{i1n}\alpha_i + a_{\kappa,n})x_n ,$$

звідки $x_\kappa = \dfrac{\sum_{i=1}^{\text{к-1}} \alpha_i в_i + в_\kappa - (\sum_{i=1}^{\text{к-1}} a_{i,\kappa+1}\alpha_i + a_{\kappa,\kappa+1})x_{\kappa+1} - \ldots.. - (\sum_{i=1}^{\text{к-1}} a_{i1n}\alpha_i + a_{\kappa,n})x_n}{(\sum_{i=1}^{\text{к-1}} a_{i\kappa}\alpha_i + a_{\kappa,\kappa})}$.

Приклад 1.9. Розв’язати задану систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}.$$

Розв’язання

Відносно невідомих допоміжних скалярів маємо систему: $\left.\begin{matrix} x_1 : 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 1 = 0 \\ x_2 : -3\alpha_1 + \alpha_2 + 4 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1$. Отже, $(-\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3)x_3 = -5\alpha_1 + 2\alpha_2 + 7$, або $0 \cdot x_3 = 0$, що відповідає випадку неозначеної системи.

Отож, для даної системи $rangA = rang\overline{A} = 2 < 3$. Початкова система є еквівалентною наступній спрощеній алгебраїчній системі:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -5 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 = 2 - 2x_3 \end{cases}.$$

$$rangH = rang\overline{H} = 2, \quad H = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad |H| = \det H = 11 \neq 0.$$

$$2x_1\alpha_1 + 3x_2 = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 + 3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{3}{2}.$$

$$\begin{cases} -3x_1 + \dfrac{9}{2}x_2 = \dfrac{15}{2} - \dfrac{3}{2}x_3 \\ 3x_1 + x_2 = 2 - 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{11}{2}x_2 = \frac{19}{2} - \frac{7}{2}x_3 \Rightarrow \quad x_2 = \frac{19 - 7x_3}{11} \Rightarrow$$

$$3x_1 = \frac{3}{11} - \frac{15}{11}x_3 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{11} - \frac{5}{11}x_3 = \frac{1 - 5x_3}{11}.$$

Перевірка: $\frac{1-5x_3}{11}+\frac{4(19-7x_3)}{11}+\frac{33}{11}x_3=\frac{1+4\cdot 76}{11}=7$.

Відповідь: $X=\begin{pmatrix}\frac{1-5x_3}{11}\\ \frac{19-7x_3}{11}\\ x_3\end{pmatrix}, \quad x_3\in R$.

Задача 1.2. В таблиці наведені дані, що характеризують кількість деталей, необхідних для виготовлення деяких виробів.

Найменування деталей	**Тип виробу**		
	1	**2**	**3**
1. Колесо	**5**	**2**	**8**
2. Вісь	**4**	**3**	**1**
3. Корпус	**1**	**2**	**1**

Записати в матричній формі залежність між кількістю деталей та кількістю виробів.

Розв’язання

Загальна кількість деталей може бути записана у вигляді наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} y_1=5x_1+2x_2+8x_3\\ y_2=4x_1+3x_2+x_3\\ y_3=x_2+2x_2+x_3\end{cases},$$

де y_i – загальна кількість деталей, x_j – кількість виробів (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3).

У матричній формі ці рівняння можна записати так:

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2&8\\ 4&3&1\\ 1&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

або $y = A\,x$, де $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Задача 1.3. У схемі, зображеній на рис. 1.1, джерела струму мають електрорушійні сили $\varepsilon_1 = 8B$, $\varepsilon_2 = 5B$ і внутрішні опори $r_1 = 1\ Ом$, $r_2 = 0{,}5\ Ом$, $R_1 = 3\ Ом$, $R_2 = 2\ Ом$, $R_3 = 4\ Ом$. Визначити струми в усіх ділянках кола.

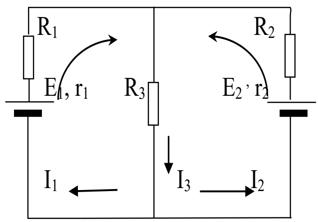


Рис. 1.1. Схема електричного кола

Розв'язання

До розгалуженого кола застосуємо правило Кіргофа. Напрями струмів I_1, I_2, I_3 вкажемо стрілками, як показано на рисунку. Оскільки в колі є тільки два вузли, то достатньо записати рівняння за першим правилом Кіргофа лише для одного з них, наприклад вузла *A*: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$.

Оберемо напрями обходу незалежних контурів уздовж напрямів струмів I_1 і I_2. Для цих контурів складемо рівняння за другим правилом Кіргофа:

$$I_3 R_3 + I_1 (R_1 + r_1) = \varepsilon_1$$
$$I_3 R_3 + I_2 (R_2 + r_2) = \varepsilon_2.$$

Ці рівняння разом із попереднім рівнянням для струмів утворюють систему рівнянь. В одержані рівняння підставимо задані величини і запишемо їх у такому вигляді:

$$\begin{cases} 1I_1 + 1I_2 - 1I_3R_3 = 0 \\ 4I_1 + 0I_2 + 4I_3 = 8 \\ 0I_3 + 2{,}5I_2 + 4I_3 = 5 \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему за формулами Крамера, одержимо:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-32}{-36} = 0{,}9\ A,\ \ I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-8}{-36} = 0{,}2\ A,\ I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-40}{-36} = 1{,}1\ \ A.$$

Розділ 2. Векторна алгебра

До лінійних належать такі операції над векторами:

– множення вектора на скаляр $\alpha \in R$. При цьому одержаний вектор $\alpha\vec{a}$ геометрично, залежно від величини і знаку α, розтягується, стискається, змінює напрям $(\alpha < 0)$;

– додавання векторів. Дія виконується за правилом паралелограма або трикутника.

Якщо вектор задано в координатній формі, то у разі множення його на скаляр, усі координати вектора необхідно помножити на цей скаляр, а в разі додавання – додати відповідні його координати.

Скалярний добуток векторів обчислюється за формулою

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi;\ \ \vec{a} \cdot \vec{b} = |a|\,\text{пр}_{\vec{a}}\ \vec{b} = |b|\,\text{пр}_{\vec{b}}\ \vec{a}\ ;$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Кут φ між векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_b^2 + b_y^2 + b_z^2}} .$$

Умови паралельності та перпендикулярності двох заданих векторів, відповідно, будуть такими

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}, \qquad a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Векторний добуток векторів обчислюється за формулою

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

При використанні векторного добутку векторів потрібно пам’ятати, що він некомутативний (множники не переставляються місцями!), а його модуль дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах – множниках даного добутку (рис. 2.1).

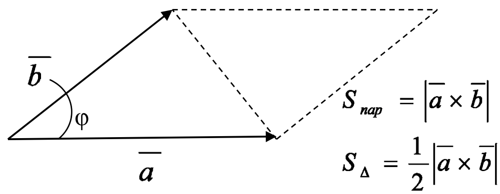
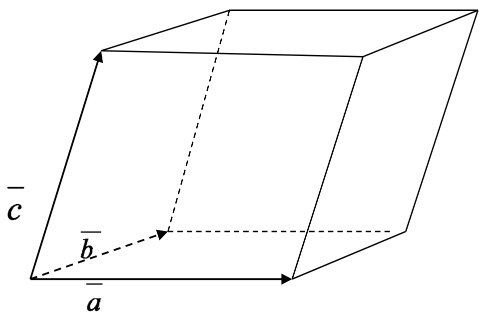


Рис. 2.1. Геометричний зміст векторного добутку

Мішаний добуток трьох векторів знаходиться за формулою

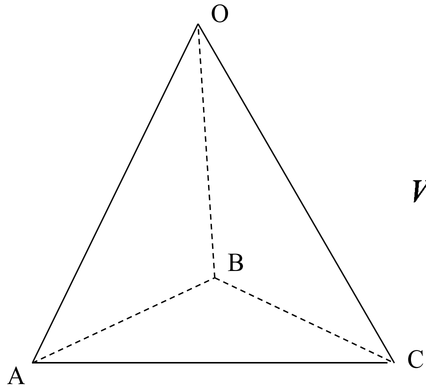
$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Геометричний зміст мішаного добутку векторів полягає у тому, що його модуль дорівнює об’єму паралелепіпеда (рис.2.2) або об’єму піраміди (рис.2.3), побудованих на даних векторах.



$$V_{пар} = \left|\overline{a}, \overline{b}, \overline{\mathrm{c}}\right|$$

Рис. 2.2. Геометричний зміст мішаного добутку



$$V_{пір} = \frac{1}{6}\left|\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right|$$

Рис. 2.3. Геометричний зміст мішаного добутку

Мішаний добуток також використовують для перевірки компланарності (належності одній площині) трьох векторів.

Приклад 2.1. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, якщо відомо, що $\left|\vec{p}\right| = 2\sqrt{2}$; $\left|\vec{q}\right| = 3$ i $\widehat{\vec{p}, \vec{q}} = \frac{\pi}{4}$.

Розв’язання

З визначення операції додавання векторів відомо, що одна діагональ паралелограма $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} = 6\vec{p} - \vec{q}$, а друга $\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b} = 4\vec{p} + 5\vec{q}$. Довжина довільного вектора визначається за формулою: $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})}.$

Тоді

$$\left|\vec{d}_1\right| = \sqrt{(6\vec{p} - \vec{q})^2} = \sqrt{36(\vec{p})^2 - 12\vec{p}\cdot\vec{q} + \vec{q}^2} = \sqrt{36\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 12\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cos\frac{\pi}{4} + 9} = 15;$$

$$\left|\vec{d}_2\right| = \sqrt{(4\vec{p} + 5\vec{q})^2} = \sqrt{16\vec{p}^2 + 40\vec{p}\cdot\vec{q} + 25\vec{q}^2} = \sqrt{16\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 40\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cos\frac{\pi}{4} + 25\cdot 9} =$$
$$= \sqrt{593}.$$

Приклад 2.2. Дано три послідовні вершини паралелограма: $A(-3; -2; 0)$, $B(3; -3; 1)$, $C(5; 0; 2)$. Знайти четверту вершину D і кут між його діагоналями.

Розв’язання

Нехай шукана вершина D має координати $(x; y; z)$, (рис 2.4.). З умови колінеарності векторів $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BC}$ маємо: $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+2}{3} = z$ або $x = 2z - 3$; $y = 3z - 2$.

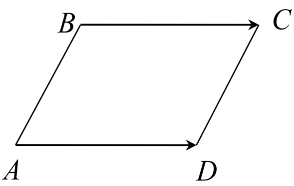


Рис. 2.4. Паралелограм

Згідно з властивостями паралелограма

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| \text{ або } \sqrt{4z^2 + 9z^2 + z^2} = \sqrt{14} \Rightarrow z = 1;\ x = -1;\ y = 1;\ D(-1; 1, 1).$$

Діагоналі паралелограма дорівнюють відповідно сумі і різниці векторів сторін $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = (8; 2; 2)$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = (-4; 4; 0)$. Кут між діагоналями знайдемо за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|} = \frac{-32 + 8}{\sqrt{72}\cdot\sqrt{32}} = -\frac{1}{2};$$

отже, $\varphi = 120^\circ$.

Приклад 2.3. Знайти площу паралелограма, діагоналями якого є вектори $2\vec{m}-\vec{n}$ і $4\vec{m}-5\vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ – одиничні вектори, і кут між ними дорівнює 45°.

Розв'язання

Позначимо через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ сторони паралелограма, тоді $\vec{a}+\vec{b}=2\vec{m}-\vec{n}$, $\vec{a}-\vec{b}=4\vec{m}-5\vec{n}$, звідки $\vec{a}=3\vec{m}-3\vec{n}$; $\vec{b}=-\vec{m}+2\vec{n}$. Площу паралелограма знайдемо як модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Отже,

$$S=\left|\left(3\vec{m}-3\vec{n}\right)\times\left(-\vec{m}+2\vec{n}\right)\right|=3\left|m\times n\right|=3\sin 45^{\circ}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Приклад 2.4. Знайти площу і висоту *BD* трикутника, вершинами якого є точки $A(1;-2;8)$; $B(0;0;4)$; $C(6;2;0)$.

Розв'язання

Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB}=(-1;2;-4)$ і $\overrightarrow{AC}=(5;4;-8)$. Модуль векторного добутку буде дорівнювати подвійній площі трикутника, побудованого на цих векторах: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & -4\\ 5 & 4 & -8\end{vmatrix}=-28\vec{j}-14\vec{k}$;

звідки $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=7\sqrt{5}$.

Висота трикутника за відомої довжини основи буде

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{105};\quad h=\frac{2s}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{2}{3}\sqrt{21}.$$

Приклад 2.5. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, побудований на векторах $\overrightarrow{AB}(4;3;0)$, $\overrightarrow{AD}(2;1;2)$ *і* $\overrightarrow{AA_1}(-3;-2;5)$. Знайти: а) об'єм паралелепіпеда; б) площі граней ABCD і ADD_1A_1; в) довжину висоти, проведеної із вершини A_1

на грань ABCD; г) косинус кута φ, між ребром AB і діагоналлю B_1D; д) косинус кута φ_2 між гранями ABCD і ADD_1A_1) (рис. 2.5).

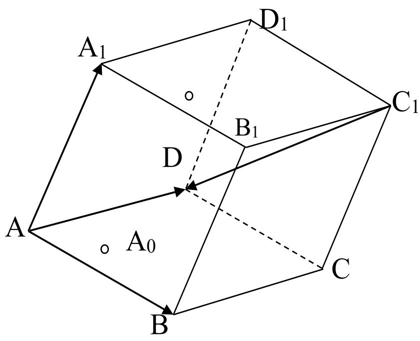


Рис. 2.5. Паралелепіпед

Розв'язання

а) $V = \left|\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}\right]\overrightarrow{AA_1}\right|$. Знайдемо $\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}\right]\overrightarrow{AA_1}$. Використаємо формулу мішаного добутку $\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}\right]\overrightarrow{AA_1} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -44$, $V = 44$ куб. од.

б) Для знаходження площі грані ABCD використаємо формулу $S_{ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}\right]\right|$.

$$\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 8\vec{j} - 2\vec{k} \quad \left|\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}\right]\right| = \sqrt{36 + 64 + 4} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

Отже, $S_{ABCD} = 2\sqrt{26}$ кв. одиниць.

Аналогічно знаходимо площу грані ADD_1A_1: $S_{ADD_1A_1} = \left|\left[\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1}\right]\right|$

$$\left[\overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{AA_1}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 2\\ -3 & -2 & 5\end{vmatrix}=9\vec{i}-16\vec{j}-\vec{k},$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{AA_1}\right]\right|=\sqrt{81+256+1}=\sqrt{338}=13\sqrt{2},\quad S_{ADD_1A_1}=13\sqrt{2}\ \text{кв. од.}$$

в) Для знаходження довжини висоти, проведеної з вершини A_1 на грань $ABCD$, скористаємось формулою для знаходження об'єму паралелепіпеда $V=h\cdot S_{ABCD}$.

Звідси $h=\dfrac{V}{S_{ABCD}}=\dfrac{44}{2\sqrt{26}}=\dfrac{22\sqrt{26}}{26}=\dfrac{11\sqrt{26}}{13}$.

Отже, $h=\dfrac{11\sqrt{26}}{13}$ лін. од.

г) Для знаходження $\cos\varphi_1$, скористаємось формулою $\cos\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$;

$\cos\varphi_1=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B_1D}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{B_1D}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{B_1D}\right|}$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{B_1D}$:

$$\overrightarrow{B_1D}=\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD},\quad \overrightarrow{B_1D}(1;0;-3).$$

За формулою скалярного добутку отримаємо:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B_1D}=4\cdot 1+3\cdot 0+0\cdot(-3)=4,$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{16+9+0}=5,\quad \left|\overrightarrow{B_1D}\right|=\sqrt{1+0+9}=\sqrt{10},\quad \cos\varphi_1=\frac{4}{5\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{25}.$$

д) Для знаходження косинуса кута між гранями $ABCD$ і ADD_1A_1 скористаємось тим, що кут між двома площинами дорівнює куту між перпендикулярами до цих площин. Позначимо вектор, перпендикулярний до грані ADD_1A_1 через $\vec{n}_2$, а до грані $ABCD$ через $\vec{n}_1$, тоді $\cos\varphi_2=\dfrac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$. В ролі

$\vec{n}_1$ можна взяти векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ *і* $\overrightarrow{AD}$, тобто $\vec{n}_1(6,-8,-2)$, а в ролі $\vec{n}_2$ – векторний добуток векторів $\overrightarrow{AD}$ *і* $\overrightarrow{AA_1}$, тобто $\overrightarrow{n_2}(9;-16;-1)$.

Тоді,

$$\cos\varphi_2 = \frac{6\cdot 9 + (-8)\cdot(-16) + (-2)\cdot(-1)}{2\sqrt{26}\cdot 13\sqrt{2}} = \frac{46\sqrt{13}}{169}.$$

Задача 2.1. Сила $\vec{F} = \{2; -4; 5\}$ прикладена до точки $O\ (0; 2; 1)$. Визначити момент цієї сили відносно точки $A(-1; 2; 3)$.

Розв'язання

Момент сили $\vec{F}$ відносно точки A є вектор $\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{OA}$ та шуканого вектора $\vec{M}$: $\overrightarrow{OA} = \{-1; 0; 2\}$,

$$\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 9\vec{j} + 4\vec{k},$$

тобто $\vec{M} = \{8; 9; 4\}$.

Задача 2.2. Нехай задано трикутник з вершинами: $A(-2; 3)$, $B(4; 4)$, $C(2; -1)$ (рис. 2.6). Знайти його площу [15].

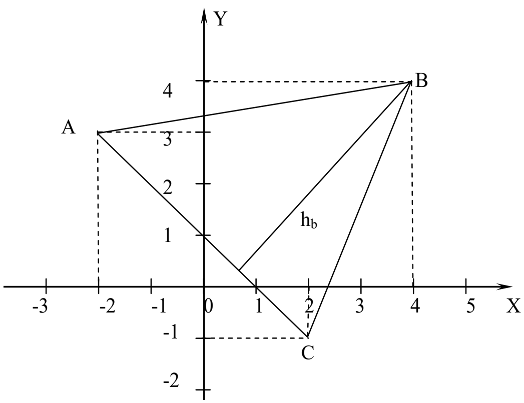


Рис. 2.6. Трикутник

Розв’язання

Спосіб 1. Ефективним є обчислення площі трикутника через застосування векторного добутку. Знайдемо необхідні вектори $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$. Маємо $\vec{AB}=(6;1)$ $\vec{AC}=(4;-4)$. Отже,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 1 & 0\\ 4 & -4 & 0\end{matrix}\right\|=2\left|-7\vec{k}\right|=14 \text{ (кв.од.)}.$$

Спосіб 2. Ця ж площа може бути знайдена із застосуванням скалярного добутку, а саме:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|}\right)^2}=2\sqrt{2}\sqrt{37}\sqrt{1-\left(\frac{24-4}{\sqrt{37}\sqrt{32}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{37\cdot 32-400}=14 \text{ (кв.од.)}.$$

Розділ 3. Аналітична геометрія на площині та в просторі

3.1. Пряма на площині

Пряма лінія на площині – це множина точок $M\ (x;y)$, координати яких задовольняють рівняння $Ax+By+C=0$, де A, B, C – задані коефіцієнти прямої, при цьому $A^2+B^2>0$. Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ і має нормальний вектор $\vec{N}=(A;B)$ буде наступним

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \tag{3.1}$$

Рівняння прямої, що проходить через дві різні точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{3.2}$$

Рівняння прямої, що проходить через дану точку $M_0(x_0;y_0)$ у заданому напрямку (рівняння з кутовим коефіцієнтом нахилу)

$$y-y_0=k(x-x_0)\,, \tag{3.3}$$

де $k=tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої;

α – кут між прямою і додатнім напрямом осі OX.

Якщо прямі l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1 x + b_1$ і $y = k_2 x + b_2$, то кут φ між ними обчислюється за формулою

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Умова паралельності прямих l_1 і l_2

$$k_1 = k_2,$$

а умова їх перпендикулярності

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

Якщо прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то величина кута φ між ними обчислюється за формулою

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Умова паралельності прямих

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

Умова перпендикулярності прямих

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Відстань d від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ обчислюється за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Приклад 3.1. Дано трикутник з вершинами $A(1; -2)$, $B(5; 4)$, $C(-2; 0)$. Скласти рівняння медіани CM, висоти BN та бісектриси AP.

Розв’язання

Якщо $M(x_1; y_1)$ – середина сторони AB, то $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3,$ $y_1 = \frac{-2+4}{2} = 1$, звідси $M\ (3;\ 1)$. Рівняння медіани CM, знайдемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки $C(\ -2;\ 0)$, $M\ (3; 1)$.

За формулою (3.2) маємо

$$\frac{x+2}{3+2} = \frac{y-0}{1-0} \quad \Rightarrow \quad x - 5y + 2 = 0.$$

Оскільки висота BN проходить через точку B і має вектор нормалі $\overrightarrow{AC}\ (-2-1; 0+2) = (-3; 2),$ то за формулою (3.1) дістанемо рівняння прямої BN

$$-3(x-5) + 2(y-4) - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - 2y - 7 = 0.$$

Для визначення рівняння прямої AP скористаємося властивістю бісектриси

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

Маємо

$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}, AC = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13},$ тому

$$\frac{BP}{PC} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 2.$$

Оскільки точка $P(x; y)$ ділить відрізок BC у відношенні $\lambda = 2,$ то за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},$$

дістанемо

$x = \frac{5 + 2(-2)}{1+2} = \frac{1}{3}, y = \frac{4+2+0}{1+2} = \frac{4}{3}$

і тоді координати точки $P\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Отже, рівняння бісектриси *AP*, знайдемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(1;\,-2)$ і $P\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ (формула 3.2). Маємо

$$\frac{x-1}{\frac{1}{3}-1}=\frac{y+2}{\frac{4}{3}+2} \text{ або } \frac{10}{3}(x-1)=-\frac{2}{3}(y+2) \text{ або } 5x+y-3=0.$$

Задача 3.1. Знайти найменшу відстань від озера, берегова лінія якого описується функцією $y=x^2-4x+6$, до шосе, яке визначається прямою $x+y-2=0$.

Розв’язання

На кривій знаходимо $y=x^2-4x+6$ точки, в яких дотичні пралельні заданій прямій $x+y-2=0$. Визначаємо відстань від цих точок до прямої, після чого вибираємо з них найменшу. Оскільки дана пряма має кутовий коефіцієнт $k=-1$, то паралельні їй дотичні мають той самий кутовий коефіцієнт $y'=2x-4=-1$, звідки маємо $x=3/2$, $y(3/2)=9/4$. Тобто маємо точку $B(3/2\,;9/4)$, тому за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

відстань дорівнює $d=\dfrac{7}{4\sqrt{2}}$. А це і буде шукана відстань від озера до шосе.

3.2. Пряма та площина у просторі

Рівняння вигляду $Ax+By+Cz+D=0$ відображає площину. Коефіцієнти *A*, *B*, *C* при змінних x, y, z є координатами вектора, перпендикулярного даній площині.

Кут між двома площинами $Ax+By+Cz+D=0$ і $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

Умова паралельності двох площин

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1},$$

Умова перпендикулярності двох площин

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

Відстань від точки $A(x_0, y_0, z_0)$ до площини, заданої загальним рівнянням, знаходять за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пряма у просторі може бути визначена як перетин двох площин

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0; \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$$

або канонічним рівнянням

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

де $\vec{S} = (m, n, p)$ – напрямний вектор прямої, $M(x_0, y_0, z_0)$ – точка, що лежить на прямій.

Пряму в просторі можемо задати також параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

де t – довільний параметр.

Рівняння прямої в просторі, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Площина і пряма у просторі, що задана канонічно, можуть перетинатися під деяким кутом α, який визначається за формулою

$$\sin\alpha=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

У разі виконання умови $Am+Bn+Cp=0$ пряма і площина паралельні, а якщо $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ – перпендикулярні. Умовою того, що пряма належить площині, є виконання співвідношень

$$\begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \\ Am+Bn+Cp=0 \end{cases}.$$

Приклад 3.2. Скласти рівняння площини, що проходить через вісь OZ і утворює з площиною $2x+y-\sqrt{5}z=0$ кут 60°, знайти відстань від шуканої площини до точки $A(1;3;5)$.

Розв’язання

Рівняння шуканої площини можна записати у вигляді $Ax+By=0$, тому що вона проходить через вісь OZ. Використаємо другу умову задачі

$$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}=\frac{2A+B}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{10}},$$

з якої одержимо рівняння $3\frac{A^2}{B^2}+8\frac{A}{B}-3=0$; $\frac{A}{B}=-3$ або $\frac{A}{B}=\frac{1}{3}$. Остаточно маємо, що умовам задачі задовольняють дві площини $3x-y=0$ і $x+3y=0$. Точка A належить першій площині, тому що $d_1=0$, а відстань її до другої площини $d_2=\frac{|1+9|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$.

Приклад 3.3. Знайти напрямний вектор прямої $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$; кути, які утворює пряма з осями системи координат.

Розв'язання

Вектори $\vec{N}_1(1;1;-1)$ і $\vec{N}_2(1;-1;0)$ перпендикулярні до відповідних площин, що задають рівняння прямої, тому напрямний вектор прямої $\vec{S}$ розташований перпендикулярно до кожного з векторів $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$. Згідно з означенням векторного добутку векторів

$$\vec{S}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}.$$

Отже, $\vec{S}=(-1;-1;-2)$.

Кути з відповідними координатними осями знайдемо за формулами

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{6}};\ \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{6}};\ \cos\gamma=-\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Приклад 3.4. Показати, що дві прямі

$$\begin{cases} x-z+2=0 \\ y-2z-1=0 \end{cases} \text{ і } \frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-2}{1}$$

перетинаються, записати рівняння площини, в якій вони розташовані.

Розв'язання

Дві прямі лежатимуть в одній площині, коли їх напрямні вектори $\vec{S}_1$ і $\vec{S}_2$ та вектор $\overline{M_1M_2}$ будуть компланарними. Точка $M_1(-2;1;0)$ належить першій прямій, а $M_2(2;4;2)$ – другій. Вектор $\overline{M_1M_2}=(4;3;2)$. Напрямний вектор

$$\vec{S}_1=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}==\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k};\ \ \vec{S}_2=(3;1;1).$$

Мішаний добуток трійки вказаних векторів буде наступним

$$\left(\vec{S}_1 \times \vec{S}_2\right) \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Отже, прямі лежать в одній площині. Для запису рівняння цієї площини

знайдемо вектор $\vec{N} = \vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

Точка $M_1(-2; 1; 0)$ належить цій площині. Отже, маємо

$$x + 2 + 2(y - 1) - 5z = 0$$

або остаточно рівняння площини має вигляд $x + 2y - 5z = 0.$

Розділ 4. Теорія границь

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому околі точки x=a, за винятком, можливо, самої точки x=a.

Означення. Число b називається *границею функції* $f(x)$ *при* $x \to a$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке що при $|x - a| < \delta$ і $x \neq a$ виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Означення. Число b називається *границею функції* $f(x)$, *коли* $x \to \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $M > 0$, таке що з нерівності $|x| > M$ випливає нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Означення. Функція $f(x)$ називається *нескінченно великою величиною* (*н.в.в.*) при $x \to a$, якщо для будь-якого $M > 0$, яке б велике воно не було, існує число $\delta > 0$, таке що з нерівності $0 < |x - a| < \delta$ випливає $|f(x)| > M$.

Означення. Функція $f(x)$ називається *нескінченно малою величиною* (*н.м.в.*) при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0.$

4.1. Односторонні границі функції

Якщо при $x \to a(x < a)$ функція має границю, то ця границя називається *лівосторонньою границею функції в точці* $x = a$.

Якщо при $x \to a$ $(x > a)$ функція має границю, то ця границя називається *правосторонньою границею* функції в точці $x = a$.

Теорема 4.1. Для існування $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{a+0} f(x) = b.$

Приклад 4.1. Довести, що $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ не існує.

Розв'язання

Розглянемо односторонні границі:

а) ліворуч $\lim\limits_{x \to -0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \left| \begin{matrix} x \to -0 \\ \frac{1}{x} \to -\infty \end{matrix} \right| = -\frac{\pi}{2}$;

б) праворуч $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \left| \begin{matrix} x \to +0 \\ \frac{1}{x} \to +\infty \end{matrix} \right| = +\frac{\pi}{2}$.

Отже, $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ не існує, оскільки односторонні границі хоча й існують, але не рівні між собою.

Практичне обчислення границь функцій базується на наступних теоремах та формулах:

Нехай $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = A,\ \lim\limits_{x \to a} \beta(x) = B.$ Тоді:

1. $\lim\limits_{x \to a} C = C,\ C - const$; 2. $\lim\limits_{x \to a} (\alpha(x) \pm \beta(x)) = A \pm B$;

3. $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x)\beta(x) = A \cdot B$; 4. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{A}{B}$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ – перша визначна границя

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ – друга визначна границя.

У найпростіших випадках знаходження границі функції зводиться до підстановки у функцію граничного значення аргументу. Але досить часто така підстановка приводить до невизначеностей виду: $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$; $\infty-\infty$; $0\cdot\infty$; 1^{∞}. Операцію знаходження границі у цих випадках називають розкриттям невизначеності. Розглянемо деякі окремі випадки.

1. Невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$ задана відношенням двох многочленів.

Приклад 4.2. Знайти: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x-3}{5x^4+x^2+10x+4}$.

Розв’язання

Маємо невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$. Щоб її розкрити, потрібно поділити чисельник і знаменник дробу на найвищий степінь x, тобто на x^4

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x-3}{5x^4+x^2+10x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2/x^3-3/x^4}{5+1/x^2+10/x^3+4/x^4}=\frac{1}{5}.$$

2. Невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$ задана відношенням двох многочленів.

Приклад 4.3. Знайти: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4}$.

Розв’язання

Оскільки $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+2x^2-x-2)=0$; $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-4)=0$, то маємо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$. Щоб її розкрити, потрібно розкласти чисельник і знаменник дробу на множники:

$$x^3+2x^2-x-2=(x^2+3x+2)(x-1);\ \ x^2+3x-4=(x+4)(x-1).$$

Маємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+3x+2)(x-1)}{(x+4)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x+2}{x+4}=\frac{6}{5}.$$

3. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана ірраціональними виразами.

Приклад 4.4. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Розв'язання

Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Щоб її розкрити, потрібно позбутися від ірраціональності. Для цього домножимо чисельник і знаменник дробу на спряжений вираз:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{2}{3}.$$

4) Невизначеність виду $\infty-\infty$ задана ірраціональними виразами.

Приклад 4.5. Знайти: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$.

Розв'язання

Маємо невизначеність виду $\infty-\infty$, яку розкриємо, домноживши чисельник і знаменник дробу на спряжений вираз:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+4/x}+1}=2.$$

5. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана виразами, що містять тригонометричні функції, часто розкриваються за допомогою першої визначної границі.

Приклад 4.6. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\ 5x}{\sin\ 3x}$.

Розв'язання

Маємо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$ яку розкриємо за допомогою першої визначеної границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\frac{5}{3}.$$

6. Невизначеність виду 1^{∞} розкривають за допомогою другої визначної границі.

Приклад 4.7. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+3}\right)^{1-5x}$.

Розв'язання

Маємо невизначеність виду 1^{∞}, яку розкриємо за допомогою другої визначної границі:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x+3}\right)^{1-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x}{2x+3}-1\right)^{1-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-2x-3}{2x+3}\right)^{1-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{2x+3}\right)^{1-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-3}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-3}}\right)^{\frac{-3(1-5x)}{2x+3}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-3(1-5x)}{2x+3}}=\sqrt{e^{15}}.$$

Приклад 4.8. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\ x)^{1/x^2}$.

Розв'язання

Розкриємо невизначеність 1^{∞} за допомогою другої визначної границі

$$\lim_{x\to 0}(\cos\ x)^{1/x^2}=\lim_{x\to 0}(1+(\cos\ x-1))^{\frac{(\cos x-1)}{(\cos x-1)x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\frac{-x^2}{2}}{x^2}}=e^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Функція $\alpha(x)$ є нескінченно малою функцією при $x \to a$ $(x \to \infty)$, якщо $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ $(\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0)$. Нехай $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ – нескінченно малі функції при $x \to a$, тоді якщо $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1,$ то $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ є еквівалентними нескінченно малими $(\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x))$.

4.2. Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій

$\sin x \sim x,\ x \to 0;$	$e^x - 1 \sim x,\ x \to 0;$
$tgx \sim x,\ x \to 0;$	$\log_a(1+x) \sim x \log_a e,\ a \to 0;$
$\arcsin x \sim x,\ x \to 0;$	$a^x - 1 \sim x \ln a,\ x \to 0;$
$arctgx \sim x,\ x \to 0;$	$\lg(1+x) \sim x \lg e,\ x \to 0;$
$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2},\ x \to 0;$	$(1+x)^k - 1 \sim kx,\ x \to 0,\ k > 0.$

Використовуючи таблицю еквівалентних нескінченно малих функцій, зручно обчислювати границі функцій.

Приклад 4.9. Знайти а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{tg 4x}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{arctg(x-1)}{x^2 - 4x + 3}$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{6x} - 1}{\arcsin 3x}$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 5x - \cos 3x}{x^2}$.

Розв’язання

а) Оскільки $\sin 2x \sim 2x,\ \ tg 4x \sim 4x,$ при $x \to 0,$ то дістанемо

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{tg 4x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}.$$

б) Оскільки $arctg(x-1) \sim x - 1$ при $x \to 1,$ то

$$\lim_{x\to 1}\frac{arctg\,(x-1)}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{2}.$$

в) Оскільки $3^{6x}-1\sim 6x\ln 3,\ \arcsin 3x\sim 3x$ при $x\to 0,$ то

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{6x}-1}{\arcsin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x\ln 3}{3x}=2\ln 3.$$

г) Оскільки $\cos 5x-\cos 3x=-2\sin 4x\sin x,\ \sin 4x\sim 4x,$

$\sin x\sim x$ при $x\to 0,$ то дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 4x\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-8x\cdot x}{x^2}=-8.$$

Розділ 5. Похідна та її застосування

5.1. Основи диференціального числення

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на деякому проміжку (a; b). Візьмемо значення $x\in(a;b)$ і надамо аргументу приросту Δx. Тоді функція набуде приросту $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ і позначається

$$y',\ y'_x,\ \frac{dy}{dx},\ f'(x),\ \frac{df(x)}{dx}.$$

Означення. Похідною функції $y=f(x)$ за аргументом x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Позначається $y',\ y'_x,\ \frac{dy}{dx},\ f'(x),\ \frac{df(x)}{dx}.$

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням* цієї функції.

Користуючись означенням похідної, знайти похідні функцій.

Приклад 5.1. Функція $y = x^2$. Знайти похідну в точках $x = 3$ і $x = -4$.

Розв'язання

Надамо аргументу x приросту Δx, тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$.

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, відшукаємо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$. Таким чином, $f'(x) = 2x$.

Похідна в точці x=3 $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$, а похідна при $x = -4$ буде $f'(-4) = 2 \cdot (-4) = -8$.

Приклад 5.2. Знайти похідну функції $y = \sin x$.

Розв'язання

Користуючись відомою з тригонометрії формулою

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

знайдемо приріст функції у точці x і обчислимо границю:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x;$$

тобто $(\sin x)' = \cos x$.

Аналогічно можна дістати: $(\cos x)' = -\sin x$.

Приклад 5.3. Знайти похідну функці $y = e^x$.

Розв'язання

Для цієї функції маємо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0}\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x,$$

тобто $\left(e^x\right)' = e^x$.

Наведемо основні правила, що найчастіше використовуються обчислюючи похідні. Нехай C – стала величина, а $u(x)$ і $v(x)$ – функції, які мають похідні в точці x. Тоді:

1. $C' = 0;$
2. $\left(Cf(x)\right)' = C\left(f(x)\right)';$
3. $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v';$
4. $\left(u \cdot v\right)' = u'v + uv';$
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2};$
6. $\left(f(u(x))\right)' = f'(u) \cdot u'(x),$

де $\left(f(u(x))\right)$ – складена функція від x.

Таблиця похідних

1. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1};$
2. $x' = 1;$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a;$
4. $\left(e^x\right)' = e^x;$
5. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a};$
6. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x};$
7. $\left(\cos x\right)' = -\sin x;$
8. $\left(\sin x\right)' = \cos x;$
9. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

10. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$;

14. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Приклад 5.4. Знайти похідні функції а) $y = 4x^3 - 2x + 6$;

б) $y = 5\sqrt[4]{x^5} + \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{3}{x^4}$; в) $y = (\sin x - 1)\cdot(x^2 - 5)$; г) $y = \frac{x^7}{\cos x}$.

Розв’язання

а) Скориставшись правилами диференціювання 1, 2, 3 і табличною формулою 1, будемо мати

$$y' = (4x^3 - 2x + 6)' = (4x^3)' - (2x)' + 6' =$$

$$= 4(x^3)' - 2(x)' + 0 = 4\cdot 3x^2 - 2 = 12x^2 - 2.$$

б) Обчислюючи похідну, доцільно всі корені записати у вигляді степеневої функції $y = 5x^{5/4} + (2x)^{-1/2} - 3x^{-4}$. Тоді

$$y' = (5x^{5/4})' + ((2x)^{-1/2})' - (3x^{-4})' =$$

$$= 5\cdot\frac{5}{4}\cdot x^{5/4-1} + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-1/2-1} - 3\cdot(-4)\cdot x^{-4-1} =$$

$$= \frac{25}{4}x^{1/4} - x^{-3/2} + 12x^{-5}.$$

в) Скористаємось формулою похідної добутку $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

$$y' = (\sin x - 1)' \cdot (x^2 - 5) + (\sin x - 1) \cdot (x^2 - 5) =$$
$$= \cos x \cdot (x^2 - 5) + 2x(\sin x - 1).$$

г) Для знаходження похідної даної функції скористаємось правилом диференціювання частки $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Маємо $y' = \left(\frac{x^7}{\cos x}\right)' = \frac{(x^7)' \cos x - x^7 (\cos x)'}{(\cos x)^2} =$

$$= \frac{7x^6 \cos x + x^7 \sin x}{(\cos x)^2}.$$

Приклад 5.5. Знайти похідну функцій: а) $y = \sin(4x + 5)$; б) $y = \sin^2 x$; в) $y = \arccos\sqrt{x}$.

Розв'язання

а) Дана функція є складеною, а саме, $y = \sin(u)$, де $u = 4x + 5$; $y'_u = \cos u$, $u'_x = 4$. Використовуючи правило 6 маємо: $y'_x = \cos u \cdot 4 = 4\cos(4x + 5)$.

б) Ця функція є також складеною. Останньою дією є піднесення до квадрату.

Отже $y = u^2$, де $u = \sin x$.

Тоді $y'_x = 2u \cdot u' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

в) $y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{2\sqrt{x - x^2}}$.

Щоб продиференціювати неявно задану функцію $F(x, y) = 0$, потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності, вважаючи y функцією від x, і одержане рівняння розв’язати відносно y'. Похідна неявної функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y.

Приклад 5.6. Знайти похідну $y'(x)$ функцій заданих неявно:

а) $x^3 + e^y - x^3 \ln y = 6;$ б) $x^2 \cos y + y^2 \sin x + 3x - 2y + 2 = 0.$

Розв’язання

а) Продиференціюємо почленно задане рівняння, пам’ятаючи, що y є функцією змінної x.

$$3x^2 + e^y \cdot y' - 3x^2 \ln y - x^3 \frac{1}{y} \cdot y' = 0.$$

Виразимо з цього рівняння y'

$$e^y \cdot y' - x^3 \frac{1}{y} \cdot y' = 3x^2 \ln y - 3x^2$$

$$\left(e^y - x^3 \frac{1}{y}\right) \cdot y' = 3x^2 (\ln y - 1)$$

$$y' = \frac{3x^2 y(\ln y - 1)}{(ye^y - x^3)}.$$

б) Диференціюємо задане рівняння по змінній x, вважаючи $y = y(x)$

$$2x \cos y - x^2 \sin y \cdot y' + 2y \cdot y' \sin x + y^2 \cos x + 3 - 2y' = 0 .$$

Виразимо з цього рівняння y'

$$(2y \sin x - x^2 \sin y - 2) \cdot y' = -2x \cos y - y^2 \cos x - 3$$

$$y' = \frac{-2x \cos y - y^2 \cos x - 3}{2y \sin x - x^2 \sin y - 2}.$$

Якщо функція y від x задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t_0 \le t \le T ,$$

то похідна $\dfrac{dy}{dx}$ визначається теж параметричними рівняннями, а

саме $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} \\ x = x(t) \end{cases}$ за умови, що $y'(t),\ x'(t)$ існують і $x'(t) \neq 0$.

Приклад 5.7. Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ функції, заданої параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = 3(t - \cos t) \\ y = 3(1 - \sin t) \end{cases}.$$

Розв'язання

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3(1 - \sin t)'}{3(t - \cos t)'} = \frac{-\cos t}{(1 + \sin t)}.$$

Логарифмічною похідною функції $y = y(x)$ називають похідну від логарифма цієї функції, тобто $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$. Застосування попереднього логарифмування іноді спрощує обчислення, оскільки $y' = y(\ln y)'$.

Приклад 5.8. Знайти похідну функції $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2(x+1)}{x-3}}$.

Розв'язання

Логарифмуючи задану рівність, дістанемо

$$\ln y = \frac{1}{3}\left(2 \ln x + \ln(x+1) - \ln(x-3)\right).$$

Користуючись логарифмічною похідною, маємо:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3}\right) = \frac{2}{3}\frac{x^2 - 4x - 3}{x(x+1)(x-3)}.$$

Звідки $y' = y(\ln y)' = \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x^2(x+1)}{x-3}}\,\dfrac{x^2-4x-3}{x(x+1)(x-3)} = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{x^2-4x-3}{\sqrt[3]{x(x+1)^2(x-3)^4}}$.

Зауважимо, що похідна від функції $f(x)$ називається похідною першого порядку. Похідна від першої похідної функції $f'(x)$ називається похідною другого порядку і позначається $f''(x)$ і т.д.

Приклад 5.9. Знайти похідну другого порядку функції $f(x) = \sin 3x$.

Розв'язання Знаходимо першу похідну

$$f'(x) = (\sin 3x)' = 3\cos 3x.$$

Від цієї функції ще раз візьмемо похідну

$$f''(x) = (3\cos 3x)' = -9\sin 3x$$

Задача 5.1. Радіус основи бункера з картоплею конічної форми дорівнює 5 м. Як зміниться вага картоплі в бункері, якщо його висота збільшиться на 1,5 м? (1 м^3 картоплі важить приблизно 4 ц).

Розв'язання

Позначимо висоту бункера через x, радіус основи через r, тоді об'єм бункера конічної форми має вигляд: $V = V(x) = \dfrac{1}{3}\pi r^2 x$. За умовою задачі $r = 5$ м, отже, $V(x) = \dfrac{25}{3}\pi x$. Вага картоплі пропорційна об'єму, тобто $P = 4V$ або $P(x) = \dfrac{100}{3}\pi x$. Знайдемо ΔP.

$\Delta P \approx dP = P'(x)dx = \dfrac{100}{3}\pi dx$, $dx \approx \Delta x = 1{,}5$ – за умовою задачі, тому

$$\Delta P = 1{,}5 \cdot \frac{100}{3}\pi \approx 157 \text{ ц.}$$

Отже, вага картоплі зросте на 157 ц, коли висота бункера збільшиться на 1,5 м.

Задача 5.2. Потрібно вирити силосну яму об'ємом 32 м^3 з квадратним дном таких розмірів, щоб на облицювання її дна і стін пішла найменша кількість матеріалу. Які повинні бути розміри ями?

Розв’язання

Визначимо суттєві фактори, що впливають на розв’язування задачі. Суттєвими факторами є розміри ями. Оговорено, що дно ями – квадрат, об’єм ями 32 м^3. Припускаємо, що форма ями – прямий паралелепіпед. Суттєвою є також вимога, щоб на облицювання дна і стін пішла найменша кількість матеріалу. Ця вимога означає, що сумарна площа бокової поверхні та основи повинна бути найменшою.

Сформулюємо тепер математичну задачу: визначити розміри паралелепіпеда, щоб сумарна площа бокової поверхні та нижньої грані була найменшою.

Нехай x м – довжина сторони квадратного дна ями, тоді висоту ями H знайдемо із співвідношення $32 = x^2 H$, тобто $H = \frac{32}{x^2}$. Складемо сумарну функцію площі поверхні дна та стін силосної ями:

$$S(x) = x^2 + 4xH \text{ або } S(x) = x^2 + \frac{128}{x},\ x \neq 0.$$

Змінна x може набувати лише додатні значення, тому будемо шукати найменше значення $S(x)$ на додатній півосі. Знайдемо похідну функції $S(x)$. Дістанемо $S' = 2x - \frac{128}{x^2}$. Для находження критичних точок розв’яжемо рівняння $S' = 0$, тобто рівняння $2x - \frac{128}{x^2} = 0$. Звідки $2x^3 - 128 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 64$. Рівняння має один дійсний корінь $x = 4$, тоді $H = 2$.

Визначимо знак похідної поблизу точки $x = 4$. Маємо

$$S'(3) = 6 - 14{,}22 \approx -8{,}22 < 0,\ S'(5) = 10 - 5{,}12 = 4{,}88 > 0.$$

В точці $x = 4$ функція $S(x)$ має мінімум, він же і є найменшим значенням функції $S(4) = 16 + 32 = 48$. Ми не перевіряємо виконання достатніх умов екстремуму, оскільки за змістом задачі функція має один мінімум.

Отже, щоб на облицювання дна і стін силосної ями пішла найменша кількість матеріалу, її розміри мають бути $4:4:2$.

Задача 5.3. При якому відношенні глибини до ширини, канал прямокутного перерізу має гідравлічно найвигідніший профіль?

Розв'язання

Нехай x – ширина каналу, G – площа його поперечного перерізу. Тоді глибина каналу дорівнює $\frac{G}{x}$, а його змочений периметр $P(x)=x+\frac{2G}{x}$.

Потрібно знайти найменше значення функції $P(x)$ на $(0;\ \infty)$. Знайдемо похідну функції, маємо: $P'(x)=1-\frac{2G}{x^2}$. Так як $P'(\sqrt{2G})=0$ і $P'(x)<0$ при $0<x<\sqrt{2G}$; $P'(x)>0$ при $x>\sqrt{2G}$, то функція $P(x)$ досягає найменшого значення в точці $x=\sqrt{2G}$. Отже, ширина каналу дорівнює $\sqrt{2G}$, глибина – $\frac{G}{\sqrt{2G}}=\sqrt{\frac{G}{2}}$, а шукане відношення дорівнює $\frac{1}{2}$.

Задача 5.4. Експериментально встановлено, що витрата бензину в літрах автомобілем залежить від швидкості його руху і визначається формулою $f(v)=3\cdot 10^{-3}v^2-3\cdot 10^{-1}v+18$, де v – швидкість автомобіля, км/год; $f(v)$ – витрата бензину на 100 км шляху, л. Визначити як змінюється витрата бензину від швидкості автомобіля 40 км/год і знайти найбільш економічну швидкість автомобіля.

Розв'язання

Зміну витрати палива знайдемо як похідну функції

$$f(v)=3\cdot 10^{-3}v^2-3\cdot 10^{-1}v+18.$$

Маємо $f'(v)=-0{,}3+0{,}006v$; $f'(v)=0 \Rightarrow -0{,}3+0{,}006v=0 \Rightarrow v=50$. При $v<50$ $f'(v)<0$, а при $v>50$ $f'(v)>0$.

Таким чином, зміна швидкості по-різному впливає на витрату бензину. Якщо рух автомобіля прискорюється при малих швидкостях, що не перевищують 50 км/год, витрата бензину зменшується, а при великих – збільшується. Очевидно, для кожного автомобіля існує така швидкість, при якій витрата бензину постійна. Цю швидкість називають критичною. Для визначення критичної швидкості прирівнюють до 0 похідну $f'(v)$. Отже, найбільш економічно вигідна швидкість 50 км/год.

Задача 5.5. Центральна садиба агрофірми C розташована в 50 км від районного центру A (рис. 5.1.) і в 30 км від магістралі, яка проходить через районний центр [40].

Під яким кутом $\angle DCE$ до автомагістралі варто провести під'їзну дорогу з C, щоб вартість перевезень вантажу з C до A та з A до C була найменшою, коли відомо, що перевезення по автомагістралі вдвічі дешевше, ніж по під'їзній дорозі?

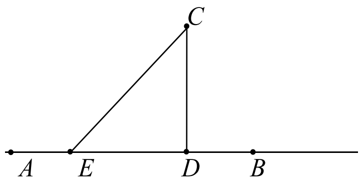


Рис. 5.1. Під'їзна дорога CEA

Розв'язання

Нехай $DE = x.$ Тоді $CE = \sqrt{900 + x^2}$, $AE = AD - x = 40 - x.$ Позначимо вартість перевезення 1 т вантажу на 1 км по магістралі через p та знайдемо вартість перевезення 1 т вантажу від A до C або в зворотньому напрямку. Маємо

$$P(x) = p(40 - x) + 2p\sqrt{900 + x^2} \quad (0 \le x \le 40).$$

Необхідно знайти найменше значення функції $P(x)$ на відрізку $[0;\ 40]$. Знайдемо похідну $P'(x) = -p + \dfrac{2px}{\sqrt{900 + x^2}}$. Очевидно, що на проміжку $[0;\ 40]$ у функції $P(x)$ одна критична точка $x_0 = 10\sqrt{3}$, причому $P(x_0) = (40 + 30\sqrt{3})p$, в той час як $P(0) = P(40) = 100p.$ Отже, в точці x_0 функція набуває найменшого значення. Тепер знайдемо кут примикання:

$$tg\alpha = \frac{30}{10\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \text{ тобто } \alpha = 60^0.$$

Задача 5.6. Відомо, що вантажна робота по вивезенню врожаю з прямокутного поля шириною a і довжиною b обчислюється за формулою

$A=\frac{k}{24}(9a^2b+6ab^2-a^3)$. З усіх прямокутників даної площі S необхідно вибрати такий, для якого вантажна робота A буде найменшою [40].

Розв’язання

Нехай x – ширина поля, де $0 < x \le \sqrt{S}$. Тоді його довжина $\frac{S}{x}$, а вантажна робота $A=\frac{k}{24}(9a^2b+6ab^2-a^3)=\frac{k}{24}(6\frac{S^2}{x}+9Sx-x^3)$.

Необхідно знайти найменше значення функції $A(x)$ на проміжку $(0;\ \sqrt{S}\,]$. Знайдемо похідну функції $A(x)$: $A'(x)=\frac{-k(x^2-S)(x^2-2S)}{8x^2}$.

Так як $A'(x)<0$ на інтервалі $(0;\ \sqrt{S})$, то функція $A(x)$ на проміжку $(0;\ \sqrt{S}\,]$ спадає. Тому вона досягає найменшого значення коли $x=\sqrt{S}$, тобто, коли прямокутник є квадратом.

5.2. Дослідження функцій методами диференціального числення та побудова їх графіків

Актуальним та перспективним є використання апарату диференціального числення при дослідженні різноманітних функцій з кінцевою метою побудови їх графіків. Ця схема досліджень базується на послідовному використанні наступних кроків алгоритму:

1) знайти область визначення функції, тобто вказати такі значення аргументу досліджуваної функції, при яких існують значення функції (точки кривої графіка).

2) Знайти точки перетину графіка функції з координатними осями. Такі точки графіка дозволяють правильно орієнтуватись на кінцевому етапі досліджень, зокрема, при побудові графіка кривої.

3) Дослідити функцію на парність та непарність, періодичність та неперіодичність. Даний пункт досліджень може бути використаний також при побудові графіка: для парної функції (умова парності $f(-x)=f(x)$) її графік

симетричний відносно осі *OY*, для непарної (умова непарності $f(-x)=-f(x)$) – графік симетричний відносно початку координат. Властивість періодичності, яка характерна лише для тригонометричних функцій, також може бути використана аналогічно: при наявності періоду функція досліджується тільки на періоді (умова періодичності функції з періодом $T>0$: $f(x+T)=f(x)$).

4) Знайти точки розриву функції. Дані точки використовують при побудові вертикальних асимптот графіка функції.

5) Знайти інтервали монотонності, точки екстремуму та значення функції в цих точках. Даний пункт досліджень є найважливішим при побудові графіка функції, він базується на обчисленні та застосуванні результатів першої похідної функції.

Необхідна умова екстремуму: $f'(x)=0$.

Достатня умова екстремуму: якщо при переході через підозрілу на екстремум точку перша похідна змінює свій знак з плюса на мінус, то це точка максимуму, якщо – з мінуса на плюс, то це точка мінімуму.

Необхідна та достатня умова зростання функції на деякому інтервалі *(a; b)* – додатній знак першої похідної, умова спадання – від'ємний знак першої похідної.

6) Знайти інтервали опуклості, вгнутості, точки перегину. Даний пункт уточнює поведінку графіка функції. Він базується на обчисленні та застосуванні результатів другої похідної досліджуваної функції.

Необхідна умова екстремуму: $f''(x)=0$.

Достатня умова перегину: якщо при переході через підозрілу на перегин точку друга похідна функції змінює свій знак, то це є точка перегину.

Необхідна та достатня умова опуклості функції на деякому інтервалі *(a; b)* – від'ємний знак другої похідної, а для вгнутості – додатній знак другої похідної.

7) Знайти асимптоти кривої. Даний пункт є важливим при побудові графіка функції. Розрізняють три види асимптот: вертикальні, похилі (права та ліва), горизонтальні. Рівняння вертикальної асимптоти: $x = C, \quad C - const$.

Рівняння похилої асимптоти

$$y = kx + b,$$

$$\left.\begin{array}{l} k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ \text{де} \quad b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right) \end{array}\right\}.$$

Якщо в рівнянні похилої асимптоти *k=0,* то відповідна похила асимптота стане горизонтальною.

8) Використовуючи результати дослідження, побудувати графік функції.

Приклад 5.10. Дослідити і побудувати графік функції $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}$.

Розв'язання

Область визначення функції: $(-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат: якщо $x = 0$, то $y = -\dfrac{1}{2}$; якщо $y = 0$, то $x = -1$, тобто маємо точки перетину: $\left(0;\ -\dfrac{1}{2}\right)$, $(-1;\ 0)$.

Оскільки

$$f(-x) = \frac{(-x+1)^2}{-x-2} = -\frac{(x-1)^2}{x+2} \neq -f(x),\ \ f(-x) = \frac{(-x+1)^2}{-x-2} \neq f(x), \text{ то}$$

функція не буде парною або непарною. Очевидно, функція не періодична.

Задана функція має розрив в точці $x = 2$, так як $\lim\limits_{x \to 2 \pm 0} \dfrac{(x+1)^2}{x-2} = \pm\infty$.

Знаходимо інтервали монотонності, точки екстремуму. Перша похідна функції

$$y' = \frac{2(x+1)(x-2) - (x+1)^2}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}.$$

дорівнює нулю при $x=-1$, $x=5$ і не існує в точці $x=2$, але остання не входить в область визначення функції. Критичні точки $x=-1$, $x=5$ і точка $x=2$ ділять область визначення функції на такі інтервали: $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 2)$, $(2;\ 5)$, $(5;\ +\infty)$. Маємо:

якщо $x\in(-\infty;\ -1)$, то $y'>0$ – функція зростає;

якщо $x\in(-1;\ 2)$, то $y'<0$ – функція спадає;

якщо $x\in(2;\ 5)$, то $y'<0$ – функція спадає;

якщо $x\in(5;\ +\infty)$, то $y'>0$ – функція зростає.

При $x=-1$ функція має максимум: $y(-1)=0$. При $x=5$ функція має мінімум:

$$y(5)=12\,.$$

Знаходимо інтервали опуклості, вгнутості, точки перегину.

Друга похідна функції

$$y''=\left(\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}\right)'=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x-5)2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{18}{(x-2)^3}\,.$$

Похідна $y''\neq 0$ і не існує при $x=2$. Точка $x=2$ ділить область визначення функції на два інтервали: $(-\infty;\ 2)$ та $(2;\ +\infty)$.

Маємо:

якщо $x\in(-\infty;\ 2)$, то $y''<0$ – крива опукла;

якщо $x\in(2;\ +\infty)$ то $y''>0$ – крива вгнута.

Точок перегину немає.

Знаходимо асимптоти графіка функції. Оскільки $x=2$ точка розриву функції, то пряма $x=2$ – вертикальна асимптота кривої.

Перевіримо, чи має ця функція похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^2}{x(x-2)}=1\,,\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+1)^2}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x+1}{x-2}=4\,.$$

Отже, $y=x+4$ – похила асимптота.

Враховуючи проведене дослідження, будуємо графік (рис. 5.1).

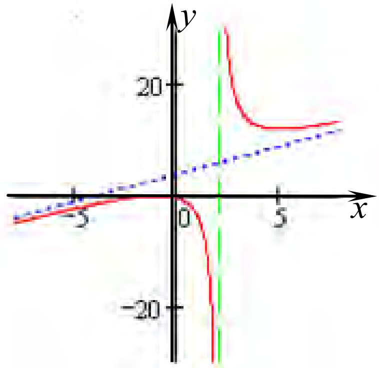


Рис. 5.2. Графік досліджуваної функції

Задача 5.5. Залежність між врожаєм озимої пшениці y ц/га та нормою висіву x млн. зерен/га виражається виробничою функцією

$$y = 5{,}6 + 8{,}1x - 0{,}7x^2.$$

Знайти оптимальну норму висіву зерен для того, щоб одержати максимальний врожай.

Розв’язання

Проведемо дослідження виробничої функції, що виражає залежність урожайності озимої пшениці (у ц/га) від норми висіву зерен (у млн. зерен/га). Функція має вигляд $y = 5{,}6 + 8{,}1x - 0{,}7x^2$. Областю визначення даної функції є інтервал $[0;+\infty)$. Графіком функції є парабола, опущена гілками вниз. Тому функція має один екстремум – максимум:

$$y' = 8{,}1 - 1{,}4x;\; 8{,}1 - 1{,}4x = 0 \Rightarrow x = 5{,}79;$$

$$y(5{,}79) = 5{,}6 + 8{,}1 \cdot 5{,}79 - 0{,}7 \cdot (5{,}79)^2 = 29{,}03.$$

Отож, максимальний урожай становить 29,03 ц/га при оптимальній нормі висіву зерен 5,79 млн.

Задача 5.6. Жива маса z телят до одного року (кг) виражається функцією $z = 378{,}4 - 419{,}6e^{-0{,}0001x}$, де x – споживання цілком засвоюваної поживної речовини, кг. Дослідити динаміку живої маси телят.

Розв'язання

Область визначення функції: $x \in [0; +\infty)$. Знайдемо похідну функції

$$z = 378{,}4 - 419{,}6e^{-0{,}0001x}.$$

Маємо $z' = 0{,}04e^{-0{,}0001x}$, $z' > 0$ на інтервалі $[0; +\infty)$; $z'' = -0{,}000004e^{-0{,}0001x}$, $z'' < 0$ на інтервалі $[0; +\infty)$.

Отже, із збільшенням засвоюваної поживної речовини жива маса телят зростає все більш повільно.

Розділ 6. Неозначений інтеграл

6.1. Методи інтегрування функцій

В диференціальному численні за даною функцією $F(x)$ знаходять її похідну $f(x) = F'(x)$. На практиці часто доводиться розв'язувати обернену задачу: необхідно відновити функцію $F(x)$, знаючи її похідну $f(x)$. Функцію $F(x)$ у цьому випадку називають первісною для $f(x)$.

Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$, якщо похідна функції $F(x)$ дорівнює $f(x)$, тобто

$$F'(x) = f(x).$$

Приклад 6.1. Нехай маємо функцію $f(x) = 3x^2$. Функція $F(x) = x^3$ є первісною для $f(x)$, так як $\left(x^3\right)' = 3x^2$. Але функція $F(x) = x^3 + 2$ також є первісною функції $f(x)$, оскільки $\left(x^3 + 2\right)' = 3x^2$, і взагалі – будь-яка функція $F(x) = x^3 + C$, де C – довільна стала, є первісною для $f(x)$. Таким чином, дана функція має множину первісних, причому будь-які дві з них відрізняються одна від одної на сталу величину.

Множина первісних функції $f(x)$ називається невизначеним (неозначеним) інтегралом від функції $f(x)$ і позначається символом $\int f(x)dx.$

Таким чином, маємо:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{6.1}$$

де $F(x)$ – будь-яка первісна;

C – стала інтегрування;

x – незалежна змінна інтегрування;

$f(x)$ – підінтегральна функція;

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

Процес знаходження невизначеного інтеграла називається інтегруванням функції.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$

3. $\int dF(x) = F(x) + C;$

4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx;$

5. $\int [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx;$

6. $\int f(kx+l)dx = \dfrac{1}{k}F(kx+l) + C.$

Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int dx = x + C;$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1,$ де $C - const;$

4. $\int e^x dx = e^x + C;$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1;$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C;$

11. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg\frac{x}{a} + C;$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C;$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C;$

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

16. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C;$

17. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C.$

Приклад 6.2. Обчислити інтеграли: а) $\int \frac{3x - 7x\sqrt[3]{x}}{x^2} dx;$ б) $\int \sin 7x dx;$

в) $\int \frac{dx}{4x^2+9}$.

Розв'язання

а) $\int \frac{3x-7x\sqrt[3]{x}}{x^2}dx = 3\int \frac{dx}{x} - 7\int x^{\frac{4}{3}-2}dx = 3\ln|x| - 7\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3\ln|x| - 21\sqrt[3]{x} + C$;

б) $\int \sin 7x dx = \int \sin 7x \frac{d(7x)}{7} = \frac{1}{7}\int \sin 7x d(7x) = -\frac{1}{7}\cos 7x + C$;

в) $\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}arctg\frac{2x}{3}\right) + C = \frac{1}{6}arctg\frac{2x}{3} + C$.

6.2. Заміна змінної у невизначеному інтегралі

Якщо обчислюється інтеграл $\int f(u(x))\psi(x)dx$, при цьому $\psi(x)dx = du(x)$, то зручно ввести нову змінну $t = u(x)$, тоді $dt = du(x) = \psi(x)dx$.

З новою змінною t інтеграл набуде вигляду $\int F(t)dt = F(t) + C = F(u(x)) + C$.

Приклад 6.3. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{3-4x}}$.

Розв'язання

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{3-4x}} = \left(\begin{array}{l} t = 3-4x \\ dt = -4dx \\ dx = -\frac{dt}{4} \end{array}\right) = \int \frac{-\frac{dt}{4}}{\sqrt[4]{t}} = -\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{4}}dt = -\frac{1}{4}\frac{t^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C = -\frac{1}{3}(3-4x)^{\frac{3}{4}} + C.$$

6.3. Метод інтегрування частинами

Основна формула даного методу $\int UdV = UV - \int VdU, \quad U = U(x),$ $V = V(x).$ Цей метод використовується, якщо під знаком інтеграла є добуток степеневої функції на тригонометричну чи показникову; під інтегралом знаходиться логарифмічна чи будь-яка обернена тригонометрична функція; під знаком інтеграла присутній добуток показникової функції на тригонометричну. Також цей метод доцільний в деяких інших випадках. Функцію $U(x)$ позначають степеневу функцію (за диференціювання показник x знижується), логарифмічну чи обернену тригонометричну (оскільки для цих функцій відносно легко знаходяться похідні). У ряді випадків даний метод застосовують послідовно декілька разів.

Приклад 6.4. Обчислити інтеграл $\int (3x-4)\cos 2xdx$.

Розв'язання

$$\int (3x-4)\cos 2xdx = \begin{pmatrix} U = 3x-4 \\ dV = \cos 2xdx \\ dU = 3dx \\ V = \int \cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(3x-4)\sin 2x - \frac{3}{2}\int \sin 2xdx =$$

$$= \frac{1}{2}(3x-4)\sin 2x + + \frac{3}{4}\cos 2x + C\ .$$

Приклад 6.5. Обчислити інтеграл $J = \int \sqrt{x^2 + A}dx.$

Розв'язання

$$J = \int \sqrt{x^2 + A}dx = \begin{pmatrix} U = \sqrt{x^2 + A} \\ dV = dx \\ dU = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2 + A}} \\ V = x \end{pmatrix} = x\sqrt{x^2 + A} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + A}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 + A} - \int \frac{x^2 + A - A}{\sqrt{x^2 + A}} dx + + A\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = x\sqrt{x^2 + A} - J + A\ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| = J.$$

$$= x\sqrt{x^2 + A} - \int \frac{x^2 + A - A}{\sqrt{x^2 + A}} dx + + A\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = x\sqrt{x^2 + A} - J + A\ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| = J.$$

Звідки $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C$.

Аналогічно $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$.

Приклад 6.6. Обчислити інтеграл $\int \sqrt{1 - 3x - x^2}\, dx.$

Розв’язання

$$\int \sqrt{1 - 3x - x^2}\, dx = \int \sqrt{1 - \left(\frac{9}{4} + 3x + x^2\right) + \frac{9}{4}}\, dx = \int \sqrt{\frac{13}{4} - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2}\, dx =$$

$$= \frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)}{2}\sqrt{1 - 3x - x^2} + \frac{13}{8}\arcsin\frac{x + \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{13}}{2}} + C =$$

$$= \frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)}{2}\sqrt{1 - 3x - x^2} + \frac{13}{8}\arcsin\frac{2x + 3}{\sqrt{13}} + C.$$

6.4. Інтегрування дробово-раціональних функцій вигляду $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$,

де $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлени відповідно зі степенем m і n змінної x. Нагадаємо, що степінь многочлена встановлюється найбільшим показником x. Якщо $m<n$, то дріб правильний, а якщо $m \geq n$, то дріб під інтегралом неправильний і його необхідно шляхом ділення чисельника на знаменник звести до суми двох доданків: многочлена та правильного раціонального дробу.

Знаменник правильного раціонального дробу $Q_n(x)$ розкладають на лінійні множники типу $(x-\alpha)^k$ (де k – кратність множника $(x-\alpha)$) або на квадратні тричлени типу (x^2+px+q) з від'ємним дискримінантом, тобто $D = p^2 - 49 < 0.$ За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, тобто

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x-\alpha)^k \cdots (x^2+px+q)\cdots} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \cdots +$$

$$+ \frac{Bx+C}{x^2+px+q} + \cdots + \cdots,$$

де $A_1, A_2, ..., A_k, B, C, ...$ – невизначені коефіцієнти.

Для знаходження невизначених коефіцієнтів $A_1, ..., A_k, B, C, .$ необхідно скласти і розв'язати алгебраїчну систему, яка утворюється шляхом прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x на основі рівності чисельників початкового та кінцевого дробів. Отримані простіші доданки інтегруються за допомогою попередніх методів інтегрування.

Приклад 6.7. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^4}{x^3+8} dx$.

Розв'язання

Нехай $\int \frac{x^4}{x^3+8}dx = J$. Оскільки $m=4$, $n=3$ – дріб під інтегралом неправильний, то

$$\frac{x^4}{x^3+8} = \frac{x(x^3+8-8)}{x^3+8} = x - \frac{8x}{x^3+8},$$

тоді

$$J = \int\left(x - \frac{8x}{x^3+8}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 8\int\frac{xdx}{x^3+8} = \frac{x^2}{2} - 8J_1.$$

Для обчислення J_1 розкладемо дріб $\frac{x}{x^3+8}$ у вигляді суми простіших дробів

$$\frac{x}{x^3+8} = \frac{x}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} = \frac{A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)}{x^3+8},$$

звідки $Ax^2 - 2Ax + 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C = x$.

$$x^0: 4A+2C=0$$

$$x^1: -2A+2B+C=1 \Rightarrow \begin{cases} 4A+2C=0 \\ -2A+2B+C=1 \\ A+B=0 \end{cases} \begin{cases} C=-2A \\ -2A-2A-2A=1 \\ B=-A \end{cases} \quad A=-\frac{1}{6}, B=\frac{1}{6}, C=\frac{1}{3.}$$

$$x^2: A+B=0$$

Отже,

$$J_1 = \int\left(\frac{-\frac{1}{6}}{x+2} + \frac{\frac{1}{6}x+\frac{2}{6}}{x^2-2x+4}\right)dx = -\frac{1}{6}\ln|x+2| + \frac{1}{6}\int\frac{x+2}{x^2-2x+4}dx = -\frac{1}{6}\ln|x+2| + \frac{1}{6}J_2.$$

Знайдемо первісну інтеграла

$$J_2 = \int\frac{x+2}{x^2-2x+4}dx : d(x^2-2x+4) = (2x-2)dx,$$

тоді

$$J_2 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2-2x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+6}{x^2-2x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}dx + 3\int \frac{dx}{x^2-2x+1+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+4\right| + 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{x-1}{\sqrt{3}}.$$

Первісна J_1 може бути записана

$$J_1 = -\frac{1}{6}\ln|x+2| + \frac{1}{12}\ln\left|x^2-2x+4\right| + \frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\,\frac{x-1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-2x+4}}{x+2}\right| +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\,\frac{x-1}{\sqrt{3}}.$$

Остаточна відповідь

$$J = \int\frac{x^4dx}{x^3+8} = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-2x+4}}{x+2}\right| + \frac{4}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{x-1}{\sqrt{3}} = C.$$

6.5. Інтегрування ірраціональних функцій

В інтегралах вигляду $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ доцільно скористатись підстановкою виду

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

де k – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n},\dots,\frac{r}{s}$.

6.6. Інтегрування тригонометричних функцій

1. В інтегралах вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$

а) якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тоді використовується підстановка $t = \cos x$;

б) якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тоді $t = \sin x$;

в) якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, тоді $t = tg\, x$ або $t = ctg\, x$;

г) якщо R – довільна функція, тоді застосовують універсальну тригонометричну підстановку

$$t = tg\, \frac{x}{2},$$

звідки

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

2. В інтегралах вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$:

а) якщо показники парні, тобто $m = 2p,\ \ n = 2q,\ \ p > 0,\ q > 0$, то

$$\sin^m x = \left(\sin^2 x\right)^p = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^p, \cos^n x = \left(\cos^2 x\right)^q = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^q$$

б) якщо один з показників непарний, наприклад, $m = 2p + 1$, то

$$\sin^m x dx = \sin^{2p} x \sin x dx = -(1-\cos^2 x)^p d\cos x,$$

тобто використовуємо заміну $t = \cos x$, що значно спрощує підінтегральний вираз.

в) перетворення добутку тригонометричних функцій в суму з використанням тригонометричних співвідношень:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right);$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right);$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left(-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right).$$

Приклад 6.8. Обчислити інтеграл $\int \frac{\sin 2x dx}{3+4\cos^2 x}$.

Розв’язання

$$\int \frac{\sin 2x dx}{3+4\cos^2 x} = \int \frac{2\sin x \cos x dx}{3+4\cos^2 x} = J.$$

Функція під інтегралом непарна по $\sin x$, тому використовуємо підстановку $t = \cos x$.

Маємо

$$J = -\int \frac{2tdt}{3+4t^2} = \begin{pmatrix} Z = 3+4t^2 \\ dt = 8tdt \\ 2tdt = \dfrac{dZ}{4} \end{pmatrix} = -\int \frac{dZ}{4Z} = -\frac{1}{4}\ln\left|3+4t^2\right| = -\frac{1}{4}\ln\left|3+4\cos^2 x\right| + C.$$

Приклад 6.9. Застосовуючи універсальну тригонометричну підстановку, обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$.

Розв’язання

$$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t}} = \int \frac{2dt}{t^2+2t-1} = \int \frac{2dt}{(t+1)^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}}{tg\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}\right|+C.$$

Приклад 6.10. Обчислити інтеграл $\int \sin^4 2xdx$.

Розв’язання

$$\int \sin^4 2xdx=\int\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 4x+\cos^2 4x\right)dx=$$

$$\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 4x+\frac{1+\cos 8x}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}-2\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 8x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 8x\right)+C.$$

Розділ 7. Означений інтеграл

7.1. Означений інтеграл, формула Ньютона-Лейбніца

Нехай $y=f(x)$ – деяка функція, що задана на проміжку [a; b]. Розіб’ємо [a;b] на n частин точками x_i, так що $a=x_0<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$ Обчислимо $f(\xi_i)$, де $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$, $i=\left(\overline{1,n}\right)$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. Складемо інтегральну суму $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Позначимо $\lambda=\max\Delta x_i$. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n при $\lambda\to 0$ і не залежить ні від способу розбиття [a; b] на частини Δx_i, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на проміжку [a; b] і позначається

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \ .$$

Якщо для функції $f(x)$ існує первісна $F(x)$, то справедлива формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \ .$$

Приклад 7.1. Обчислити інтеграл $\int_{-1/2}^{4} xdx$.

Розв’язання

Використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, обчислимо визначений інтеграл:

$$\int_{-1/2}^{4} xdx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{4} = \frac{1}{2}\left(4^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(16 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{63}{4} = \frac{63}{8} = 7\frac{7}{8}.$$

Приклад 7.2. Обчислити інтеграл $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Розв’язання

Використаємо означення степеня з дробовим і від’ємним показником та обчислимо визначений інтеграл:

$$\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_1^8 x^{-2/3}dx = \frac{x^{1/3}}{1/3}\Bigg|_1^8 = 3\sqrt[3]{x}\Big|_1^8 = 3(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1}) = 3(2-1) = 3.$$

Приклад 7.3. Обчислити інтеграл $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x\right)dx$.

Розв’язання

Інтеграл від різниці функції замінимо різницею інтегралів від кожної функції.

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\sin x\right)dx=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}-\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin x dx=tgx\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}+\cos x\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}=tg\frac{\pi}{4}-tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}-$$

$$-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1-(-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=2.$$

7.2. Метод заміни

При обчисленні визначених інтегралів, як і невизначених, широко користуються методом заміни змінної (або методом підстановки).

Теорема 7.1. Нехай виконуються умови:

1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$;

2) функція $x=\varphi(t)$ і її похідна $x'=\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$;

3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ і $t\in(\alpha;\beta)$: $a<\varphi(t)<b$.

Тоді справджується рівність

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{7.1}$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то вона має первісну. Позначимо її через $F(x)$, $x\in[a;b]$, тоді з теореми про заміну змінної у невизначеному інтегралі випливає, що функція $F(\varphi(t))$ буде первісною функції $f(\varphi(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$. Застосувавши формулу Ньютона-Лейбніца, маємо

$$\int_a^b f(x)dx=F(b-F(a));\quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a).$$

Формула (7.1) називається формулою заміни змінної(або підстановки) у визначеному інтегралі.

Зауваження 1. Якщо при обчисленні невизначеного інтеграла заміною $x=\varphi(t)$ у первісній функції необхідно було від змінної t повернутися до змінної x, то при обчисленні визначеного інтеграла замість цього потрібно змінити межі інтегрування. Нижня межа а знаходиться як розв'язок рівняння $\alpha=\varphi(t)$ відносно невідомого t, а верхня межа β – з рівняння $b=\varphi(t)$.

Якщо функція $\varphi(t)$ не монотонна, то може статися, що ці рівняння дадуть кілька різних пар α і β, які задовольняють умовам теореми 1. В цьому випадку можна взяти будь-яку з таких пар.

Зауваження 2. Часто замість підстановки $x=\varphi(t)$ застосовують підстановку $t=\psi(x)$. У цьому випадку нові межі інтегрування визначаються безпосередньо: $\alpha=\psi(a)$, $\beta=\psi(b)$. Проте тут слід мати на увазі, що функція $x=x(t)$, обернена до функції $\psi(t)$, має, як і раніше, задовольняти всі умови теореми 1, зокрема функція $x(t)$ в межах інтегрування має бути означеною неперервно диференційованою функцією t і при зміні t від α до β змінна $x(t)$ має змінюватися від a до b.

Приклад 7.4. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Розв’язання

Нехай $x=a\sin t$, переконуємось, що ця функція задовольняє всі умови теореми 1, причому якщо $x=0$, то $0=a\sin t$, звідки $t=0$; якщо $x=a$, то $a=a\sin t$, звідки $t=\frac{\pi}{2}$. Отже, $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$. (Ця функція не є монотонною, тому існують й інші пари розв'язків, які задовольняють умови теореми 7.1 і можуть бути межами: $\alpha=2\pi,\beta=\frac{5\pi}{2};\alpha=-2\pi,\beta=-\frac{3\pi}{2}$ тощо.)

Далі маємо

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

Приклад 7.5. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx.$

Розв’язання

Нехай $\sqrt{e^x-1}=t$, звідки $\alpha=\sqrt{e^0-1}=0$, $\beta=\sqrt{e^{\ln 5}-1}=2$. Отже, якщо

x змінюється від 0 до *Ln 5*, то нова змінна t змінюється від 0 до 2. Функція $x = \ln(t^2 + 1)$, обернена до функції $t = \sqrt{e^x - 1}$, на відрізку *[0;2]* є монотонною і неперервною разом з похідною $x' = \dfrac{2t}{t^2 + 1}$ на цьому відрізку.

Маємо

$$I = \int_0^2 \frac{(t^2+1)t \cdot 2tdt}{(t^2+4)(t^2+1)} = 2\int_0^2 \frac{t^2dt}{t^2+4} = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right)dt = 2\left(t - 2arctg\,\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 4 - \pi.$$

Приклад 7.6. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

Розв’язання

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \left(\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = \sqrt{e} \Rightarrow t = \dfrac{1}{2} \end{array} \right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$

7.3. Метод інтегрування частинами

Теорема 7.2. Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$, які визначені на відрізку *[a;b]* мають неперервні похідні, то справедлива формула

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \tag{7.2}$$

Оскільки функція uv є первісною функції *(uv)' =u'v + uv'*, то за формулою Ньютона-Лейбніца дістанемо

$$\int_a^b (u'v + uv')dx = uv\Big|_a^b$$

Скориставшись лінійністю визначеного інтеграла, дістанемо формулу (7.2).

Формула (7.2) називається формулою інтегрування частинами визначеного інтеграла.

Приклад 7.7. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_1^e x\ln xdx;$ б) $\int\limits_0^1 xarctgxdx.$

Розв'язання

а) $\int\limits_1^e x\ln xdx = \begin{vmatrix} u=\ln x, dv = xdx \\ du = \frac{1}{x}dx, v=\frac{1}{2}x^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int\limits_1^e xdx = \frac{1}{4}(e^2+1);$

б)

$$\int\limits_0^1 xarctgxdx = \begin{vmatrix} u = arctgx, dv = xdx \\ du = \frac{1}{1+x^2}dx, v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}arctgx\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(x - arctgx)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Приклад 7.8. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \arcsin xdx.$

Розв'язання

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \arcsin xdx = \begin{pmatrix} U = \arcsin x \\ dV = dx \\ dU = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ V = x \end{pmatrix} = x\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-x^2 = t \\ -2xdx = dt \\ -xdx = \dfrac{dt}{2} \\ x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow t=\dfrac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_1^{\frac{3}{4}} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{12} + \sqrt{\frac{3}{4}} - 1.$$

Задача 7.1. Потреба електроенергії для підприємства наближено виражається функцією $y = 300 - 7{,}7x + 0{,}6x^2$, де x – кількість годин на добу. Обчислити вартість електроенергії, яку використовує підприємство протягом доби, якщо вартість 1 кВт/год дорівнює 0,9 грн.

Розв’язання

Витрати електроенергії підприємством протягом доби становлять:

$$W = \int_0^{24} y dx = \int_0^{24} (300 - 7{,}7x + 0{,}6x^2) dx = (300x + 7{,}7\frac{x^2}{2} + ...$$

$$... + 0{,}6\frac{x^3}{3})\Big|_0^{24} = 7747{,}2 \text{ (кВт/год)}.$$

Вартість електроенергії буде $7747{,}2 \cdot 0{,}9 = 6972{,}48$ (грн.)

Задача 7.2. Підприємство повинно обрати одну з двох можливих стратегій розвитку:

1) вкласти 10 млн. грн. у нове обладнання і одержувати 3 млн. грн. прибутку щорічно впродовж 10 років;

2) закупити на 15 млн. грн. більш досконале обладнання, що дозволить одержати 5 млн. грн. прибутку щорічно впродовж 7 років. Яку стратегію треба обрати підприємству, якщо номінальна облікова щорічна ставка 10 %?

Розв’язання

Якщо $f(t)$ є прибуток за час t і $r = \frac{R}{100}$ є номінальна облікова щорічна ставка, то дійсне значення загального прибутку за час між $t = 0$ та $t = T$ дорівнює

$$\int_0^T f(t)e^{-rt}dt.$$

При $R = 10$ маємо $r = 0{,}1$. Тому для першої стратегії дійсне значення прибутку за 10 років буде:

$$P_1 = \int_0^{10} 3e^{-0{,}1t}dt - 10 = -30e^{-0{,}1t}\Big|_0^{10} - 10 = -30e^{-1} + 30 - 10 = 8{,}964 \text{ (млн.грн.)};$$

$$P_2 = \int_0^{7} 5e^{-0{,}1t}dt - 15 = -50e^{-0{,}1t}\Big|_0^{7} - 15 = -50e^{-0.7} + 50 - 15 = 10{,}17 \text{ (млн.грн.)}.$$

Отже, друга стратегія краще першої і тому її доцільно обрати для подальшого розвитку підприємства.

Задача 7.3. На складі запас деякого товару нараховує 100 одиниць, а товар, що поступає щоденно, наближено виражається функцією

$$y = 22 - 0{,}5x + 0{,}06x^2,$$

де x – кількість днів. Визначити кількість товару через 40 днів.

Розв’язання

Позначимо кількість товару через W. Тоді через 40 днів кількість товару буде

$$W = 100 + \int_0^{40}\left(22 - 0{,}5x + 0{,}06x^2\right)dx.$$

Обчислимо цей інтеграл

$$W = 100 + \int_0^{40}\left(22 - 0{,}5x + 0{,}06x^2\right)dx = \ldots$$

$$... = 100\left(22x - 0,5\frac{x^2}{2} + 0,06\frac{x^2}{3}\right)\Big|_0^{40} = 1870 \text{ (шт.)}.$$

Задача 7.4. Стиск *x* гвинтової пружини пропорційний прикладеній силі *F*. Обчислити роботу сили А при стисканні пружини на 0,04 м, якщо для стискання її на 0,01 м потрібна сила 10 Н.

Розв'язання

Оскільки x=0,01 м при F=10 Н, то, підставляючи ці значення в рівність $F = kx$, дістанемо $10 = k \cdot 0{,}01 \;\Rightarrow\; k = 1000 H/м.$

Підставивши тепер у цю ж рівність значення k, знаходимо $F = 1000x$, тобто $f(x) = 1000x$.

Шукану роботу знайдемо за формулою $A = \int_a^b F(x)dx$, припустивши, що $a = 0$, $b = 0{,}04$:

$$A = \int_0^{0,04} 1000x dx = 500x^2 \Big|_0^{0,04} = 0,8 \text{ Дж.}$$

7.4. Геометричний зміст визначеного інтеграла

Обчислення площі плоскої фігури

Якщо фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ і функція $f(x)$ – неперервна та $f(x) \geq 0$ на проміжку $[a;\ b]$, то площа S такої криволінійної трапеції (рис 7.1) обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x)dx,$$

якщо ж $f(x) \leq 0$, то

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|.$$

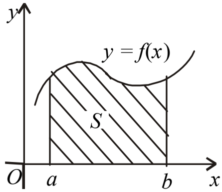


Рис. 7.1. Геометричний зміст визначеного інтеграла

Якщо фігура обмежена лініями $y = f(x),\ y = g(x),\ x = a,\ x = b$, а функції $f(x)$ та $g(x)$ – неперервні та $f(x) \geq g(x)$ на $[a;\ b]$, то площа такої фігури (рис.7.2) обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx.$$

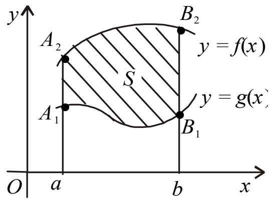


Рис. 7.2. Геометричний зміст визначеного інтеграла

Приклад 7.9. Обчислити площу, обмежену прямою $x = 4$, кривою $y = 3x^2 - 6x$ та віссю Ox на відрізку $[0;\ 4]$.

Розв’язання

Крива $y = 3x^2 - 6x$ – парабола. Площа OAB розташована під віссю Ox, візьмемо її із знаком мінус, а площа BCD – над віссю Ox, візьмемо її із знаком плюс. Відрізок $[0;\ 4]$ розіб’ємо на два: $[0;\ 2]$ і $[2;\ 4]$. Маємо

$$S = -S_1 + S_2 = -\int_0^2 (3x^2 - 6x)dx + \int_2^4 (3x^2 - 6x)dx =$$

$$= -(x^3 - 3x^2)\Big|_0^2 + (x^3 - 3x^2)\Big|_2^4 = -(8 - 12) + (64 - 48 - 8 + 12) =$$

$$= 4 + 20 = 24.$$

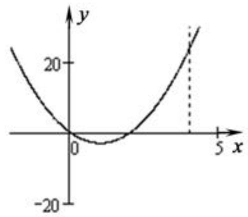


Рис.7.3. Графік функції до прикладу 7.9

Приклад 7.10. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = \frac{1}{4}(x-2)^2$ та прямою $x + 2y - 14 = 0.$

Розв'язання

Площа фігури, обмеженої зверху неперервною кривою $y = f_2(x)$, знизу – неперервною кривою $y = f_1(x)$, зліва – прямою $x = a$ і справа прямою $x = b$, обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx.$$

Знайдемо точки перетину даних ліній. З рівняння прямої знаходимо $y = 7 - \frac{x}{2}$.

Розв'яжемо тепер систему $\begin{cases} y = \frac{1}{4}(x-2)^2 \\ y = 7 - \frac{x}{2} \end{cases}$. Підставивши в перше рівняння системи замість y різницю $7 - \frac{x}{2}$, одержимо

$$7 - \frac{x}{2} = \frac{1}{4}(x-2)^2; \quad 28 - 2x = x^2 - 4x + 4; \quad x^2 - 2x - 24 = 0,$$

звідки $x_1 = -4,\ x_2 = 6.$ Тоді одержимо $y_1 = 9,\ y_2 = 4.$

Таким чином, парабола і пряма перетинаються в точках $A(-4;\,9)$ і $B(6;\,4)$.

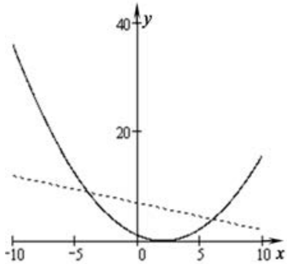


Рис. 7.4. Графік функції до прикладу 7.10

Так як зверху фігура обмежена прямою, знизу – параболою, то застосовуючи відповідну формулу, маємо:

$$S = \int_{-4}^{6}\left[7 - x/2 - 0{,}25(x-2)^2\right]dx = \int_{-4}^{6}\left[7 - x/2 - 0{,}25x^2 + x - 1\right]dx =$$

$$= \int_{-4}^{6}\left[6 + x/2 - 0{,}25x^2\right]dx = \left[6x + 0{,}25x^2 - x^3/12\right]_{-4}^{6} =$$

$$= 36 + 9 - 18 + 24 - 4 - \frac{16}{3} = 41\frac{2}{3}.$$

Приклад 7.11. Нехай задано трикутник з вершинами: $A(-2;\,3)$, $B(4;\,4)$, $C(2;\,-1)$ (рис. 7.5). Знайти його площу [15].

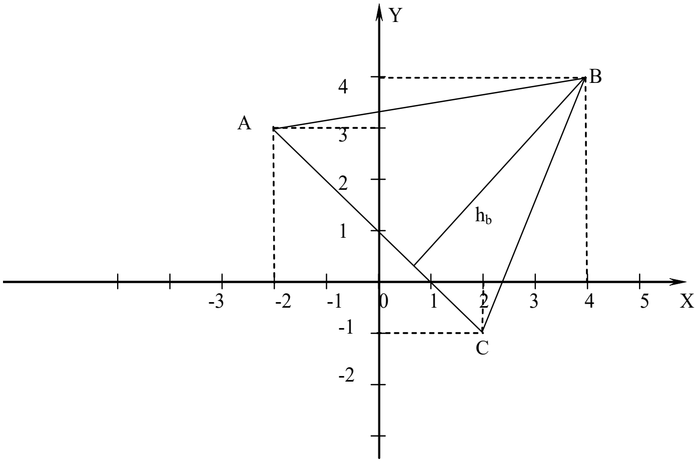


Рис. 7.5 Трикутник

Розв'язання

За допомогою означеного інтеграла площа трикутника ABC знаходиться як:

$$S_{ABC} = S_{APMB} + S_{PMC}$$

Оскільки $P(1;\ 0)$, $M\left(\frac{5}{12}\ ;\ 0\right)$, а рівняння сторони AB буде визначатись як $y = \frac{x}{6} + \frac{10}{3}$, тоді

$$S_{ABC} = \int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{6}+\frac{10}{3}\right)dx - \frac{1}{2}(2+1)\cdot 3 - \frac{1}{2}\left(4-\frac{12}{5}\right)\cdot 4 + \frac{1}{2}\left(\frac{12}{5}-1\right)\cdot 1 =$$
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}+20x\right)\Big|_{-2}^{4} - \frac{9}{2} - \frac{16}{5} + \frac{7}{10} = \frac{126}{6} - \frac{70}{10} = 14\ (кв.од.).$$

Обчислення об'єму тіла обертання

Об'єм тіла V_x, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями обчислюється за формулою:

$$V_x = \int_a^b S(x)dx = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx .$$

Аналогічно, об'єм тіла V_y, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $x = 0$, $x = \varphi(y) \geq 0$, $y = c$, $y = d$. обчислюється за формулою

$$V_y = \pi\int_c^d (\varphi(y))^2\,dy\,.$$

Приклад 7.12. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = 3x - 3$, $x = 1$, $x = 4$.

Розв’язання

Скористаємось формулою

$$V_x = \int_a^b S(x)dx = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx\,.$$

Маємо

$$V = \pi\int_1^4 y^2 dx = \pi\int_1^4 (3x-3)dx = \frac{3\pi}{2}(x-1)^2\Big|_1^4 = \frac{27}{2}\pi.$$

Довжина дуги плоскої кривої

Довжина дуги кривої, заданої функцією $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ обчислюється за формулою:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx\,.$$

Приклад 7.13. Знайти довжину дуги параболи $y = \dfrac{x^2}{2}$ від точки $O(0;\,0)$ до точки $A(1;\,0{,}5)$.

Розв’язання

Оскільки $y' = x,\ 0 \le x \le 1$, то за формулою $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$ одержимо

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|\right)\Bigg|_0^1 = = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))\,.$$

Задача 7.5. Знайти площу перерізу каналу параболічного профілю.

Розв'язання

Площа перерізу каналу – площа поперечного перерізу фігури, яка знизу обмежена параболою, а зверху – горизонтальною прямою (за умовою задачі). Припустимо, що найбільша глибина каналу h, а ширина (по верху води) b; парабола описується кривою $y = px^2$, вершина якої розташована в точці $O(0; 0)$, а пряма має вигляд $y = h$. Скористаємось геометричним змістом визначеного інтеграла. У даному випадку доцільно зробити рисунок, з якого легко можна визначити межі інтегрування та підінтегральну функцію (рис. 7.6). Позначимо через A та B – точки перетину параболи та прямої $y = h$.

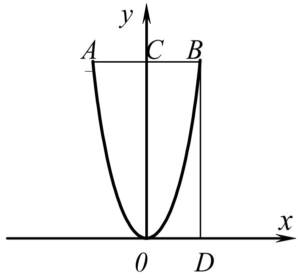


Рис. 7.6. Графік функції для визначення площі перерізу

Нехай $AB = b$, $OC = h$, тоді маємо $h = p\dfrac{b^2}{4}$.

Звідси знаходимо, що $p = \dfrac{4h}{b^2}$. В силу симетрії фігури шукану площу знайдемо як подвійну різницю площ прямокутника *CBDO* та криволінійної трапеції *DBO:*

$$S = 2\left(h\frac{b}{2} - \int_0^{b/2} \frac{4h}{b^2} x^2 dx\right) = \frac{2}{3}bh.$$

Розглянемо задачі на знаходження сили тиску на підводні гідроспоруди, такі як, наприклад, дамби гідроелектростанцій, відстійники рідких органічних добрив і стічних вод, берегові укріплення озер, річок, ставків, водоймищ на допомогою апарату інтегрального числення [14].

Задача 7.6. Дамби гідроелектростанцій переважно мають трапецеподібну форму. Визначимо елементарну силу тиску з боку рідини на стінку дамби, еквівалентна схема котрої представлена на рис. 7.7.

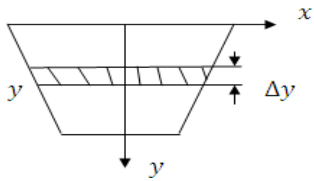


Рис. 7.7. Дамба у вигляді рівнобічної трапеції з обраною системою координат і виділеною елементарною площадкою

Тут $a\ i\ b$ – основи рівнобічної трапеції ($a <$ b), h – її висота. В основі розв'язку даної задачі покладено відомий закон Паскаля:

$$P = \gamma h S,$$

де γ – питома вага рідини, h – глибина занурення деякої площадки площі S, P – величина шуканої сили тиску.

Виділивши елементарну площадку ΔS цієї трапеції, що знаходяться на глибині занурення у рідину y з її елементарною висотою Δy. Величина сили тиску з боку рідини на цю елементарну площадку буде рівною:

$$\Delta \mathrm{P} \approx \gamma y \Delta S = 2\gamma x y \Delta y.$$

Нехай $x = \frac{a}{2} + t$, тоді $\frac{2t}{b-a} = \frac{h-y}{h}$, або

$t = \frac{1}{2}(b-a)(1-\frac{y}{h})$, $x = \frac{a}{2} + \frac{b-a}{2}(1-\frac{y}{h}) = \frac{1}{2}(b - \frac{y}{h}(b-a))$.

Маємо:

$$\Delta \mathrm{P} \approx \gamma y (b - \frac{y}{h}(b-a))\Delta y,$$

і при умові, коли $\Delta y \to 0$, отримуємо величину шуканої сили тиску за допомогою означеного інтегралу наступного вигляду:

$$P = \int_0^h \gamma\left(by - (b-a)\frac{y^2}{h}\right)dy = \gamma\left(\frac{1}{2}by^2 - \frac{1}{3}(b-a)\frac{y^3}{h}\right)\Big|_0^h =$$

$$= \gamma h^2\left(\frac{b}{2} - \frac{b}{3} + \frac{a}{3}\right) = \gamma h^2\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\gamma h^2(2a + b).$$

Наслідок: Для прямокутної дамби ($a = b, h -$ висота)

$$P = \frac{1}{6}\gamma h^2(2a + a) = \frac{\gamma a h^2}{2}.$$

Задача 7.7. Знайдемо силу тиску P, що діє на вертикальний круговий люк радіуса R. Спочатку розглянемо випадок, коли дуга кола дотикається поверхні рідини і вдовж цієї поверхні направимо горизонтальну вісь OX (рис. 7.8). Маємо очевидні алгебраїчні співвідношення:

$$r^2 + (y - R)^2 = R^2 \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - (y - R)^2},$$

$$\Delta P \approx \gamma y \Delta S \approx 2\gamma r y \Delta y \approx 2\gamma y\sqrt{R^2 - (y-R)^2}\Delta y, y \in [0,2R].$$

Зробивши в останній рівності традиційний граничний перехід $\Delta y \to 0$, маємо:

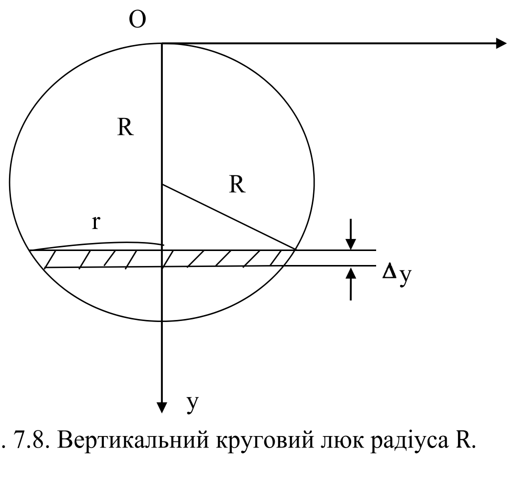


Рис. 7.8. Вертикальний круговий люк радіуса R.

$$\text{P} = 2\gamma\int_0^{2R} \text{y}\sqrt{R^2-(y-R)^2}\,dy = \left\{\begin{matrix} t = y-R \\ y = t+R \\ y = 2R \Rightarrow t = R \\ y = 0 \Rightarrow t = -R \end{matrix}\right\} =$$

$$= 2\gamma\int_{-R}^{R}(t+R)\sqrt{R^2-t^2}\,dt =$$

$$= 2\gamma\int_{-R}^{R} t\sqrt{R^2-t^2}dt + 2\gamma R\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-t^2}\,dt =$$

$$= 4\gamma R\int_0^R \sqrt{R^2-t^2}\,dt = 4\gamma R\left[\frac{t\sqrt{R^2-t^2}}{2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{t}{R}\right]\Big|_0^R =$$

$$= 2\gamma R^3(\arcsin 1 - \arcsin 0) = 2\rho\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi\gamma R^3.$$

Зауваження: $2\gamma\int_{-R}^{R} t\sqrt{R^2-t^2}dt = 0$, як інтеграл від непарної t по функції по симетричному відносно 0 проміжку.

На рис. 7.9 приведено узагальнену модель знаходження величини сили тиску на круговий люк, занурений в рідину на довільну глибину $y \in [H, H+2R]$.

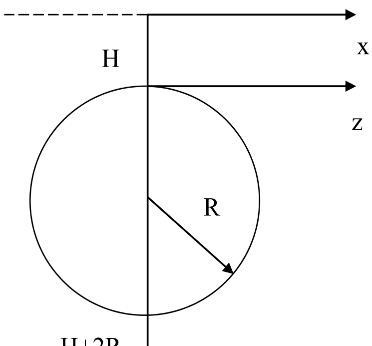


Рис. 7.9. Круговий люк радіуса R, розташований на довільній глибині H рідини.

В цьому випадку сила тиску з боку рідини визначається наступним чином:

$$\text{P} = 2\gamma\int_{\text{H}}^{\text{H}+2R} \text{y}\sqrt{R^2-(y-R-\text{H})^2}\,dy =$$

$$=\left\{\begin{matrix} z = y - H \\ y = z + H \\ y = H + 2R \Rightarrow z = 2R \\ y = H \Rightarrow t = 0 \end{matrix}\right\} = 2\gamma \int\limits_{0}^{2R} (z + H)\sqrt{R^2 - (z - R)^2}\, dz =$$

$$=\left\{\begin{matrix} t = z - R \\ z = t + R \\ z = 2R \Rightarrow t = R \\ z = 0 \Rightarrow t = -R \end{matrix}\right\} = 2\gamma \int_{-R}^{R}(t + H + R)\sqrt{R^2 - t^2}\, dt =$$

$$4\gamma \int_{0}^{R}(t + H + R)\sqrt{R^2 - t^2}\, dt = 4\gamma(H + R)\left[\frac{t\sqrt{R^2-t^2}}{2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{t}{R}\right]\Bigg|_{0}^{R} =$$

$$= \pi\gamma R^2(H + R).$$

До речі, якщо круговий люк занурено в рідину горизонтально на глибину Н, тоді сила тиску з боку рідини на нього визначається безпосередньо законом Паскаля без складань та обчислень відповідних інтегралів, а саме:

$$\mathrm{P} = \pi\gamma R^2 H.$$

У разі рухомої нестисливої рідини можна умовно говорити про справедливість закону Паскаля, бо додавання довільної сталої величини до тиску не змінює виду рівняння руху рідини, це рівняння Ейлера або, якщо враховується дія в'язкості, то рівняння Нав'є-Стокса. У цьому випадку термін закон Паскаля зазвичай не застосовується. Як відомо, для стисливих рідин закон Паскаля застосовувати не рекомендується.

Розділ 8. Диференціальні рівняння

8.1. Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальним рівнянням (ДР) називається рівняння, яке містить похідну шуканої функції. Найбільший порядок похідних називається порядком диференціального рівняння.

У загальному випадку диференціальне рівняння *n*-го порядку має вигляд

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Будемо розглядати лише диференціальні рівняння, в яких шукана функція залежить лише від одного аргументу. Такі рівняння називаються звичайними.

В загальному вигляді диференціальні рівняння першого порядку можна записати у вигляді

$$F(x,\ y,\ y') = 0.$$

чи розв'язати відносно похідної, тобто подати у вигляді

$$y' = f(x,\ y) \text{ або } dy = f(x,y)dx\ .$$

Якщо $f(x;y)$ є дробом тобто $f(x;y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$, тоді ДР першого порядку можна записати в симетричній формі

$$M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0.$$

Розв'язком ДР $y' = f(x,y)$ називається функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці у ДР перетворює його на тотожність. Графік функції $y = \varphi(x)$ називається інтегральною кривою.

Приклад 8.1. ДР $y' = 3y$ має розв'язок $y = e^{3x}$.

Розв'язання

Справді, $y' = 3e^{3x}$. Підставивши y' в рівняння, дістанемо тотожність $3e^{3x} \equiv 3e^{3x}$.

Звичайно, ДР має нескінченну множину розв’язків. Так, попереднє рівняння $y' = 3y$ має розв’язок $y = Ce^{3x}$, де *C* – довільний параметр.

Задача Коші

Розглянемо ДР $y' = f(x, y)$.

Задача пошуку розв’язку $y = \varphi(x)$, що задовольняє умови $y = y_0$ при $x = x_0$ називається задачею Коші. Ці умови називаються початковими умовами, числа y_0, x_0 називаються початковими значеннями.

Функція $y = \varphi(x, C)$, що містить довільну сталу *C*, називається загальним розв’язком ДР, якщо функція $y = \varphi(x, C)$ є розв’язком ДР при довільному значенні сталої *C,* тобто $\frac{\partial\varphi(x,C)}{\partial x} \equiv f(x, \varphi(x, C))$. За рахунок вибору довільної сталої *C* можна розв’язати задачу Коші з довільними початковими умовами, тобто рівняння $y_0 = \varphi(x_0, C)$ розв’язується відносно *C*. Розв’язок $y = \varphi(x, C_0)$ при фіксованому значенні сталої *C* називається частинним розв’язком.

Приклад 8.2. ДР $y' = 2xy^2$ має загальний розв’язок $y = -\frac{1}{x^2 + C}$

Розв’язання

Справді, маємо тотожність:

$$\left(-\frac{1}{x^2 + C}\right)' = 2x\left(\frac{1}{x^2 + C}\right)^2.$$

При довільних початкових значеннях (x_0, y_0), $y_0 \neq 0$ знаходимо значення довільної сталої С

$$y_0 = -\frac{1}{x_0^2 + C} \Rightarrow C = -x_0^2 - \frac{1}{y_0}.$$

Задача знаходження розв’язків ДР називається інтегруванням ДР. Самий розв’язок називається також інтегралом ДР.

Загальний розв'язок може бути знайдений у неявній формі: $\varphi(x, y) = C$. Тоді ця рівність називається загальним інтегралом ДР. Функція $\varphi(x, y)$ також називається інтегралом ДР.

Приклад 10.3. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' = \frac{e^x}{2y + 3y^2}.$$

Розв'язання

Рівняння можна записати у вигляді

$$2y\,y' + 3y^2 y' - e^x = 0 \quad \left(y^2 + y^3 - e^x\right)' = 0.$$

Звідси знаходимо загальний інтеграл ДР

$$y^2 + y^3 - e^x = C.$$

8.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

ДР виду $M(x)dx + N(y)dy = 0$ називається ДР з відокремленими змінними. Загальний розв'язок ДР подається так:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C,$$

а розв'язок задачі Коші з початковими умовами $x = x_0$, $y = y_0$ має вигляд

$$\int_{x_0}^{x} M(x)dx + \int_{y_0}^{y} N(y)dy = 0.$$

Приклад 8.3. Знайти загальний розв'язок ДР $2xdx + 2ydy = 0$.

Розв'язання. Інтегруючи, дістаємо загальний інтеграл ДР $x^2 + y^2 = C$. Інтегральними кривими є концентричні кола з центром у початку координат.

Диференціальне рівняння виду $N_1(y)M_1(x)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ називається ДР з відокремлюваними змінними, тобто рівнянням, що зводяться до ДР з відокремленими змінними.

Поділивши останнє рівняння на $N_1(y)\,M_2(x)$, дістанемо ДР з відокремленими змінними:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Приклад 8.4. Знайти загальний розв'язок ДР $y' = 2xy^2$.

Розв'язання

Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2, \quad \frac{dy}{y^2} = 2xdx, \quad \int\frac{dy}{y^2} = \int 2xdx$$

або

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C, \quad y = -\frac{1}{x^2 + C}.$$

Задача 8.1. Знайти закон розпаду радіоактивної речовини.

Розв'язання

Позначимо через $m(t)$ масу радіоактивної речовини. За час Δt розпадається кількість речовини $\Delta m(t)$, пропорційна до маси $m(t)$ і часу Δt, тобто

$$\Delta m(t) = -km(t)\Delta t, \text{ або } \frac{\Delta m(t)}{\Delta t} = -km(t).$$

При $\Delta t \to 0$ знаходимо ДР $\frac{dm(t)}{dt} = -km(t)$ з відокремленими змінними:

$$\frac{dm(t)}{m(t)} = -kdt, \quad \int\frac{dm(t)}{m(t)} = -\int kdt.; \quad \ln|m(t)| = -kt + \ln C, \quad m(t) = Ce^{-kt}.$$

При $t = 0$ дістаємо: $m(0) = C$, $m(t) = m(0)e^{-kt}$.

Маємо експоненціальний закон розпаду радіоактивної речовини.

Задача 8.2. Дослідним шляхом встановлено, що при бродінні кормів швидкість зміни маси (приросту) діючого ферменту пропорційна його наявній кількості. Знайти закон зміни маси ферменту залежно від часу.

Розв'язання

Позначимо через $x(t)$ масу ферменту, що утворилась до моменту часу t. Тоді, враховуючи, що швидкість приросту маси дорівнює похідній $x'(t)$ або $\frac{dx}{dt}$, за умовою задачі маємо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

розв'язок якого $x(t) = Ce^{kt}$ показує закон зміни маси ферменту залежно від часу.

Задача 8.3. У чан налито 200 л ропи, що містить 15 кг розчиненої солі. З швидкістю 4 л за хвилину в чан вливається вода, і розчин з такою ж швидкістю витікає з чана. При цьому рідина неперервно перемішується. Скільки солі залишиться у чані через годину?

Розв'язання

З'ясовуємо, що концентрацією c даної речовини називається її кількість, яка міститься в одиниці об'єму. Якщо концентрація рівномірна, то кількість речовини в об'ємі v дорівнює $c \cdot v$. Позначимо вміст солі, що міститься у чані в момент часу через $x(t)$, тоді в одному літрі ропи міститься $\frac{x}{200}$ кг солі, а через час $t + \Delta t$ кількість солі буде $x(t + \Delta t) = x(t) - 4\frac{x}{200} \cdot \Delta t$, звідки $\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -4\frac{x}{200}$. Переходячи до границі при $\Delta t \to 0$, дістанемо

$$x'(t) = -0{,}02x \text{ або } \frac{dx}{dt} = -0{,}02x.$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні: $\frac{dx}{x} = -0{,}02dt$.

Інтегруючи обидві частини рівняння, дістанемо розв'язок $\ln x = -0{,}02t + C_1$ або $x(t) = Ce^{-0{,}02t}$.

Сталу C визначимо з початкової умови $x(0)=15$: $15=C\cdot e^{-0,02\cdot 0} \Rightarrow C=15$.

Кількість солі у чані змінюється за законом $x(t)=15e^{-0,02t}$.

Знайдемо кількість солі у чані через годину: $x(60)=15e^{-0,02\cdot 60} \approx 4,52$ кг.

Отже, кількість солі у чані зменшується за експоненціальним законом і через годину становитиме 4,52 кг.

Задача 8.4. ФОП узято кредит в банку на суму N грн. під r % річних. Знайти залежність зміни суми за умови, що відсотки за кредит нараховуються неперервно. На основі одержаного закону знайти, через скільки років узята сума у 100000 грн. під 19 % річних подвоїться?

Розв'язання

Загальна сума P кредиту в результаті нарахувань відсотків один раз на рік становитиме $P=N(1+r)$. Якщо відсотки будуть нараховуватись по закінченню півріччя, то $P=N(1+r/2)^2$, щоквартально: $P=N(1+r/4)^4$, щомісячно: $P=N(1+r/12)^{12}$. У загальному випадку $P=N(1+r/m)^m$ при r% річних, що нараховуються m разів на рік. По закінченню t років загальна сума буде $P=N((1+r/m)^m)^n$.

Якщо число m нарахувань відсотків буде безмежно збільшуватися, то

$$P=\lim_{m\to\infty} N((1+r/m)^m)^t = N\lim_{m\to\infty}((1+r/m)^{m/r})^{tr} = Ne^n .$$

Протягом короткого проміжку часу Δt приріст суми P буде ΔP. Замінивши Δt на dt, ΔP на dP, маємо

$$dP=d(Ne^{rt})=rNe^{rt}dt=rPdt \text{ або } \frac{dP}{P}=rdt$$

– рівняння з відокремленими змінними.

Проінтегруємо рівняння $\frac{dP}{P}=rdt$, дістанемо загальний розв'язок $\ln P=rt+C_1$ або $P=Ce^{rt}$.

Використовуючи початкову умову $P(0)=100000$, визначимо довільну сталу C: $100000=Ce^{r0}=C$.

Отже, частинний розв’язок рівняння має вигляд $P = 100000e^{rt}$. Визначимо час: $t = \frac{\ln(P/100000)}{r}$; при $P = 2000000$ та $r = 0{,}19$ $t = \frac{\ln 2}{0{,}19} \approx 3{,}6$.

Отже, узята сума становитиме 200000 грн. через 3,5 роки.

8.3. Однорідні та лінійні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння називається однорідним, якщо його можна подати у вигляді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

За допомогою заміни змінної

$$\frac{y}{x} = u, \ y = ux$$

рівняння зводиться до ДР з відокремлюваними змінними відносно функції u:

$$u'x + u = f(u), \ x\frac{du}{dx} = f(u) - u,$$

а знаходження розв’язку зводиться до інтегрування рівності

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

Наприкінці, необхідно повернутись до змінної y.

Приклад 8.5. Знайти загальний розв’язок ДР $y' = \frac{y^2}{x^2}$.

Розв’язання

Введемо заміну $y = ux$ і одержимо ДР для змінної u, тобто

$$u'x + u = u^2, \ x\frac{du}{dx} = u^2 - u, \ \frac{du}{u^2 - u} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи ДР з відокремленими змінними, знаходимо загальний розв’язок:

$$\int \frac{du}{u^2 - u} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln\left|\frac{u-1}{u}\right| = \ln x + \ln C, \quad \frac{u-1}{u} = Cx,\ u = \frac{1}{1-Cx},$$ або

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{1-Cx}, \quad y = \frac{x}{1-Cx}.$$

Приклад 8.6. Знайти загальний розв'язок ДР

$$x^2 + y^2 - 2xyy' = 0.$$

Розв'язання

Дане ДР можна записати у вигляді $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$, або $y' = \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x}$, тобто у вигляді однорідного ДР.

Введемо нову змінну, $u = \frac{y}{x}$ де $y = ux$

$$u'(x) + u \cdot 1 = \frac{1}{2u} + \frac{u}{2}, \quad x\frac{du}{dx} = \frac{1-u^2}{2u},$$

$$\int \frac{2u\,du}{u^2 - 1} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln\left| u^2 - 1 \right| = -\ln|x| + \ln C,$$

$u^2 - 1 = \frac{C}{x}$, або $\frac{y^2}{x^2} - 1 = \frac{C}{x}$, $y^2 = x^2 + Cx$. Дістали загальний інтеграл.

8.4. Лінійні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння виду $y' + P(x)y' = Q(x)$ називається лінійним ДР. Якщо $Q(x) \equiv 0$, то ДР є однорідним. Якщо $Q(x) \neq 0$, то ДР називається неоднорідним.

Розглянемо розв'язування лінійного неоднорідного ДР методом Бернуллі. Загальний розв'язок шукаємо у вигляді добутку двох функцій $y = uv$, де u і v – дві неперервно-диференційовані функції.

Підставляючи його у початкове рівняння, дістанемо рівняння $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$, яке розпадається на два рівняння з відокремлюваними змінними у вигляді системи:

$$\begin{cases} uv' + P(x)uv = 0, \\ u'v = Q(x). \end{cases}$$

З першого рівняння знаходимо змінну *v*:

$$v' = -P(x)v, \quad \frac{dv}{dx} = -P(x)v, \quad \frac{dv}{v} = -P(x)dx,$$
$$\int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx, \quad \ln|v| = -\int P(x)dx, \quad v = e^{-\int P(x)dx}.$$

З другого рівняння знаходимо змінну *u*:

$$u' = Q(x)v^{-1}, \quad u' = Q(x)e^{\int P(x)dx}, \quad u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Підставимо знайдені *u* та *v* у вираз $y = u \cdot v.$ Остаточно маємо розв'язок у вигляді

$$y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)e^{-\int P(x)dx}.$$

Приклад 8.7. Знайдемо загальний розв'язок ДР

$$xy' + y = x^2.$$

Розв'язання

Розв'язок шукаємо у вигляді добутку функцій $y = u \cdot v.$ Підставляючи в початкове рівняння, дістанемо:

$$x(u'v + uv') + uv = x^2.$$

Зведемо це рівняння до системи ДР:

$$\begin{cases} xuv' + uv = 0, \\ xu'v = x^2. \end{cases}$$

З першого рівняння $xv' + v = 0$ знаходимо:

$$v' = -\frac{v}{x}, \qquad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \qquad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad v = x^{-1}.$$

З другого рівняння маємо:

$$xu'x^{-1} = x^2, \; u' = x^2, \; u = \int x^2 dx, \; u = \frac{x^3}{3} + C.$$

Знаходимо остаточний розв'язок:

$$y = uv, \;\; y = \left(\frac{x^3}{3} + C \right) x^{-1}.$$

Задача 8.5. У приміщенні для великої рогатої худоби працюють два вентилятори, кожний з яких подає

по 60 м^3 чистого повітря, що містить 0,01 % вуглекислоти. Вважаючи, що у корівнику об'ємом 1600 м^3 з початковим вмістом вуглекислоти в 0,2 % знаходиться 130 корів, кожна з яких видихає за хвилину 0,1 м^3 повітря з 5 % вуглекислоти, визначити наявність вуглекислоти в 1 м^3 повітря після двогодинного перебування тварин у приміщенні.

Розв'язання

Нехай вміст вуглекислоти в 1 м^3 повітря в момент часу t є $y(t)$. Швидкість зміни концентрації дорівнює приросту вуглекислоти Δy, поділеному на відповідний проміжок часу Δt; Δy визначається вуглекислотою:

1) що виділяється при диханні 130 тварин,

$$\frac{130 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}05}{1600} \Delta t = \frac{0{,}65}{1600} \Delta t;$$

2) що вводиться вентилятором на кожний кубометр,

$$\frac{2 \cdot 60 \cdot 0{,}0001}{1600} \Delta t = \frac{0{,}0120}{1600} \Delta t;$$

3) що видаляється за рахунок роботи вентиляторів,

$$\frac{2\cdot 60\cdot y(t)}{1600}\Delta t=\frac{120\cdot y(t)}{1600}\Delta t.$$

Отже, $\Delta y=\dfrac{0{,}65+0{,}012-120y}{1600}\Delta t\ \Rightarrow\ \dfrac{\Delta y}{\Delta t}=0{,}00041375-0{,}075y$.

Як бачимо, швидкість зміни вмісту вуглекислоти пропорційна y. Переходячи до границі при $\Delta t\to 0,$ дістанемо $\dfrac{dy}{dt}=0{,}00041375-0{,}075y.$

Маємо лінійне диференціальне рівняння. Розв'яжемо рівняння $\dfrac{dy}{dt}=0{,}00041375-0{,}075y.$ Для цього перепишемо його у вигляді $\dfrac{dy}{dt}+0{,}075y=0{,}00041375.$ Розв'яжемо рівняння методом Бернуллі. Позначимо $y=u\cdot v;$ тоді $y'=u'v+v'u.$ Введемо позначення: $A=0{,}0004135,$ $B=0{,}075$. Рівняння набуде вигляду $u'v+v'u+Buv=A,$ $u'v+u(v'+Bv)=A.$ Нехай $v'+Bv=0$, тоді $v=e^{-Bt}$.

Враховуючи, що $v'+Bv=0$, маємо $u'e^{-Bt}=A\ \Rightarrow\ \dfrac{du}{dt}=e^{Bt}A\ \Rightarrow$ $du=e^{Bt}Adt\ \Rightarrow\ u=\dfrac{A}{B}e^{Bt}+C;$

$$y=e^{-Bt}\left(\frac{A}{B}e^{Bt}+C\right)=\frac{A}{B}+Ce^{-Bt}=0{,}00552+Ce^{-0{,}075t}.$$

Визначимо довільну сталу C. При $t=0$ за умовою задачі $y=0{,}002.$ Отже, $0{,}002=0{,}00552+C\ \Rightarrow\ C=-0{,}00352.$

Остаточно маємо $y=0{,}00552-0{,}00352e^{-0{,}075t}$. Якщо $t=120,$ то $y\approx 0{,}00552,$ так як другий член $0{,}00352e^{-0{,}075\cdot 120}=\dfrac{0{,}00352}{e^{9}}=\dfrac{0{,}00352}{8103{,}1}\approx 4\cdot 10^{-7}\to 0.$

Отже, кількість вуглекислоти в 1 м^3 (концентрація) збільшиться в $\dfrac{0{,}00552}{0{,}002}=2{,}76$ рази, і в подальшому збільшуватися вже не буде завдяки роботі вентиляторів.

8.5. Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку

У загальному випадку ДР другого порядку має вигляд

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Загальний розв’язок рівняння містить дві довільні сталі:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2)$$

і за рахунок вибору довільних сталих C_1, C_2 можна розв’язати задачу Коші, яка полягає в пошуку частинного розв’язку $y = y(x)$, що задовольняє початкові умови $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Тому задача Коші для рівнянь другого порядку формулюється таким чином: знайти частинний розв’язок диференціального рівняння $F(x, y, y', y'') = 0$, який задовольняє початковим умовам $y(x_0) = y_0$ та $y'(x_0) = y'_0$.

Геометрично окремий розв’язок представляє інтегральну криву, що проходить через задану точку $(x_0 ; y_0)$ в даному напрямку – кутовий коефіцієнт дотичної до інтегральної кривої, проведеної в точці $(x_0 ; y_0)$, дорівнює даному числу y'_0.

Розглянемо деякі види рівнянь, які допускають зниження порядку і зводиться до ДР першого порядку.

1. Найпростіше ДР другого порядку має вигляд $y'' = f(x)$. Таке рівняння розв’язують двократним інтегрування правої частини рівняння.

Приклад 8.8. Знайти загальний розв’язок рівняння $y'' = \cos 2x$.

Розв’язання

Нехай $y' = p(x)$, тоді $y'' = p'(x)$.

$$p'(x) = \cos 2x \Rightarrow p(x) = \int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1.$$

$$y'=\frac{1}{2}\sin 2x+C_1 \Rightarrow y=\int\left(\frac{1}{2}\sin 2x+C_1\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\cos 2x+C_1x+C_2.$$

Загальний розв’язок рівняння $y=-\frac{1}{4}\cos 2x+C_1x+C_2$.

2. ДР явно не містить шукану функцію, тобто ДР виду

$$F(x,y',y'')=0.$$

Вводячи заміну $y'=z,\ y''=z'$, ДР зводиться до ДР першого порядку, тобто

$$F(x,z,z')=0.$$

Приклад 8.9. Розв’язати ДР другого порядку $y''=\frac{y'}{1+x}$.

Розв’язання

При $z=y',\ z'=y''$ дістанемо ДР першого порядку:

$$z'=\frac{z}{1+x},\quad \frac{dz}{z}=\frac{dx}{1+x}\quad \ln|z|=\ln|1+x|+\ln C_1,$$

$$z=C_1(1+x),\quad y'=C_1(1+x),\quad y=\int C_1(1+x)dx.$$

Знайдемо загальний розв’язок ДР другого порядку:

$$y=C_1\left(x+\frac{x^2}{2}\right)+C_2.$$

Приклад 8.10. Розв’язати ДР $y''+y'=0.$

Розв’язання

Вважаючи, що $y'=z,\ y''=z'$, знижуємо порядок і приходимо до ДР першого порядку:

$$z'+z=0,\ \frac{dz}{dx}=-z,\ \frac{dz}{z}=-dx,$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int dx, \quad \ln z = -x + \ln C_1, \quad z = C_1 e^{-x}.$$

Інтегруючи z, дістаємо загальний розв'язок ДР другого порядку:

$$y' = C_1 e^{-x}, \; y = \int C_1 e^{-x} dx + C_2, \; y = -C_1 e^{-x} + C_2.$$

3. ДР не містить явно аргументу, тобто ДР виду $F(y, y', y'') = 0$. Порядок ДР можна знизити, якщо за нову незалежну змінну візьмемо y, а за нову залежну змінну – $z = y'$.

Тоді

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy}.$$

Остаточно приходимо до ДР першого порядку $F\left(y, z, z\frac{dz}{dy}\right) = 0$ відносно шуканої функції z.

Приклад 8.11. Знайти загальний розв'язок ДР другого порядку $y'' + y = 0.$

Розв'язання

Узявши $y' = z,$ дістанемо $y'' = z\frac{dz}{dy}$ і прийдемо до ДР першого порядку

$$z\frac{dz}{dy} + y = 0, \; zdz + ydy = 0, \; z^2 + y^2 = C_1^2.$$

Знаходимо змінну $z = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2}$ і приходимо до ДР першого порядку $y' = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2}$, розв'язуючи яке, дістаємо:

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = \pm dx, \quad \arcsin\frac{y}{C_1} = \pm x + C_2, \quad y = C_1 \sin(\pm x + C_2).$$

8.6. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

Лінійними диференціальними рівняннями другого порядку з сталими коефіцієнтами називають рівняння вигляду

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

Якщо $f(x) = 0$, то рівняння буде називатися однорідним.

Для розв'язування однорідних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з сталими коефіцієнтами складають характеристичне рівняння: $k^2 + pk + q = 0$.

1. У випадку, коли корені характеристичного рівняння різні дійсні числа, загальний розв'язок даного рівняння має вигляд $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

Приклад 8.12. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' + 7y' + 12y = 0,$ якщо $y(0) = 1$ і $y'(0) = -2$.

Розв'язання

Для рівняння $y'' + 7y' + 12y = 0$ складемо характеристичне $k^2 + 7k + 12 = 0$, коренями якого є числа:

$$k_1 = -3\,;\, k_2 = -4.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x}$.

Якщо $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x}$, то $y' = -3C_1 e^{-3x} - 4C_2 e^{-4x}$.

Підставимо початкові умови:

$$\begin{cases} C_1 e^{-3\cdot 0} + C_2 e^{-4\cdot 0} = 1 \\ -3C_1 e^{-3\cdot 0} - 4C_2 e^{-4\cdot 0} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 3C_1 + 4C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Частинний розв'язок рівняння матиме вигляд $y = 2e^{-3x} - e^{-4x}$.

2. У випадку коли корені характеристичного рівняння дійсні і рівні між собою, тобто $k_1 = k_2 = k \in R$, загальний розв'язок даного рівняння має вигляд $y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

Приклад 8.13. Знайти частинний розв’язок рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$, якщо $y(0) = 2$ і $y'(0) = 2$.

Розв’язання

Для рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$ складемо характеристичне рівняння $k^2 + 6k + 9 = 0$, коренями якого є числа:

$$k_1 = k_2 = k = -3.$$

Загальний розв’язок рівняння матиме вигляд: $y = e^{-3x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

Якщо $y = e^{-3x}\left(C_1 + C_2 x\right)$, то $y' = -3e^{-3x}\left(C_1 + C_2 x\right) + e^{-3x}C_2$. Підставляємо початкові умови:

$$\begin{cases} e^{-3\cdot 0}\left(C_1 + C_2 \cdot 0\right) = 2 \\ -3e^{-3\cdot 0}\left(C_1 + C_2 \cdot 0\right) + e^{-3\cdot 0}C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ -3C_1 + C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 8. \end{cases}$$

Тоді маємо частинний розв’язок рівняння $y = e^{-3x}\left(2 + 8x\right)$.

3. Якщо розв’язки характеристичного рівняння комплексні числа, тобто $k_1 = a + bi$ та $k_2 = a - bi$, загальний розв’язок диференціального рівняння має вигляд $y = e^{ax}\left(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\right)$.

Приклад 8.14. Знайти частинний розв’язок рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0$, якщо $y(0) = 0$ і $y'(0) = 1$.

Розв’язання

Для рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0$ складемо характеристичне

$$k^2 + 2k + 5 = 0,$$

коренями якого є числа:

$$k_1 = -1 + 2i\,; k_2 = -1 - 2i.$$

Загальний розв’язок рівняння $y = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$, тоді $y' = -e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + e^{-x}\left(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x\right)$.

Підставляємо початкові умови:

$$\begin{cases} e^{-0}\left(C_1\cos(2\cdot 0)+C_2\sin(2\cdot 0)\right)=0 \\ -e^{-0}\left(C_1\cos(2\cdot 0)+C_2\sin(2\cdot 0)\right)+e^{-0}\left(-2C_1\sin(2\cdot 0)+2C_2\cos(2\cdot 0)\right)=1 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} C_1=0 \\ -C_1+2C_2=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C_1=0 \\ C_2=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Частинний розв'язок рівняння $y=\frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x$.

Якщо $f(x)\neq 0$, то лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами не буде однорідним і знаходження його розв'язків залежить від вигляду функції $f(x)$.

8.7. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y''+py'+gy=P_n(x)e^{mx},$$

де $P_n(x)$ – многочлен n–го степеня, записується як сума двох розв'язків: загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$y=Y+\overline{y}.$$

Для знаходження $\overline{y}$ використовують правила:

1. Якщо число m не є коренем характеристичного рівняння, то

$$\overline{y}=Q_n(x)e^{mx},$$

де $Q_n(x)$ – многочлен степеня n з невизначеними коефіцієнтами.

2. Якщо *m* збігається з одним із коренів характеристичного рівняння, то

$$\overline{y}=xQ_n(x)e^{mx};$$

3. Якщо обидва корені характеристичного рівняння рівні та збігаються з m, то

$$\overline{y} = x^2 Q_n(x) e^{mx}.$$

Приклад 8.15. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів $y'' + 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$.

Розв'язання

Запишемо розв’язки однорідного диференціального рівняння

$$y'' + 5y' + 6y = 0,\ \kappa^2 - 5\kappa + 6 = 0,\ \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 3,\ y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Знаходимо розв’язки неоднорідного диференціального рівняння

$$\alpha = 0,\ \overline{y} = Ax^2 + Bx + C,\ 6Ax^2 + (6B - 10A)x + 6C - 5B + 2A = 6x^2 - 10x + 2,$$

$$\begin{cases} 6A = 6 \\ 6B - 10A = -10 \\ 6C - 5B + 2A = 2 \end{cases},\quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}.$$

Отже, $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x^2$ – загальний розв’язок.

Приклад 8.16. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів $y'' - y = 2e^x$.

Розв'язання

Запишемо розв’язки однорідного диференціального рівняння

$$y'' - y = 0,\ \kappa^2 - 1 = 0,\ \kappa_{1,2} = \pm 1,\ y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Так як $\alpha = 1$ – корінь кратності 1, то $\overline{y} = Axe^x$, $A = 1$, $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + xe^x$ – загальний розв’язок.

Розділ 9. Функції багатьох змінних

9.1. Частинні похідні

Нехай задано функцію двох змінних $z = f(x, y)$ визначену у деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$. Зафіксуємо значення другої змінної *y: y = y₀* і розглянемо функцію $z = f(x, y_0)$ однієї змінної $z = f(x, y_0)$ у точці $x = x_0$.

Надамо значенню x_0 приросту Δx. Тоді функція дістане приріст $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0, y_0)$, який зветься частинним приростом функції по змінній *x* у точці $M_0(x_0, y_0)$.

Аналогічно частинний приріст функції по змінній *y:*

$$\Delta_y z = f(x_0; y_0 + \Delta y;) - f(x_0, y_0).$$

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x Z}{\Delta x}$, то вона називається частинною похідною функції $z = f(x, y)$ у точці M_0 по змінній *x* і записується одним із позначень:

$$Z'x(x_0, y_0), f'_x(x_0, y_0);\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=x_0}.$$

Якщо замінити x_0, y_0 на *x, y,* то дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Аналогічно, вважаючи, що *x* – стала, а *y* – змінна, визначають частинну похідну по *y:*

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

$$Z'_y,\ f'_y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}, D_y z, \qquad D_y f(x, y).$$

З означення випливає, що частинна похідна функції $z = f(x, y)$ по змінній *x* є звичайною похідною від функції однієї змінної *x* при фіксованому значенні змінної *y*, а похідна по *y* є похідною однієї змінної *y* при фіксованому значенні *x.* Тому частинні похідні обчислюються за формулами і правилами знаходження похідних функцій однієї змінної.

Приклад 9.1. Знайти частинні похідні функції:

$$f(x,y) = 4x^2y + 5xy^3 - 3x + 2y - 6$$ у точці *M(2;3)*.

Розв'язання

$$f'_x(x,y) = 8xy + 5y^3 - 3.$$

$$f'_x(M) = 8 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot 27 - 3 = 180.$$

$$f'_y(x,y) = 4x^2 + 15xy^2 + 2.$$

$$f'_y(M) = 4 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 \cdot 3^2 + 2 = 288.$$

Приклад 9.2. Знайти частинні похідні функції: $z = x^y \ (x > 0)$.

Розв'язання

Похідна степеневої функції від *x:*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}.$$

Похідна показникової функції від *y:*

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y lnx.$$

9.2. Частинні похідні вищих порядків

Частинні похідні $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ і $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ називають частинними похідними першого порядку. Їх можна розглядати як функції від *(x, y) є D*. Ці функції можуть теж мати похідні, які називають частинними похідними другого порядку. Вони визначаються:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{yx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{y^2}(x,y).$$

Частинна похідна другого і більш високого порядку, взята по різним змінним називається змінною частинною похідною.

Теорема 9.1 (Шварца). Якщо частинні похідні вищого порядку неперервні, то змішані похідні одного порядку, що відрізняються лише порядком диференціювання, рівні між собою.

Зокрема, якщо $z = f(x, y)$, маємо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Приклад 9.3. Перевірити, чи задовольняє задана функція $u = sin\frac{y}{x}$ вказаному рівнянню

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Розв'язання

Знайдемо частинні похідні першого і другого порядків заданої функції:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(sin\frac{y}{x}\right)'_x = cos\frac{y}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(sin\frac{y}{x}\right)'_y = cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(-\frac{y}{x^2}cos\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{2y}{x^3}cos\frac{y}{x} - \left(-\frac{y}{x^2}\right)sin\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{2y}{x^3}cos\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x^2}\right)^2 sin\frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{x}cos\frac{y}{x}\right)'_y = -\frac{1}{x}sin\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}sin\frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)'_y = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \left(-\frac{y}{x^2}\right)\left(-\sin\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^3}\sin\frac{y}{x}.$$

Підставляємо знайдені частинні похідні в ліву частину заданого рівняння і отримуємо:

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2\left(\frac{2y}{x^3}cos\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x^2}\right)^2 sin\frac{y}{x}\right) +$$

$$+ 2xy\left(-\frac{1}{x^2}cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^3}sin\frac{y}{x}\right) + y^2\left(-\frac{1}{x^2}sin\frac{y}{x}\right) =$$

$$=\frac{2y}{x}cos\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}sin\frac{y}{x}-\frac{2y}{x}cos\frac{y}{x}+\frac{2y^2}{x^2}sin\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}sin\frac{y}{x}=0 .$$

Отже, задана функція задовольняє вказаному рівнянню.

9.3. Диференційовність і повний диференціал функції

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$. Повний приріст функції у точці *M:*

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Функція $z = f(x, y)$ називається диференційовною у точці $M(x, y)$, якщо її приріст можна виразити у вигляді:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \qquad (9.1)$$

де $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ 0 і $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Сума перших двох доданків у (9.1) є головною частиною приросту функції.

Головна частина приросту функції *z = f(x; y)* лінійна відносно $z = f(x, y)$ називається повним диференціалом цієї функції і позначається символом *dz*:

$$\mathrm{d}z = Adx + B\mathrm{d}y.$$

Вирази Adx і $B\mathrm{d}y$ називають частинними диференціалами. Для незалежних змінних *x i y* вважають $\Delta x = dx$ і $\Delta y = dy$. Тому

$$\mathrm{d}z = Adx + Bdy.$$

Теорема 9.2 (необхідна умова диференційованості функції).

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована у точці $M(x, y)$, то вона неперервна в цій точці і має частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, причому $\frac{\partial z}{\partial x} = A, \frac{\partial z}{\partial y} = B.$

Відмітимо, що обернене твердження не вірне, тобто із неперервності функції або існування частинних похідних не випливає диференційованість функції. Так, неперервна функція $z = \sqrt{x^{\,2} + y^2}$ не диференційована у точці (0;0).

Як наслідок теореми отримаємо формулу для обчислення повного диференціалу:

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}\partial y \text{ або } \partial z = d_x z + d_y z,$$

де $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx$; $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy$ частинні диференціали функції $z = f(x, y)$.

Теорема 9.3 (достатня умова диференційованості функції).

Якщо функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні z'_x і z'_y у точці $M(x, y)$, то вона диференційована у цій точці і її повний диференціал виражається формулою $dz = d_x z + d_y z$.

Таким чином, на відміну від функції однієї змінної для диференційованості функції $z = f(x, y)$ необхідне існування частинних похідних у точці і достатньо, щоб ці похідні були неперервні.

Приклад 9.4. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ та повний диференціал dz функції: $z = x^5 y + 2x^4 - 3y^3 + y - 5x$.

Розв'язання

Щоб знайти частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial x}$, потрібно взяти звичайну похідну функції $z = f(x, y)$ за змінною x, а змінну y вважаємо сталою величиною. Аналогічно, $\frac{\partial z}{\partial y}$ – це похідна за змінною y функції $z = f(x, y)$ при сталому значенні x. Користуючись правилами диференціювання функцій одного аргументу і правилом диференціювання складеної функції, обчислюємо задані похідні.

Якщо x, y – незалежні змінні, $\Delta x = dx,\ \Delta y = dy$, тоді повний диференціал dz обчислюється за формулою: $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.

$$z = x^5 y + 2x^4 - 3y^3 + y - 5x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 y + 8x^3 - 5; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^5 - 9y^2 + 1;$$

$$dz = \left(5x^4 y + 8x^3 - 5\right)dx + \left(x^5 - 9y^2 + 1\right)dy.$$

Приклад 9.5. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ та повний диференціал dz функції $z = sin\sqrt{xy} \cdot e^{x^2+y^2}$.

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(sin\sqrt{xy}\right)'_x \cdot e^{x^2+y^2} + sin\sqrt{xy}\left(e^{x^2+y^2}\right)'_x = cos\sqrt{xy}\left(\sqrt{xy}\right)'_x \cdot e^{x^2+y^2} +$$

$$+ sin\sqrt{xy} \cdot e^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)'_x = cos\sqrt{xy}\frac{y}{2\sqrt{xy}} \cdot e^{x^2+y^2} + 2x \cdot sin\sqrt{xy} \cdot e^{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(sin\sqrt{xy}\right)'_y \cdot e^{x^2+y^2} + sin\sqrt{xy}\left(e^{x^2+y^2}\right)'_y = cos\sqrt{xy}\left(\sqrt{xy}\right)'_y \cdot e^{x^2+y^2} +$$

$$+ sin\sqrt{xy} \cdot e^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)'_y = cos\sqrt{xy}\frac{x}{2\sqrt{xy}} \cdot e^{x^2+y^2} + 2y \cdot sin\sqrt{xy} \cdot e^{x^2+y^2};$$

$$dz = \left(cos\sqrt{xy}\frac{y}{2\sqrt{xy}} \cdot e^{x^2+y^2} + 2x \cdot sin\sqrt{xy} \cdot e^{x^2+y^2}\right)dx +$$

$$+\left(cos\sqrt{xy}\frac{x}{2\sqrt{xy}} \cdot e^{x^2+y^2} + 2y \cdot sin\sqrt{xy} \cdot e^{x^2+y^2}\right)dy.$$

9.4. Застосування повного диференціалу для наближених обчислень

З означення повного диференціалу слідує, що при достатньо малих $|\Delta x|$ і $|\Delta y|$ справедлива рівність: $\Delta z \approx dz$.

З повного приросту

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) \Rightarrow f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx$$

$$\approx f(x,y) + dz,$$

або

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y \; -$$

формула для наближених обчислень.

Приклад 9.6. Обчислити наближено: $1.02^{3.01}$.

Розв’язання

Розглянемо функцію $z = x^y$.

Тоді $1.02^{3.01} = (x + \Delta x)^{y+\Delta y}$.

Скористаємось формулою $z \approx z(x_0, y_0) + dz(x_0, y_0)$

$$x = 1.02; y = 3.01;$$

$$x_0 = 1;\ y_0 = 3.$$

$$\Delta x = x - x_0 = 1.02 - 1 = 0.02;$$

$$\Delta y = y - y_0 = 3.01 - 3 = 0.01;$$

$$z'_x = yx^{y-1};\ z'_x(1;3) = 3 \cdot 1^2 = 3;$$

$$z'_y = x^y \ln x\,;\ z'_y(1;3) = 1^3 \cdot \ln 1 = 0;$$

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y;$$

$$dz = 3 \cdot 0.02 + 0 \cdot 0.01;$$

$$1.02^{3.01} \approx 1 + 0.06 = 1.06.$$

Для порівняння: точне значення $1.02^{3.01} \approx 1.061418168.$

Приклад 9.7. Обчислити наближено: $(0{,}92)^3(1{,}04)^2$.

Розв’язання

Застосуємо формулу

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) \approx f(x,\ y) + \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\Delta y$$

для функції $f(x,\ y) = x^3 y^2$. Покладемо: $x + \Delta x,\ y + \Delta y$.

Тоді $f(1;\ 1) = 1$; $x = 1,\ y = 1$; $\Delta x = 0{,}92 - 1 = -0{,}08$; $\Delta y = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$.

Знайдемо частинні похідні функції $f(x,\ y) = x^3 y^2$ в точці $(1;\ 1)$:

$$\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x} = 3x^2y^2;\quad \frac{\partial f(1;\ 1)}{\partial x} = 3;\qquad \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} = 2x^3y;\quad \frac{\partial f(1;\ 1)}{\partial y} = 2.$$

Отже, $(0{,}92)^3(1{,}04)^2 \approx 1 + 3(-0{,}08) + 2 \cdot 0{,}04 = 0{,}84$.

Приклад 9.8. Обчислити наближено $sin^2 51^\circ\ cos\, 5^\circ$.

Розв’язання

Розглянемо допоміжну функцію $z = sin^2 x\, cos\, y$. Перейдемо від градусної міри кутів до радіанної: куту $t = \alpha^\circ$ відповідає $t = \frac{\alpha\pi}{180}$ радіан.

Необхідно обчислити: $z\left(\frac{51\pi}{180};\ \frac{5\pi}{180}\right) = z\left(\frac{17\pi}{60};\ \frac{\pi}{36}\right)$.

Покладемо

$$x + \Delta x = \frac{17\pi}{60} = \frac{15\pi + 2\pi}{60};\ x = \frac{\pi}{4};\ \Delta x = \frac{\pi}{30};\quad y + \Delta y = \frac{\pi}{36};\ \ y = 0;\ \ \Delta y = \frac{\pi}{36}.$$

Обчислимо:

$$z\left(\frac{\pi}{4};\ 0\right) = sin^2 \frac{\pi}{4} cos\, 0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x} = 2\, sin\, x\, cos\, x\, cos\, y = sin 2x\, cos\, y\Big|;\quad \frac{\partial z\left(\frac{\pi}{4};\ 0\right)}{\partial x} = sin\, 2x\, cos\, y\Big|_{\substack{x=\pi/4 \\ y=0}} = 1;$$

$$\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y} = -sin^2 x\, sin\, y;\quad \frac{\partial z\left(\frac{\pi}{4};\ 0\right)}{\partial y} = -sin^2 x\, sin\, y\Big|_{\substack{x=\pi/4 \\ y=0}} = 0.$$

Згідно формули $f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) \approx f(x,\ y) + \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\Delta y$ маємо:

$$z = sin^2 51^\circ\, cos\, 5^\circ = sin^2 x\, cos\, y\left(\frac{17\pi}{60};\ \frac{\pi}{36}\right) \approx \frac{1}{2} + 1\cdot\frac{\pi}{30} + 0\cdot\frac{\pi}{36} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{30} \approx 0{,}6.$$

9.5. Диференціали вищих порядків

Нехай функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку. Диференціал другого порядку визначається за формулою $d^2 z = d(dz)$.

Отже: $\partial^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\partial x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\partial x \partial y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\partial x y^2$.

Або $\partial^2 z = (\frac{\partial}{\partial x}\partial x + \frac{\partial}{\partial y}\partial y)^2 z$.

Для $\partial^n z = (\frac{\partial}{\partial x}\partial x + \frac{\partial}{\partial y}\partial y)^n z,\ \ n \in N$.

9.6. Похідна складної функції. Повна похідна

Нехай $z = f(x, y)$ – функція двох змінних x, y, кожна із яких є функцією незалежної змінної t: $x = x(t),\ y = y(t)$.

В цьому випадку функція $z = f(x(t), y(t))$ є складною функцією однієї незалежної змінної t, а x і y – проміжні змінні.

Теорема 9.4. Якщо $z = f(x, y)$ – диференційована у т. $M(x, y)$, що належить D функція і $x = x(t),\ y = y(t)$ – диференційовані функції незалежної змінної t, то похідна складної функції $z(t) = f(x(t), y(t))$ обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Частинний випадок: $z = f(x, y)$, де $y = y(x)$ тобто $z = f(x, y(x))$ – складна функція однієї незалежної змінної.

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} \ \Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Формула повної похідної

Загальний випадок:

$$z = f(x, y), x = x(u, v), y = y(u, v).$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Приклад 9.9. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = uv,\ y = \frac{u}{v}$.

Розв’язання

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x}{x^2 + y^2}v + \frac{2y}{x^2 + y^2}\left(\frac{1}{v}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2x}{x^2 + y^2}u + \frac{2y}{x^2 + y^2}\left(-\frac{u}{v^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\left(2xv+\frac{2y}{v}\right)}{x^{2}+y^{2}}=2\frac{\left(uv^{2}+\frac{u}{v^{2}}\right)}{u^{2}v^{2}+\frac{u^{2}}{v^{2}}}=2\frac{uv^{4}+u}{u^{2}v^{4}+u^{2}}=2\frac{v^{4}+1}{u^{2}(v^{4}+1)}=\frac{2}{u}.$$

Приклад 9.10. Обчислити значення похідної складеної функції $u=arcctg\frac{x}{2y}$, де $x=cost$, $y=sin2t+1$ при $t=\pi$, з точністю до двох знаків після коми.

Розв'язання

Для обчислення похідної складеної функції $u=f(x,\,y)$, де $x=x(t),\ y=y(t)$ використовуємо формулу: $\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$. Послідовно обчислюємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(arcctg\,\frac{x}{2y}\right)_x'=-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2y}\right)^2}\cdot\frac{1}{2y}=-\frac{4y^2}{4y^2+x^2}\cdot\frac{1}{2y}=-\frac{2y}{4y^2+x^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(arcctg\,\frac{x}{2y}\right)_y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2y}\right)^2}\cdot\frac{x}{2y^2}=\frac{4y^2}{4y^2+x^2}\cdot\frac{x}{2y^2}=\frac{2x}{4y^2+x^2};$$

$$\frac{dx}{dt}=-sin\,t;\quad \frac{dy}{dt}=2\,cos\,2t;$$

$$\frac{du}{dt}=-\frac{2y}{4y^2+x^2}(-sin\,t)+\frac{2x}{4y^2+x^2}2\,cos\,2t.$$

Обчислимо значення похідної в заданій точці $t=\pi$:

$$x=cos\,\pi=-1,\ y=sin\,2\pi+1=1;$$

$$\frac{du}{dt}=-\frac{2}{4+1}(-sin\,\pi)+\frac{-2}{4+1}2\,cos\,2\pi=0-\frac{4}{5}=-\frac{4}{5}=-0{,}80.$$

9.7. Диференціал неявної функції

Функція неявна, якщо вона задана рівнянням $f(x;y;z)=0$, тоді:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'_x}{f'_z};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f'_y}{f'_z}\ \ (f'_z\neq 0).$$

Приклад 9.11. Знайти частинні похідні функції z, що задана неявно рівнянням: $\mathrm{e}^{\mathrm{z}}+\mathrm{z}-\mathrm{x}^2\mathrm{y}+1=0$.

Розв’язання

$$f(x;y;z)=\ e^z+z-x^2y+1;$$

$$f'_x=-2xy;\ f'_z=e^z+1\ \Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'_x}{f'_z}=\frac{2xy}{e^z+1};$$

$$f'_y=-2x\ \Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f'_y}{f'_z}=\frac{2x}{e^z+1}.$$

Приклад 9.12. Обчислити значення частинних похідних функції $z=(x,\ y)$, заданої неявно: $5x^2y^3+2xz^3-y^2z=0$, в даній точці $M_0(-1;\ 1;\ 1)$ з точністю до двох знаків після коми.

Розв’язання

Похідні неявної функції $z(x,\ y)$, заданої за допомогою рівняння $F(x,\ y,\ z)=0$, можуть бути обчислені за формулами: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$.

Маємо:

$$F(x,\ y,\ z)=5x^2y^3+2xz^3-y^2z\ ;$$

$$F'_x=10xy^3+2z^3\ ;\quad F'_x=15x^2y^2-2yz\ ;\quad F'_z=6xz^2-y^2\ ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{10xy^3+2z^3}{6xz^2-y^2}\ ;\qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{15x^2y^2-2yz}{6xz^2-y^2}\ .$$

Обчислимо значення похідних в заданій точці $M_0(-1;\ 1;\ 1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{10xy^3+2z^3}{6xz^2-y^2}=-\frac{10(-1)\cdot 1+2\cdot 1}{6(-1)\cdot 1-1}=-\frac{-10+2}{-6-1}=-\frac{8}{7}\approx -1{,}14\ ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{15x^2y^2-2yz}{6xz^2-y^2}=-\frac{15(-1)^2\cdot 1-2\cdot 1\cdot 1}{6(-1)\cdot 1-1}=-\frac{15-2}{-7}=\frac{13}{7}\approx 1{,}86\,.$$

9.8. Дотична площина та нормаль до поверхні

Нехай задано поверхню $F(x,y,z)=0$ і точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ належить цій поверхні. При цьому функція $F(x,y,z)$ диференційовна у точці M_0, причому не всі частинні похідні у цій точці дорівнюють нулю.

Розглянемо довільну криву L, що проходить через точку M_0 та лежить на поверхні $F(x,y,z)=0$. Нехай рівняння цієї кривої мають вигляд $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, а точці M_0 відповідає значення параметра t_0. Оскільки дана крива лежить на поверхні, то координати її точок задовольняють рівнянню поверхні, тобто $F(x(t),y(t),z(t))=0$. Диференціюючи цю рівність за параметром t, отримуємо:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0\,.$$

З цієї рівності випливає, що вектори $\vec{n}=\left(F'_x(M_0),F'_y(M_0),F'_z(M_0)\right)$ та $\vec{s}=\left(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\right)$ є ортогональними. При цьому вектор $\vec{s}$ є напрямним вектором дотичної до кривої L у точці M_0. З рівності випливає також, що дотичні до всіх кривих, що проходять через точку M_0 і лежать на поверхні $F(x,y,z)=0$, є ортогональними до одного й того самого вектора $\vec{n}$. Тоді всі ці дотичні лежать у одній і тій самій площині, яка називається дотичною площиною до поверхні у точці M_0 .

Знайдемо рівняння дотичної площини. Оскільки вона проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$, то її рівняння має вигляд:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0\,.$$

Нормаллю до поверхні у точці M_0 називають пряму, що проходить через M_0 перпендикулярно до дотичної площини, проведеної у цій точці. Оскільки нормаль проходить через точку M_0 і має напрямний вектор $\vec{n}$, то канонічні рівняння цієї прямої мають вигляд:

$$\frac{x-x_0}{F'_x\left(M_0\right)}=\frac{y-y_0}{F'_y\left(M_0\right)}=\frac{z-z_0}{F'_z\left(M_0\right)}.$$

Якщо рівняння поверхні задано у явній формі, тобто має вигляд $z=f\left(x,y\right)$, то, поклавши $F\left(x,y,z\right)=f\left(x,y\right)-z=0$, отримаємо $F'_x\left(M_0\right)=f'_x\left(x_0,y_0\right)$, $F'_y\left(M_0\right)=f'_y\left(x_0,y_0\right)$, $F'_z\left(M_0\right)=-1$. Тоді рівняння дотичної та нормалі будуть відповідно:

$$f'_x\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)+f'_y\left(x_0,y_0\right)\left(y-y_0\right)-\left(z-z_0\right)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{f'_x\left(x_0,y_0\right)}=\frac{y-y_0}{f'_y\left(x_0,y_0\right)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Ми розглянули випадок, коли функція $F\left(x,y,z\right)$, що визначає рівняння поверхні $F\left(x,y,z\right)=0$, є диференційовною у точці M_0 і хоча б одна з частинних похідних F'_x, F'_y, F'_z не дорівнює нулю. Якщо ці умови не виконуються у деякій точці (таку точку називають особливою точкою поверхні), то дотична площина та нормаль у цій точці можуть не існувати.

Приклад 9.13. Написати рівняння нормалі та дотичної площини до еліпсоїда $2x^2+y^2+z^2=15$ у точці $M_0\left(1,2,3\right)$.

Розв’язання

Рівняння дотичної площини та нормалі запишемо, використавши відповідні формули.

Маємо $F\left(x,y,z\right)=2x^2+y^2+z^2-15$. Частинні похідні цієї функції мають вигляд: $F'_x=4x$, $F'_y=2y$, $F'_z=2z$. Знаходимо їх значення у точці $M_0\left(1,2,3\right)$: $F'_x\left(M_0\right)=4\cdot 1=4$, $F'_y\left(M_0\right)=2\cdot 2=4$, $F'_z\left(M_0\right)=2\cdot 3=6$.

Підставивши ці значення у відповідну формулу разом з координатами точки M_0, отримаємо рівняння дотичної площини: $4(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0$ або $2x+2y+3z-15=0$.

Рівняння нормалі до заданої поверхні набуває вигляду:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6}.$$

Приклад 9.14. Написати рівняння нормалі та дотичної площини до параболоїда $z=x^2+y^2$ у точці $M_0(1,-2,5)$.

Розв'язання

Маємо функцію двох змінних $f(x,y)=x^2+y^2$, $x_0=1$, $y_0=-2$. Знаходимо необхідні частинні похідні: $f'_x=2x$, $f'_y=2y$, $f'_x(1,-2)=2\cdot 1=2$, $f'_y(1,-2)=2\cdot(-2)=-4$. Підставляючи знайдені значення частинних похідних разом з координатами точки M_0 у рівняння дотичної, отримуємо рівняння дотичної площини до заданого параболоїда $2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$ або $2x-4y-z-5=0$.

Рівняння нормалі до параболоїда у точці M_0 має вигляд:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-5}{-1}.$$

9.9. Скалярне поле. Похідна за напрямом та градієнт

Область простору, кожній точці M якої поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини $u(M)$ (тобто число $u(M)$), називають скалярним полем.

Прикладами скалярних полів є поле температури даного тіла, поле густини даного неоднорідного середовища, поле атмосферного тиску тощо.

Для того, щоб задати скалярне поле, достатньо задати скалярну функцію $u(M)$ та її область визначення. Якщо у просторі ввести прямокутну систему координат $Oxyz$, то точка M у цій системі матиме певні координати (x, y, z) і скалярне поле u стане функцією цих координат: $u = u(M) = u(x, y, z)$.

Якщо скалярна функція $u(M)$ залежить тільки від двох змінних, наприклад x і y, то відповідне скалярне поле $u(x, y)$ називають плоским, якщо ж $u(M) = u(x, y, z)$, то таке скалярне поле називають просторовим. Геометрично плоскі скалярні поля зображають за допомогою ліній рівня $u(x, y) = c$, просторові – за допомогою поверхонь рівня $u(x, y, z) = c$.

Для характеристики швидкості зміни поля у заданому напрямі введемо поняття похідної за напрямом.

Нехай задано скалярне поле $u(x, y, z)$. Візьмемо у ньому точку $M(x, y, z)$ і проведемо з цієї точки вектор $\vec{l}$ з напрямними косинусами $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. На векторі $\vec{l}$ на відстані Δl від його початку візьмемо точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Тоді $\Delta l = MM_1 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

Обчислимо тепер приріст $\Delta_l u$ функції $u(x, y, z)$ при переході від точки M до точки M_1 в напрямі вектора $\vec{l}$: $\Delta_l u = u(M_1) - u(M)$.

Якщо існує границя відношення $\dfrac{\Delta_l u}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$, то цю границю називають похідною функції $u(x, y, z)$ у точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ і позначають $\dfrac{\partial u}{\partial l}$. Отже, $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta_l u}{\Delta l}$.

Отримаємо формулу для обчислення похідної за напрямом. Припустимо, що функція $u(x, y, z)$ є диференційовною у точці M. Тоді її приріст у цій точці можна записати наступним чином:

$$\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

де ε_1, ε_2, ε_3 – нескінченно малі функції при $\Delta l \to 0$.

Оскільки $\Delta x = \Delta l \cdot \cos\alpha$, $\Delta y = \Delta l \cdot \cos\beta$, $\Delta z = \Delta l \cdot \cos\gamma$, то відношення $\dfrac{\Delta_l u}{\Delta l}$ можна записати у вигляді:

$$\frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma .$$

Перейшовши до границі при $\Delta l \to 0$, отримаємо формулу для обчислення похідної за напрямом:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma .$$

З цієї формули випливає, що частинні похідні є окремими випадками похідної за напрямом. Дійсно, коли $\vec{l}$ збігається з одним з ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, то похідна за напрямом збігається відповідно з частинною похідною u'_x, u'_y, u'_z. Наприклад, якщо $\vec{l} = \vec{i}$, то $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \dfrac{\pi}{2}$, тому

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x} .$$

Подібно до того, як частинні похідні u'_x, u'_y, u'_z показують швидкість зміни функції u у напрямку відповідних осей координат, так і похідна $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ показує швидкість зміни скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$. Абсолютна величина похідної $\left|\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|$ відповідає значенню цієї швидкості, а знак похідної визначає характер зміни функції $u(x, y, z)$ у напрямі $\vec{l}$. Якщо похідна за напрямком додатна, то функція у цьому напрямку зростає, якщо похідна від'ємна, то спадає.

Якщо поле плоске, тобто задається функцією $u(x, y)$, то напрям вектора $\vec{l}$ цілком визначається кутом α між цим вектором та віссю Ox, $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$.

Оскільки $\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$, то для плоского поля $u(x, y)$ формула набуває вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha .$$

Приклад 9.15. Знайти похідну функції $u = x^2 - 2xz + y^2$ у точці $A(1, 2, -1)$ за напрямом від точки A до точки $B(2, 4, -3)$. З'ясувати характер зміни поля у цьому напрямі.

Розв'язання

Знайдемо вектор $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$ та його напрямні косинуси.

$\overrightarrow{AB} = (2-1, 4-2, -3-(-1)) = (1, 2, -2)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{2}{3}$.

Обчислимо значення частинних похідних у точці A.

$$u'_x = 2x - 2z ,u'_y = 2y,\ u'_z = -2x,$$

$$u'_x(A) = 2\cdot 1 - 2\cdot(-1) = 4,\ u'_y(A) = 2\cdot 2 = 4,\ u'_z(A) = -2\cdot 1 = -2.$$

Знайдемо $\frac{\partial u}{\partial l}$: $\frac{\partial u}{\partial l} = 4\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{2}{3} - 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}$. Оскільки $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$, то функція u зростає у заданому напрямі.

Нехай задано поле $u = u(x, y, z)$ і точку $M(x, y, z)$. Встановимо напрям $\vec{l}$, у якому похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ має найбільше значення.

Вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції $u = u(x, y, z)$ у точці $M(x, y, z)$, називають градієнтом функції у цій точці і позначають $\operatorname{grad} u$. Отже,

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} .$$

Зв’язок між градієнтом і похідною у даній точці за напрямом $\vec{l}$ встановлює наступна теорема.

Теорема 9.5. Похідна функції $u(x,y,z)$ у точці $M(x,y,z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ дорівнює проекції градієнта функції у цій точці на вектор $\vec{l}$.

З теореми випливає, що похідна за напрямом $\vec{l}$ досягає свого найбільшого значення $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |\text{grad}\, u|$, коли напрям вектора $\vec{l}$ збігається з напрямом градієнта. Отже, швидкість зростання скалярного поля у довільній точці є найбільшою у напрямку градієнта. У напрямі, протилежному до напряму градієнта, поле найшвидше зменшуватиметься.

З теореми 9.5 випливає також, що похідна за напрямом вектора, перпендикулярного до градієнта, дорівнює нулю, тобто швидкість зміни скалярного поля у напрямі, перпендикулярному до градієнта, дорівнює нулю; у цьому напрямку поле залишається сталим. Дійсно, $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Градієнт у кожній точці поля $u(x,y,z)$ перпендикулярний до поверхні рівня, що проходить через цю точку. Це випливає з того, що напрямний вектор нормалі до поверхні рівня $u(M) = u(M_0)$, яка проходить через точку M_0, має координати $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}$, $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}$, $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}$, тобто його координати співпадають з координатами градієнта.

Приклад 9.16. Знайти градієнт функції $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ у точці $M_0(0,1,2)$.

Розв’язання. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ у точці M_0. Маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 2xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 2xy.$$

Обчислимо значення знайдених частинних похідних у точці $M_0(0,1,2)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 2(0-1\cdot 2) = -4\,,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 2(1-0\cdot 2) = 2\,,\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = 2(2-0\cdot 1) = 4\,.$$

Визначаємо вектор – градієнт функції u :

$$\operatorname{grad} u = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}\,.$$

9.10. Екстремум функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена у деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ і є неперервною у цій точці.

Функція $z = f(x, y)$ має у точці $M_0(x_0, y_0)$ локальний максимум, якщо існує такий окіл точки *Mo,* для довільної точки $M(x, y)$ якого виконується нерівність, і локальний мінімум, якщо

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Точки локального min і max функції багатьох змінних називаються точками екстремуму.

Необхідні і достатні умови екстремуму

Теорема 9.6 (необхідна умова екстремуму). Якщо у точці $M_0(x_0, y_0)$ диференційована функція $z = f(x, y)$ має екстремум, то її частинні похідні в цій точці рівні нулю: $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Геометрично рівняння $f'_x(x_0, y_0) = 0$ і $f'_y(x_0, y_0) = 0$ означають, що у точці екстремуму $z = f(x, y)$ дотична площина до поверхні, яка відображає функцію $f(x, y)$, паралельна площині *0xy*, оскільки рівняння дотичної площини є $z = z_0$. Точка, в якій частинні похідні першого порядку функції $z = f(x; y) = 0$, тобто $f'_x = 0$ і $f'_y = 0$ називається стаціонарною точкою функції *z*.

Зауваження. Функція може мати екстремум в точках, де хоча б одна із похідних не існує.

Наприклад, функція $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ має максимум у точці *O(0;0)*, але не має у цій точці частинних похідних.

Стаціонарні точки і точки, в яких хоча б одна із частинних похідних не існує, називаються критичними точками.

Теорема 9.7 (достатня умова існування екстремуму). Нехай у стаціонарній точці (x_0, y_0) і деякому її околі функція $f(x,y)$ має неперервні частинні похідні до 2-го порядку включно. Обчислимо у точці (x_0, y_0) значення $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$.

Позначимо $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Тоді:

1. Якщо $\Delta > 0$, то функція $f(x,y)$ у точці (x_0, y_0) має екстремум:

   Максимум, якщо $A < 0$;

   Мінімум, якщо $A > 0$.

2. Якщо $\Delta < 0$, то функція $f(x,y)$ у точці (x_0, y_0) екстремуму не має.

3. Якщо $\Delta = 0$ екстремум може бути, а може й не бути. Потрібні додаткові дослідження.

Приклад 9.17. Знайти екстремум функції $z = 3x^2y - x^3 - y^4$.

Розв'язання

$z'_x = 6xy - 3x^2$ і $z'_y = 3x^2 - 4y^3$. Точки, в яких похідні не існують відсутні. Знайдемо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0 \ (1) \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \ (2) \end{cases} \Rightarrow (1) + (2) = 6xy - 4y^3 = 0$$

$$2y(3x - 2y^2) = 0$$

$$y = 0 \ \Rightarrow x = 0$$

$$x = \frac{2}{3}y^2,$$

підставимо в (2)

$$6 \cdot \frac{2}{3}y^3 - 3 \cdot \frac{4}{9}y^4 = 0$$

$$4y^3\left(1 - \frac{y}{3}\right) = 0 \ \Rightarrow \ y = 0, y = 3 \ \Rightarrow x = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$$

Таким чином $M_1(6{,}3)$, $M_2(0{,}0)$. У точці $M_1(6{,}3)$ маємо:

$$A = z''_{xx}(6;3) = (6y - 6x)_{M_1} = 18 - 36 = -18;$$

$$B = z''_{xy} = (6x)_{M_1} = 6 \cdot 6 = 36;$$

$$C = z''_{yy}(6;3) = (-12y^2)_{M_1} = -12 \cdot 3^2 = -108.$$

Тоді $\Delta = AC - B^2 = -18 \cdot (-108) - 36^2 = 648 > 0$.

Екстремум існує, $A < 0 \Rightarrow max$.

$$z_{max}(6,3) = 27.$$

У точці $M_2(0,0)$: $A = 0;\ B = 0;\ C = 0 \ \Rightarrow\ \Delta = 0$.

Проведемо додаткові дослідження.

$$z(0{,}0) = 0.$$

Можемо помітити, що при $x = 0, y \neq 0, z = -y^4 < 0$ і $y > 0$. При $x < 0$, $y = 0,\ z = -x^3 > 0$ Отже в околі точки $M_2(0{,}0)$ функція приймає як від'ємні, так і додатні значення і екстремуму не має.

Відповідь: $z_{max}(6,3) = 27$.

9.11. Найбільше і найменше значення функції у замкненій області

Нехай функція $z = f(x;y)$ визначена і неперервна в обмеженій замкнутій області $\overline{D}$. Тоді вона досягає в деяких точках $\overline{D}$ своїх найбільшого M і найменшого m значень (так званий глобальний екстремум).

Ці значення досягаються функцією у точках, що лежать в середині $\overline{D}$, або на межі області.

Правило знаходження найбільшого і найменшого значень:

1) Знайти критичні точки функції, що належать $\overline{D}$ і обчислити значення функції в них.

2) Знайти найбільше і найменше значення функції $z = f(x;y)$ на границях області.

3) Порівняти знайдені значення і серед них знайти найбільше M і найменше m.

Приклад 9.18. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2y + xy^2 + xy$ в замкнутій області, що обмежена лініями $y = \frac{1}{x}, x = 1, x = 2,\ y = -1.5$.

Розв’язання

$$z'_x = 2xy + y^2 + y;\ z'_y = x^2 + 2xy + x.$$

Знайдемо критичні точки:

$$\begin{cases} y(2x + y + 1) = 0; \\ x(x + 2y + 1) = 0. \end{cases}$$

Розв’язком системи є точки $(0; 0); (-1; 0), (0; -1); (-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$ – всі вони не належать $\overline{D}$.

Дослідимо функцію на границях області, яка складається із ділянок *AB, BC, CD,* і *DA.*

На *AB*: $x = 1, z = y + y^2 + y = y^2 + 2y, y \epsilon [-1{,}5, 1]$.

Знайдемо

$$z(-1) = 1 - 2 = -1;$$

$$z\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} + 2\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - 3 = \frac{9-12}{4} = -\frac{3}{4}; z(1) = 3.$$

Обчислимо:

$$z(1; -1) = -1; \qquad z\left(1; -\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}; \qquad z(1; 1) = 3.$$

На ділянці BC:

$$y = \frac{1}{x}, z = x + \frac{1}{x} + 1, x \epsilon [1, 2]$$

$$z'_x = 1 - \frac{1}{x^2};\ 1 - \frac{1}{x^2} = 0; x_1 = 1, x_2 = -1 \notin [1, 2]$$

$$z(1) = 3; Z(2) = 3{,}5.$$

$$z(1; 1) = 3; z\left(2; \frac{1}{2}\right) = 3{,}5.$$

На ділянці CE:

$$x = 2, z = 2y^2 + 6y, y \epsilon \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$z'_y = 4y + 6 = 0, y = -\frac{3}{2}, z = \left(-\frac{3}{2}\right) = -4{,}5; z\left(\frac{1}{2}\right) = 3{,}5;$$

$$z\left(2;-\frac{3}{2}\right)=-4{,}5;z\left(2;\frac{1}{2}\right)=3{,}5.$$

На ділянці АЕ:

$$y=\frac{3}{2},z=-\frac{3x^2}{2}+\frac{3}{4}x,\ \ x\in[1,2];$$

$$z'_x=-3x+\frac{3}{4}=0\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{4}\ \notin[1,2];$$

$$z(1)=-\frac{3}{4};z(2)=-4{,}5\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z\left(1;-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4};z\left(2;-\frac{3}{2}\right)=-4{,}5.$$

Порівнявши знайдені результати маємо:

$$M=+3{,}5=z_{\text{найб}}\left(2;\frac{1}{2}\right)=z(C);$$

$$m=-4{,}5=z_{\text{найм}}\left(2;-\frac{3}{2}\right)=z(E).$$

Задача 9.1. Розрахувати розміри силосної споруди з прямокутною основою так, щоб при заданому об'ємі на облицювання дна і стінок пішла найменша кількість матеріалу.

Розв'язання

Позначимо через x та y розміри основи, тоді висоту споруди обчислимо із співвідношення тобто $h=\dfrac{32}{xy}$.

Запишемо функцію площі

$$S=xy+2y\frac{32}{xy}+2x\frac{32}{xy}=xy+64\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),\quad x\neq 0,\quad y\neq 0.$$

Знайдемо такі x та y, при яких функція S досягає найменшого значення, тобто дослідимо функцію двох змінних $S=xy+64\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$ на екстремум.

Знайдемо частинні похідні:

$$S'_x=y+64\left(-\frac{1}{x^2}\right)=y-\frac{64}{x^2},\quad x\neq 0.$$

$$S'_y=x+64\left(-\frac{1}{y^2}\right)=x-\frac{64}{y^2},\quad y\neq 0.$$

Прирівняємо до нуля частинні похідні і запишемо систему

$$\begin{cases} y - \dfrac{64}{x^2} = 0, \\ x - \dfrac{64}{y^2} = 0. \end{cases}$$

Підставимо $y = \dfrac{64}{x^2}$ у друге рівняння системи. Маємо

$$x = \frac{64x^4}{(64)^2}, \qquad \text{або} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{64}{x^2}, \\ 4^3 - x^3 = 0. \end{cases}$$

На множині дійсних чисел система має один розв'язок: $x = 4,\ y = 4;$ тоді $h = \dfrac{32}{xy} = \dfrac{32}{4 \cdot 4} = 2.$ Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$S''_{xx} = \frac{128}{x^3},\ \ S''_{xx}\Big|_{x=4} = \frac{128}{4^3} = \frac{128}{64} = 2, \qquad A = 2;$$

$$S''_{yy} = \frac{128}{y^3},\ \ S''_{yy}\Big|_{y=4} = \frac{128}{4^3} = \frac{128}{64} = 2, \qquad C = 2;$$

$$S''_{xy} = 1,\ \ S''_{xy}\Big|_{\substack{x=4 \\ y=4}} = 1, \qquad B = 1, \quad AC - B^2 = 3 > 0.$$

В точці (4; 4) функція має мінімум:

$$S''_{xy}\Big|_{\substack{x=4 \\ y=4}} = 4 \cdot 4 + 64\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 16 + 32 = 48\ (м^2).$$

Розділ 10. Ряди

10.1. Поняття числового ряду

Нехай задано послідовність дійсних чисел $\{u_n\}$. *Числовим рядом* називають вираз

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Для кожного n покладемо $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Число u_n називають n-м членом, а число S_n – n-ю частинною сумою ряду/

Якщо послідовність частинних сум $\{S_n\}$ ряду збіжна і $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то число S називають сумою цього ряду, а ряд називають збіжним. Використовують символічний запис $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Якщо послідовність $\{S_n\}$ скінченної границі не має, то ряд називають розбіжним.

Приклад 10.1. Дослідити на збіжність наступні числові ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^n$.

Розв'язання

1) Розглянемо послідовність частинних сум ряду: $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0, \ldots, S_{2n-1} = 1$, $S_{2n} = 0, \ldots$. Ця послідовність границі не має, тому ряд розбіжний.

2) Запишемо n-й член ряду u_n у вигляді: $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Знайдемо n-у частинну суму даного ряду:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} ... + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... +$$
$$+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, то ряд є збіжним і його сума дорівнює одиниці.

3) Даний ряд є сумою членів геометричної прогресії з першим членом a та знаменником q. При $q \neq 1$ сума n членів геометричної прогресії $S_n = \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q}$.

При $|q|<1$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, оскільки у цьому випадку $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, тому ряд збіжний і його сума дорівнює $\frac{a}{1-q}$.

При $q>1$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$, тому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ і ряд розбіжний.

При $q<-1$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ не існує, не існує також і границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, ряд розбіжний.

При $q=1$ маємо ряд $a+a+a+\ldots$ з частинною сумою $S_n = na$. Отож, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, тому у цьому випадку ряд розбіжний.

При $q=-1$ маємо ряд $a-a+a-a+\ldots$. Тут при парному номері $n=2k$ $S_n = S_{2k} = 0$, для непарного номера $n=2k-1$ $S_n = S_{2k-1} = a$, тому границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує і ряд розбіжний.

Отже, ряд, що є сумою членів нескінченної геометричної прогресії, є збіжним при $|q|<1$ і розбігається при $|q|\geq 1$.

10.2. Основні властивості числових рядів

Основні властивості числових рядів сформулюємо у вигляді наступних теорем.

Теорема 10.1. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний і має суму S, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot u_n$ (α – стала) також збіжний і його сума дорівнює αS.

Теорема 10.2. Збіжні ряди можна почленно додавати та віднімати, тобто якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ є збіжними і мають суми відповідно S та σ, то збіжними є також ряди $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ і суми їх дорівнюють $S \pm \sigma$.

Теорема 10.3. На збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання до нього скінченної кількості членів.

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і позначимо $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + ... = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$. Величину r_n називають n-*м* залишком ряду. Його можна розглядати як суму ряду, який утворюється з ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ після відкидання його перших n членів. Якщо ряд збіжний і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то $r_n = S - S_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Теорема 10.4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є збіжним (розбіжним) тоді і лише тоді, коли збіжним (розбіжним) є його n-й залишок.

Ця теорема випливає з теореми 10.3 (відкидання перших n членів ряду не впливає на його збіжність).

Теорема 10.5 (Необхідна умова збіжності ряду). Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є збіжним, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Зазначимо, що умова $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ є лише необхідною, але не достатньою умовою для збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Існують розбіжні ряди, для яких ця умова виконується. Наприклад, гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ є розбіжним, проте $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Теорема 10.6 (Достатня умова розбіжності ряду). Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ є розбіжним.

Приклад 10.2. Дослідити на збіжність наступні ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$.

Розв'язання

1) Для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ необхідна умова збіжності виконана, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Отримали, що $S_n > \sqrt{n}$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, тобто ряд є розбіжним.

2) Перевіримо виконання необхідної умови збіжності ряду $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2 \neq 0$, тому за теоремою 10.6 ряд є розбіжним.

3) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ є збіжним, оскільки це сума членів нескінченної геометричної прогресії, знаменник якої $q = \frac{1}{5}$, $|q| < 1$.

10.3. Достатні умови збіжності знакододатних рядів

При дослідженні на збіжність знакододатних рядів, тобто рядів з невід'ємними членами, найчастіше використовують такі достатні умови, як ознаки порівняння, ознака Д'Аламбера, радикальна та інтегральна ознаки Коші.

Теорема 10.7 (Ознаки порівняння). Нехай задано ряди з невід'ємними членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \geq 0 \ \forall n \in N$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $v_n \geq 0 \ \forall n \in N$ і для всіх $n \in N \ \ u_n \leq v_n$.

Тоді:

1) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (перша ознака порівняння);

2) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (друга ознака порівняння).

При дослідженні рядів на збіжність за допомогою ознак порівняння використовують еталонні ряди, про збіжність чи розбіжність яких наперед відомо. У якості таких рядів найчастіше використовують суму нескінченної геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ та ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ є збіжним при $|q| < 1$ і розбіжним при інших значеннях знаменника прогресії q.

Ряд Діріхле збіжний при $\alpha > 1$, при $\alpha \leq 1$ він розбіжний. Ряд Діріхле називають також узагальненим гармонічним рядом.

Приклад 10.3. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Розв'язання

1) Оскільки $\frac{1}{n\cdot 2^n}\le\frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ є збіжним (сума нескінченної геометричної прогресії, де $q=\frac{1}{2}$, $|q|<1$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ за першою ознакою порівняння також є збіжним.

2) Оскільки $\ln x<x$ при $x>0$, то $\ln(n+1)<n+1$ і $\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n+1}$є. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...$ є розбіжним (це гармонічний ряд з вилученим першим членом), тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ за другою ознакою порівняння також є розбіжним.

Теорема 10.8 (гранична ознака порівняння). Якщо задано два ряди з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, причому існує скінченна, відмінна від нуля границя $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=a$ ($a\ne 0$, $a\ne\infty$), то ці ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Приклад 10.4. Дослідити на збіжність ряди: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\frac{\pi}{2n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3+2}$.

Розв'язання

1) Застосуємо граничну ознаку порівняння. Нехай $u_n=\mathrm{tg}\frac{\pi}{2n}$, $v_n=\frac{1}{n}$.

Тоді $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{2n}}{1/\mathrm{n}}=\left\|\begin{matrix}x=\frac{1}{n},\\ n\to\infty, x\to 0\end{matrix}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{tg\frac{\pi x}{2}}{x}=\left\|\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,kx}{x}=k\right\|=\frac{\pi}{2}\ne 0$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – розбіжний (це гармонічний ряд), тому розбіжним є ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\frac{\pi}{2n}$.

2) Позначимо $u_n = \dfrac{2n+1}{n^3+2}$. Виберемо $v_n = \dfrac{1}{n^2}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ є збіжним, оскільки це ряд Діріхле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha = 2 > 1$. Знайдемо границю $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{2n+1}{n^3+2}}{1/n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+n^2}{n^3+2} = 2 \neq 0$. За граничною ознакою порівняння з збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, де $u_n = \dfrac{2n+1}{n^3+2}$.

Теорема 10.9 (ознака Д'Аламбера). Якщо для ряду з додатними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то:

1) ряд збіжний при $l < 1$;
2) ряд розбіжний при $l > 1$.

Зазначимо, що у випадку, коли $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. У цьому випадку ознаку Д'Аламбера застосувати не можна, потрібно використовувати інші ознаки.

Приклад 10.5. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{3^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{5^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$.

Розв'язання

1) Застосуємо ознаку Д'Аламбера. Для даного ряду $u_n = \dfrac{n^3}{3^n}$, $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^3}{3^{n+1}}$,

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \dfrac{3^n}{n^3} = \dfrac{(n+1)^3}{3n^3}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3}{3n^3} = \dfrac{1}{3} < 1$. Отже, за ознакою Д'Аламбера ряд збіжний.

2) Тут $u_n=\dfrac{n!}{5^n}$, $u_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{5^{n+1}}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{(n+1)!}{5^{n+1}}\cdot\dfrac{5^n}{n!}=\dfrac{n+1}{5}$. Оскільки границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{5}=\infty>1$, то за ознакою Д'Аламбера ряд розбіжний.

3) $u_n=\dfrac{n^n}{n!}$, $u_{n+1}=\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$. Використаємо ознаку Д'Аламбера. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1=e>1.$$

Отже, ряд є розбіжним.

Теорема 10.10 (радикальна ознака Коші). Якщо для ряду з додатними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, то цей ряд збіжний при $l<1$ і розбіжний при $l>1$.

Приклад 10.6. Дослідити на збіжність ряди: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+3}{n+2}\right)^{2n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^n\dfrac{\pi}{n}$.

Розв'язання

1) Застосуємо радикальну ознаку Коші. Загальний член ряду

$$u_n=\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^{2n},\ \text{тоді}\ \sqrt[n]{u_n}=\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^{2n\cdot\frac{1}{n}}=\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^2,$$

отже

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^2=2^2=4>1.$$

За радикальною ознакою Коші ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+3}{n+2}\right)^{2n}$ є розбіжним. Зауважимо, що розбіжність даного ряду нескладно встановити за допомогою необхідної умови збіжності ($\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$), отже, ряд розбіжний.

2) Для даного ряду $u_n = \sin^n \frac{\pi}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n} = 0 < 1$. За радикальною ознакою Коші ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{n}$ є збіжним.

Теорема 10.11 (інтегральна ознака Коші). Нехай задано ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$, члени якого є значеннями неперервної, додатної і монотонно спадної функції $f(x)$ на проміжку $[1;+\infty)$. Тоді цей ряд збіжний, якщо збіжним є невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$, і розбіжний, якщо цей інтеграл є розбіжним.

Приклад 10.7. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+5}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

Розв’язання

1) Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Для цього візьмемо функцію $f(x) = \frac{2x}{x^2+5}$, $x \in [1;+\infty)$. Заданий ряд можна записати у вигляді: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+5} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2+5}dx = \lim_{M\to+\infty}\int\limits_{1}^{M}\frac{d\left(x^2+5\right)}{x^2+5}dx = \lim_{M\to+\infty}\ln\left(x^2+5\right)\Big|_1^M = +\infty.$$

Цей інтеграл є розбіжним, отже розбіжним є і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+5}$.

2) Застосовуючи інтегральну ознаку Коші, дослідимо на збіжність ряд Діріхле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, $x \in [1;+\infty)$. Розглянемо відповідний невласний інтеграл:

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \int\limits_{1}^{+\infty}x^{-\alpha}dx = \lim_{M\to+\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Bigg|_1^M = \begin{cases}0, \alpha > 1;\\ +\infty, \alpha < 1.\end{cases}$$

Отже, ряд Діріхле збігається при $\alpha > 1$ і він розбіжний при $\alpha < 1$. При $\alpha = 1$ інтеграл набуває вигляду:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{M \to +\infty} \ln|x| \Big|_1^M = +\infty .$$

Отже, при $\alpha = 1$ ряд Діріхле є розбіжним. Таким чином, цей ряд збігається при $\alpha > 1$ і є розбіжним при $\alpha \le 1$.

10.4. Ряди, у яких знаки членів строго чергуються. Ознака Лейбніца

Розглянемо ряд, знаки членів якого строго чергуються, тобто ряд, два довільні сусідні члени якого мають різні знаки:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n , \; u_n > 0, \quad n \in N .$$

Такі ряди називають знакопочережними. Такі ряди досліджуються на збіжність за допомогою наступної достатньої ознаки.

Теорема 10.12 (ознака Лейбніца). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ є збіжним, якщо $u_n > u_{n+1}$, $n \in N$ і $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. При цьому сума ряду додатна і не перевищує його першого члена.

Наслідок. Абсолютна похибка від заміни суми збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ його частинною сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто $|S - S_n| \le u_{n+1}$.

З цього наслідку випливає, що модуль n-го залишку r_n збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ не перевищує модуля $(n+1)$-го члена цього ряду, тобто $|r_n| \le u_{n+1}$. Дійсно, залишок збіжного ряду теж є збіжним рядом, знаки членів якого строго чергуються. При цьому з ознаки Лейбніца випливає, що абсолютна величина його суми не перевищує абсолютної величини його першого члена, тобто $\left|r_n\right| \le u_{n+1}$. Ця властивість широко використовується при наближених обчисленнях.

Приклад 10.8. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}.$$

Скільки потрібно взяти членів цього ряду, щоб знайти його суму з точністю до 0,001?

Розв'язання

Оскільки заданий ряд є знакопочережним, для його дослідження на збіжність застосуємо ознаку Лейбніца. Тут $u_n = \frac{1}{2n+1}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)+1} = \frac{1}{2n+3}$,

$u_n > u_{n+1}$, $n \in N$. Крім того, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$. Умови ознаки Лейбніца виконуються, тому даний ряд є збіжним.

Число n_0 членів ряду, які потрібно взяти, щоб отримати його суму з точністю до 0,001, знайдемо з умови $u_{n+1} < 0{,}001$, тобто $\frac{1}{2n+3} < \frac{1}{1000}$, або $2n+3 > 1000 \Rightarrow n > 498{,}5$. Оскільки $n \in N$, то достатньо взяти $n_0 = 499$ членів.

10.5. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжності

Ряд називають знакозмінним, якщо серед його членів є як від'ємні, так і додатні.

Розглянемо довільний знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, де числа u_n можуть мати довільний знак. Поряд з цим розглянемо ряд, утворений з модулів членів цього ряду, тобто ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|u_n\right|.$$

Для знакозмінних рядів справедлива наступна ознака збіжності.

Теорема 10.13. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ є збіжним, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

З цієї теореми випливає, що при дослідженні на збіжність знакозмінних рядів можна користуватися ознаками збіжності рядів з додатними членами.

Приклад 10.9. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^2}$.

Розв’язання

Даний ряд є знакозмінним, оскільки знаки його членів залежать від знаку виразу $\cos n\alpha$. Складемо ряд з модулів членів заданого ряду. Отримуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n\alpha|}{n^2}$. Оскільки $|\cos n\alpha|\le 1$, то $\frac{|\cos n\alpha|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ є збіжним (ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha=2>1$), то за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n\alpha|}{n^2}$ є збіжним. За вказаною теоремою збіжним є і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^2}$.

Знакозмінний ряд називають абсолютно збіжним, якщо збіжним є ряд, складений з модулів його членів.

Якщо знакозмінний ряд є збіжним, а ряд, складений з модулів його членів розбігається, то такий ряд називають умовно збіжним.

Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^2}$ є абсолютно збіжним, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ – умовно збіжний.

10.6. Функціональні ряди. Поняття рівномірної збіжності

Розглянемо ряди, членами яких є не числа, а функції, визначені на деякій числовій множині D: $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.

Якщо взяти деяке число $x_0 \in D$ і у функціональному ряді $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ покласти $x = x_0$, то отримаємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Цей ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. Якщо він збіжний, то точку x_0 називають точкою збіжності функціонального ряду. Якщо ж ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ є розбіжним, то x_0 – точка розбіжності функціонального ряду. Множину всіх точок збіжності функціонального ряду називають його областю збіжності.

Частинна сума функціонального ряду є функцією від x і визначається за аналогією з частинною сумою числового ряду:

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

У кожній точці x, що належить області збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, існує скінченна границя $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, яку називають сумою функціонального ряду: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Приклад 10.10. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$.

Розв’язання

Кожний член ряду визначений при будь-якому x. На цій множині ряд є сумою членів геометричної прогресії, знаменник якої дорівнює $\frac{1}{x}$. Тому цей ряд є збіжним, якщо $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} < 1$. Звідси $|x| > 1$, або $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Ця множина є областю збіжності даного функціонального ряду.

Сума функціонального ряду $S(x)$ визначена у області збіжності функціонального ряду. Якщо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збіжний до функції

$S(x)$, то різницю $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ називають n-м залишком функціонального ряду: $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$. Для всіх значень x з області збіжності функціонального ряду $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Відомо, що сума скінченного числа неперервних функцій є неперервною. Крім того, суму скінченного числа доданків можна почленно диференціювати та інтегрувати. Проте ці властивості не завжди виконуються для сум нескінченного числа функцій, тобто для функціональних рядів, але вони зберігаються для рівномірно збіжних функціональних рядів.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називають рівномірно збіжним на множині D, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $N = N(\varepsilon)$, яке залежить лише від ε і не залежить від x, що для всіх $n > N$ і для всіх $x \in D$ виконується нерівність $|r_n(x)| < \varepsilon$.

Рівномірна збіжність функціонального ряду означає, що його суму $S(x)$ на множині D можна наближено, з наперед заданою точністю замінити однією й тією ж самою частинною сумою $S_n(x)$ незалежно від значення $x \in D$.

Рівномірно збіжні функціональні ряди мають важливі властивості, основні з яких сформулюємо тут без доведення.

1. Сума членів рівномірно збіжного на деякому проміжку ряду неперервних функцій є функцією, неперервною на цьому проміжку.

2. Якщо на відрізку $[a;b]$ функціональний ряд рівномірно збіжний і члени ряду неперервні на цьому відрізку, то його можна почленно інтегрувати у межах від α до β, де $[\alpha;\beta] \subset [a;b]$, тобто

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)\, dx .$$

3. Якщо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збіжний на відрізку $[a;b]$, а його члени мають неперервні похідні $u_n'(x)$, $x \in [a;b]$, причому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ рівномірно збіжний на $[a;b]$, то заданий ряд можна почленно диференціювати, тобто

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),\ x \in [a;b].$$

Для дослідження функціонального ряду на рівномірну збіжність використовують наступну достатню умову рівномірної збіжності.

Теорема 10.14 (теорема Вейєрштрасса). Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ є абсолютно та рівномірно збіжним на відрізку $[a;b]$, якщо існує знакододатний збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, такий, що $|u_n(x)| \le a_n$ при будь-якому $x \in [a;\, b]$ і $n \in N$.

При цьому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають мажорантним для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Приклад 10.11. Дослідити на рівномірну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$.

Розв’язання

Використаємо ознаку Вейєрштрасса. Оскільки $|\sin nx| \le 1$, то $\left|\frac{\sin nx}{n!}\right| \le \frac{1}{n!}$. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Дослідимо його на збіжність, використавши ознаку Д’Аламбера. Нехай $u_n = \frac{1}{n!}$, тоді $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$. Отже, за ознакою Д’Аламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ є збіжним. Він є мажорантним для заданого ряду. Тому, за ознакою Вейєрштрасса, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$ є рівномірно збіжним.

Приклад 10.12. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, $|x|<q$, $0<q<1$.

Розв’язання

При $|x|<q$, $0<q<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ за ознакою Вейєрштрасса є рівномірно збіжним, оскільки при цих значеннях x $|u_n(x)|=|x^{n-1}|<q^{n-1}$, а знакододатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$ збігається як сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії. Тому за властивістю рівномірно збіжних рядів його можна почленно інтегрувати у межах від 0 до x, $x\in[-q;q]$. Сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$. Тоді маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\right)dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x),\ |x|<q.$$

10.7. Степеневі ряди.
Інтервал та радіус збіжності степеневого ряду

Степеневим рядом називають ряд виду

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

де a_0, $a_1,\ldots$, $a_n,\ldots$ – дійсні числа, які називають коефіцієнтами степеневого ряду.

Степеневим рядом за степенями $(x-x_0)$ називають функціональний ряд, що має вигляд:

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n .$$

Всякий степеневий ряд є збіжним у точці $x=0$ і його сума $S=a_0$. Тому область збіжності такого ряду завжди містить хоча б одну точку. Область збіжності ряду можна визначити за допомогою теореми Абеля.

Теорема 10.15 (теорема Абеля). Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ є збіжним при $x=x_0 \neq 0$, то він є абсолютно збіжним для всіх значень x, що задовольняють нерівності $|x|<|x_0|$. Якщо при $x=x_1$ цей ряд розбіжний, то він розбіжний всюди, де $|x|>|x_1|$.

Теорема Абеля характеризує множини точок збіжності та розбіжності степеневого ряду. Якщо x_0 – точка збіжності ряду, то всі точки інтервалу $(-|x_0|;|x_0|)$ є точками абсолютної збіжності цього ряду. Якщо x_1 є точкою розбіжності для степеневого ряду, то множина $|x|>|x_1|$, тобто $(-\infty;-|x_1|)\cup(|x_1|;+\infty)$ є множиною точок розбіжності цього ряду.

Отже, для області збіжності степеневого ряду можливі три випадки: 1) ряд збіжний лише у точці $x=0$; 2) ряд збіжний при будь-якому x; 3) існує скінченне число $R>0$, що при $|x|<R$ ряд збігається, а при $|x|>R$ – розбігається. Число R називають радіусом збіжності степеневого ряду, а інтервал $(-R;R)$ – його інтервалом збіжності.

Визначимо величину радіуса збіжності R степеневого ряду. Для цього складемо ряд з модулів його членів, тобто ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$. Нехай $u_n = |a_n x^n|$. За ознакою Д'Аламбера останній ряд є збіжним, якщо $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L < 1$. Тоді $L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| < 1$. Звідси $|x| < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ – інтервал збіжності степеневого ряду, тоді його радіус збіжності можна визначити за формулою:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Аналогічним чином, використовуючи радикальну ознаку Коші, можна отримати іншу формулу для визначення радіуса збіжності степеневого ряду:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Якщо отримуємо $R=+\infty$, то степеневий ряд є абсолютно збіжним на всій числовій прямій, при $R=0$ область збіжності степеневого ряду складається з єдиної точки – $x=0$.

Питання про збіжність степеневого ряду при $x=\pm R$ вирішується для кожного ряду окремо. Таким чином, до області збіжності степеневого ряду входить його інтервал збіжності $(-R;R)$, до якого можуть бути приєднані точки $x=\pm R$. Збіжність ряду для кожної з цих точок потребує окремого дослідження.

Приклад 10.13. Знайти області збіжності наступних рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nx)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2+2}$.

Розв'язання

1) Знайдемо радіус та інтервал збіжності даного степеневого ряду. За формулою маємо:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n+1)!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Звідси випливає, що інтервалом збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ є вся числова пряма, ряд збігається при будь-якому *x*.

2) Для даного ряду $a_n=n^n$. Виходячи з вигляду коефіцієнта ряду a_n, для знаходження радіуса збіжності виберемо формулу, згідно з якою $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Оскільки радіус збіжності ряду $R=0$, то цей степеневий ряд має єдину точку збіжності – $x=0$.

3) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}:\frac{1}{2(n+1)+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}=1$. Отже, радіус збіжності даного ряду $R=1$, а інтервал збіжності – $(-1;1)$. Дослідимо збіжність ряду на кінцях цього інтервалу. При $x=-1$ отримуємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$. Цей ряд є знакопочережним, тому для дослідження його на збіжність можна застосувати ознаку Лейбніца. Послідовність $\left\{\frac{1}{2n+1}\right\}$ є монотонно спадною, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$. За ознакою Лейбніца ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ збігається, тому $x=-1$ є точкою збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}$.

Перевіримо на збіжність цей ряд при $x=1$. Отримуємо числовий ряд з додатними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$. Він є розбіжним за граничною ознакою порівняння (для порівняння вибираємо гармонійний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$). Таким чином, областю збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}$ є проміжок $[-1;1)$.

Для дослідження на збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2+2}$ знайдемо його радіус збіжності:

$$a_n=\frac{1}{n^2+2},\ a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2+2}.$$

За формулою маємо:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+2}:\frac{1}{(n+1)^2+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+2}{n^2+2}=1.$$

Отже, інтервал збіжності ряду $(x_0 - R; x_0 + R)$ – $(-3-1; -3+1) = (-4; -2)$.

При $x = -4$ отримуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2}$. Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$, складений з модулів членів даного ряду, є збіжним за ознакою порівняння (порівнюємо з рядом Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2}$ є абсолютно збіжним і точка $x = -4$ є точкою збіжності степеневого ряду. При $x = -2$ отримуємо збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$, тому $x = -2$ також є точкою збіжності. Отже, областю збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2+2}$ є відрізок $[-4; -2]$.

10.8. Властивості степеневих рядів

Теорема 10.16. Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ є абсолютно та рівномірно збіжним на будь-якому відрізку $[-\rho; \rho]$, який цілком міститься у інтервалі збіжності $(-R; R)$.

Теорема 10.17. Сума степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ є неперервною всередині його інтервалу збіжності.

Теорема 10.18. Якщо відрізок $[\alpha; \beta]$ знаходиться всередині інтервалу збіжності $(-R; R)$ степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то на відрізку $[\alpha; \beta]$ даний ряд можна почленно інтегрувати.

Зокрема, якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ інтегрувати на відрізку $[0; x]$, де $|x| < R$, то в результаті отримаємо степеневий ряд, що має той же інтервал збіжності, що і вихідний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. При цьому, якщо $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$, то сума ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x S(t)\,dt$.

Теорема 10.19. Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ має інтервал збіжності $(-R; R)$, то ряд, утворений диференціюванням даного ряду, має той самий інтервал збіжності $(-R; R)$, при цьому, якщо $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$, то $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$, $x \in (-R; R)$.

Сформульовані властивості степеневих рядів широко використовуються при їх дослідженні та знаходженні їх сум.

10.9. Ряд Тейлора

Нехай задано деяку функцію $f(x)$. З'ясуємо, за яких умов її можна подати у вигляді степеневого ряду і як знайти цей ряд.

Нехай функція $f(x)$ у інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ є сумою степеневого ряду:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots.$$

У цьому випадку кажуть, що функція $f(x)$ розвинена у степеневий ряд у околі точки x_0 або за степенями $(x - x_0)$. Такий ряд називають розвиненням функції $f(x)$ у степеневий ряд за степенями $(x - x_0)$.

Знайдемо коефіцієнти розвинення. Для цього, згідно з теоремою 10.9, ми можемо послідовно диференціювати його, а у знайдені похідні підставлятимемо значення $x = x_0$. Отримуємо:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots,\ f(x_0) = a_0;$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots,\ f'(x_0) = a_1;$$

$$f''(x) = 2a_2 + \ldots + n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-2} + \ldots,\ f''(x_0) = 2a_2;$$

....

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1+\ldots,\quad f^{(n)}(x_0)=a_n.$$

Звідси знаходимо коефіцієнти розвинення функції $f(x)$ у степеневий ряд за степенями $(x-x_0)$:

$$a_0=f(x_0),\ a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ldots,a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ldots.$$

Підставивши значення цих коефіцієнтів у ряд, отримуємо:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

називають рядом Тейлора функції $f(x)$. Тут під похідною нульового порядку розуміють саму функцію.

10.10. Розвинення елементарних функцій у ряд Маклорена

Рядом Маклорена функції $f(x)$ називають її ряд Тейлора за степенями x:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Ряди Маклорена деяких елементарних функцій, що найчастіше використовуються на практиці:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in(-\infty;+\infty);$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in(-\infty;+\infty);$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ x \in (-\infty; +\infty);$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!} x^n, \quad m \in N,\ x \in (-1;1);$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ x \in (-1;1);$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},\ x \in (-1;1].$$

Приклад 10.14. Розвинути у ряд Маклорена функцію $f(x) = x\ln(1-x^3)$.

Розв'язання

Використаємо розвинення у ряд Маклорена функції $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},\ x \in (-1;1].$$

Підставивши сюди замість x $-x^3$, отримаємо:

$$\ln(1-x^3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-x^3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-1)^n x^{3n}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n}.$$

Це розвинення має місце, якщо $-x^3 \in (-1;1]$, тобто $x \in [-1;1)$. Для цих значень x отримуємо:

$$f(x) = x\ln(1-x^3) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n},\ x \in [-1;1).$$

Приклад 10.15. Розвинути у ряд Маклорена функцію $f(x) = \arcsin x$.

Розв'язання

Оскільки $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, то спочатку побудуємо біноміальний ряд для функції $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Використаємо ряд:

$$\left(1+x\right)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m\left(m-1\right)\left(m-2\right)...\left(m-n+1\right)}{n!}x^n,\quad m\in N,\ x\in\left(-1;1\right).$$

Візьмемо тут $m=-\frac{1}{2}$ та замінимо x на $-x^2$. При $-x^2\in\left(-1;1\right)$ $x\in\left(-1;1\right)$. Для $x\in\left(-1;1\right)$ отримаємо:

$$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)...\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(-1\right)^n x^{2n}=$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot\left(2n-1\right)\cdot\left(-1\right)^n}{2^n\cdot n!}\left(-1\right)^n x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2n-1\right)!!}{2^n\cdot n!}x^{2n}.$$

Далі інтегруємо отриманий ряд у межах від 0 до x і знаходимо ряд Маклорена для заданої функції $f\left(x\right)=\arcsin x$:

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2n-1\right)!!}{2^n\cdot n!\cdot\left(2n+1\right)}x^{2n+1},\ x\in\left(-1;1\right).$$

При цьому ми врахували, що почленне інтегрування не змінює інтервалу збіжності степеневого ряду. Можна довести, що отриманий ряд збігається і на межах інтервалу збіжності – у точках $x=\pm1$ до відповідних значень функції $\arcsin x$.

10.11. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

Приклад 10.16. Обчислити з точністю до 0,001 значення $\sin 18^\circ$.

Розв’язання

Використаємо ряд Маклорена для $\sin x$: $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}$, $x\in\left(-\infty;+\infty\right)$. При $x=18^\circ=\frac{\pi}{10}$ отримаємо: $\sin\frac{\pi}{10}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\pi^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!\cdot10^{2n+1}}$. Це знакопочережний ряд, тому $\left|r_n\left(\frac{\pi}{10}\right)\right| < \left|u_{n+1}\left(\frac{\pi}{10}\right)\right| = \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!\cdot 10^{2n+1}}$. Нерівність $\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!\cdot 10^{2n+1}} < 0{,}001$ виконується вже при $n = 2$, тому для досягнення заданої точності достатньо взяти суму $u_0 + u_1$: $\sin\frac{\pi}{10} \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{6\cdot 1000} \approx 0{,}309$.

Приклад 10.17. Обчислити з точністю до 0,001 число e.

Розв'язання

Застосуємо ряд: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Підставивши сюди $x = 1$, отримуємо ряд з додатними членами: $e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$. Оцінимо n-й залишок цього ряду:

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \frac{1}{(n+4)!} + \ldots = \frac{1}{(n+1)!}\times$$
$$\times\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \ldots\right) < \frac{1}{(n+1)!}\times$$
$$\times\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!\cdot n}.$$

Безпосередньою перевіркою впевнюємося у тому, що нерівність $\frac{1}{n!\cdot n} < 0{,}001$ при $n \geq 6$, тому для досягнення заданої точності 0,001 достатньо взяти частинну суму ряду S_5: $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \approx 2{,}717$.

Приклад 10.18. Обчислити з точністю до 0,001 інтеграл $\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx$.

Розв'язання

Первісна підінтегральної функції $f(x) = e^{-x^2}$ не виражається скінченним числом елементарних функцій, тому для обчислення заданого інтегралу представимо e^{-x^2} у вигляді степеневого ряду (ряду Маклорена), для чого використаємо ряд: $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $x\in(-\infty;+\infty)$. Підставивши сюди замість x $-x^2$, отримаємо:

$$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!},\ x\in(-\infty;+\infty).$$

Інтегруємо цей ряд почленно у межах від 0 до $\frac{1}{3}$. Маємо:

$$\int_0^{1/3}e^{-x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{1/3}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\cdot(2n+1)}\Bigg|_0^{\frac{1}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\cdot(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}.$$

Отримали збіжний знакопочережний ряд. Знайдемо кількість n членів цього ряду, які потрібно скласти, щоб отримати суму ряду з точністю до $0{,}001$.

За ознакою Лейбніца $|r_n|<|u_{n+1}|<\frac{1}{n!\cdot(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}<0{,}001$. Послідовно підставляючи у цю нерівність значення $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, отримуємо, що ця нерівність виконується вже при $n=2$. Отже, для досягнення заданої точності достатньо додати u_0 та u_1:

$$\int_0^{1/3}e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{3}-\frac{1}{1!\cdot 3\cdot 3^3}\approx 0{,}321.$$

10.12. Тригонометричний ряд Фур'є

Ряд виду

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+a_n\cos nx+$$
$$+b_n\sin nx+\ldots=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx.$$

називають тригонометричним рядом, а дійсні числа a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2, 3, ...,$ – коефіцієнтами тригонометричного ряду.

Припустимо, що ряд на відрізку $[-\pi; \pi]$ рівномірно збігається до функції $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx .$$

Оскільки члени цього ряду є неперервними функціями, а ряд рівномірно збігається, то його сума також є неперервною функцією. Проінтегрувавши почленно ряд по відрізку $[-\pi;\pi]$, отримаємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nxdx\right), \text{ де}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx ;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx ;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx , \ n \in N.$$

Числа a_0, a_n, b_n називають коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$. Тригонометричний ряд, коефіцієнтами якого є коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, називають рядом Фур'є цієї функції і позначають:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. .$$

Приклад 10.19. Розвинути у ряд Фур'є 2π – періодичну функцію $f(x) = \pi + x$, $x \in (-\pi;\pi]$.

Розв'язання

Знайдемо коефіцієнти Фур'є цієї функції. Отримуємо:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left.\frac{(\pi+x)^2}{2}\right|_{-\pi}^{\pi}=2\pi .$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\cos nxdx=\left\|\begin{matrix}u=x+\pi,\ dv=\cos nxdx,\\ du=dx,\ v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{\pi n}(x+\pi)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=0.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\sin nxdx=\left\|\begin{matrix}u=x+\pi,\ dv=\sin nxdx,\\ du=dx,\ v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right\|=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}(x+\pi)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=-\frac{2\pi(-1)^n}{n\pi}=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у ряд, отримаємо:

$$f(x)=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx .$$

Ця рівність виконується для всіх точок неперервності заданої функції, тобто при $x\neq\pm(2n-1)\pi$, $n\in N$. У точках $x=\pm(2n-1)\pi$ сума ряду Фур'є дорівнює півсумі односторонніх границь у цих точках, тобто π.

Ряд Фур'є для парних та непарних функцій

Нехай функція $f(x)$ є парною. У цьому випадку $\int_{-l}^{l}f(x)dx=2\int_{0}^{l}f(x)dx$.

Якщо $f(x)$ – непарна, то $\int_{-l}^{l}f(x)dx=0$. Тому ряд Фур'є для парної функції містить її розвинення лише за косинусами, тобто

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx ,$$

де $a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx$.

Якщо $f\left(x\right)$ – непарна, то отримуємо ряд за синусами:

$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

де $b_n=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f\left(x\right)\sin nxdx$.

Приклад 10.20. Розвинути у ряд Фур'є на $\left[-\pi;\pi\right]$ функцію $f\left(x\right)=\left|x\right|$.

Розв'язання

Оскільки $f\left(x\right)=\left|x\right|$ є парною, то її ряд Фур'є на $\left[-\pi;\pi\right]$ матиме вигляд $f\left(x\right)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$. Знайдемо коефіцієнти цього ряду.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left|x\right|dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\pi}=\pi;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left|x\right|\cos nxdxdx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x\cos nxdx=\begin{Vmatrix}u=x,\, dv=\cos nxdx,\\ du=dx,\, v=\dfrac{1}{n}\sin nx\end{Vmatrix}=\frac{2x\sin nx}{n\pi}\Bigg|_0^{\pi}-$$
$$-\frac{2}{n\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin nxdx=\frac{2}{n^2\pi}\cdot\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}\left(\cos n\pi-1\right)=\frac{2}{n^2\pi}\left(\left(-1\right)^n-1\right).$$

Тут ми використали рівність $\cos n\pi=\left(-1\right)^n$. Враховуючи, що при парних значеннях $n=2m$ $\left(-1\right)^n-1=0$ і $a_{2m}=0$, отримуємо розвинення функції $f\left(x\right)=\left|x\right|$ у ряд Фур'є за косинусами на відрізку $\left[-\pi;\pi\right]$:

$$f\left(x\right)=\left|x\right|=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n-1}{n^2}\cos nx=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2m-1\right)x}{\left(2m-1\right)^2}.$$

Приклад 10.21. Розвинути у ряд Фур'є на $\left[-\pi;\pi\right]$ 2π – періодичну функцію $f\left(x\right)=\mathrm{sign}x$.

Розв'язання

Функція $f\left(x\right)=\mathrm{sign}x=\begin{cases}-1,\ x<0;\\ 0,\ x=0;\\ 1,\ x>0.\end{cases}$

Оскільки ця функція є непарною, то її розвинення у ряд Фур’є на $\left[-\pi;\pi\right]$ є рядом $f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, за синусами, тому його коефіцієнти мають вигляд:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f\left(x\right)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=-\frac{2}{n\pi}\cdot\cos nx\Big|_0^{\pi}=-\frac{2}{n\pi}\left(\left(-1\right)^n-1\right).$$

При парних значеннях $n=2m$ $b_{2m}=0$, для непарних $n=2m-1$ коефіцієнти $b_{2m-1}=\frac{4}{\left(2m-1\right)\pi}$, тому шуканий ряд Фур’є для функції $f\left(x\right)=\mathrm{sign}x$ має вигляд:

$$f\left(x\right)=\mathrm{sign}x=\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2m-1\right)x}{\left(2m-1\right)}.$$

Зауважимо, що у точках $x=\pm\pi$ та $x=0$ сума даного ряду дорівнює нулю.

Ряд Фур’є для функції з довільним періодом

Ряд

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),\ a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)\cos\frac{n\pi}{l}x\cdot dx,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot dx,\quad n\in N$$

є рядом Фур’є для функції $f\left(x\right)$, періодичної з періодом $2l$.

Приклад 10.22. Знайти розвинення у ряд Фур’є на відрізку $\left[-1;1\right]$ функції $f\left(x\right)=x$, $x\in\left[-1;1\right]$, періодичної з періодом 2.

Розв’язання

Знайдемо коефіцієнти розвинення при $l=1$. Оскільки дана функція є непарною, то її ряд Фур’є є рядом по синусам:

$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Знайдемо коефіцієнти b_n:

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot dx = 2\int_0^1 x\sin n\pi x\cdot dx = \left\| \begin{array}{l} u = x,\ dv = \sin n\pi x\cdot dx, \\ du = dx,\ v = -\dfrac{1}{n\pi}\cos n\pi x \end{array} \right\| =$$

$$= -\frac{2x}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\cdot dx = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_0^1 = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти у ряд, отримуємо:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x\,.$$

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ
ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Завдання 1.1. Обчислення, властивості визначників

Обчислити $\det A$, $\det B$, $\det AB$, $\det BA$.

Довести, що $\det AB = \det BA = \det A \cdot \det B$. Обчислити $\det A$, $\det B$: за теоремою про розкладання за довільним рядком (стовпцем); шляхом занулення елементів довільного рядка (стовпця).

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$;

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -7 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

10. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

11. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

12. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$;

13. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -4 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$;

14. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & -2 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 6\\ 1 & -2 & -1\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

15. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -4 & -3\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$;

16. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -4 & -5\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 4 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 7\end{pmatrix}$;

17. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -1\\ 1 & 6 & 2\end{pmatrix}$;

18. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 1 & -3 & -1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$;

19. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$;

20. $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

21. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -8 & -1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 6 & 2\end{pmatrix}$;

22. $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$;

23. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$;

24. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 1 & -2 & -1\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 6 & -5 & -1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$;

25. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ 1 & -2 & -1\\ 0 & 6 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & 1\\ 6 & -5 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

26. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ 3 & -2 & -1\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 0 & -5 & -1\\ 1 & 6 & 3\end{pmatrix}$;

27. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 0 & -2 & -1\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$;

28. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ 0 & 6 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & 8\\ 6 & -5 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

29. $A=\begin{pmatrix}1 & 6 & -3\\ 3 & -2 & -1\\ 4 & 3 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 0 & -5 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

30. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -2\\ 3 & -6 & -1\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & -6 & -1\\ 1 & 6 & 3\end{pmatrix}$;

31. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 4\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$;

32. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 3 & 0 & -2\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 4\\ 1 & -6 & -1\\ 1 & 7 & 2\end{pmatrix}$;

33. $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -2\\ 3 & 5 & 6\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & -7 & -1\\ 1 & 0 & 6\end{pmatrix}$;

34. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 7 & 5\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$;

35. $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -2\\ 3 & 5 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -8 & -1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$; 36. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & -7 & -1\\ 3 & 6 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & 1\\ 1 & -4 & -1\\ 0 & 7 & 3\end{pmatrix}$;

37. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 8 & -1\\ 4 & 7 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & 3\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$; 38. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -6 & -1\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 5 & 4 & 7\end{pmatrix}$;

39. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 4 & -6 & -1\\ 2 & 8 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 4\\ 4 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 9\end{pmatrix}$; 40. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 8\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 7 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 9 & 4 & 0\end{pmatrix}$;

41. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -8\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 7 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 6 & 1\\ 1 & -4 & -1\\ 1 & 9 & 2\end{pmatrix}$; 42. $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & -7 & -1\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 9 & 4 & 6\end{pmatrix}$;

43. $A=\begin{pmatrix}7 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 9 & 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -6 & 1\\ 1 & -7 & -1\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$; 44. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & -8 & -1\\ 1 & 9 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 6\\ 1 & -2 & -1\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

45. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -4 & -3\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & -5 & -1\\ 1 & 9 & 2\end{pmatrix}$; 46. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -9 & -5\\ 2 & 7 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 4 & -2 & -1\\ 1 & 8 & 5\end{pmatrix}$;

47. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 8 & -2 & -1\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -9 & -1\\ 1 & 6 & 2\end{pmatrix}$; 48. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 8 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & -3 & -1\\ 1 & 6 & 4\end{pmatrix}$;

49. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & 8 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -7 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$; 50. $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 2\\ 1 & -7 & -1\\ 2 & 6 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -7 & -1\\ 1 & 9 & 3\end{pmatrix}$;

51. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -8 & -1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 6 & 2\end{pmatrix}$; 52. $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -6 & -1\\ 1 & 9 & 4\end{pmatrix}$;

53. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 1 & -8 & -1\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & -8 & -4\end{pmatrix}$; 54. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 1 & -2 & -1\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 6 & -5 & -1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$;

55. $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & -3\\ 1 & -2 & -1\\ 9 & 6 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & 1\\ 6 & -5 & -1\\ 1 & 7 & 9\end{pmatrix}$; 56. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ 3 & -2 & -1\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 0 & -5 & -1\\ 1 & 6 & 3\end{pmatrix}$;

57. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$; 58. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 6 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

59. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -9 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$; 60. $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & -6 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$;

61. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -7 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -9 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 62. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -8 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

63. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -7 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; 64. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$;

65. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 66. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

67. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; 68. $A=\begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

69. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$; 70. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$;

71. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; 72. $A=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -3 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$;

73. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -9 & -5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$; 74. $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 9 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -1 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$;

75. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$; 76. $A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -9 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

77. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & -9 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -7 & -1 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$; 78. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & -5 & -1 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$;

79. $A=\begin{pmatrix}2 & 8 & 2\\ 1 & -5 & -1\\ 0 & 9 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 1 & -6 & -1\\ 1 & 7 & 4\end{pmatrix}$; 80. $A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 4 & -8 & -1\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ 1 & -9 & -1\\ 1 & -7 & -4\end{pmatrix}$;

81. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 6 & -2 & -1\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 5\\ 6 & -9 & -1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$; 82. $A=\begin{pmatrix}4 & 6 & -3\\ 1 & -2 & -1\\ 9 & 6 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & 1\\ 6 & -4 & -1\\ 1 & 5 & 9\end{pmatrix}$;

83. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -8 & -1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 6 & 2\end{pmatrix}$; 84. $A=\begin{pmatrix}2 & 9 & 7\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & -6\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$;

85. $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 2\\ 3 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & 7 & 3\end{pmatrix}$; 86. $A=\begin{pmatrix}1 & 9 & -3\\ 6 & -2 & -1\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 6 & -5 & -1\\ 1 & 7 & 3\end{pmatrix}$;

87. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 7\\ 1 & -2 & -1\\ 6 & 7 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & 4 & 1\\ 6 & -7 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$; 88. $A=\begin{pmatrix}1 & 8 & -3\\ 3 & -6 & -1\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 0 & -5 & -1\\ 1 & 9 & 3\end{pmatrix}$;

89. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 0 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 0 & -2 & -1\\ 1 & 9 & 3\end{pmatrix}$; 90. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -1\\ 4 & -2 & -1\\ 8 & 6 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 9 & 8\\ 6 & -5 & -1\\ 1 & 7 & 3\end{pmatrix}$;

91. $A=\begin{pmatrix}1 & 7 & -3\\ 3 & -2 & -1\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 9 & 1\\ 0 & -5 & -1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$; 92. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 3 & -6 & -1\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 9\\ 2 & -6 & -1\\ 1 & 8 & 3\end{pmatrix}$;

93. $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 7 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 4\\ 0 & -2 & -1\\ 9 & 3 & 3\end{pmatrix}$; 94. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -9\\ 3 & 0 & -2\\ 4 & 8 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 7 & 8\\ 1 & -6 & -1\\ 1 & 7 & 2\end{pmatrix}$;

95. $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -2\\ 3 & 7 & 6\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -7 & -1\\ 1 & 9 & 6\end{pmatrix}$; 96. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & 4 & 8\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 3 & 5\\ 1 & -9 & -1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$;

97. $A=\begin{pmatrix}2 & 7 & -2\\ 3 & 5 & 1\\ 6 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 9 & 1\\ 1 & -8 & -1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$; 98. $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 4 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 1 & -9 & -1\\ 1 & 7 & 3\end{pmatrix}$;

99. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 6 & -2 & -1\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 6 & -8 & -1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$; 100. $A=\begin{pmatrix}9 & 6 & 7\\ 1 & -2 & -1\\ 8 & 7 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 7 & 1\\ 6 & -9 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. Теорія лінійних алгебраїчних рівнянь

Дано систему лінійних рівнянь $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$.

Розв'язати задану систему трьома методами:

1) методом Гауса;
2) методом Крамера;
3) матричним методом.

1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20; \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31; \\ 4x_1 + 11x_3 = -43; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31; \\ 45x_1 + x_2 + 2x_3 = 20; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -2; \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 10; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -12. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 13; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 13; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -10; \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -4; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1; \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -7; \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4; \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 11. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4; \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 22; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 21; \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -16; \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 41. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4; \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2; \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2; \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20; \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 11; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$

31. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5; \\ 2x_1+3x_2+x_3=1; \\ 2x_1+x_2+3x_3=11. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6; \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20; \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6. \end{cases}$

33. $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3=9; \\ 2x_1+5x_2-3x_3=4; \\ 5x_1+6x_2-2x_3=18. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1; \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4; \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$

35. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4; \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11; \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$

36. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=8; \\ 2x_1-x_2-3x_3=-4; \\ x_1+5x_2+x_3=0. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1; \\ 8x_1+3x_2-6x_3=2; \\ 4x_1+x_2-3x_3=3. \end{cases}$

38. $\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=-3; \\ 3x_1+x_2+x_3=5; \\ 3x_1-5x_2-6x_3=-9. \end{cases}$

39. $\begin{cases} 7x_1-5x_2=31; \\ 4x_1+11x_3=-43; \\ 2x_1+3x_2+4x_3=-20. \end{cases}$

40. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31; \\ 45x_1+x_2+2x_3=20; \\ 3x_1-x_2+x_3=9. \end{cases}$

41. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=-1; \\ x_1-x_2-x_3=3; \\ x_1+2x_2-x_3=-3. \end{cases}$

42. $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=-2; \\ 5x_1-x_2-x_3=10; \\ x_1-x_2+5x_3=-12. \end{cases}$

43. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0; \\ x_1-x_2-3x_3=13; \\ 3x_1-2x_2+4x_3=-15. \end{cases}$

44. $\begin{cases} x_1+3x_2-3x_3=13; \\ 2x_1-3x_2+3x_3=-10; \\ x_1+x_3=0. \end{cases}$

45. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=-4; \\ 3x_1+x_2-x_3=-1; \\ 4x_1-2x_2+3x_3=-7. \end{cases}$

46. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3=-7; \\ x_1+x_2+x_3-4; \\ 5x_1+3x_2-4x_3=11. \end{cases}$

47. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3=-4; \\ 3x_1+2x_2+5x_3=22; \\ x_1-x_2+x_3=2. \end{cases}$

48. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=5; \\ x_1+3x_2+4x_3=6; \\ 2x_1-x_2-x_3=1. \end{cases}$

49. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

50. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

51. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

52. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

53. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 21; \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -16; \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 41. \end{cases}$

54. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4; \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2; \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

55. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

56. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

57. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

58. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2; \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

59. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20; \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

60. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 11; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$

61. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

62. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20; \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

63. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

64. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

65. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

66. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

67. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

68. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$

69. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31; \\ 4x_1 + 11x_3 = -43; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$

70. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31; \\ 45x_1 + x_2 + 2x_3 = 20; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

71. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

72. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -2; \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 10; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -12. \end{cases}$

73. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 13; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15. \end{cases}$

74. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 13; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -10; \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$

75. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -4; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1; \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$

76. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -7; \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4; \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 11. \end{cases}$

77. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4; \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 22; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

78. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

79. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

80. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

81. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

82. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

83. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 21; \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -16; \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 41. \end{cases}$

84. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4; \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2; \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

85. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

86. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

87. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

88. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2; \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

89. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20; \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

90. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 11; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$

91. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

92. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20; \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

93. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

94. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

95. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

96. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

97. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

98. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$

99. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31; \\ 4x_1 + 11x_3 = -43; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$

100. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31; \\ 45x_1 + x_2 + 2x_3 = 20; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

Завдання 2.1. Поняття базису простору

Перевірити чи вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, утворюють базис в просторі, якщо «так», то розкласти вектор $\bar{d}$ у цьому базисі.

1. $\bar{a}=\{3,-2,1\}$, $\bar{в}=\{2,-1,3\}$, $\bar{c}=\{-1,3,4\}$, $\bar{d}=\{5,6,7\}$;

2. $\bar{a}=\{1,-1,2\}$, $\bar{в}=\{2,1,-1\}$, $\bar{c}=\{3,0.-1\}$, $\bar{d}=\{3,7,10\}$;

3. $\bar{a}=\{2,4,-1\}$, $\bar{в}=\{-1,2,2\}$, $\bar{c}=\{2,3,0\}$, $\bar{d}=\{5,7,-3\}$;

4. $\bar{a}=\{-2,3,1\}$, $\bar{в}=\{3,2,-4\}$, $\bar{c}=\{-1,2,0\}$, $\bar{d}=\{6,3,-1\}$;

5. $\bar{a}=\{2,4,-3\}$, $\bar{в}=\{-3,1,-2\}$, $\bar{c}=\{1,5,0\}$, $\bar{d}=\{7,4,5\}$;

6. $\bar{a}=\{2,-1.-3\}$, $\bar{в}=\{-1,3,1\}$, $\bar{c}=\{3,-2,4\}$, $\bar{d}=\{4,6,8\}$;

7. $\bar{a}=\{-1,3,-2\}$, $\bar{в}=\{4,-1,3\}$, $\bar{c}=\{2,2,-5\}$, $\bar{d}=\{6,7,1\}$;

8. $\bar{a}=\{1,-5,3\}$, $\bar{в}=\{-2,-1,5\}$, $\bar{c}=\{3,2,-1\}$, $\bar{d}=\{7,8,11\}$;

9. $\bar{a}=\{-3,1,-1\}$, $\bar{в}=\{1,2,1\}$, $\bar{c}=\{-3,-2,5\}$, $\bar{d}=\{8,11,13\}$;

10. $\bar{a}=\{1,4,-3\}$, $\bar{в}=\{-2,-3,1\}$, $\bar{c}=\{3,1,-2\}$, $\bar{d}=\{9,11,7\}$;

11. $\bar{a}=\{-2,1,-4\}$, $\bar{в}=\{1,2,1\}$, $\bar{c}=\{4,2,7\}$, $\bar{d}=\{8,11,-7\}$;

12. $\bar{a}=\{-3,-1,2\}$, $\bar{в}=\{2,3,-1\}$, $\bar{c}=\{-4,2,5\}$, $\bar{d}=\{-7,8,4\}$;

13. $\bar{a}=\{1,2,-3\}$, $\bar{в}=\{3,-1,1\}$, $\bar{c}=\{5,3,-4\}$, $\bar{d}=\{-3,-2,8\}$;

14. $\bar{a}=\{2,-1,3\}$, $\bar{в}=\{3,2,-4\}$, $\bar{c}=\{-4,1,-5\}$, $\bar{d}=\{-2,-7,5\}$;

15. $\bar{a}=\{2,-1,-5\}$, $\bar{в}=\{3,2,1\}$, $\bar{c}=\{-4,5,-3\}$, $\bar{d}=\{4,-7,-9\}$;

16. $\bar{a}=\{3,-2,1\}$, $\bar{в}=\{-2,3,-2\}$, $\bar{c}=\{4,-1,5\}$, $\bar{d}=\{5,-2,-7\}$;

17. $\bar{a}=\{3,2,-1\}$, $\bar{в}=\{-1,-3,2\}$, $\bar{c}=\{5,2,-4\}$, $\bar{d}=\{-5,1,0\}$;

18. $\bar{a}=\{2,1,-4\}$, $\bar{в}=\{-3,2,-1\}$, $\bar{c}=\{5,3,2\}$, $\bar{d}=\{-6,3,0\}$;

19. $\bar{a}=\{2,1,-1\}$, $\bar{в}=\{-3,3,2\}$, $\bar{c}=\{1,-2,4\}$, $\bar{d}=\{6,7,-11\}$;

20. $\overline{a}=\{3,-1,1\},$ $\overline{в}=\{-1,2,-1\},$ $\overline{c}=\{2,1,-4\},$ $\overline{d}=\{-3,2,0\};$

21. $\overline{a}=\{2,-3,4\},$ $\overline{в}=\{3,1,-2\},$ $\overline{c}=\{4,5,1\},$ $\overline{d}=\{-1,5,6\};$

22. $\overline{a}=\{3,-1,1\},$ $\overline{в}=\{-1,2,-1\},$ $\overline{c}=\{2,1,-4\},$ $\overline{d}=\{-3,2,0\};$

23. $\overline{a}=\{2,-3,1\},$ $\overline{в}=\{-1,2,3\},$ $\overline{c}=\{3,3,-2\},$ $\overline{d}=\{-2,5,4\};$

24. $\overline{a}=\{-3,2,-7\},$ $\overline{в}=\{4,2,-3\},$ $\overline{c}=\{-3,8,-2\},$ $\overline{d}=\{-2,8,9\};$

25. $\overline{a}=\{3,2,-1\},$ $\overline{в}=\{1,3,1\},$ $\overline{c}=\{2,-1,4\},$ $\overline{d}=\{-1,0,7\};$

26. $\overline{a}=\{4,-1,2\},$ $\overline{в}=\{2,2,-1\},$ $\overline{c}=\{3.-1,4\},$ $\overline{d}=\{5,7,13\};$

27. $\overline{a}=\{4,1,0\},$ $\overline{в}=\{3,1,-5\},$ $\overline{c}=\{7,2,1\},$ $\overline{d}=\{8,3,1\};$

28. $\overline{a}=\{0,4,5\},$ $\overline{в}=\{3,1,7\},$ $\overline{c}=\{1,7,2\},$ $\overline{d}=\{3,3,4\};$

29. $\overline{a}=\{1,-1,7\},$ $\overline{в}=\{2,4,0\},$ $\overline{c}=\{3,3,4\},$ $\overline{d}=\{4,-1,1\};$

30. $\overline{a}=\{2,4,4\},$ $\overline{в}=\{-1,-1,0\},$ $\overline{c}=\{1,3,5\},$ $\overline{d}=\{-1,0,-1\};$

31. $\overline{a}=\{3,-1,2\},$ $\overline{в}=\{-1,0,5\},$ $\overline{c}=\{2,-1,3\},$ $\overline{d}=\{2,1,2\};$

32. $\overline{a}=\{-1,-1,3\},$ $\overline{в}=\{4,-2,1\},$ $\overline{c}=\{3,-3,1\},$ $\overline{d}=\{0,1,0\};$

33. $\overline{a}=\{-2,1,4\},$ $\overline{в}=\{3,-1,2\},$ $\overline{c}=\{1,-2,1\},$ $\overline{d}=\{5,3,0\};$

34. $\overline{a}=\{4,1,3\},$ $\overline{в}=\{1,3,-1\},$ $\overline{c}=\{3,-2,1\},$ $\overline{d}=\{-2,0,1\};$

35. $\overline{a}=\{5,-5,1\},$ $\overline{в}=\{4,1,-1\},$ $\overline{c}=\{1,-6,3\},$ $\overline{d}=\{3,0,-1\};$

36. $\overline{a}=\{0,5,3\},$ $\overline{в}=\{2,1,-1\},$ $\overline{c}=\{2,6,2\},$ $\overline{d}=\{0,2,-2\};$

37. $\overline{a}=\{2,5,1\},$ $\overline{в}=\{1,-3,4\},$ $\overline{c}=\{1,2,5\},$ $\overline{d}=\{-2,0,0\};$

38. $\overline{a}=\{1,4,-1\},$ $\overline{в}=\{2,4,1\},$ $\overline{c}=\{3,8,1\},$ $\overline{d}=\{5,0,1\};$

39. $\overline{a}=\{5,7,1\},$ $\overline{в}=\{3,-1,2\},$ $\overline{c}=\{2,8,5\},$ $\overline{d}=\{1,1,-1\};$

40. $\bar{a}=\{-2,1,4\}$, $\bar{в}=\{3,1,2\}$, $\bar{c}=\{1,2,1\}$, $\bar{d}=\{3,-3,4\}$;

41. $\bar{a}=\{4,-1,0\}$, $\bar{в}=\{3,1,2\}$, $\bar{c}=\{1,-2,4\}$, $\bar{d}=\{5,7,-2\}$;

42. $\bar{a}=\{1,0,-1\}$, $\bar{в}=\{4,1,3\}$, $\bar{c}=\{5,1,1\}$, $\bar{d}=\{0,7,7\}$;

43. $\bar{a}=\{1,3,-1\}$, $\bar{в}=\{2,0,4\}$, $\bar{c}=\{3,3,-5\}$, $\bar{d}=\{-3,5,-3\}$;

44. $\bar{a}=\{5,5,1\}$, $\bar{в}=\{-3,1,4\}$, $\bar{c}=\{2,6,1\}$, $\bar{d}=\{0,0,-5\}$;

45. $\bar{a}=\{-1,1,4\}$, $\bar{в}=\{5,1,7\}$, $\bar{c}=\{4,2,2\}$, $\bar{d}=\{3,-1,0\}$;

46. $\bar{a}=\{3,-1,1\}$, $\bar{в}=\{0,4,2\}$, $\bar{c}=\{3,3,8\}$, $\bar{d}=\{4,0,-4\}$;

47. $\bar{a}=\{-2,-2,5\}$, $\bar{в}=\{4,1,0\}$, $\bar{c}=\{2,-1,7\}$, $\bar{d}=\{-1,0,0\}$;

48. $\bar{a}=\{3,2,-2\}$, $\bar{в}=\{2,5,1\}$, $\bar{c}=\{1,-3,4\}$, $\bar{d}=\{-2,-1,2\}$;

49. $\bar{a}=\{5,1,-1\}$, $\bar{в}=\{0,3,1\}$, $\bar{c}=\{5,4,7\}$, $\bar{d}=\{-5,1,3\}$;

50. $\bar{a}=\{1,4,7\}$, $\bar{в}=\{-8,1,2\}$, $\bar{c}=\{7,5,1\}$, $\bar{d}=\{2,-2,4\}$;

51. $\bar{a}=\{-3,-3,2\}$, $\bar{в}=\{1,4,-1\}$, $\bar{c}=\{1,4,-1\}$, $\bar{d}=\{1,1,-1\}$;

52. $\bar{a}=\{3,4,4\}$, $\bar{в}=\{-1,-1,2\}$, $\bar{c}=\{2,3,3\}$, $\bar{d}=\{0,4,-1\}$;

53. $\bar{a}=\{4,-7,1\}$, $\bar{в}=\{5,2,1\}$, $\bar{c}=\{9,-5,3\}$, $\bar{d}=\{4,-1,-1\}$;

54. $\bar{a}=\{3,-1,2\}$, $\bar{в}=\{4,-4,-1\}$, $\bar{c}=\{1,-3,4\}$, $\bar{d}=\{5,0,7\}$;

55. $\bar{a}=\{-1,3,5\}$, $\bar{в}=\{1,0,4\}$, $\bar{c}=\{-2,3,5\}$, $\bar{d}=\{-2,0,3\}$;

56. $\bar{a}=\{0,3,1\}$, $\bar{в}=\{4,1,5\}$, $\bar{c}=\{4,4,7\}$, $\bar{d}=\{6,0,-3\}$;

57. $\bar{a}=\{0,-1,1\}$, $\bar{в}=\{4,4,3\}$, $\bar{c}=\{4,3,1\}$, $\bar{d}=\{3,-3,0\}$;

58. $\bar{a}=\{2,-2,5\}$, $\bar{в}=\{-1,1,-1\}$, $\bar{c}=\{1,-1,0\}$, $\bar{d}=\{8,7,-5\}$;

59. $\bar{a}=\{-1,-3,2\}$, $\bar{в}=\{4,-1,-1\}$, $\bar{c}=\{3,-4,4\}$, $\bar{d}=\{2,3,-3\}$;

60. $\bar{a}=\{-1,-3,2\}$, $\bar{в}=\{4,2,-4\}$, $\bar{c}=\{5,5,1\}$, $\bar{d}=\{0,6,-6\}$;

61. $\bar{a} = \{1,4,3\}$, $\bar{в} = \{2,-3,1\}$, $\bar{c} = \{3,2,1\}$, $\bar{d} = \{4,4,-5\}$;

62. $\bar{a} = \{2,-1,1\}$, $\bar{в} = \{-2,4,3\}$, $\bar{c} = \{4,2,1\}$, $\bar{d} = \{3,-4,-4\}$;

63. $\bar{a} = \{2,1,4\}$, $\bar{в} = \{3,2,1\}$, $\bar{c} = \{-1,4,5\}$, $\bar{d} = \{-1,-1,4\}$;

64. $\bar{a} = \{1,3,4\}$, $\bar{в} = \{4,2,-2\}$, $\bar{c} = \{5,1,3\}$, $\bar{d} = \{3,-8,-4\}$;

65. $\bar{a} = \{-2,4,4\}$, $\bar{в} = \{-3,2,4\}$, $\bar{c} = \{-4,4,-6\}$, $\bar{d} = \{0,2,0\}$;

66. $\bar{a} = \{4,4,3\}$, $\bar{в} = \{2,1,-3\}$, $\bar{c} = \{6,5,1\}$, $\bar{d} = \{3,-5,-5\}$;

67. $\bar{a} = \{2,-5,3\}$, $\bar{в} = \{1,4,2\}$, $\bar{c} = \{-3,1,1\}$, $\bar{d} = \{-1,-1,4\}$;

68. $\bar{a} = \{2,4,-4\}$, $\bar{в} = \{1,2,3\}$, $\bar{c} = \{3,-2,1\}$, $\bar{d} = \{0,3,1\}$;

69. $\bar{a} = \{1,3,-3\}$, $\bar{в} = \{2,4,-2\}$, $\bar{c} = \{3,1,5\}$, $\bar{d} = \{4,0,-1\}$;

70. $\bar{a} = \{2,2,4\}$, $\bar{в} = \{-1,3,1\}$, $\bar{c} = \{3,2,4\}$, $\bar{d} = \{-2,2,9\}$;

71. $\bar{a} = \{3,4,2\}$, $\bar{в} = \{2,-4,-3\}$, $\bar{c} = \{1,5,1\}$, $\bar{d} = \{3,0,6\}$;

72. $\bar{a} = \{5,8,-1\}$, $\bar{в} = \{2,-3,2\}$, $\bar{c} = \{1,2,3\}$, $\bar{d} = \{5,0,0\}$;

73. $\bar{a} = \{3,1,1\}$, $\bar{в} = \{1,-4,-2\}$, $\bar{c} = \{-3,5,6\}$, $\bar{d} = \{1,3,-6\}$;

74. $\bar{a} = \{2,-1,5\}$, $\bar{в} = \{5,2,13\}$, $\bar{c} = \{3,-1,5\}$, $\bar{d} = \{3,-4,-4\}$;

75. $\bar{a} = \{1,1,-1\}$, $\bar{в} = \{4,-3,1\}$, $\bar{c} = \{2,1,-1\}$, $\bar{d} = \{0,0,-5\}$;

76. $\bar{a} = \{7,-5,0\}$, $\bar{в} = \{4,11,2\}$, $\bar{c} = \{2,3,4\}$, $\bar{d} = \{0,0,3\}$;

77. $\bar{a} = \{1,2,1\}$, $\bar{в} = \{3,-5,3\}$, $\bar{c} = \{2,7,-1\}$, $\bar{d} = \{2,-1,1\}$;

78. $\bar{a} = \{1,1,-1\}$, $\bar{в} = \{8,3,-6\}$, $\bar{c} = \{-4,-1,3\}$, $\bar{d} = \{-1,3,-8\}$;

79. $\bar{a} = \{4,3,2\}$, $\bar{в} = \{2,5,-3\}$, $\bar{c} = \{3,6,-2\}$, $\bar{d} = \{3,-1,-1\}$;

80. $\bar{a} = \{1,-2,3\}$, $\bar{в} = \{2,3,-4\}$, $\bar{c} = \{3,-2,-5\}$, $\bar{d} = \{3,1,-5\}$;

81. $\bar{a} = \{1,7,1\}$, $\bar{в} = \{4,4,-1\}$, $\bar{c} = \{5,11,6\}$, $\bar{d} = \{-2,-1,-3\}$;

82. $\bar{a} = \{5,1,0\}$, $\bar{в} = \{4,-7,1\}$, $\bar{c} = \{1,6,5\}$, $\bar{d} = \{4,1,2\}$;

83. $\overline{a}=\{2,1,3\}$, $\overline{в}=\{3,-5,3\}$, $\overline{c}=\{2,7,-1\}$, $\overline{d}=\{1,-2,-5\}$;

84. $\overline{a}=\{1,1,-1\}$, $\overline{в}=\{8,3,-6\}$, $\overline{c}=\{-4,1,3\}$, $\overline{d}=\{4,2-4\}$;

85. $\overline{a}=\{4,3,2\}$, $\overline{в}=\{2,5,-3\}$, $\overline{c}=\{5,6,-2\}$, $\overline{d}=\{1,7,1\}$;

86. $\overline{a}=\{1,-2,3\}$, $\overline{в}=\{2,3,-4\}$, $\overline{c}=\{3,-2,5\}$, $\overline{d}=\{5,1,-3\}$;

87. $\overline{a}=\{1,7,1\}$, $\overline{в}=\{4,4,-1\}$, $\overline{c}=\{5,11,6\}$, $\overline{d}=\{1,1,-5\}$;

88. $\overline{a}=\{5,1,0\}$, $\overline{в}=\{4,-7,1\}$, $\overline{c}=\{1,6,5\}$, $\overline{d}=\{3,1,3\}$;

89. $\overline{a}=\{2,1,3\}$, $\overline{в}=\{4,1,-3\}$, $\overline{c}=\{6,2,4\}$, $\overline{d}=\{4,2,1\}$;

90. $\overline{a}=\{4,1,3\}$, $\overline{в}=\{1,2,-1\}$, $\overline{c}=\{3,-1,4\}$, $\overline{d}=\{5,3,1\}$;

91. $\overline{a}=\{2,-1,1\}$, $\overline{в}=\{4,3,-1\}$, $\overline{c}=\{5,2,0\}$, $\overline{d}=\{2,1,4\}$;

92. $\overline{a}=\{-1,-1,2\}$, $\overline{в}=\{0,4,7\}$, $\overline{c}=\{5,3,9\}$, $\overline{d}=\{4,1,2\}$;

93. $\overline{a}=\{2,-1,1\}$, $\overline{в}=\{3,2,-1\}$, $\overline{c}=\{5,1,3\}$, $\overline{d}=\{3,1,-3\}$;

94. $\overline{a}=\{1,-3,-3\}$, $\overline{в}=\{2,1,4\}$, $\overline{c}=\{3,-2,1\}$, $\overline{d}=\{-1,4,2\}$;

95. $\overline{a}=\{1,1,4\}$, $\overline{в}=\{3,1,2\}$, $\overline{c}=\{4,2,1\}$, $\overline{d}=\{2,5,5\}$;

96. $\overline{a}=\{3,3,2\}$, $\overline{в}=\{1,-1,4\}$, $\overline{c}=\{4,2,3\}$, $\overline{d}=\{4,1,4\}$;

97. $\overline{a}=\{1,3,2\}$, $\overline{в}=\{-1,-1,4\}$, $\overline{c}=\{2,4,1\}$, $\overline{d}=\{3,-1,2\}$;

98. $\overline{a}=\{2,3,2\}$, $\overline{в}=\{1,1,-1\}$, $\overline{c}=\{3,4,1\}$, $\overline{d}=\{7,0,1\}$;

99. $\overline{a}=\{3,3,2\}$, $\overline{в}=\{1,-2,3\}$, $\overline{c}=\{1,1,5\}$, $\overline{d}=\{2,1,2\}$;

100. $\overline{a}=\{2,1,3\}$, $\overline{в}=\{-1,4,1\}$, $\overline{c}=\{1,5,3\}$, $\overline{d}=\{3,3,-1\}$.

Завдання 2.2. Застосування типів добутків векторів

За даними $\overline{a}$, $\overline{в}$, $|\overline{m}|$, $|\overline{n}|$, $(\overline{m},\wedge\overline{n})$ знайти $пр_{\overline{в}}\overline{a}$, $|\overline{a}\times\overline{в}|$, $|\overline{a}|$.

1. $\overline{a}=\overline{m}+2\overline{n},$ $\overline{в}=\overline{m}-\overline{n},$ $|\overline{m}|=2,$ $|\overline{n}|=3,$ $(\overline{m},\wedge\overline{n})=\frac{\pi}{3};$

2. $\overline{a}=2\overline{m}-\overline{n},$ $\overline{в}=\overline{m}+\overline{n},$ $|\overline{m}|=|\overline{n}|=2,$ $(\overline{m},\wedge\overline{n})=-\frac{\pi}{3};$

3. $\overline{a}=-\overline{m}+\overline{n},$ $\overline{в}=\overline{m}-\overline{n},$ $|\overline{m}|=2,$ $|\overline{n}|=3,$ $(\overline{m},\wedge\overline{n})=-\frac{\pi}{6};$

4. $\overline{a}=-2\overline{m}+\overline{n},$ $\overline{в}=\overline{m}+2\overline{n},$ $|\overline{m}|=1,$ $|\overline{n}|=3,$ $(\overline{m},\wedge\overline{n})=-\frac{\pi}{6};$

5. $\overline{a}=4\overline{m}+\overline{n},$ $\overline{в}=-\overline{m}+2\overline{n},$ $|\overline{m}|=2,$ $|\overline{n}|=2,$ $(\overline{m}\wedge\overline{n})=\frac{\pi}{3};$

6. $\overline{a}=3\overline{m}+\overline{n},$ $\overline{в}=\overline{m}+\overline{n},$ $|\overline{m}|=1,$ $|\overline{n}|=1,$ $(\overline{m},\wedge\overline{n})=-\frac{\pi}{3};$

7. $\overline{a}=3\overline{m}+2\overline{n},$ $\overline{в}=\overline{m}-\overline{n},$ $|\overline{m}|=2,$ $|\overline{n}|=1,$ $(\overline{m},\wedge\overline{n})=\frac{\pi}{3};$

8. $\overline{a}=3\overline{m}-2\overline{n},$ $\overline{в}=\overline{m}-\overline{n},$ $|\overline{m}|=2,$ $|\overline{n}|=1,$ $(\overline{m},\wedge\overline{n})=-\frac{\pi}{6};$

9. $\overline{a}=2\overline{m}+3\overline{n},$ $\overline{в}=\overline{m}+\overline{n},$ $|\overline{m}|=2,$ $|\overline{n}|=1,$ $(\overline{m},\wedge\overline{n})=-\frac{\pi}{6};$

10. $\bar{a} = 2\bar{m} - 3\bar{n}$, $\quad \bar{в} = \bar{m} - 2\bar{n}$, $\quad |\bar{m}| = 2$, $\quad |\bar{n}| = 1$,
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6}$;

11. $\bar{a} = 2\bar{m} + 4\bar{n}$, $\quad \bar{в} = \bar{m} - 3\bar{n}$, $\quad |\bar{m}| = 1$, $\quad |\bar{n}| = 1$,
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$;

12. $\bar{a} = -2\bar{m} + \bar{n}$, $\quad \bar{в} = 3\bar{m} - \bar{n}$, $\quad |\bar{m}| = 2$, $\quad |\bar{n}| = 1$,
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3}$;

13. $\bar{a} = 3\bar{m} + 2\bar{n}$, $\quad \bar{в} = 2\bar{m} - \bar{n}$, $\quad |\bar{m}| = 1$, $\quad |\bar{n}| = 2$,
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6}$;

14. $\bar{a} = -4\bar{m} + \bar{n}$, $\quad \bar{в} = 3\bar{m} + \bar{n}$, $\quad |\bar{m}| = 2$, $\quad |\bar{n}| = 4$,
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6}$

15. $\bar{a} = -5\bar{m} + \bar{n}$, $\quad \bar{в} = 2\bar{m} + \bar{n}$, $\quad |\bar{m}| = 2$, $\quad |\bar{n}| = 2$,
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$;

16. $\bar{a} = \bar{m} + 5\bar{n}$, $\quad \bar{в} = \bar{m} + 2\bar{n}$, $\quad |\bar{m}| = 1$, $\quad |\bar{n}| = 1$,
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{4}$;

17. $\bar{a} = -\bar{m} + 3\bar{n}$, $\quad \bar{в} = 5\bar{m} + 2\bar{n}$, $\quad |\bar{m}| = 2$, $\quad |\bar{n}| = 1$,
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$;

18. $\bar{a} = 2\bar{m} + 5\bar{n}$, $\quad \bar{в} = -\bar{m} + 3\bar{n}$, $\quad |\bar{m}| = 2$, $\quad |\bar{n}| = 2$,
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$;

19. $\bar{a} = -2\bar{m} + 5\bar{n}$, $\quad \bar{в} = \bar{m} - 3\bar{n}$, $\quad |\bar{m}| = 1$, $\quad |\bar{n}| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{4}$;

20. $\overline{a} = -\overline{m} + 3\overline{n}$, $\overline{в} = 2\overline{m} - \overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 2$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{3}$;

21. $\overline{a} = \overline{m} - 3\overline{n}$, $\overline{в} = 2\overline{m} + \overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 3$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{3}$;

22. $\overline{a} = 2\overline{m} + \overline{n}$, $\overline{в} = -\overline{m} - 3\overline{n}$, $|\overline{m}| = 1$, $|\overline{n}| = 2$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{4}$;

23. $\overline{a} = -2\overline{m} + \overline{n}$, $\overline{в} = 3\overline{m} + 3\overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{4}$;

24. $\overline{a} = \overline{m} + 3\overline{n}$, $\overline{в} = -2\overline{m} + \overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 3$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{3}$;

25. $\overline{a} = -\overline{m} + \overline{n}$, $\overline{в} = 2\overline{m} + 5\overline{n}$, $|\overline{m}| = 1$, $|\overline{n}| = 3$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{3}$;

26. $\overline{a} = 3\overline{m} + 3\overline{n}$, $\overline{в} = \overline{m} - 2\overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge n\right) = \frac{\pi}{3}$;

27. $\overline{a} = 4\overline{m} - \overline{n}$, $\overline{в} = \overline{m} + 3\overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 2$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{3}$;

28. $\overline{a} = 2\overline{m} - 3\overline{n}$, $\overline{в} = 5\overline{m} + \overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 3$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{6}$;

29. $\overline{a} = -2\overline{m} + 7\overline{n}$, $\quad \overline{в} = \overline{m} - 3\overline{n}$, $\quad \left|\overline{m}\right| = 1$, $\quad \left|\overline{n}\right| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{6}$;

30. $\overline{a} = 4\overline{m} - 5\overline{n}$, $\quad \overline{в} = \overline{m} + 3\overline{n}$, $\quad \left|\overline{m}\right| = 1$, $\quad \left|\overline{n}\right| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{3}$;

31. $\overline{a} = 5\overline{m} - 4\overline{n}$, $\quad \overline{в} = \overline{m} - 2\overline{n}$, $\quad \left|\overline{m}\right| = 3$, $\quad \left|\overline{n}\right| = 4$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{4}$;

32. $\overline{a} = 3\overline{m} + 5\overline{n}$, $\quad \overline{в} = \overline{m} - 4\overline{n}$, $\quad \left|\overline{m}\right| = 2$, $\quad \left|\overline{n}\right| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{4}$;

33. $\overline{a} = 2\overline{m} + 6\overline{n}$, $\quad \overline{в} = 2\overline{m} - \overline{n}$, $\quad \left|\overline{m}\right| = 3$, $\quad \left|\overline{n}\right| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{3}$;

34. $\overline{a} = 2\overline{m} - 6\overline{n}$, $\quad \overline{в} = 3\overline{m} + \overline{n}$, $\quad \left|\overline{m}\right| = 1$, $\quad \left|\overline{n}\right| = 2$,

$\left(\overline{m}, \wedge n\right) = \frac{\pi}{6}$;

35. $\overline{a} = 3\overline{m} + 7\overline{n}$, $\quad \overline{в} = \overline{m} - 4\overline{n}$, $\quad \left|\overline{m}\right| = 1$, $\quad \left|\overline{n}\right| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{6}$;

36. $\overline{a} = -2\overline{m} - 9\overline{n}$, $\quad \overline{в} = 3\overline{m} - \overline{n}$, $\quad \left|\overline{m}\right| = 2$, $\quad \left|\overline{n}\right| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{3}$;

37. $\overline{a} = 3\overline{m} + 8\overline{n}$, $\quad \overline{в} = \overline{m} + 5\overline{n}$, $\quad \left|\overline{m}\right| = 1$, $\quad \left|\overline{n}\right| = 2$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{3}$;

38. $\overline{a} = -4\overline{m} + 5\overline{n}$, $\overline{в} = 3\overline{m} - 4\overline{n}$, $\left|\overline{m}\right| = 3$, $\left|\overline{n}\right| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{4}$;

39. $\overline{a} = -5\overline{m} - \overline{n}$, $\overline{в} = \overline{m} - 4\overline{n}$, $\left|\overline{m}\right| = 1$, $\left|\overline{n}\right| = 3$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{4}$;

40. $\overline{a} = -\overline{m} + 7\overline{n}$, $\overline{в} = 5\overline{m} + 3\overline{n}$, $\left|\overline{m}\right| = 2$, $\left|\overline{n}\right| = 4$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{6}$;

41. $\overline{a} = 2\overline{m} + 8\overline{n}$, $\overline{в} = -3\overline{m} - 2\overline{n}$, $\left|\overline{m}\right| = 4$, $\left|\overline{n}\right| = 4$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{6}$;

42. $\overline{a} = -2\overline{m} + 8\overline{n}$, $\overline{в} = 5\overline{m} - 4\overline{n}$, $\left|\overline{m}\right| = 4$, $\left|\overline{n}\right| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{3}$;

43. $\overline{a} = 5\overline{m} + 6\overline{n}$, $\overline{в} = 3\overline{m} + 7\overline{n}$, $\left|\overline{m}\right| = 1$, $\left|\overline{n}\right| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{3}$;

44. $\overline{a} = \overline{m} - 5\overline{n}$, $\overline{в} = 3\overline{m} + \overline{n}$, $\left|\overline{m}\right| = 3$, $\left|\overline{n}\right| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{3}$;

45. $\overline{a} = 2\overline{m} - 3\overline{n}$, $\overline{в} = 5\overline{m} + \overline{n}$, $\left|\overline{m}\right| = 2$, $\left|\overline{n}\right| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{3}$;

46. $\overline{a} = 6\overline{m} - \overline{n}$, $\overline{в} = \overline{m} - 3\overline{n}$, $\left|\overline{m}\right| = 1$, $\left|\overline{n}\right| = 4$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{4}$;

47. $\overline{a} = 6\overline{m} - 3\overline{n}$, $\overline{в} = \overline{m} - 3\overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 1$,
$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{4}$;

48. $\overline{a} = -6\overline{m} - 3\overline{n}$, $\overline{в} = 2\overline{m} + 3\overline{n}$, $|\overline{m}| = 1$, $|\overline{n}| = 2$,
$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{6}$;

49. $\overline{a} = 6\overline{m} - 4\overline{n}$, $\overline{в} = \overline{m} - 2\overline{n}$, $|\overline{m}| = 3$, $|\overline{n}| = 4$,
$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{6}$;

50. $\overline{a} = -6\overline{m} - 5\overline{n}$, $\overline{в} = -\overline{m} - 2\overline{n}$, $|\overline{m}| = 1$, $|\overline{n}| = 2$,
$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{4}$;

51. $\overline{a} = 6\overline{m} + 3\overline{n}$, $\overline{в} = -2\overline{m} + \overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 2$,
$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{4}$;

52. $\overline{a} = -6\overline{m} + 4\overline{n}$, $\overline{в} = -3\overline{m} - \overline{n}$, $|\overline{m}| = 3$, $|\overline{n}| = 1$,
$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{3}$;

53. $\overline{a} = 6\overline{m} + 5\overline{n}$, $\overline{в} = 3\overline{m} + \overline{n}$, $|\overline{m}| = 4$, $|\overline{n}| = 2$,
$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{3}$;

54. $\overline{a} = 3\overline{m} - 6\overline{n}$, $\overline{в} = 3\overline{m} - \overline{n}$, $|\overline{m}| = 5$, $|\overline{n}| = 1$,
$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{6}$

55. $\overline{a} = 4\overline{m} - 6\overline{n}$, $\overline{в} = \overline{m} - 4\overline{n}$, $|\overline{m}| = 1$, $|\overline{n}| = 3$,
$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{6}$;

56. $\overline{a} = 4\overline{m} + 6\overline{n}$, $\overline{в} = 5\overline{m} + 3\overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 4$,
$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{3}$;

57. $\overline{a} = 3\overline{m} + 6\overline{n}$, $\quad \overline{в} = -\overline{m} - 5\overline{n}$, $\quad |\overline{m}| = 3$, $\quad |\overline{n}| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$;

58. $\overline{a} = 5\overline{m} - 6\overline{n}$, $\quad \overline{в} = -5\overline{m} - 3\overline{n}$, $\quad |\overline{m}| = 4$, $\quad |\overline{n}| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{6}$;

59. $\overline{a} = 5\overline{m} + 6\overline{n}$, $\quad \overline{в} = -5\overline{m} + 3\overline{n}$, $\quad |\overline{m}| = 1$, $\quad |\overline{n}| = 5$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$;

60. $\overline{a} = -7\overline{m} + \overline{n}$, $\quad \overline{в} = 4\overline{m} + \overline{n}$, $\quad |\overline{m}| = 2$, $\quad |\overline{n}| = 3$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{4}$;

61. $\overline{a} = 7\overline{m} + 2\overline{n}$, $\quad \overline{в} = -4\overline{m} - \overline{n}$, $\quad |\overline{m}| = 3$, $\quad |\overline{n}| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$;

62. $\overline{a} = -5\overline{m} - 7\overline{n}$, $\quad \overline{в} = -4\overline{m} + \overline{n}$, $\quad |\overline{m}| = 1$, $\quad |\overline{n}| = 3$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{3}$;

63. $\overline{a} = 5\overline{m} + 7\overline{n}$, $\quad \overline{в} = -8\overline{m} - \overline{n}$, $\quad |\overline{m}| = 2$, $\quad |\overline{n}| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$

64. $\overline{a} = 7\overline{m} - \overline{n}$, $\quad \overline{в} = 8\overline{m} + \overline{n}$, $\quad |\overline{m}| = 3$, $\quad |\overline{n}| = 2$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{6}$;

65. $\overline{a} = -7\overline{m} + 3\overline{n}$, $\quad \overline{в} = 4\overline{m} - 3\overline{n}$, $\quad |\overline{m}| = 4$, $\quad |\overline{n}| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$;

66. $\overline{a} = -4\overline{m} + 7\overline{n}$, $\quad \overline{в} = -4\overline{m} - 3\overline{n}$, $\quad |\overline{m}| = 1$, $\quad |\overline{n}| = 3$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{4}$;

67. $\overline{a} = 4\overline{m} - 7\overline{n}$, $\overline{в} = \overline{m} + 8\overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{4}$;

68. $\overline{a} = -7\overline{m} - 2\overline{n}$, $\overline{в} = \overline{m} - 8\overline{n}$, $|\overline{m}| = 3$, $|\overline{n}| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{6}$;

69. $\overline{a} = \overline{m} - 3\overline{n}$, $\overline{в} = 3\overline{m} + 6\overline{n}$, $|\overline{m}| = 1$, $|\overline{n}| = 2$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{4}$;

70. $\overline{a} = -\overline{m} + 3\overline{n}$, $\overline{в} = -3\overline{m} - 6\overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 3$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{4}$;

71. $\overline{a} = -\overline{m} - 3\overline{n}$, $\overline{в} = 3\overline{m} - 6\overline{n}$, $|\overline{m}| = 3$, $|\overline{n}| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{6}$;

72. $\overline{a} = 2\overline{m} - 4\overline{n}$, $\overline{в} = 6\overline{m} - 3\overline{n}$, $|\overline{m}| = 1$, $|\overline{n}| = 2$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{6}$;

73. $\overline{a} = -2\overline{m} - 4\overline{n}$, $\overline{в} = 6\overline{m} + 3\overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 2$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{3}$;

74. $\overline{a} = -2\overline{m} - 4\overline{n}$, $\overline{в} = 5\overline{m} + \overline{n}$, $|\overline{m}| = 3$, $|\overline{n}| = 1$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\frac{\pi}{3}$;

75. $\overline{a} = \overline{m} + 3\overline{n}$, $\overline{в} = -6\overline{m} - 3\overline{n}$, $|\overline{m}| = 1$, $|\overline{n}| = 3$,

$\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \frac{\pi}{4}$;

76. $\overline{a} = 2\overline{m} + 4\overline{n}$, $\overline{в} = 5\overline{m} - \overline{n}$, $|\overline{m}| = 1$, $|\overline{n}| = 1$,

$(\overline{m}, \wedge \overline{n}) = -\dfrac{\pi}{4}$;

77. $\overline{a} = 3\overline{m} - 2\overline{n}$, $\overline{в} = -5\overline{m} + \overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 3$,

$(\overline{m}, \wedge n) = \dfrac{\pi}{6}$;

78. $\overline{a} = -3\overline{m} + 2\overline{n}$, $\overline{в} = 7\overline{m} + \overline{n}$, $|\overline{m}| = 3$, $|\overline{n}| = 2$,

$(\overline{m}, \wedge \overline{n}) = -\dfrac{\pi}{6}$;

79. $\overline{a} = -3\overline{m} - 2\overline{n}$, $\overline{в} = -7\overline{m} + \overline{n}$, $|\overline{m}| = 1$, $|\overline{n}| = 4$,

$(\overline{m}, \wedge n) = \dfrac{\pi}{3}$;

80. $\overline{a} = 3\overline{m} + 2\overline{n}$, $\overline{в} = -7\overline{m} - \overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 1$,

$(\overline{m}, \wedge \overline{n}) = -\dfrac{\pi}{3}$;

81. $\overline{a} = \overline{m} - 5\overline{n}$, $\overline{в} = \overline{m} + 7\overline{n}$, $|\overline{m}| = 3$, $|\overline{n}| = 2$,

$(\overline{m}, \wedge \overline{n}) = \dfrac{\pi}{6}$;

82. $\overline{a} = \overline{m} + 5\overline{n}$, $\overline{в} = -\overline{m} - 7\overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 3$,

$(\overline{m}, \wedge \overline{n}) = -\dfrac{\pi}{6}$;

83. $\overline{a} = -\overline{m} - 5\overline{n}$, $\overline{в} = \overline{m} + 7\overline{n}$, $|\overline{m}| = 3$, $|\overline{n}| = 1$,

$(\overline{m}, \wedge \overline{n}) = -\dfrac{\pi}{3}$;

84. $\overline{a} = -\overline{m} + 5\overline{n}$, $\overline{в} = 3\overline{m} + 7\overline{n}$, $|\overline{m}| = 1$, $|\overline{n}| = 1$,

$(\overline{m}, \wedge \overline{n}) = -\dfrac{\pi}{4}$;

85. $\overline{a} = 5\overline{m} - \overline{n}$, $\overline{в} = 7\overline{m} - 3\overline{n}$, $|\overline{m}| = 1$, $|\overline{n}| = 2$, $\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{6}$;

86. $\overline{a} = -5\overline{m} - 2\overline{n}$, $\overline{в} = 4\overline{m} - 2\overline{n}$, $|\overline{m}| = 4$, $|\overline{n}| = 1$, $\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$;

87. $\overline{a} = 5\overline{m} + 2\overline{n}$, $\overline{в} = -4\overline{m} + 2n$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 2$, $\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{3}$;

88. $\overline{a} = -5\overline{m} + 2\overline{n}$, $\overline{в} = -4\overline{m} - \overline{n}$, $|\overline{m}| = 3$, $|\overline{n}| = 1$, $\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$;

89. $\overline{a} = 5\overline{m} + 3\overline{n}$, $\overline{в} = 6\overline{m} - 4\overline{n}$, $|\overline{m}| = 1$, $|\overline{n}| = 2$, $\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{6}$;

90. $\overline{a} = 5\overline{m} - 3\overline{n}$, $\overline{в} = -6\overline{m} - 4\overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 2$, $\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$;

91. $\overline{a} = -5\overline{m} - 3\overline{n}$, $\overline{в} = -6\overline{m} + 4\overline{n}$, $|\overline{m}| = 3$, $|\overline{n}| = 1$, $\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{4}$;

92. $\overline{a} = -5\overline{m} + 3\overline{n}$, $\overline{в} = 4\overline{m} - 6\overline{n}$, $|\overline{m}| = 1$, $|\overline{n}| = 2$, $\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$;

93. $\overline{a} = 5\overline{m} + 3\overline{n}$, $\overline{в} = -4\overline{m} - 6\overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 3$, $\left(\overline{m}, \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{3}$;

94. $\overline{a} = \overline{m} + \overline{n}$, $\overline{в} = 5\overline{m} + 7\overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 1$,

$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=\frac{\pi}{3};$

95. $\overline{a}=3\overline{m}+\overline{n},\quad \overline{в}=5\overline{m}-7\overline{n},\quad \left|\overline{m}\right|=1,\quad \left|\overline{n}\right|=2,$

$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=-\frac{\pi}{3};$

96. $\overline{a}=-\overline{m}-\overline{n},\quad \overline{в}=-7\overline{m}-5\overline{n},\quad \left|\overline{m}\right|=1,\quad \left|\overline{n}\right|=2,$

$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=\frac{\pi}{4};$

97. $\overline{a}=-\overline{m}+\overline{n},\quad \overline{в}=-7\overline{m}+5\overline{n},\quad \left|\overline{m}\right|=2,\quad \left|\overline{n}\right|=1,$

$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=-\frac{\pi}{4};$

98. $\overline{a}=3\overline{m}-2\overline{n},\quad \overline{в}=7\overline{m}+5\overline{n},\quad \left|\overline{m}\right|=1,\quad \left|\overline{n}\right|=3,$

$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=\frac{\pi}{6};$

99. $\overline{a}=-3\overline{m}+2\overline{n},\quad \overline{в}=6\overline{m}-4\overline{n},\quad \left|\overline{m}\right|=1,\quad \left|\overline{n}\right|=1,$

$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=-\frac{\pi}{6};$

100. $\overline{a}=-3\overline{m}-2\overline{n},\quad \overline{в}=-6\overline{m}+4\overline{n},\quad \left|\overline{m}\right|=2,\quad \left|\overline{n}\right|=1,$

$\left(\overline{m},\wedge\overline{n}\right)=\frac{\pi}{4}.$

Завдання 2.3. Обчислення об’ємів, площ, знаходження кутів застосуванням добутків векторів

Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

Знайти: 1) довжину ребра A_1A_2; 2) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4; 3) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$; 4) площу грані $A_1A_2A_3$; 5) об’єм піраміди

$A_1A_2A_3A_4$; 6) рівняння прямої A_1A_2; 7) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 8) рівняння прямої, яка опущена з вершини A_4 перпендикулярно до грані $A_1A_2A_3$.

1. A_1 (4; 2; 5)	A_2 (0; 7; 2)	A_3 (0; 2; 7)	A_4 (1; 5; 0).
2. A_1 (4; 4; 10)	A_2 (4; 10; 2)	A_3 (2; 8; 4)	A_4 (9; 6; 4).
3. A_1 (4; 6; 5)	A_2 (6; 9; 4)	A_3 (2; 10; 10)	A_4 (7; 5; 9).
4. A_1 (3; 5; 4)	A_2 (8; 7; 4)	A_3 (5; 10; 4)	A_4 (4; 7; 8).
5. A_1 (10; 6; 6)	A_2 (-2; 8; 2)	A_3 (6; 8; 9)	A_4 (7; 10; 3).
6. A_1 (1; 84 2)	A_2 (5; 2; 6)	A_3 (5; 7; 4)	A_4 (4; 10; 9).
7. A_1 (6; 6; 5)	A_2 (4; 9; 5)	A_3 (4; 6; 11)	A_4 (6; 9; 3).
8. A_1 (7; 2; 2)	A_2 (5; 7; 7).	A_3 (5; 3; 1)	A_4 (2; 3; 7).
9. A_1 (8; 6; 4)	A_2 (10; 5; 5)	A_3 (5; 6; 8)	A_4 (8; 10; 7).
10. A_1 (7; 7; 3)	A_2 (6; 5; 8)	A_3 (3; 5; 8)	A_4 (8; 4; 1).
11. A_1 (3; 1; 4)	A_2 (-1; 6; 1)	A_3 (-1; 1; 6)	A_4 (0; 4; -1).
12. A_1 (3; 3; 9)	A_2 (6; 9; 1)	A_3 (1; 7; 3)	A_4 (8; 5; 8).
13. A_1 (3; 5; 4)	A_2 (5; 8; 3)	A_3 (1; 9; 9)	A_4 (6; 4; 8).
14. A_1 (2; 4; 3)	A_2 (7; 6; 3)	A_3 (4; 9; 3)	A_4 (3; 6; 7).
15. A_1 (9; 5; 5)	A_2 (-3; 7; 1)	A_3 (5; 7; 8)	A_4 (6; 9; 2).
16. A_1 (0; 7; 1)	A_2 (4; 1; 5)	A_3 (4; 6; 3)	A_4 (3; 9; 8).
17. A_1 (5; 5; 4)	A_2 (3; 8; 4)	A_3 (3; 5; 10)	A_4 (5; 8; 2).
18. A_1 (6; 1; 1)	A_2 (4; 6; 6)	A_3 (4; 5; 7)	A_4 (7; 9; 6).
19. A_1 (3; 8; 1)	A_2 (5; 3; 9)	A_3 (1; 3; 5)	A_4 (4; 3; 1).

20. A_1 (6; 6; 2) A_2 (5; 4; 7) A_3 (2; 4; 7) A_4 (7; 3; 0).

21. A_1 (1; 2; 7) A_2 (4; 2; 10) A_3 (2; 3; 5) A_4 (5; 3; 7).

22. A_1 (4; 2; 10) A_2 (1; 2; 7) A_3 (5; 3; 7) A_4 (2; 3; 5).

23. A_1 (2; 3; 5) A_2 (5; 3; 7) A_3 (1; 2; 7) A_4 (4; 2; 10).

24. A_1 (5; 3; 7) A_2 (2; 3; 5) A_3 (4; 2; 10) A_4 (1; 2; 7).

25. A_1 (1; 2; 5) A_2 (4; 0; 6) A_3 (2; 6; 5) A_4 (6; 4; 8).

26. A_1 (4; 3; 5) A_2 (1; 9; 7) A_3 (0; 2; 0) A_4 (5; 3; 10).

27. A_1 (2; 1; 6) A_2 (1; 4; 9) A_3 (2; 5; 8) A_4 (5; 4; 2).

28. A_1 (2; 1; 7) A_2 (3; 3; 6) A_3 (2; 3; 9) A_4 (1; 2; 5).

29. A_1 (2; -1; 7) A_2 (6; 3; 1) A_3 (3; 2; 8) A_4 (2; -3; 7).

30. A_1 (4; 7; 8) A_2 (-1; 13; 0) A_3 (2; 4; 9) A_4 (1; 8; 9).

31. A_1 (7; 7; 3) A_2 (6; 5; 8) A_3 (3; 5; 8) A_4 (8; 4; 1).

32. A_1 (3; 1; 4) A_2 (-1; 6; 1) A_3 (-1; 1; 6) A_4 (0; 4; -1).

33. A_1 (3; 3; 9) A_2 (6; 9; 1) A_3 (1; 7; 3) A_4 (8; 5; 8).

34. A_1 (3; 5; 4) A_2 (5; 8; 3) A_3 (1; 9; 9) A_4 (6; 4; 8).

35. A_1 (2; 4; 3) A_2 (7; 6; 3) A_3 (4; 9; 3) A_4 (3; 6; 7).

36. A_1 (9; 5; 5) A_2 (-3; 7; 1) A_3 (5; 7; 8) A_4 (6; 9; 2).

37. A_1 (0; 7; 1) A_2 (4; 1; 5) A_3 (4; 6; 3) A_4 (3; 9; 8).

38. A_1 (5; 5; 4) A_2 (3; 8; 4) A_3 (3; 5; 10) A_4 (5; 8; 2).

39. A_1 (6; 1; 1) A_2 (4; 6; 6) A_3 (4; 5; 7) A_4 (7; 9; 6).

40. A_1 (3; 8; 1) A_2 (5; 3; 9) A_3 (1; 3; 5) A_4 (4; 3; 1).

41. A_1 (6; 6; 2)	A_2 (5; 4; 7)	A_3 (2; 4; 7)	A_4 (7; 3; 0).
42. A_1 (4; 2; 5)	A_2 (0; 7; 2)	A_3 (0; 2; 7)	A_4 (1; 5; 0).
43. A_1 (4; 4; 10)	A_2 (4; 10; 2)	A_3 (2; 8; 4)	A_4 (9; 6; 4).
44. A_1 (4; 6; 5)	A_2 (6; 9; 4)	A_3 (2; 10; 10)	A_4 (7; 5; 9).
45. A_1 (3; 5; 4)	A_2 (8; 7; 4)	A_3 (5; 10; 4)	A_4 (4; 7; 8).
46. A_1 (10; 6; 6)	A_2 (-2; 8; 2)	A_3 (6; 8; 9)	A_4 (7; 10; 3).
47. A_1 (1; 84 2)	A_2 (5; 2; 6)	A_3 (5; 7; 4)	A_4 (4; 10; 9).
48. A_1 (6; 6; 5)	A_2 (4; 9; 5)	A_3 (4; 6; 11)	A_4 (6; 9; 3).
49. A_1 (7; 2; 2)	A_2 (5; 7; 7)	A_3 (5; 3; 1)	A_4 (2; 3; 7).
50. A_1 (8; 6; 4)	A_2 (10; 5; 5)	A_3 (5; 6; 8)	A_4 (8; 10; 7).
51. A_1 (7; 7; 3)	A_2 (6; 5; 8)	A_3 (3; 5; 8)	A_4 (8; 4; 1).
52. A_1 (6; 6; 2)	A_2 (5; 4; 7)	A_3 (2; 4; 7)	A_4 (7; 3; 0).
53. A_1 (1; 2; 7)	A_2 (4; 2; 10)	A_3 (2; 3; 5)	A_4 (5; 3; 7).
54. A_1 (4; 2; 10)	A_2 (1; 2; 7)	A_3 (5; 3; 7)	A_4 (2; 3; 5).
55. A_1 (2; 3; 5)	A_2 (5; 3; 7)	A_3 (1; 2; 7)	A_4 (4; 2; 10).
56. A_1 (5; 3; 7)	A_2 (2; 3; 5)	A_3 (4; 2; 10)	A_4 (1; 2; 7).
57. A_1 (1; 2; 5)	A_2 (4; 0; 6)	A_3 (2; 6; 5)	A_4 (6; 4; 8).
58. A_1 (4; 3; 5)	A_2 (1; 9; 7)	A_3 (0; 2; 0)	A_4 (5; 3; 10).
59. A_1 (2; 1; 6)	A_2 (1; 4; 9)	A_3 (2; 5; 8)	A_4 (5; 4; 2).
60. A_1 (2; 1; 7)	A_2 (3; 3; 6)	A_3 (2; 3; 9)	A_4 (1; 2; 5).
61. A_1 (2; -1; 7)	A_2 (6; 3; 1)	A_3 (3; 2; 8)	A_4 (2; -3; 7).
62. A_1 (4; 7; 8)	A_2 (-1; 13; 0)	A_3 (2; 4; 9)	A_4 (1; 8; 9).

63. A_1 (4; 2; 5)	A_2 (0; 7; 2)	A_3 (0; 2; 7)	A_4 (1; 5; 0).
64. A_1 (4; 4; 10)	A_2 (4; 10; 2)	A_3 (2; 8; 4)	A_4 (9; 6; 4).
65. A_1 (4; 6; 5)	A_2 (6; 9; 4)	A_3 (2; 10; 10)	A_4 (7; 5; 9).
66. A_1 (3; 5; 4)	A_2 (8; 7; 4)	A_3 (5; 10; 4)	A_4 (4; 7; 8).
67. A_1 (10; 6; 6)	A_2 (-2; 8; 2)	A_3 (6; 8; 9)	A_4 (7; 10; 3).
68. A_1 (1; 84 2)	A_2 (5; 2; 6)	A_3 (5; 7; 4)	A_4 (4; 10; 9).
69. A_1 (6; 6; 5)	A_2 (4; 9; 5)	A_3 (4; 6; 11)	A_4 (6; 9; 3).
70. A_1 (7; 2; 2)	A_2 (5; 7; 7).	A_3 (5; 3; 1)	A_4 (2; 3; 7).
71. A_1 (8; 6; 4)	A_2 (10; 5; 5)	A_3 (5; 6; 8)	A_4 (8; 10; 7).
72. A_1 (7; 7; 3)	A_2 (6; 5; 8)	A_3 (3; 5; 8)	A_4 (8; 4; 1).
73. A_1 (6; 6; 2)	A_2 (5; 4; 7)	A_3 (2; 4; 7)	A_4 (7; 3; 0).
74. A_1 (1; 2; 7)	A_2 (4; 2; 10)	A_3 (2; 3; 5)	A_4 (5; 3; 7).
75. A_1 (4; 2; 10)	A_2 (1; 2; 7)	A_3 (5; 3; 7)	A_4 (2; 3; 5).
76. A_1 (2; 3; 5)	A_2 (5; 3; 7)	A_3 (1; 2; 7)	A_4 (4; 2; 10).
77. A_1 (5; 3; 7)	A_2 (2; 3; 5)	A_3 (4; 2; 10)	A_4 (1; 2; 7).
78. A_1 (1; 2; 5)	A_2 (4; 0; 6)	A_3 (2; 6; 5)	A_4 (6; 4; 8).
79. A_1 (4; 3; 5)	A_2 (1; 9; 7)	A_3 (0; 2; 0)	A_4 (5; 3; 10).
80. A_1 (2; 1; 6)	A_2 (1; 4; 9)	A_3 (2; 5; 8)	A_4 (5; 4; 2).
81. A_1 (2; 1; 7)	A_2 (3; 3; 6)	A_3 (2; 3; 9)	A_4 (1; 2; 5).
82. A_1 (2; -1; 7)	A_2 (6; 3; 1)	A_3 (3; 2; 8)	A_4 (2; -3; 7).
83. A_1 (4; 7; 8)	A_2 (-1; 13; 0)	A_3 (2; 4; 9)	A_4 (1; 8; 9).
84. A_1 (6; 6; 2)	A_2 (5; 4; 7)	A_3 (2; 4; 7)	A_4 (7; 3; 0).

85. A_1 (1; 2; 7) A_2 (4; 2; 10) A_3 (2; 3; 5) A_4 (5; 3; 7).

86. A_1 (4; 2; 10) A_2 (1; 2; 7) A_3 (5; 3; 7) A_4 (2; 3; 5).

87. A_1 (2; 3; 5) A_2 (5; 3; 7) A_3 (1; 2; 7) A_4 (4; 2; 10).

88. A_1 (5; 3; 7) A_2 (2; 3; 5) A_3 (4; 2; 10) A_4 (1; 2; 7).

89. A_1 (1; 2; 5) A_2 (4; 0; 6) A_3 (2; 6; 5) A_4 (6; 4; 8).

90. A_1 (4; 3; 5) A_2 (1; 9; 7) A_3 (0; 2; 0) A_4 (5; 3; 10).

91. A_1 (2; 1; 6) A_2 (1; 4; 9) A_3 (2; 5; 8) A_4 (5; 4; 2).

92. A_1 (2; 1; 7) A_2 (3; 3; 6) A_3 (2; 3; 9) A_4 (1; 2; 5).

93. A_1 (2; -1; 7) A_2 (6; 3; 1) A_3 (3; 2; 8) A_4 (2; -3; 7).

94. A_1 (4; 7; 8) A_2 (-1; 13; 0) A_3 (2; 4; 9) A_4 (1; 8; 9).

95. A_1 (10; 6; 6) A_2 (-2; 8; 2) A_3 (6; 8; 9) A_4 (7; 10; 3).

96. A_1 (1; 84 2) A_2 (5; 2; 6) A_3 (5; 7; 4) A_4 (4; 10; 9).

97. A_1 (6; 6; 5) A_2 (4; 9; 5) A_3 (4; 6; 11) A_4 (6; 9; 3).

98. A_1 (7; 2; 2) A_2 (5; 7; 7). A_3 (5; 3; 1) A_4 (2; 3; 7).

99. A_1 (8; 6; 4) A_2 (10; 5; 5) A_3 (5; 6; 8) A_4 (8; 10; 7).

100. A_1 (7; 7; 3) A_2 (6; 5; 8) A_3 (3; 5; 8) A_4 (8; 4; 1).

Завдання 3.1. Рівняння площини

Знайти рівняння площини, що проходить через точку M_0, перпендикулярно заданій прямій.

1. M_0 (1,1,2), $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{3}$; 2. M_0 (-1,2,2), $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{-1}$;

3. M_0 (1,-1,2), $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$; 4. M_0 (1,1,-2), $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$;

5. M_0 (1,-1,2), $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{3}$; 6. M_0 (-1,-1,2), $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-3}$;

7. M_0 (-1,-1,2), $\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$; 8. M_0 (-1,1,-2), $\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{3}$;

9. M_0 (2,1,1), $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}$; 10. M_0 (2,1,1), $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{2}$;

11. M_0 (2,1,-1), $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{2}$; 12. M_0 (2,-1,1), $\frac{x}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-1}{-2}$;

13. M_0 (2,-1,-1), $\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{3}$; 14. M_0 (1,3,2), $\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{2}$;

15. M_0 (2,1,3), $\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{-3}$; 16. M_0 (1,2,3), $\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{1}$;

17. M_0 (-1,2,3), $\frac{x}{-3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{4}$; 18. M_0 (1,-2,3), $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}$;

19. M_0 (1,2,-3), $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$; 20. M_0 (1,-2,-3), $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{2}$;

21. M_0 (1,-3,2), $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z}{1}$; 22. M_0 (1,-3,-2), $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{-1}$;

23. M_0 (0,1,2), $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$; 24. M_0 (1,0,2), $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$;

25. M_0 (2,0,1), $\frac{x}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-2}$; 26. M_0 (2,4,-3), $\frac{x-1}{3}=\frac{4}{3}=\frac{z-1}{2}$;

27. M_0 (3,-2,1), $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+4}{-2}$; 28. M_0 (-3,1,-2), $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$;

29. M_0 (2,-1,3), $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$;

30. M_0 (1,5,0), $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+5}{7}$;

31. M_0 (-1,3,4), $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z+1}{3}$;

32. M_0 (7,4,5), $\frac{x-5}{7}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$;

33. M_0 (5,6,7), $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{0}$;

34. M_0 (2,-1,-3), $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{-4}$;

35. M_0 (1,-1,2), $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z}{-1}$;

36. M_0 (-1,3,-2), $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{1}$;

37. M_0 (2,1,-1), $\frac{x}{-2}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{5}$;

38. M_0 (1,-5,-3), $\frac{x+2}{4}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+3}{1}$;

39. M_0 (3,0,-1), $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{3}$;

40. M_0 (3,1,-1), $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{-5}$;

41. M_0 (3,7,0), $\frac{x}{5}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+1}{3}$;

42. M_0 (1,4,-3), $\frac{x-3}{-3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$;

43. M_0 (2,4,-1), $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+7}{-3}$;

44. M_0 (-2,1,4), $\frac{x}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{1}$;

45. M_0 (-1,2,2), $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}$;

46. M_0 (-3,-1,2), $\frac{x-3}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{2}$;

47. M_0 (2,3,0), $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{3}$;

48. M_0 (1,2,-3), $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-1}$;

49. M_0 (5,7,-3), $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1}$;

50. M_0 (2,-1,3), $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{2}$;

51. M_0 (-2,3,1), $\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-7}{1}$;

52. M_0 (2,-1,-5), $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$;

53. M_0 (3,2,-4), $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{3}$;

54. M_0 (3,-2,1), $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{4}$;

55. M_0 (-1,2,0), $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{3}$;

56. M_0 (3,2,1), $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{2}$;

57. M_0 (2,-3,4), $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z}{2}$;

58. M_0 (5,0,-4), $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-3}{-1}$;

59. M_0 (1,0,-5), $\frac{x}{3}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-1}{-6}$;

60. M_0 (1,-6,0), $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z+3}{-2}$;

61. M_0 (2,-3,1), $\frac{x-4}{1}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{3}$;

62. M_0 (3,-1,1), $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-1}{3}$;

63. $M_{0\,0}$(-3,2,-7), $\frac{x+1}{6}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z}{3}$;

64. M_0 (2,1,-4), $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{-1}$;

65. M_0 (2,0,-5), $\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{7}$;

66. M_0 (3,2,-5), $\frac{x-3}{6}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{5}$;

67. M_0 (-1,2,6), $\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z}{2}$;

68. M_0 (4,1,-2), $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+3}{2}$;

69. M_0 (2,-3,1), $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z}{5}$;

70. M_0 (-3,2,5), $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-2}{4}$;

71. M_0 (-1,3,0), $\frac{x+2}{5}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$;

72. M_0 (2,-1,5), $\frac{x+1}{6}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$;

73. M_0 (2,-5,3), $\frac{x-1}{7}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}$;

74. M_0 (-1,4,8), $\frac{x+5}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{6}$;

75. M_0 (10,2,-3), $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{5}=\frac{z}{3}$;

76. M_0 (7,-3,2), $\frac{x}{4}=\frac{y-3}{7}=\frac{z+2}{2}$;

77. M_0 (8,-3,4), $\frac{x}{5}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-1}{-2}$;

78. M_0 (-2,8,3), $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-6}=\frac{z-3}{5}$;

79. M_0 (-1,-1,3), $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+2}{6}$;

80. M_0 (3,-1,2), $\frac{x+3}{4}=\frac{y}{-5}=\frac{z+1}{-2}$;

81. M_0 (4,1,3), $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z}{1}$;

82. M_0 (2,4,4), $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{5}$;

83. M_0 (-1,4,2), $\frac{x+3}{-2}=\frac{y}{7}=\frac{z-1}{4}$;

84. M_0 (4,1,0), $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{-1}$;

85. M_0 (0,5,3), $\frac{x-1}{5}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z}{3}$;

86. M_0 (4,-1,2), $\frac{x}{4}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z-1}{7}$;

87. M_0 (2,5,1), $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{6}=\frac{7}{5}$;

88. M_0 (3,-2,1), $\frac{x+5}{2}=\frac{y}{-5}=\frac{z-2}{3}$;

89. M_0 (1,4,-1), $\frac{x+4}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$;

90. M_0 (4,1,5), $\frac{x}{5}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z-1}{4}$;

91. M_0 (3,-1,2), $\frac{x+7}{-2}=\frac{y}{6}=\frac{z-1}{0}$;

92. M_0 (3,2,-7), $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{4}$;

93. M_0 (4,1,-2), $\frac{x}{8}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{-1}$;

94. M_0 (2,0,5), $\frac{x+3}{4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-1}{-3}$;

95. M_0 (3,-2,1), $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-7}=\frac{z-3}{5}$;

96. M_0 (-1,3,2), $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{8}=\frac{z+3}{2}$;

97. M_0 (1,-6,3), $\frac{x-6}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$;

98. M_0 (3,5.0), $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z}{9}$;

99. M_0 (2,6,-2), $\frac{x+1}{6}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{-2}$;

100. M_0 (4,7,-1), $\frac{x+5}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{6}$.

Завдання 4.1. Границя функції

Обчислити границі функцій:

1.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x}{3x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{5x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$.

2.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{2x^3+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$.

3\.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{|x|}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

4\.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{arctg\, x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$.

5\.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-(\cos x)^3}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$.

6\.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x+3}{x^4-12x+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2ctg2x}{\sin 3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+1)(\ln(x+3)-\ln x)$.

7\.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-2x^2-x}{x^4+3x^2+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-5)(\ln(x-3)-\ln x)$.

8\.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(tg\,\dfrac{x}{2}\right)^2}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.

9\.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+1}{x^4+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\, tg2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{(x^2-4)}}$.

10\.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} x\, tg3x\,(ctg\, 2x)^2$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$.

11. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sin\frac{x}{4}\right)^2}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$.

12. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$;

3) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)(\ln(x+2)-\ln x)$.

13. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-x^3+2x}{2x^6-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-(\cos x)^5}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{(x-2)}}$.

14. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x^2}{6x^2+2x-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{5x}$;

4) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x-4)(\ln(2-3x)-\ln(5-3x))$.

15. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$;

4) $\lim\limits_{x\to -\infty}(3-x)(\ln(1-x)-\ln(2-x))$.

16. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{(1-x)}}$.

17. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-9}{2x^2+9x+9}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+5}{x^3+2x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{arcctg4x}$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(3-4x)(\ln(2x-1)-\ln(2x+1))$.

18. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-(\cos x)^3}{x\sin 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-3}\right)^{3x}$.

19. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-6x-3}{x^3-2x^2+4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} arctg5x$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-7)(\ln(3x+4)-\ln 3x)$.

20. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^5-5x^2+5}{5x^5+2x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{xtg2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-2x)(\ln(2x-1)-\ln(2x-1))$.

21. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{14x^2+3x}{7x^2+2x-8}$; 3) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xtg3x}{\cos x-(\cos x)^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+5)(\ln(x+5)-\ln x)$.

22. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^5-x^2+x}{x^5-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{2x^2+x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)(\ln(2x-3)-\ln(2x+1))$.

23. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^3-2x+7}{3x^3-5x+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x-2}-2}{\sqrt{x+1}-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{2x}{(x-5)}}$.

24. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)(\ln(x+1)-\ln(x-2))$.

25. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^5+6x-5}{x^5+2x^2-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-5x-7}{3x^3+x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} xtg8x$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{2x}{(x-5)}}$.

26. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x+5}$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-5x-7}{3x^3+x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)(\ln(3-2x)-\ln(4-2x))$.

27. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x+2}{2x^4+3x^2-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\ 2x}{xtg3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x}{(x-2)}}$.

28. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x+8}{2x^5-3x^2-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-3x)(\ln(1-3x)-\ln(2-3x))$.

29. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-4x^2+2}{6x^4+2x^3-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$;

2) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+5x+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-5}{6x}\right)^{3x}$.

30. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3x^2-x^5}{2x+3x^2-3x^5}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{5x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin 2x\,(ctgx)^2$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}(4x-1)(\ln(x+3)-\ln(x+4))$.

31. 1) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5-4x)(\ln(1-x)-\ln(2-x))$.

32. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x-5}{6x^2-3x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\ 4x}{5x\sin 2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{2x}{(1-x)}}$.

33. 1) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+x-1}{4(1-x^2)-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+5}{x^3+2x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-4x)(\ln(2x-1)-\ln(2x+1))$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{arctg3x}$;

34. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x+1}{x+\sqrt[3]{x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-(\cos x)^3}{2x\sin 3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-3}\right)^{3x}$.

35. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+4x^2}{x^2+2}-x\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} 5x\,ctg6x$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-7)(\ln(3x+4)-\ln 3x)$.

36. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-\sqrt{x+16}}{2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{xtg6x}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-7x)(\ln(2x-1)-\ln(2x-1))$.

37. 1) $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{x-64}{\sqrt[3]{x}-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xtg3x}{\cos x-(\cos x)^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+5)(\ln(x+5)-\ln x)$.

38. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-x^2+x}{x^5-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)(\ln(2x-3)-\ln(2x+1))$.

39. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^3-x}{7x^2-x+4}$; 3) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{\sqrt{x+1}-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{2x}{(x-5)}}$.

40. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}+\dfrac{1}{1-x}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)(\ln(x+1)-\ln(x-2))$.

41. 1) $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{x-64}{\sqrt[3]{x}-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{4x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)(\ln(x+2)-\ln x)$.

42. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^3-x}{7x^2-x+4}$; 3) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-(\cos x)^5}{3x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{(x-2)}}$.

43. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x^2}{6x^2+2x-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg4x}{9x}$;

4) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x-4)(\ln(2-3x)-\ln(5-3x))$.

44.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to -\infty}(6-7x)(\ln(1-x)-\ln(2-x))$.

45.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x+1)(x+2}{(7x+2)^3}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\ x}{3x\sin 5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{(1-x)}}$.

46.

1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{arcctg5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+5}{x^3+2x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+4}{5x-5}\right)^{2x}$.

47.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-(\cos x)^3}{x\sin\dfrac{2}{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-3}\right)^{3x}$.

48.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-6x-3}{x^3-2x^2+4}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} arcctg5x$;

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

49.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{xtg2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(3-2x)(\ln(2x-1)-\ln(2x-1))$.

50.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}+\dfrac{1}{1-x}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} 5xctg2x$;

3) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-4}\right)^{3x}$.

51.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} 4xctg3x$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{2x}{(x-5)}}$.

52. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x+5}$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^3+x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+2)(\ln(3-2x)-\ln(4-2x))$.

53. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x+2}{2x^4+3x^2-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\,2x}{xtg3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x}{(x-2)}}$.

54. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x+8}{2x^5-3x^2-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+1}{x^2-1}-2x\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to -\infty}(2-3x)(\ln(1-3x)-\ln(2-3x))$.

55. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-4x^2+2}{6x^4+2x^3-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{x}{(x-2)}}$.

56. 1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; 3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x+3}{x^3-4x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}(6x+1)(\ln(x+3)-\ln(x+4))$.

2) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$;

57. 1) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to -\infty}(5-4x)(\ln(1-x)-\ln(2-x))$.

58. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{5x\sin 2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{2x}{(1-x)}}$.

59. 1) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+x-1}{4(1-x^2)-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+5}{x^3+2x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(6-5x)(\ln(2x-1)-\ln(2x+1))$.

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos x}{\pi - 3x}$;

60. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9x+1}{x+\sqrt[3]{x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+3}{4x-3}\right)^{3x}$.

61. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{5x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} x\, tg 3x\, (ctg\ 2x)^2$; 4) $\lim\limits_{x\to 2} (4x-1)(\ln(x+3)-\ln(x+4))$.

62. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to -\infty} (5-4x)(\ln(1-x)-\ln(2-x))$.

63. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-4x^2}{6x^2+2x-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arctg 2x}{5x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+3}{4x-3}\right)^{3x}$.

64. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x-7)(\ln(3x+4)-\ln 3x)$.

65. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-(\cos x)^3}{x\sin 2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} (3x+5)(\ln(x+5)-\ln x)$.

66. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-6x-3}{x^3-2x^2+4}$; 3) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} arctg 5x$; 4) $\lim\limits_{x\to 3} (2x-5)^{\frac{2x}{(x-5)}}$.

67. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^5-4x+8}{2x^5-3x^2-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^3+1}{x^2-1}-2x\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to -\infty} (2-3x)(\ln(1-3x)-\ln(2-3x))$.

68. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4 - 4x^2 + 2}{6x^4 + 2x^3 - 1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x}$;

2) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 5x + 2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$.

69. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 1}{2x^3 + 1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{5x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

70. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 + x^2 - 5}{x^3 + x - 2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{2+x} - 3}{x - 7}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{|x|}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

71. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - 5x}{4x - 2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{5x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+6}{x-7}\right)^x$.

72. 1) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{6}{x^2 - 9}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 7x}{8x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{7x-1}{7x+1}\right)^x$.

73. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 + x^2 - 5}{x^3 + x - 2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{|x|}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

74. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4 + x^2 - 6}{2x^4 - x + 2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+3x} - 1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{arctg\ 7x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + 2x)^{1/x}$.

75. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + 6x - 5}{5x^2 - x - 1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - (\cos x)^3}{4x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - 9)(\ln(x+1) - \ln x)$.

76.
1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x+3}{x^4-12x+4}$;
3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;
2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2ctg6x}{\sin 5x}$;
4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(6x+4)(\ln(x+3)-\ln x)$.

77.
1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-2x^2-x}{x^4+3x^2+2}$;
3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;
2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 10x-\cos 4x}{x^2}$;
4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)(\ln(x-3)-\ln x)$.

78.
1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+4x-2}$;
3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;
2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(tg\,\frac{x}{3}\right)^2}{4x^2}$;
4) $\lim\limits_{x\to1}(7-2x)^{\frac{4x}{3x-3}}$.

79.
1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+1}{x^4+3}$;
3) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;
2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\,tg2x}$;
4) $\lim\limits_{x\to2}(3x-5)^{\frac{2x}{(x^2-4)}}$.

80.
1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$;
3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;
2) $\lim\limits_{x\to0}3x\,tg4x\,(ctg\,6x)^2$;
4) $\lim\limits_{x\to3}(3x-8)^{\frac{4}{(x-5)}}$.

81.
1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x+5}$;
3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^3+x-2}$;
2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)$;
4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)(\ln(3-2x)-\ln(4-2x))$.

82.
1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x+2}{2x^4+3x^2-1}$;
3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$;
2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos\,2x}{xtg3x}$;
4) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{x}{(x-2)}}$.

83.
1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x+8}{2x^5-3x^2-1}$;
3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+1}{x^2-1}-2x\right)$;
2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$;
4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-3x)(\ln(1-3x)-\ln(2-3x))$.

84.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+4x^2}{x^2+2}-x\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{x}{(x-2)}}$.

85.

1) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xtg3x}{\cos x-(\cos x)^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}(3x+5)(\ln(x+3)-\ln(x+4))$.

86.

1) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to -\infty}(4-9x)(\ln(1-x)-\ln(2-x))$.

87.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+1}{6x+\sqrt[3]{x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\ 9x}{6x\sin 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{2x}{(1-x)}}$.

88.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-6x-3}{x^3-2x^2+4}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\ tg2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(3-2x)(\ln(2x-1)-\ln(2x-1))$.

89.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}+\dfrac{1}{1-x}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}4xctg3x$;

3) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{2x}{(x-5)}}$.

90.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x+5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\ tg3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^3+x-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x}{(x-2)}}$.

91.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x+8}{2x^5-3x^2-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+1}{x^2-1}-2x\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{x}{(x-2)}}$.

92.

1) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3}{x^3-4x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5-4x)(\ln(1-x)-\ln(2-x))$.

93.

1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^3+x-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)(\ln(3-2x)-\ln(4-2x))$.

94.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x+2}{2x^4+3x^2-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-3x)(\ln(1-3x)-\ln(2-3x))$.

95.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-4x^2+2}{6x^4+2x^3-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}x\ \sin 2x\ \ (ctg\ x)^2$;

3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$;

4) $\lim\limits_{x\to2}(4x-1)(\ln(x+3)-\ln(x+4))$.

96.

1) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos\ 4x}{5x\sin 2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{2x}{(1-x)}}$.

97.

1) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+x-1}{4(1-x^2)-3}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-(\cos x)^3}{2x\sin 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+5}{x^3+2x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-3}\right)^{3x}$.

98.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+4x^2}{x^2+2}-x\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\ tg6x}$;

3) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-7x)(\ln(2x-1)-\ln(2x-1))$.

99.

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+4x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\ tg3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^3+x-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{x}{(x-2)}}$.

100. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x+8}{2x^5-3x^2-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+1}{x^2-1}-2x\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x^2-2x}{2x^2-5}$; 4) $\lim\limits_{x\to3}(3x-8)^{\frac{3x}{(x-3)}}$.

Завдання 5.1. Похідна функції

Обчислити похідну функції:

1. $y=3xe^{-3x^2}+2$ $y=\dfrac{5x}{sin3x+2}$ $y=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+1}$

$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ $y=2xe^{sin5x}$ $y=sin(\ln(1+e^{\sqrt{x}}))$

$y=(arctg5x)^3$ $y=\cos(1+\sqrt{x})^4$ $y=x^{tgx}$

2. $y=(4-x^2)e^{\sqrt{x}}+\pi$ $y=\dfrac{1-5x^2}{cos3x+4}$ $y=\dfrac{\sqrt[3]{1-3x^2}}{5x+4}$

$y=\ln(x+\dfrac{1}{x+4})$ $y=(3+x^5)e^{sinx}$ $y=arctgln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+x\right)$

$y=(\arcsin(1-x))^4$ $y=(arccos7x)^3$ $y=(1-x)^{cos3x}$

3. $y=x^2 2^{-x}+5$ $y=\dfrac{7x}{cos5x+2}$ $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2+3}$

$y=\ln(3x-\sqrt{1-x})$ $y=3xe^{cos4x}$ $y=cos\ln\left(1-3^{x^2}\right)$

$y=(arcsin3x)^5$ $y=\sin(1+\sqrt[3]{x})^8$ $y=x^{sinx}$

4. $y=5x^3 3^{2-x}+4$ $y=\dfrac{3-x}{sin2x-4}$ $y=\dfrac{\sqrt{x^3-1}}{x+5}$

$y=\ln(x+\sqrt[3]{1-x^2})$ $y=x^2e^{-cos3x}$ $y=ln(\sin(4+e^{-x}))$

$y=(arctg(1-3x))^5$ $y=\cos(1-e^{3x})^3$ $y=x^{\cos(1-x)}$

5. $y=(1-4x)e^{-x^3}+2$ $y=\dfrac{\arcsin(1-5x^2)}{1-x}$ $y=(1-x^2)2^{\cos(1+x)}$

$y=\dfrac{x^3+2}{\sqrt{x-x^2}}$ $y=ln\dfrac{1}{x^2+\sqrt{x+3}}$ $y=sinln\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$y=(arccos7x)^3$ $y=\sin(e^x+x)^5$ $y=(7+x)^{cosx}$

6. $y=(x+4)e^{1-x^2}+\sqrt{7}$ $y=\dfrac{3x+1}{\arcsin(1-x)}$ $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{3-x^3}$

$y=ln\dfrac{1}{x+\sqrt{1-x}}$ $y=(3+x^2)e^{arccos2x}$ $y=arctg(\ln\left(5+e^{\frac{1}{x}}\right))$

$y=(\sin(1-e^{2x}))^3$ $y=tg(1+\sqrt[3]{x})^7$ $y=(x+sinx)^x$

7. $y=cosx(x-1)+3$ $y=\dfrac{\cos(1-x)+5}{x^4}$ $y=\dfrac{\sqrt{x^5+1}}{3x+5}$

$y=x^3e^{arctg3x}$ $y=\ln(x^2-\sqrt[3]{1-x})$ $y=cosln(\operatorname{arctg}\sqrt[5]{x})$

$y=(sin3x)^8$ $y=\ln(1-e^{-x})^7$ $y=x^{\ln(1-e^x)}$

8. $y=x^2 4^{1-x^2}+\pi$ $y=\dfrac{1+7x^4}{3cos5x+2}$ $y=\dfrac{5-x}{\sqrt{1-3x^3}}$

$y=x^3e^{sin3x}$ $y=\ln(x^2+\sqrt{5-x})$ $y=\cos(tg(\sqrt{x}-x^2))$

$y=(\arcsin(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}))^5$ $y=arctg\sqrt[3]{1-x}$ $y=(1-3x)^{arccos6x}$

9. $y=x^4e^{1-\sqrt{x}}+4$ $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{(1+x)^3}$ $y=\dfrac{\cos(1-5x)}{4+x^2}$

$y = \ln(1+\sqrt[3]{4+x^3})$ $\quad y = x^3 2^{tg3x}$ $\quad y = \mathrm{arccos}\ln(x+e^{-x})$

$y = (arcctg(1-x))^7$ $\quad y = (arcsinx)^{-x^2}$ $\quad y = 6x^{ctg9x}$

10. $y = 3xe^{-3x^2}+2$ $\quad y = \dfrac{5x}{sin3x+2}$ $\quad y = \dfrac{\sqrt{3-x^2}}{2x+5}$

$y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ $\quad y = 2xe^{sin5x}$ $\quad y = sin\ln(1+e^{\sqrt{x}})$

$y = (arctg5x)^3$ $\quad y = \cos(5+4\sqrt{x})^6$ $\quad y = 7x^{tg3x}$

11. $y = 4x^7 5^{1-\sqrt{x}}$ $\quad y = \dfrac{\mathrm{arctg}(9-x)}{5+x^4}$ $\quad y = \dfrac{1-7x}{\sqrt[3]{(2x+4)^2}}$

$y = 2^{ln3x}(1-3x^3)$ $\quad y = \mathrm{arctg}\ln(6+e^{2x})$ $\quad y = (arcsin\left(1-\dfrac{4}{x}\right))^3$

$y = (cos(3-x))^6$ $\quad y = (5sinx)^{\sqrt{x}}$ $\quad y = ln\left(x+e^{-x^3}\right)$

12. $y = 2x^7e^{2-8x}+4$ $\quad y = \dfrac{3x^2+5}{\arccos(1-6x)}$ $\quad y = \dfrac{\sqrt{3-4x^2}}{1-5x}$

$y = ln\dfrac{1}{4+\sqrt[3]{2+x^4}}$ $\quad y = 5^{cos4x}(1+4x^3)$ $\quad y = \mathrm{ctg}(1+5\sqrt{x})^4$

$y = x6^{arctg\sqrt[3]{x}}+\sqrt{2}$ $\quad y = \mathrm{arcctg}\ln\left(1+e^{-x^2}\right)$ $\quad y = \sqrt{x}^{sin(1-x)}$

13. $y = 4^{-x+3}(1-7x^3)$ $\quad y = \dfrac{2x-9}{cos(6-x^2)}$ $\quad y = \dfrac{\sqrt[5]{x^3+6}}{2x+4}$

$y = ln\left(x^6+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $\quad y = (2x+3)e^{\sin(5-x)}$ $\quad y = arcsin\ln\left(5+4^{\frac{1}{x}}\right)$

$y = (\mathrm{tg}(1+x^4)^7$ $\quad y = \dfrac{9x^2+8}{\mathrm{arcctg}(3-4x)}$ $\quad y = \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{cos(1+x)}$

14. $y = x^3 5^{1-\sqrt{x}} + 8$ $\quad y = (\sin(1 + 2^{\sqrt{x}})^8$ $\quad y = \dfrac{7x - 9}{\sin(4x + 1)}$

$y = \dfrac{\sqrt[3]{9x + 2}}{x^3 - 7}$ $\quad y = 2x^3 e^{\cos(2-8x)}$ $\quad y = \ln(6 + \sqrt[3]{7 + x^5})$

$y = (arccos(4 - 6x))^2$ $\quad y = tg \ln\left(1 - e^{x^2}\right)$ $\quad y = (1 - 4x^3)^{lnx}$

15. $y = e^{-x+3}(6 - 7x^2)$ $\quad y = \dfrac{\arcsin\left(9 - 4\sqrt{x}\right)}{\sqrt{4 + x^5}}$ $\quad y = \dfrac{1 + \sqrt[3]{x + x^2}}{5x^3 - 3}$

$y = \ln\left(\dfrac{1}{x + 3} + \sqrt{x}\right)$ $\quad y = 4^{sin7x}(5 - 7x^6)$ $\quad y = (\cos(7x + x^3))^5$

$y = sin^5\left(x + e^{\sqrt[3]{x}}\right)$ $\quad y = arcsin^9(x + 6)$ $\quad y = (1 + \sqrt{x})^{2x^{4+3}}$

16. $y = \left(\sqrt{x} + 4\right)e^{x^2} + 5$ $\quad y = \dfrac{(3x - 5)^6}{\sqrt[3]{x} - 3}$ $\quad y = \dfrac{cos(x - 6x^4)}{x^5 - 7}$

$y = ln\left(2 + \sqrt[5]{2 - x^4}\right)$ $\quad y = x^3 3^{\mathrm{arctg}8x}$ $\quad y = \dfrac{\mathrm{arctg}(9 - 3x)}{x^4 + 3}$

$y = arcsin^6(5x + 7)$ $\quad y = 6cos^5\left(8x - e^{\sqrt[3]{x}}\right)$ $\quad y = (7tgx)^{cos3x-\sqrt{x}}$

17. $y = 2x^3 6^{1-4\sqrt{x}} + 9$ $\quad y = \dfrac{\mathrm{arctg}(2x - 4x^5)}{\sqrt{x} + 7}$ $\quad y = \dfrac{5 - 7x^2}{\sqrt{2 - 3x^6}}$

$y = 2x^8 7^{\ln(5x-1)}$ $\quad y = \ln(x + 3^{-\sqrt{x}} + 4)$ $\quad y = cos \ln\left(5 + e^{-\sqrt{x}+2}\right)$

$y = sin^7(8x + 3)$ $\quad y = arcsin^4\left(1 + \dfrac{2}{x^3}\right)$ $\quad y = 7tgx^{1-\sqrt{x}}$

18. $y = \sqrt[3]{x^2} e^{1-3x^3} + 4$ $\quad y = \dfrac{x - 7x^2}{\sqrt{2x - 3x^5}}$ $\quad y = \dfrac{\sin(9x^2 - x)}{5 + x^7}$

$y = ctg^7(4x + 1)$ $\quad y = sin \ln\left(5e^{\sqrt[3]{x^2-x}}\right)$ $\quad y = ln\left(1 + \sqrt[3]{1 - x^5}\right)$

$y = tg^5\left(x^4 + e^{5\sqrt[3]{x}}\right)$ $\quad y = 6x^4 5^{\arccos\sqrt{x}}$ $\quad y = (arcctg)^{-2\sqrt{x}}$

19. $y = (7x^2 + 1)4^{3x} + 9$ $\quad y = \dfrac{1 - 6x}{\mathrm{ctg}(4x^3 + 1)}$ $\quad y = \dfrac{8 - 5x^7}{\sqrt{2 - 3x}}$

$y = ctg\ln\left(7 + 5^{\sqrt{x}+1}\right)$ $\quad y = \ln(4x + \sqrt[3]{x^5})$ $\quad y = e^{sin4x}(5x - 1)$

$y = arccos^8(1 - 9x^2)$ $\quad y = arctg^4(9 - e^{5x})$ $\quad y = (1 + 4x^7)^{\sqrt{x}}$

20. $y = (1 + 9x)e^{3x + x^3}$ $\quad y = \dfrac{\mathrm{arctg}(1 - 8x)}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\quad y = \dfrac{\sqrt{9x + 5}}{5x^6 + x^7}$

$y = \ln\left(\dfrac{1}{x + \sqrt[3]{1 - x}}\right)$ $\quad y = (6 - x^4)5^{\sin(1 - x)}$ $\quad y = tg\ln\left(\dfrac{5}{x} + \sqrt[3]{x}\right)$

$y = 6ctg^9(4x + 1)$ $\quad y = sin^4\left(e^{-x} + \dfrac{4}{\sqrt{x^3}}\right)$ $\quad y = (cos4x)^{8 - 5\sqrt{x}}$

21. $y = (7 + 9x^2)2^{3 - \sqrt{x}}$ $\quad y = \dfrac{5x - 8}{1 - 2\mathrm{sin}x}$ $\quad y = \dfrac{\sqrt[3]{1 - x^2}}{3 - 4x}$

$y = \ln(6x + \sqrt[3]{1 - 5x})$ $\quad y = arctg^3(7 + e^{9x})$ $\quad y = arccos^8(9 - 6x)$

$y = \ln^7\left(2 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$ $\quad y = 5x^4 e^{\cos 7x}$ $\quad y = (1 - 4x^3)^{sin6x}$

22. $y = (4 + 6x)5^{x^2} + 2$ $\quad y = \dfrac{\sin(7x - 9x^2)}{5 - x}$ $\quad y = \dfrac{5x + 8}{2\sqrt[3]{x} + 6x}$

$y = 3cos^4\left(9 + e^{\sqrt{x}}\right)$ $\quad y = \ln(8x - \sqrt[3]{x^2 - x})$ $\quad y = \ln sin\left(1 - e^{-\sqrt{x}}\right)$

$y = 6x^7 e^{arcctg4x}$ $\quad y = arctg^5(7 - 4x)$ $\quad y = (4\sqrt{x})^{5lnx}$

23. $y = (5 + 2x)e^{x^4} + 6$ $\quad y = \dfrac{\mathrm{arctg}(6 - 5x)}{x^2 + 3}$ $\quad y = \dfrac{15 - 4x^3}{\sqrt{x - 3x^2}}$

$y=\ln\left(\frac{x}{3-\sqrt[3]{x}}\right)$ $y=arctg\ln\left(4-\sqrt[3]{x}\right)$ $y=2x^{8}4^{\cos\sqrt{x}}$

$y=3arcctg^{4}(6-2x)$ $y=3sin^{9}\left(4-e^{\sqrt{x}}\right)$ $y=(x+cos4x)^{x^{2}}$

24. $y=(5-6x^{3})e^{6x}+9$ $y=\frac{\operatorname{tg}(2-7x)}{x^{3}+5}$ $y=\frac{cos\sqrt{x}+3}{2\sqrt[3]{x}+x}$

$y=4sin^{5}(8x^{2}+1)$ $y=x^{7}8arcsin5x$ $y=\ln\left(\frac{x}{x+\sqrt[6]{5x+3}}\right)$

$y=\ln cos\left(x-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$ $y=\ln^{3}(1+e^{6x})$ $y=(arctg\left(1-\sqrt{x}\right))^{x}$

25. $y=(5x-1)e^{\frac{1}{\sqrt{x}}+4}$ $y=\frac{(2x+4)^{5}}{\sqrt[4]{x^{3}}}$ $y=\frac{5+6x^{3}}{\operatorname{tg}(3x+1)}$

$y=2x^{3}6^{\cos(5-x)}$ $y=\ln\left(9x-\sqrt[3]{1-x^{2}}\right)$ $y=arcsin\ln\left(e^{5x}-\frac{1}{x}\right)$

$y=5cos^{9}\left(4x+e^{\sqrt{x}}\right)$ $y=5lnctg^{7}\left(1+8^{\sqrt{x}}\right)$ $y=(cos(2-x))^{x}$

26. $y=(3+2x^{2})e^{\sqrt{3-x}}$ $y=\frac{5-4x}{\cos3x-6}$ $y=\frac{\sqrt[3]{6-3x}}{5x+7}$

$y=(2-x^{3})6^{\cos(2+6x)}$ $y=arctg\ln\left(x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$ $y=\ln\left(5x-\frac{1}{1-x}\right)$

$y=arcsin^{4}(3x+9)$ $y=3ctg^{7}(e^{3x}+1)$ $y=(ln4x)^{5-\sqrt{x}}$

27. $y=4x^{7}2^{5x}+7\pi$ $y=\frac{7x^{2}}{\cos(3-2x)-5}$ $y=\frac{\sqrt{6-3x}}{2x^{3}+4}$

$y=\ln\left(3x+\sqrt[3]{x^{2}-8}\right)$ $y=9x6^{\operatorname{tg}(2+3x)}$ $y=cos\ln\left(1-3^{x^{4}}\right)$

$y=arcsin^{7}(5x+2)$ $y=3tg^{5}(2x^{2}+1)$ $y=(3x+4)^{sin5x}$

28. $y = 6x^5 3^{-x^2} - \pi^3$ $\quad y = \frac{7-2x}{\text{ctg}3x - 1}$ $\quad y = \frac{\sqrt{1-3x^2}}{3-2x}$

$y = 5x^3 cos4x$ $\quad y = \ln\left(x - \sqrt[5]{1-4x^2}\right)$ $\quad y = 2\ln sin(6 - e^{5x})$

$y = arctg^3(3x+2)$ $\quad y = cos^5(e^{5x}+4)$ $\quad y = (x+1)^{\sin(2-5x)}$

29. $y = (3-2x)e^{-x^3} + \sqrt{3}$ $\quad y = \frac{\arcsin(3-9x^2)}{3x+2}$ $\quad y = \ln\left(\frac{1}{4-2x+\sqrt[3]{x}}\right)$

$y = \frac{5x^4+1}{\sqrt{x^2+2x}}$ $\quad y = (1-3x^3)4^{\ln(1-x)}$ $\quad y = sin\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 5x\right)$

$y = ctg^4(3x+8)$ $\quad y = arccos^7(e^{-4x}+x)$ $\quad y = (x+1)^{\text{tg}(1-9x)}$

30. $y = (3+6x)4^{1-x^2} + 1$ $\quad y = \frac{\sin(4-2x)}{x^4+6}$ $\quad y = \frac{\sqrt[3]{4-3x}}{2x^5+8x}$

$y = 6x^4 arcsine^{5x}$ $\quad y = \ln cos\left(9 - e^{\sqrt[6]{x}}\right)$ $\quad y = \ln\left(5x - \sqrt[3]{x^2}\right)$

$y = arccos^8(3x+7)$ $\quad y = ctg^5\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $\quad y = (tg6x)^{arctgx}$

31. $y = (2+x)e^{tgx} + 1$ $\quad y = \frac{7x+2}{\text{arctg}(3-4x)}$ $\quad y = \ln\left(\frac{3}{2x+\sqrt{4-x^2}}\right)$

$y = \frac{\sqrt{9+x^2}}{2-x^5}$ $\quad y = (6-x^4)e^{\arccos 9x}$ $\quad y = arccos^5(4x+8)$

$y = \text{arcctgln}\left(6 - e^{\sqrt{x}}\right)$ $\quad y = sin^5(3+e^{4x})$ $\quad y = (tg3x)^{arcctg4x}$

32. $y = (2+7x)e^{5x} + ln3$ $\quad y = \frac{\cos(3-x)+4}{x^6}$ $\quad y = 8x^2 e^{arcctg(1-x)}$

$y = \frac{\sqrt{3x+6x^7}}{2-x}$ $\quad y = \ln\left(x^3 - \sqrt[3]{1+x}\right)$ $\quad y = sin^4(4x+7)$

$y = tg^5(3x + e^{2x})$ $\quad y = \ln arccos\left(7 - \sqrt[5]{x}\right)$ $\quad y = x^{\ln(4-e^{-3x})}$

33. $y = 4x^7 7^{1-x^2} + 6$ $\quad y = \dfrac{5 - \sqrt{x}}{\cos 3x - 4x}$ $\quad y = \dfrac{\sqrt{2x^2 + 5}}{9 - 3x}$

$y = \ln(x^2 + \sqrt{3 - 5x})$ $\quad y = (1 - x)^7 e^{\mathrm{arcctg} 9x}$ $\quad y = sin\,\mathrm{tg}\left(\sqrt[3]{x} + 9x\right)$

$y = arctg^5(8x + 2)$ $\quad y = arccos^6\left(8x + \sqrt{x}\right)$ $\quad y = (3x - 4)^{\mathrm{ctg}x}$

34. $y = x^5 e^{4-2\sqrt{x}} + ln^4 3$ $\quad y = \dfrac{\sqrt[3]{(3 - 2x)^2}}{2x^7 + 5x}$ $\quad y = \dfrac{2\cos(6 - 4x) + 4}{4 - 3x^6}$

$y = 3x^7 2^{ctg(1-6x)}$ $\quad y = \ln\left(\sqrt[5]{x^4 + 3} - 5\right)$ $\quad y = \arccos ln(e^{2-x})$

$y = arcctg^3(7x + 1)$ $\quad y = ctg^5(3 + e^{-7x})$ $\quad y = (\arcsin(4 - x))^{-x^2}$

35. $y = 3xe^{3x^2} + 7$ $\quad y = \dfrac{5 - 4x}{\sin 13x - 6}$ $\quad y = \dfrac{\sqrt{5x^2 + 9}}{2 - 6x}$

$y = \ln(x + \sqrt{3x - x^4})$ $\quad y = ctg\ln\left(9 - e^{-\sqrt[3]{x}}\right)$ $\quad y = 7xe^{\sin(1-4x)}$

$y = arctg^4(4x + 2)$ $\quad y = cos^9\left(6 + 3\sqrt{x}\right)$ $\quad y = (2x - 5)^{\mathrm{ctg}4x}$

36. $y = 8x^5 6^{4-2x^2} + e$ $\quad y = \dfrac{\mathrm{arctg}(3 - 7x) + 1}{5 - 2x^9}$ $\quad y = \dfrac{4 + 3x}{\sqrt[6]{(x - 1)^5}}$

$y = \ln\left(4x - e^{-x^2}\right)$ $\quad y = (1 - 3x)^4 e^{\mathrm{ctg}5x}$ $\quad y = \mathrm{arctg}\, ln(e^{6x} - 1)$

$y = cos^7\left(9 + 3\sqrt[3]{4x}\right)$ $\quad y = arcsin^5\left(\dfrac{3}{x} + 2\right)$ $\quad y = (tg8x)^{arccosx}$

37. $y = 2x^4 e^{7-2x^8} + ln3$ $\quad y = \dfrac{6 - 7x^3}{\sqrt{5x - x^4}}$ $\quad y = \dfrac{\mathrm{arctg}(3x^5 - 7x)}{5 - \sqrt{x}}$

$y = \cos ln\left(\sqrt{3-2x}\right)$ $\quad y = \ln(6x - 5^{tgx})$ $\quad y = 3x^4 5^{\text{ctg}(1-7x)}$

$y = sin^9\left(3 + 2\sqrt[6]{8x}\right)$ $\quad y = 4arcsin^8\left(\frac{2}{x^3} + 1\right)$ $\quad y = (ln4x)^{cos\sqrt{x}}$

38. $y = 4\sqrt[3]{x^2}e^{5-2x^5} + 5$ $\quad y = \frac{6x - 2x^2}{\sqrt{9x - x^7}}$ $\quad y = \text{arctg}\, ln\left(3^{x+x^2} - 1\right)$

$y = \frac{\sin(5 - 3x^3)}{tg(x^4 + 6)}$ $\quad y = \ln\left(9 - \sqrt[5]{x^4 + 2}\right)$ $\quad y = 2x^6 7^{\arcsin(\sqrt{x}-7)}$

$y = tg^7(3 + 2x)$ $\quad y = cos^9(3^x + x^2)$ $\quad y = (arccos2x)^{1+\sqrt[3]{x}}$

39. $y = (2 - 3x^5)4^{2x} + 3$ $\quad y = \frac{7 - 3x}{\cos(7x^2 - 6)}$ $\quad y = arcsin^5(x^3 + 4)$

$y = \frac{6 - 3x^6}{\sqrt{9x - 6}}$ $\quad y = \ln\left(3x - \sqrt[3]{x^7 + 1}\right)$ $\quad y = (7x - 4)e^{\arcsin(x-1)}$

$y = arctg^8(e^{3x} + 2)$ $\quad y = \text{ctg}\, ln(e^{-x} + 1)$ $\quad y = (9 + x^2)^{\sqrt{x}}$

40. $y = (4 + 2x)e^{3x-2x^2}$ $\quad y = \frac{\arcsin\left(3 + \sqrt{4x}\right)}{\sqrt{1 + x^2}}$ $\quad y = \ln\left(\frac{2}{6x + \sqrt[3]{1 + x}}\right)$

$y = (1 - 8x^3)4^{2sinx}$ $\quad y = \cos ln\left(\sqrt[5]{7x} - \frac{9}{x}\right)$ $\quad y = \frac{\sqrt{5x - 6}}{x^4 - 4x}$

$y = 2arctg^7(4 + 3x)$ $\quad y = sin^7\left(e^{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}\right)$ $\quad y = (\cos(4x - 5))^{1+\sqrt{x}}$

41. $y = (3 + x^3)2^{1+\sqrt{x}}$ $\quad y = \frac{5 - 7x}{4\text{sin}x - 16}$ $\quad y = \frac{\sqrt[3]{4 - x^2}}{3 + 8x}$

$y = 2x^4 e^{\cos 5x}$ $\quad y = \ln\left(4x - \sqrt[3]{x + 1}\right)$ $\quad y = sin\,\text{arctg}\left(\sqrt{x} + 9\right)$

$y = 3arctg^5(2 + 5x)$ $\quad y = ln^7\left(2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)$ $\quad y = (2 - 3x^4)^{\cos 5x}$

42. $y=(5-4x)2^{x^2}$ $\qquad y=\dfrac{\sin(3\sqrt{x}-x)+6}{x^2}$ $\qquad y=\dfrac{2x+x^2}{\sqrt[3]{x}+6x}$

$y=\ln\left(3x-\sqrt[3]{x^6-x}\right)$ $\qquad y=\ln\cos\left(e^{5\sqrt{x}}-7\right)$ $\qquad y=(1-x)^4 8^{arctgx}$

$y=8arccos^5(1+9x)$ $\qquad y=cos^3\left(e^{2\sqrt{x}}+3\right)$ $\qquad y=(\sqrt[7]{x})^{ln(x+1)}$

43. $y=(1-2x)e^{x^3}+4$ $\qquad y=\dfrac{\mathrm{arctg}(3-4x)}{x^2-9}$ $\qquad y=\dfrac{4+3x^4}{\sqrt[3]{x^2-3}}$

$y=\ln\left(\dfrac{3x}{2+4\sqrt[3]{x}}\right)$ $\qquad y=arccos\ln\left(3\sqrt{x}+9\right)$ $\qquad y=(1-2x)^7e^{tg\sqrt{5x}}$

$y=arctg^5(1+3x)$ $\qquad y=sin^7\left(e^{-\sqrt{x}}+3\right)$ $\qquad y=(4x+cos2x)^{x^2}$

44. $y=(1-x^3)e^{5x}+9$ $\qquad y=\dfrac{\mathrm{tg}(3x-4)}{5x^6-7}$ $\qquad y=\dfrac{\cos\sqrt{3x}-5}{9x-\sqrt[3]{4x}}$

$y=\ln\left(\dfrac{2}{9x+\sqrt[4]{1+5x}}\right)$ $\qquad y=x^6 9^{\arcsin(6-x)}$ $\qquad y=ln\cos\left(5x+\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}\right)$

$y=sin^9(2+3x^2)$ $\qquad y=ln^4(9-e^{2-x})$ $\qquad y=(\mathrm{arctg}(1-\sqrt{x}))^{1-x}$

45. $y=(1+7x)e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}+3$ $\qquad y=\dfrac{(x-3)^5}{\sqrt{5x-x^4}}$ $\qquad y=\dfrac{2-8x^6}{tg(4+2x)}$

$y=\ln\left(7x-\sqrt[3]{x^5-4}\right)$ $\qquad y=x^8 2^{\cos(6-x)}$ $\qquad y=arcsinln\left(e^{5x}-\dfrac{9}{x}\right)$

$y=cos^7\left(e^{-\sqrt{x}}+4x\right)$ $\qquad y=sin^7(2+3x^2)$ $\qquad y=(ctg(x+7)^{3x}$

46. $y=(x+3)^2 2^{x^4}+\pi$ $\qquad y=\dfrac{4+2x}{\cos 3x-1}$ $\qquad y=\dfrac{\sqrt{1+3x}}{x^3-x}$

$y=\ln\left(7x-\sqrt{5+4x}\right)$ $\qquad y=cosln\left(6^{-x^2}-8\right)$ $\qquad y=arcsin^5(2+9x)$

$y = sin^8(7+\sqrt[3]{x})$ $\quad y = 5xe^{\cos 7x}$ $\quad y = (x+7)^{sin3x}$

47. $y = (x+8)^6 3^{x-2} + \pi$ $\quad y = \dfrac{5-x}{\sin 7x - 1}$ $\quad y = \dfrac{\sqrt{1+3x^4}}{8x+4}$

$y = \ln\left(4x - \sqrt[3]{x^2-6}\right)$ $\quad y = 5x^2 e^{\cos(1+3x)}$ $\quad y = lncos(e^{5x} - 1)$

$y = arctg^8(4+3x)$ $\quad y = arcsin^4(5 - e^{-x})$ $\quad y = (x+4)^{\cos(3x-x^2)}$

48. $y = (3x+4)^3 e^{x-2} + 1$ $\quad y = \dfrac{1-3x}{\mathrm{ctg}4x - 2}$ $\quad y = \dfrac{\sqrt{1-2x^7}}{5x+6}$

$y = ln^8\left(\dfrac{1}{7+e^{-x^2}}\right)$ $\quad y = \ln\left(7x - \sqrt[3]{x^2+5}\right)$ $\quad y = arccos^8(2+3x)$

$y = arcsin^2(5 - e^{2-x})$ $\quad y = 3x^5 4^{\mathrm{ctg}(1+2x)}$ $\quad y = (x+9)^{\mathrm{arcctg}\,7x}$

49. $y = (4x^2+6)^3 e^{\sqrt{x}} + 3$ $\quad y = \dfrac{\sqrt[3]{3-9x^2}}{3x+2}$ $\quad y = \dfrac{x^2-x}{\mathrm{tg}5x - 1}$

$y = lnsin\left(4x - \dfrac{2}{x+3}\right)$ $\quad y = (5-x^4)e^{\mathrm{tg}(3-x)}$ $\quad y = ln^9\left(\dfrac{7x}{3+2^{-x^2}}\right)$

$y = arcctg^2(5x - \sqrt[3]{x})$ $\quad y = 3x^7 6^{\mathrm{tg}(1+8x)}$ $\quad y = (tg9x)^{3-\sqrt{x}}$

50. $y = (2x+5)^6 7^x + \sqrt{8}$ $\quad y = \dfrac{\sin(3+8x)}{4(x-1)^2}$ $\quad y = 5(x-2)^5 e^{\mathrm{arcsin9x}}$

$y = \dfrac{\sqrt[3]{3+6x}}{(x+2)^5+7}$ $\quad y = \ln\left(9x - \sqrt[3]{2x^2+1}\right)$ $\quad y = sin^5\left(4x + \dfrac{3}{x^2}\right)$

$y = lncos\left(8 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)$ $\quad y = arccos^2(5x - x^3)$ $\quad y = (arctg6x)^{1+x^2}$

51. $y = (1+3x)8^{-x^3} + 5$ $\quad y = \dfrac{\sin(9-4x)}{4(2x+1)^5}$ $\quad y = \dfrac{\sqrt[3]{3-2x}}{x^4+1}$

$y = 9x^5 e^{\sin(1+4x)}$ $\quad y = \ln\left(7x - 3\sqrt{x^3+4}\right)$ $\quad y = 2lncos\left(4 - e^{-\frac{3}{\sqrt{x}}}\right)$

$y = arcsin^7(4x+1)$ $\quad y = ctg^5\left(\sqrt{3x} + \frac{5}{x^2}\right)$ $\quad y = (tg6x)^{7x+x^2}$

52. $y = (7+x^2)e^{\sqrt{2x}} + 1$ $\quad y = \frac{2-4x^2}{\cos 4x - 7}$ $\quad y = \frac{\sqrt[3]{4-8x^2}}{7x+5}$

$y = \ln\left(5x - \frac{1}{4x+6}\right)$ $\quad y = arcsin^8(6x+1)$ $\quad y = tg^7\left(4 + e^{\sqrt{1-x}}\right)$

$y = 4lnsin\left(8 - e^{-\frac{7}{\sqrt{x}}}\right)$ $\quad y = tg^7\left(\sqrt{2x} + \frac{6}{x^3}\right)$ $\quad y = (5x - sin2x)^{4x}$

53. $y = (4+7x)e^{5x} + 1$ $\quad y = \frac{\cos(9-7x) - 3}{8x^5}$ $\quad y = \ln\left(4x^2 - \sqrt[6]{5x-6}\right)$

$y = (1+5x)^4 e^{arctg6x}$ $\quad y = \frac{\sqrt{7-2x^4}}{8x+2}$ $\quad y = lnarccos\left(4 - 6\sqrt{x}\right)$

$y = sin^9(4x+5)$ $\quad y = ln^6(4 + 5e^{-2x})$ $\quad y = (8sin9x)^{ln4x}$

54. $y = (4+9x^5)8^{2x} + 5$ $\quad y = ln^4\left(4 + \frac{1}{\sqrt{7-x}}\right)$ $\quad y = \frac{2-5x^2}{\cos^6(4x-7)}$

$y = tg^5(3x+1)$ $\quad y = \frac{12-4x}{\sqrt{2-x^4}}$ $\quad y = costg\left(x^3 - \sqrt{8x}\right)$

$y = arcsin\sqrt{12+5x}$ $\quad y = (1+x)^3 e^{tg6x}$ $\quad y = (5-4x)^{arcctg9x}$

55. $y = 6x^8 e^{3-x^4} + e^3$ $\quad y = \frac{\mathrm{arcctg}(2-5x^4)}{6-x^5}$ $\quad y = ln\left(\frac{1}{x^3 + \sqrt{3x^2-4}}\right)$

$y = \frac{14x+6x^2}{\sqrt{8-x^3}}$ $\quad y = (15+x)^3 5^{ctg8x}$ $\quad y = sintg\left(\sqrt[3]{x^4} - 5x^2\right)$

$y = cos^7(9x+3)$ $\quad y = arccos^6(7x+1)$ $\quad y = (1+3x)^{ctg5x}$

56. $y=(3+x^6)e^{\sqrt[3]{x}}+7$ $\quad y=\dfrac{9-4x}{cos4x+1}$ $\quad y=\dfrac{\sqrt[3]{8+2x^2}}{7x+5}$

$y=\ln\left(9x-3\sqrt{x^7}\right)$ $\quad y=(6-x^7)e^{\mathrm{ctg}(3-2x)}$ $\quad y=arctgln\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+4x\right)$

$y=sin^6(e^{1-x}+5)$ $\quad y=arcsin^8(5x+1)$ $\quad y=(tg8x)^{1-6\sqrt{x}}$

57. $y=4x^5 3^{4x}+5$ $\quad y=\dfrac{8x+5}{cos2x+4}$ $\quad y=\dfrac{\sqrt{9-4x}}{6x+x^3}$

$y=7xe^{cos4x}+2$ $\quad y=\ln\left(8x-7\sqrt{1-3x}\right)$ $\quad y=arcsin^9(6x+2)$

$y=sin^6\left(1+5\sqrt{x}\right)$ $\quad y=arcctgln^2(e^{4x}+4x)$ $\quad y=(9x)^{tg5x+2}$

58. $y=3x^6 5^{4-8x}+2$ $\quad y=\dfrac{7x+5}{sin2x+5}$ $\quad y=(7-8x)^4e^{-sin7x}$

$y=\dfrac{\sqrt{1+3x^5}}{8+6x}$ $\quad y=\ln\left(8+\sqrt[7]{4x-2}\right)$ $\quad y=\ln sin(1-e^{-9x})$

$y=cos^6(1+e^{4-x})$ $\quad y=arcctg^5(4x+1)$ $\quad y=(2-x)^{cos3x}$

59. $y=(1+6x)e^{-3x}+\sqrt{2}$ $\quad y=\dfrac{\arcsin(1-3x^2)}{9-x^3}$ $\quad y=sinln\left(\dfrac{1}{x-4}+\sqrt[3]{x}\right)$

$y=\dfrac{8+3x^2}{\sqrt{2x-x^4}}$ $\quad y=ln\left(\dfrac{1}{4x+\sqrt{2x^2-3}}\right)$ $\quad y=(3-x^5)5^{\mathrm{tg}(1-8x)}$

$y=arccos^7(8x+1)$ $\quad y=sin^5(e^{6x}+x^2)$ $\quad y=(9x)^{\cos(3-6x)}$

60. $y=(5+3x)7^{1-x^2}+3$ $\quad y=\dfrac{\sin(4-7x)}{1-5x^3}$ $\quad y=\ln cos\left(3-e^{\sqrt[3]{x}}\right)$

$y=\dfrac{\sqrt[3]{2-4x}}{x^2-3x}$ $\quad y=tg\ln(e^{6x}+x^2)$ $\quad y=arccos^8(3x+9)$

$y = 5x^7e^{arcsin6x} + 3$ $\quad y = sin^9(\sqrt[3]{x} + x^2)$ $\quad y = (5 - ctg4x)^{ln5x}$

61. $y = (2x - 4)e^{2-5x^2}$ $\quad y = \dfrac{5x - 9}{\arcsin(3 - 8x)}$ $\quad y = ln\left(\dfrac{1}{3x + \sqrt{6 - 3x}}\right)$

$y = \dfrac{\sqrt{4 - 6x^2}}{2x^2 - 7}$ $\quad y = (7 - x^3)e^{\text{arccos4x}}$ $\quad y = arcsin^4(5x + 2)$

$y = sin^6(3 + e^{5x})$ $\quad y = arctg\ln\left(e^{\sqrt[3]{x^2}} + 1\right)$ $\quad y = (9x - sin2x)^{tgx}$

62. $y = (7x - 1)e^{3-5x} - 9$ $\quad y = \dfrac{\cos(2 + 4x) + 1}{8 - 3x^5}$ $\quad y = \ln tg\left(9 - \sqrt{x^7}\right)$

$y = \dfrac{\sqrt[3]{x^9 - 1}}{6 - 3x}$ $\quad y = \ln\left(x - \sqrt[3]{1 + 3x}\right)^2$ $\quad y = sin^7(6x^3 + 2)$

$y = x^4e^{\text{arctg}(4-2x)}$ $\quad y = ctg(4 + e^{1-6x})$ $\quad y = (7x)^{\ln(3-4^x)}$

63. $y = (x - 3)^3\,4^x - ln2$ $\quad y = \dfrac{4 - 7x^2}{1 - 2cos3x}$ $\quad y = \dfrac{3 - 2x}{\sqrt[3]{4 - 3x}}$

$y = (5 - x)^2e^{\text{sin7x}}$ $\quad y = \ln\left(9x - \sqrt{8 + 7x^2}\right)$ $\quad y = cosx\left(9x + \sqrt[3]{x^2}\right)$

$y = arctg^5(4x + 1)$ $\quad y = arcsin^6(1 - \sqrt[3]{x})$ $\quad y = (6 - 2x)^{\cos 4x}$

64. $y = x^5e^{3+\sqrt{x}} - 6$ $\quad y = \dfrac{\sqrt[3]{(2 - x)^2}}{(x + 9)^4}$ $\quad y = \dfrac{\cos(5 - 4x)}{7 - 3x^8}$

$y = x^9 3^{\text{tg}\,6x}$ $\quad y = \ln\left(x + \sqrt[3]{3x - 1}\right)$ $\quad y = arccos\ln(e^{4x} + x^2)$

$y = arctg^3(1 + x^4)$ $\quad y = sin^7\left(1 - 2^{\sqrt{x-1}}\right)$ $\quad y = (arcsin(4 - x))^{x^2}$

65. $y = 5xe^{-x^2} - 2$ $\quad y = \dfrac{3x - 1}{sin5x - 9}$ $\quad y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{2x - 5}$

$y = \ln\left(x + \sqrt{5x^2 + 4}\right)$ $\quad y = arctg^7(4 + x)$ $\quad y = cos^4\left(1 - 2^{\sqrt{9x}}\right)$

$y = sin\ln(e^{3x} + 2)$ $\quad y = 4ctg(5 + e^{x-9x})$ $\quad y = x^{\arccos 6x}$

66. $y = (5 + x)e^{(x+3)} - \pi$ $\quad y = \dfrac{(3 + x)^2}{\sqrt[3]{x} + 14}$ $\quad y = arcsin\ln\left(e^{-\sqrt{x}} + x\right)$

$y = \dfrac{\cos(3x^2 - 2x)}{2 + x^4}$ $\quad y = \ln\left(1 + \sqrt[5]{3x^4 - 6}\right)$ $\quad y = x^3 3^{\mathrm{arctg}(1-5x)}$

$y = arcctg^8(3 - 9x)$ $\quad y = cos^6\left(e^{\sqrt[3]{1-x}} - 1\right)$ $\quad y = (arcsin3x)^{\sqrt[3]{x}}$

67. $y = 7x^3 4^{2+x^8} - 3$ $\quad y = \dfrac{\mathrm{arctg}(4x^3 + 4x)}{2\sqrt{x + 3}}$ $\quad y = \dfrac{6 - 2x^2}{\sqrt{1 - 5x^3}}$

$y = sin^7(4 - 9x)$ $\quad y = \ln(3x + 3^{2+ctgx})$ $\quad y = x^5 6^{\ln(4-4x)}$

$y = arcsin^4\left(5 - \dfrac{7}{x^2}\right)$ $\quad y = cos\ln\left(e^{-\sqrt[5]{x}} + 1\right)$ $\quad y = (arctg4x)^{5+2\sqrt{x}}$

68. $y = \sqrt[3]{7x^2}e^{3-x^7} - 2$ $\quad y = \dfrac{4x - 5x^2}{2\sqrt{x^2 + 9x}}$ $\quad y = \dfrac{\sin(4x^2 + x)}{6 + 5x^3}$

$y = tg^7(14 - 9x)$ $\quad y = \ln\left(2 + \sqrt{6x^2 + 3}\right)$ $\quad y = (5 - x)^8 5^{\arcsin\sqrt{x}}$

$y = sin^5\left(e^{8x^3} + 12x\right)$ $\quad y = arctg\ln\left(e^{\sqrt{x^5}} + 3x\right)$ $\quad y = (arccos6x)^{\sqrt[3]{x-1}}$

69. $y = (7 + 6x^3)3^{4x} - \pi$ $\quad y = \dfrac{7x - 5}{\cos(5x^3 - 4)}$ $\quad y = \dfrac{1 - 3x^4}{\sqrt{3 + x}}$

$y = \ln\left(3x + \sqrt[3]{4x^8}\right)$ $\quad y = (6 + 3x)e^{\sin 8x}$ $\quad y = arccos^5(6 - 5x^7)$

$y = arctg^4(e^{3x} - 8)$ $\quad y = tg\ln\left(5^{\sqrt{x+1}} + 3\right)$ $\quad y = (2 - x^2)^{1-\sqrt{x}}$

70. $y=(3+9x^5)e^{4x-6}$ $\quad y=\dfrac{\arcsin(\sqrt{5x}+3)}{\sqrt[7]{1-x^2}}$ $\quad y=cos\ln\left(\sqrt[3]{4x}+\dfrac{5}{x}\right)$

$y=\dfrac{\sqrt{7x-2}}{2x^5-5x}$ $\quad y=ln\left(\dfrac{1}{5x^3+\sqrt{2x+3}}\right)$ $\quad y=6arctg^7(1-9x)$

$y=sin^9\left(\dfrac{5}{x}-e^{\sqrt{6x-1}}\right)$ $\quad y=(2+6x^3)7^{\sin 4x}$ $\quad y=(cos5x)^{\mathrm{tg}3x}$

71. $y=(2+4x^2)3^{1+\sqrt{x}}$ $\quad y=ln\left(\dfrac{3-x}{2+4sin5x}\right)$ $\quad y=cos\,\mathrm{tg}(e^{2x}+\sqrt[3]{x})$

$y=\dfrac{\sqrt[3]{2+3x^2}}{4+5x}$ $\quad y=arctg^5(e^{6x}-7x)$ $\quad y=(12+3x)^4 7^{tg8x}$

$y=\ln(5x+\sqrt[6]{7+2x})$ $\quad y=arcsin^8\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-4\right)$ $\quad y=(9-3x^2)^{\cos 7x}$

72. $y=(3+7x)9^{5x^3}-\pi$ $\quad y=\dfrac{\sin(8x^2+9x)}{1-4x}$ $\quad y=\dfrac{x-4x^3}{\sqrt[3]{x}-9x}$

$y=\ln\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$ $\quad y=\ln^8\left(\sqrt[5]{4-x}+\dfrac{6}{x}\right)$ $\quad y=x^4 7^{\mathrm{arctg}(4-9x)}$

$y=cos^4(e^{-\sqrt{x}}-5x)$ $\quad y=arccos^4(5-3x)$ $\quad y=(\sqrt[3]{x-8})^{\mathrm{ctg}3x}$

73. $y=7xe^{6+x^9}+\sqrt{2}$ $\quad y=\dfrac{\mathrm{arctg}(8+5x)}{2+3x^2}$ $\quad y=\dfrac{5-2x^7}{\sqrt{x^2+x}}$

$y=arccos\ln(\sqrt[3]{x}+3)$ $\quad y=ln\left(\dfrac{5x}{1+\sqrt[3]{9+x}}\right)$ $\quad y=x^8 5^{\cos(4-2x)}$

$y=arcctg^3(6-3x)$ $\quad y=sin^6\left(4+e^{\sqrt{7x-1}}\right)$ $\quad y=(4x-5cos3x)^{x^2}$

74. $y=(2+7x^3)e^{5x}-\pi$ $\quad y=\dfrac{\mathrm{tg}(2+4x)}{5+3x^3}$ $\quad y=\dfrac{cos\sqrt{x-6}}{\sqrt[3]{x}-4x}$

$y=ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt[3]{3-x^2}}\right)$ $\quad y=x^6 8^{\arcsin 4x}$ $\quad y=arccos\ln\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$y = sin^8(3 - x^2)$ $y = ctg^3(5 + e^{6x})$ $y = (arctg(2 + \sqrt{x}))^x$

75. $y = (3 + 9x)3^{5x^4} - \pi$ $y = \dfrac{(5 + x)^7}{\sqrt[4]{(x - 6)^3}}$ $y = \dfrac{7x^3 - 6}{\mathrm{tg}(8x - 3)}$

$y = \ln\left(2x + \sqrt[6]{3 + x^2}\right)$ $y = (7 - x)^5 3^{\arcsin\sqrt{2x+4}}$ $y = arccos \ln\left(e^{3x} + \dfrac{2}{x}\right)$

$y = cos^7\left(5x + e^{4\sqrt{x}}\right)$ $y = sin^3\left(2 + 7^{\sqrt[3]{4x}}\right)$ $y = (ctg(9 + 8x))^{6x}$

76. $y = (5 + 3x)e^{\sqrt{x-1}} - 8$ $y = \dfrac{1 + 5x^2}{\cos 3x - 4}$ $y = \dfrac{\sqrt[3]{4x^5 - 8}}{2 - 3x}$

$y = \ln\left(5x + \sqrt[7]{1 + x^3}\right)$ $y = (9 + x^3)e^{\sin(8-5x)}$ $y = tg \ln\left(7x + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}\right)$

$y = sin^9(4x^3 + e^{-6x})$ $y = arcctg^6(2 - 5x)$ $y = (ctg(1 + 4x))^{1+\sqrt[3]{x}}$

77. $y = (3 + 6x^2)2^{-5x} - 7$ $y = \dfrac{1 - 9x^5}{\mathrm{tg}\, 3x - 2}$ $y = \dfrac{\sqrt{8x - 1}}{5x^3 - 2x}$

$y = cos \ln\left(5^{x^2} + 2\right)$ $y = \ln\left(7x + \sqrt{6x - 4}\right)$ $y = 5xe^{\arccos 4x}$

$y = arcsin^4(9 - 7x)$ $y = ctg^8\left(2 + \sqrt[3]{x - 3}\right)$ $y = (ln(1 + 3x))^{cos6x}$

78. $y = 2x^7 3^{2+5x} - \pi^2$ $y = \dfrac{1 - 6x}{2\mathrm{ctg}\, 3x - 5}$ $y = \dfrac{\sqrt{1 + 3x^2}}{4x - 9}$

$y = lntg(3 - e^{3x})$ $y = \ln\left(x^2 + \sqrt[3]{3 - x}\right)$ $y = (2 + x^4)e^{\mathrm{ctg}(1-3x)}$

$y = arcsin^7(2 + 14x)$ $y = cos^5(6 + e^{-7x})$ $y = (sin(1 + 4x))^{ln4x}$

79. $y = (1 + 9x)^3 e^{4-3x^2}$ $y = \dfrac{\mathrm{arctg}(9 + 2x^3)}{1 - 5x}$ $y = \ln\left(\dfrac{1}{x^3 + \sqrt{6 - x^2}}\right)$

$y = \dfrac{2 - 4x^2}{\sqrt{1 - x^5}}$ $\quad y = (8 + 2x^5)6^{\mathrm{tg}(9-5x)}$ $\quad y = ctg\ln\left(x^2 + \sqrt[4]{2x}\right)$

$y = sin^8(3x^6 + e^{7x})$ $\quad y = arccos^4(5 - 3x)$ $\quad y = (1 + 9x)^{cos5x}$

80. $y = (1 + 6x)^4 7^{3x^3}$ $\quad y = \dfrac{\sin(6 + 2x)}{3 + 4x^5}$ $\quad y = x^5 e^{\arcsin(1-8x)}$

$y = \dfrac{\sqrt[3]{7x - 2}}{1 - 4x^2}$ $\quad y = \ln\left(4x + \sqrt{x^3 - 1}\right)$ $\quad y = lnctg\left(x - e^{\sqrt{5x}}\right)$

$y = arccos^6(1 - 4x)$ $\quad y = sin^8\left(\sqrt[5]{9x^2 + 7^{3x}}\right)$ $\quad y = (tg4x - 8)^{ln5x}$

81. $y = (3 - 7x)e^{x^5} - \pi^2$ $\quad y = \dfrac{9 - 8x}{\arcsin(1 + 2x)}$ $\quad y = tg\ln\left(x + e^{\sqrt[4]{2x}}\right)$

$y = \dfrac{\sqrt{5 + 2x^6}}{3x - 1}$ $\quad y = \ln\left(\dfrac{x}{9x + \sqrt{3 - x^7}}\right)$ $\quad y = ctg^9(9 + e^{3x})$

$y = arccos^4\left(5 - \sqrt[3]{x}\right)$ $\quad y = (6 - x)^3 4^{\arcsin5x}$ $\quad y = (sin5x - 8x)^{9x}$

82. $y = (4 - 5x)e^{x^8} - ln9$ $\quad y = \dfrac{\cos(6 + 8x)}{x^5}$ $\quad y = \dfrac{\sqrt{7 + 3x^4}}{2x - 5}$

$y = \ln\left(x^5 + \sqrt{1 - 3x}\right)$ $\quad y = (2 - x)^7 e^{\mathrm{arctg}5x}$ $\quad y = lnarccos\left(1 - \sqrt[3]{x}\right)$

$y = sin^8\left(2 - \sqrt[3]{3x}\right)$ $\quad y = ln^6(4 + e^{4x})$ $\quad y = (4x - 9)^{\ln(5+e^{-x})}$

83. $y = 5x^4 6^{2-x} - ln7$ $\quad y = \dfrac{2 - 7x^3}{4\cos 3x - 6}$ $\quad y = \dfrac{5 - 9x}{\sqrt{4x^5 + 3x}}$

$y = (4 + 7x)^5 e^{\mathrm{ctg}4x}$ $\quad y = \ln\left(x^6 + \sqrt{7 + 5x}\right)$ $\quad y = costg\left(x - \sqrt[3]{2x}\right)$

$y = arctg^7(3 - 8x)$ $\quad y = arcsin^4\left(3 - \sqrt[3]{x^2}\right)$ $\quad y = (3 - 4x)^{\cos(9-8x)}$

84. $y = x^4e^{2-9x} - ln6$ $\quad y = \frac{\sqrt[3]{8-2x^2}}{(1-5x)^9}$ $\quad y = \frac{cos5x - 2x^4}{\sqrt{x^2+1}}$

$y = (x+5)^6 7^{\mathrm{tg}5x}$ $\quad y = \ln\left(8 + \sqrt[3]{3-5x^2}\right)$ $\quad y = arccosln(e^{-3x} - 4)$

$y = arctg^4(9-7x)$ $\quad y = sin^6\left(3 + 5^{\sqrt{4x}}\right)$ $\quad y = (arctg4x)^{(1-x^3)}$

85. $y = (3-6x)^2e^{\mathrm{tg}5x}$ $\quad y = \frac{8 - 6\sqrt[7]{2x}}{\sin(3+5x)}$ $\quad y = \frac{\sqrt{1+2x^3}}{4x-9}$

$y = 9xe^{\sin 7x}$ $\quad y = \ln\left(6x + \sqrt{2-3x^5}\right)$ $\quad y = sinln\left(3 - e^{-\sqrt{x+7}}\right)$

$y = arctg^7(5-4x)$ $\quad y = cos^4\left(x + \sqrt[3]{4+9x}\right)$ $\quad y = (1-5x)^{\mathrm{tg}(1-4x)}$

86. $y = (1-\sqrt{6x})^4e^{\mathrm{ctg}4x}$ $\quad y = \frac{(2+7x)^6}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$ $\quad y = \frac{\cos(x+5x^5)}{1-7x^4}$

$y = \ln\left(6 + \sqrt[5]{8-9x^3}\right)$ $\quad y = 4x^5 2^{\sin 3x} + ln4$ $\quad y = arcsinln\left(1 - e^{\sqrt[3]{x}}\right)$

$y = arctg^6(1-5x)$ $\quad y = arccos^6\left(7 + e^{\sqrt{9x}}\right)$ $\quad y = (arcctg(4x))^{\sqrt[8]{9x}}$

87. $y = 6x^3 4^{3-2x^8} + e^5$ $\quad y = \frac{\mathrm{arctg}(2x+7x^8)}{4-3\sqrt{x}}$ $\quad y = sinx^6 7^{\mathrm{ctg}(5x-1)}$

$y = \frac{1-4x^3}{\sqrt{2x^4+5x}}$ $\quad y = \ln\left(4x + 3^{-\sqrt{6x}}\right)$ $\quad y = arcctg^9(3-13x)$

$y = cosln\left(4 - e^{-\sqrt[3]{x^2}}\right)$ $\quad y = arcsin^5\left(3 - \frac{10}{x^2}\right)$ $\quad y = (tg(4x))^{\sqrt{3x}}$

88. $y = \sqrt[3]{3x^2}e^{5-x^4} - 1$ $\quad y = \frac{5x - x^5}{\sqrt{3x^2+7x}}$ $\quad y = arctgln\left(3 - e^{\sqrt[3]{6x}}\right)$

$y=\dfrac{\cos(2x-9x^6)}{4-3x^5}$ $\quad y=\ln\left(1+\sqrt[3]{3-2x^2}\right)$ $\quad y=tg^7(1+5x)$

$y=x^4 3^{\arcsin(\sqrt{5x}-1)}$ $\quad y=sin^6\left(7x^2+e^{2x^3}\right)$ $\quad y=(arccos5x)^{\sqrt[3]{2x}}$

89. $y=(8-x^2)^9 2^{3x}+\pi^3$ $\quad y=\dfrac{7-3x}{\cos(3+5x^3)}$ $\quad y=tgln\left(4-5^{\sqrt[3]{6-x}}\right)$

$y=\dfrac{3-2x^4}{\sqrt{6+9x}}$ $\quad y=\ln\left(4x+2\sqrt[3]{x}\right)$ $\quad y=(x^5-7)e^{\sin 8x}$

$y=arccos^4(x^2+2)$ $\quad y=arctg^5\left(7+e^{4x^8}\right)$ $\quad y=(6-4x)^{\sqrt[5]{2+9x}}$

90. $y=(2-3x)^5 e^{4x+x^2}$ $\quad y=\dfrac{acrsin(4-\sqrt{x})}{\sqrt{2-3x^2}}$ $\quad y=\ln\left(\dfrac{1}{3x+\sqrt[3]{9-x}}\right)$

$y=\dfrac{\sqrt{x-8}}{4x^5-9x^3}$ $\quad y=arcctg^7(3x+2)$ $\quad y=sin^3\left(\dfrac{10}{x}+e^{-\sqrt{x}}\right)$

$y=(7-x^4)2^{\sin(6x-1)}$ $\quad y=ctgln\left(\dfrac{2}{3x}-6^{\sqrt[3]{4-x}}\right)$ $\quad y=(cos(3x))^{\sqrt{6x}}$

91. $y=(3-x)^9 2^{3\sqrt{x}}+\pi^5$ $\quad y=\dfrac{3-4x}{\sin(2+6x^7)}$ $\quad y=\dfrac{\sqrt[3]{1-2x^4}}{(3-6x)^3}$

$y=tg^5(8x^2+1)$ $\quad y=\ln\left(4x+2\sqrt[3]{1+3x}\right)$ $\quad y=(1-x^7)e^{\cos(2x-4)}$

$y=arctgln\left(5-\sqrt{x}\right)^4$ $\quad y=\ln^7\left(3-\dfrac{6}{1+\sqrt[3]{5x}}\right)$ $\quad y=(1-6x^3)^{cos5x}$

92. $y=(2-9x^8)3^{2x^2}+6$ $\quad y=\dfrac{\sin(5x-6x^3)}{4\sqrt{x}+9x}$ $\quad y=\ln^3\left(3-e^{4\sqrt{x}}\right)$

$y=\dfrac{3x-2x^7}{\sqrt[3]{x+4x}}$ $\quad y=2x^5(1+e^{arctg5x})$ $\quad y=arccos^4(9x+1)$

$y=\ln\left(x+\sqrt[6]{3+4x^2}\right)$ $\quad y=cos^4\left(1+e^{\sqrt{9x}}\right)$ $\quad y=(\sqrt{x+3})^{ln7x}$

93. $y = 5x^3e^{2-8x^7} + ln7$ $\qquad y = \dfrac{\arcsin(2x+1)}{2-5x^6}$ $\qquad y = (3-x)^5 2^{\cos\sqrt{3x}}$

$y = \dfrac{x-4x^7}{\sqrt{x+5x^3}}$ $\qquad y = \ln\left(\dfrac{4x}{2+\sqrt[3]{5-6x}}\right)$ $\qquad y = arcccos^4(4x+7)$

$y = sin^9\left(2+3e^{-\sqrt{x}}\right)$ $\qquad y = arctgln\left(\sqrt[4]{1+x}\right)$ $\qquad y = (3x - cosx)^{x^3}$

94. $y = (1-x^5)e^{2x} + \sqrt{\pi}$ $\qquad y = \dfrac{\operatorname{ctg}(8x+3)}{1-2x^4}$ $\qquad y = \dfrac{\arccos\sqrt{2x}+7}{4\sqrt[3]{1-x}+6x}$

$y = sin^7(7+5e^{3x})$ $\qquad y = \ln\left(\dfrac{3}{2+\sqrt[8]{4-6x^2}}\right)$ $\qquad y = (7-8x)^4 6^{\cos\sqrt{5x}}$

$y = lncos\left(4x - \dfrac{\sqrt[3]{2x}}{8}\right)$ $\qquad y = \sqrt{tg(3+2e^{x-3})}$ $\qquad y = (arctg(5-3\sqrt{x}))^x$

95. $y = (9-4x)^5 2^{\sqrt{x}} + e^5$ $\qquad y = \dfrac{(3-8x)^9}{\sqrt[4]{(1-5x)^3}}$ $\qquad y = \dfrac{2-5\sqrt{x}}{\operatorname{tg}(7+5x^4)}$

$y = (1-5x)^7 e^{\cos 3x}$ $\qquad y = arcsinln\left(\sqrt[4]{x} + \dfrac{6}{x}\right)$ $\qquad y = \dfrac{cosx - 3x^6}{\sqrt{2x+8x^9}}$

$y = \ln\left(x + \sqrt[3]{2+3x^2}\right)$ $\qquad y = sin^9\left(3+\sqrt{e^{4x}}\right)$ $\qquad y = (ctg(2-8\sqrt{x}))^{-x}$

96. $y = (2-5x)^3 2^{-9x} + 1$ $\qquad y = \dfrac{8x}{\cos(2+7x)}$ $\qquad y = \dfrac{\sqrt{6-5x}}{4x^2-1}$

$y = \ln\left(x + \sqrt[5]{1+9x^8}\right)$ $\qquad y = (4-6x)^3 e^{\cos 7x}$ $\qquad y = cosln\left(4-3^{x^2}\right)$

$y = arcsin^9(1+3e^{6x})$ $\qquad y = ctg^4\left(2+\sqrt{5x}\right)$ $\qquad y = (2x-9)^{arcsinx}$

97. $y = (1-x)^5 6^{8x} + \sqrt{3}$ $\qquad y = \dfrac{5+9x}{\sin(4+7x)}$ $\qquad y = \ln\left(x + \sqrt[4]{3+2x^6}\right)$

$y = \dfrac{\sqrt[3]{7-3x}}{\sin 9x + 1}$ $\quad y = cos^3(9 + 7e^{5x})$ $\quad y = arctg^9(2 + 8x)$

$y = (1-4x)^2 e^{tg9x}$ $\quad y = lntg\left(5x - e^{4x^2}\right)$ $\quad y = (4x-7)^{arcctg8x}$

98. $y = (4-3x)^7 2^{ln8x}$ $\quad y = \dfrac{5+9x}{\sin(5x+2)}$ $\quad y = \dfrac{\sqrt{2-7x^3}}{9x-3}$

$y = (5-7x)^4 e^{ctg3x}$ $\quad y = \ln\left(x + \sqrt[5]{12+2x^9}\right)$ $\quad y = arccos^4(1+5x)$

$y = ctg^7(6x + 12e^{7x})$ $\quad y = arctgln\left(4x - 3^{\frac{1}{x}}\right)$ $\quad y = (2x-3)^{\cos(8+4x)}$

99. $y = (4-x^6)e^{\sqrt[3]{x}} + \pi$ $\quad y = \dfrac{5+x^6}{\mathrm{tg}12x - 9}$ $\quad y = (1-5x^6)^2 e^{sin7x}$

$y = \dfrac{\sqrt[3]{6-4x^2}}{9x+3}$ $\quad y = \ln\left(7x - \dfrac{5}{x^3-4x}\right)$ $\quad y = cos^4(5 + e^{7x})$

$y = arctgln\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}} - 5\right)$ $\quad y = arcsin^4(3+9x)$ $\quad y = (arcctg5x)^{\cos 9x}$

100. $y = (6-4x^7)8^{4x} + e$ $\quad y = \dfrac{\mathrm{ctg}(11x+9)}{2-7x^3}$ $\quad y = lncos\left(5\sqrt{2x} - e^{\frac{1}{x}}\right)$

$y = \dfrac{\sqrt[3]{3-5x}}{x^5+12}$ $\quad y = \ln\left(8x + \sqrt[6]{1+2x^5}\right)$ $\quad y = arccos^5(2+13x)$

$y = (1-4x)^6 e^{arcctg5x}$ $\quad y = ctg^7\left(\dfrac{4}{x^3} + \sqrt{3x}\right)$ $\quad y = (arcsin7x)^{\mathrm{tg}9x}$

Завдання 5.2. Застосування похідної для дослідження функцій

Дослідити методами диференціального числення задані функції та побудувати їх графіки.

1. $y = \dfrac{x+1}{x^3}$ $\quad y = xe^{-x} + 1$

2. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ $\qquad y = (2x + x)e^x - 1$

3. $y = \dfrac{x^3}{x^3 - 2}$ $\qquad y = (x-1)e^{-2x} + 2$

4. $y = \dfrac{-x}{x^3 - 1}$ $\qquad y = (3x-1)e^{2x} - 3$

5. $y = \left(\dfrac{2x+3}{x-1}\right)^2$ $\qquad y = (2x+1)e^{2x} + 1$

6. $y = \dfrac{3x^3}{x^3 + 6}$ $\qquad y = 2xe^x - 1$

7. $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x + 3}$ $\qquad y = (3 - x)e^{-x} + 3$

8. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 2x + 3}$ $\qquad y = (3x+1)e^{-x} + 2$

9. $y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$ $\qquad y = (1 - x)e^{-x} + 1$

10. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ $\qquad y = (2x+1)e^x - 1$

11. $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$ $\qquad y = (6 - 3x)e^{2x} + 2$

12. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ $\qquad y = 3xe^{-x} + 1$

13. $y = \dfrac{-x^2}{(x-2)^2}$ $\qquad y = (5x - 2)e^{-x} + 3$

14. $y = \dfrac{x}{x^3 - 2}$ $\qquad y = (2x-1)e^{2x} + 3$

15. $y = \dfrac{4x^3}{x^3 - 1}$ $\qquad$ $y = (4 - 2x)e^x - 2$

16. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x}$ $\qquad$ $y = (x + 3)e^{-2x} + 1$

17. $y = \dfrac{x + 3}{x^3}$ $\qquad$ $y = -xe^x + 2$

18. $y = \dfrac{4x^3 + 5}{x}$ $\qquad$ $y = (2x + 5)e^{2x} + 1$

19. $y = \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$ $\qquad$ $y = (1 - x)e^x + 1$

20. $y = \dfrac{x^3}{2(x - 1)^2}$ $\qquad$ $y = (x + 1)e^{-x} + 3$

21. $y = \dfrac{x}{2 - x^3}$ $\qquad$ $y = (2x + 3)e^x + 2$

22. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ $\qquad$ $y = (x - 3)e^{-2x} + 4$

23. $y = \dfrac{4x^3}{x^{3-1}}$ $\qquad$ $y = 2xe^{-x} - 1$

24. $y = \dfrac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$ $\qquad$ $y = (2x - 1)e^{-x} - 2$

25. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ $\qquad$ $y = (x - 2)e^{2x} - 3$

26. $y = \dfrac{-x}{x^3 + 3}$ $\qquad$ $y = (2x - 3)e^{-3x} + 1$

27. $y = \left(\dfrac{2x + 1}{x - 1}\right)^2$ $\qquad$ $y = -xe^{2x} + 2$

28. $y=\dfrac{x}{x^3-4}$ $\qquad y=(5-2x)e^{-x}+3$

29. $y=\dfrac{x-2}{(x+1)^2}$ $\qquad y=(2x-3)e^{-x}+4$

30. $y=\dfrac{x}{x^2-4x+3}$ $\qquad y=(2x-3)e^{-x}+4$

31. $y=\dfrac{3x}{3+x^2}$ $\qquad y=(x+2)e^{3x}+2$

32. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$ $\qquad y=2xe^{x}-1$

33. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ $\qquad y=(1-2x)e^{x}+2$

34. $y=\dfrac{x^3}{x^2+9}$ $\qquad y=(x-2)e^{-3x}-2$

35. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$ $\qquad y=(5x+2)e^{2x}-1$

36. $y=\dfrac{2x^3}{x^3+1}$ $\qquad y=(3x+1)e^{-x}-2$

37. $y=\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^2$ $\qquad y=(x+2)e^{2x}+3$

38. $y=\dfrac{-2x^3}{x^2+3}$ $\qquad y=(2x-1)e^{-2x}+1$

39. $y=\dfrac{-x}{x^3+2}$ $\qquad y=-xe^{x}+2$

40. $y=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$ $\qquad y=(x-2)e^{x}+2$

41. $y=\dfrac{x^4}{x^3+1}$ $\qquad y=xe^{-3x}+4$

42. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ $\qquad y=(5x-2)e^x+1$

43. $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ $\qquad y=(2x+3)e^{-3x}+2$

44. $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$ $\qquad y=(3x-2)e^{-x}+1$

45. $y=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$ $\qquad y=(2-x)e^{3x}+1$

46. $y=\dfrac{x^3}{3(x-2)^2}$ $\qquad y=(3x-1)e^{-2x}+2$

47. $y=\dfrac{3x^3}{x^3+8}$ $\qquad y=3xe^x-1$

48. $y=\dfrac{2x^2}{x+2}$ $\qquad y=(5x+2)e^{-x}+3$

49. $y=\dfrac{2x^2}{x+2}$ $\qquad y=(5x+2)e^{-x}+3$

50. $y=\dfrac{x^3}{(2x+1)^2}$ $\qquad y=(2x-1)e^x-1$

51. $y=\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}$ $\qquad y=(3x+6)e^{-x}+2$

52. $y=\dfrac{4x^3}{x^3-4}$ $\qquad y=(2x-4)e^{-ex}+3$

53. $y=\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^2$ $\qquad y=(3x+2)e^{3x}+2$

54. $y = \dfrac{3x}{x^3 + 1}$ $\qquad y = (2x+1)e^{-3x} - 1$

55. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - x + 2}$ $\qquad y = (1-x)e^{3x} + 2$

56. $y = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$ $\qquad y = 2xe^{-x} + 3$

57. $y = \dfrac{2x+4}{(x+1)^2}$ $\qquad y = (3x-6)e^{x} - 2$

58. $y = \dfrac{x^4}{x-3}$ $\qquad y = (2x+1)e^{-2x} + 3$

59. $y = \dfrac{2x}{1 = x^3}$ $\qquad y = (5x+2)e^{x} - 3$

60. $y = \dfrac{x^3}{3(x+2)^2}$ $\qquad y = (2-3x)e^{-x} - 1$

61. $y = \left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2$ $\qquad y = (1+2x)e^{-x} - 1$

62. $y = \dfrac{x+1}{(x-3)^2}$ $\qquad y = (2x+4)e^{-3x} + 2$

63. $y = \dfrac{-x^2}{(x+3)^2}$ $\qquad y = xe^{-2x} + 1$

64. $y = \dfrac{x^3}{x^3 - 6}$ $\qquad y = (3x+6)e^{-x} + 2$

65. $y = \dfrac{3x^4 + 4}{x^3}$ $\qquad y = (1-2x)e^{2x} + 3$

66. $y = \frac{-x^3}{x^2 - x + 4}$ $\qquad y = (x+1)e^{-3x} - 2$

67. $y = \frac{6 - 3x}{(x+2)^2}$ $\qquad y = (5x-2)e^{-2x} + 2$

68. $y = \frac{(3x-2)^2}{x^2}$ $\qquad y = -xe^{2x} + 1$

69. $y = \frac{x^4}{x^3 + 3}$ $\qquad y = (x-3)e^{-x} + 2$

70. $y = \frac{-3x^3}{x^3 - 4}$ $\qquad y = (1-2x)e^{3x} + 1$

71. $y = \frac{x^3}{x^2 + x + 1}$ $\qquad y = (3x+2)e^{-2x} - 3$

72. $y = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2$ $\qquad y = (2-x)e^{2x} + 3$

73. $y = \frac{-3x^3}{x^3 + 5}$ $\qquad y = (2-4x)e^{x} + 1$

74. $y = \left(\frac{x-2}{x}\right)^2$ $\qquad y = (3x-6)e^{2x} - 2$

75. $y = \frac{x+1}{(x-3)^2}$ $\qquad y = (2x+4)e^{-x} + 1$

76. $y = \frac{2x}{x^3 - 3}$ $\qquad y = (2-3x)e^{x} + 4$

77. $y = \frac{x^3}{x^2 + 4}$ $\qquad y = 2xe^{3x} + 1$

78. $y = \frac{x+1}{x^2 + x + 1}$ $\qquad y = (1-2x)e^{x} - 3$

79. $y=\dfrac{x^3-2}{(x-1)^2}$ $\qquad$ $y=(2x+5)e^{-x}+2$

80. $y=\dfrac{-2x}{x^3+4}$ $\qquad$ $y=(x-3)e^{2x}+1$

81. $y=\dfrac{x+2}{(x+3)^2}$ $\qquad$ $y=(2x-3)e^{-3x}+2$

82. $y=\dfrac{2x^3}{x^3-8}$ $\qquad$ $y=(x+2)e^{2x}+3$

83. $y=\dfrac{3x^3}{x^2-x+1}$ $\qquad$ $y=xe^{-3x}-1$

84. $y=\dfrac{-3x}{x^3+3}$ $\qquad$ $y=(x+2)e^{-2x}+1$

85. $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x-2}$ $\qquad$ $y=(6-3x)e^{x}+2$

86. $y=\dfrac{-x^3}{x^3+4}$ $\qquad$ $y=(x-1)e^{3x}-3$

87. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ $\qquad$ $y=(3-x)e^{2x}+2$

88. $y=\dfrac{2x^3}{x^3-5}$ $\qquad$ $y=(2x-5)e^{-x}+1$

89. $y=\dfrac{-2x^3}{x^2+x+1}$ $\qquad$ $y=xe^{3x}-2$

90. $y=\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^2$ $\qquad$ $y=(3x-2)e^{2x}+4$

91. $y=\dfrac{-x^3}{x^3-5}$ $\quad y=(x+2)e^{-3x}+1$

92. $y=\dfrac{3x}{4-x^3}$ $\quad y=(5x-2)e^{3x}+3$

93. $y=\dfrac{2x+1}{x^2-x+1}$ $\quad y=(2+2x)e^{-x}+3$

94. $y=\dfrac{-2x^3}{x^3+4}$ $\quad y=(3-x)e^{x}-1$

95. $y=\left(\dfrac{2x-3}{x+1}\right)^2$ $\quad y=(x-2)e^{-3x}+2$

96. $y=\dfrac{-2x^3}{x^3+2}$ $\quad y=(2x-4)e^{2x}-3$

97. $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$ $\quad y=(1-x)e^{-3x}+3$

98. $y=\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^2$ $\quad y=3xe^{-x}-2$

99. $y=\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^2$ $\quad y=(5-2x)e^{2x}+3$

100. $y=\dfrac{x-2}{x^2+4}$ $\quad y=(x-2)e^{3x}-1$.

Завдання 6.1. Неозначений інтеграл

Обчислити неозначені інтеграли:

1. $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x}dx,$ $\quad \int xe^{-x^2}\,dx,$ $\quad \int \sqrt{x^2+4}\,dx,$

$\int \sqrt{9-x^2}\,dx,$ $\quad \int e^{-x}\sin x\,dx,$ $\quad \int \dfrac{3x+4}{x^2+x+1}dx,$

$\int \frac{dx}{x^2(x+1)(x^2+4)}$, $\int (sin\,x)^4\,dx$, $\int sin\,2x\cos 3x\,dx$.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+3x}}$, $\int \frac{dx}{x^2(x^2+4)}$, $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$,

$\int \sqrt{x}\,e^{x\sqrt{x}}\,dx$, $\int (sin\,x)^3\,dx$, $\int x\cos 5x\,dx$,

$\int \cos 2x\,sin\,3x\,dx$, $\int (\cos x)^4\,dx$, $\int \sqrt{1-2x^2}\,dx$.

3. $\int \sqrt{2+3x}\,dx$, $\int \frac{dx}{(\sin x)^6}$, $\int x^3\cos x^2\,dx$,

$\int (\cos x)^2\,dx$, $\int \sqrt{x^2+4}\,dx$, $\int \frac{dx}{2+\sin x}$,

$\int \frac{dx}{x(x-2)(x^2+1)}$, $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$, $\int x^2e^x\,dx$.

4. $\int \frac{(arctg\,x)^2}{1+x^2}\,dx$, $\int \frac{dx}{x(x+2)^2}$, $\int \sqrt{\frac{1+x}{2-x}}\,dx$,

$\int \frac{dx}{(\cos x)^3}$, $\int 2x\sin 2x\,dx$, $\int \sqrt{x^2-16}\,dx$,

$\int (\ln x)^2\,dx$, $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$, $\int \frac{e\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

5. $\int (tg\,2x)^2\,dx$, $\int \frac{dx}{2+3x}$, $\int \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx$,

$\int \frac{dx}{(\sin x)^4}$, $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$, $\int arcsin\,x\,dx$,

$\int \frac{dx}{(2x^2+1)x}$, $\int \frac{3x\,dx}{2+x^2}$, $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

6. $\int (sh\,x)^2\,dx$, $\int \ln(1+e^{2x})\,e^{2x}\,dx$, $\int (tg\,x)^3\,dx$,

$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$, $\int \frac{tg(lnx)}{x}dx$, $\int \sin 2x \cos x \, dx$,

$\int x^2 e^{-x} \, dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$, $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$.

7. $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x}}$, $\int x \, arctg(x)dx$, $\int x^4 e^{-2x^5} \, dx$,

$\int \frac{5x \, dx}{1+2x}$, $\int (ch\, x)^2 \, dx$, $\int (\cos x)^3 \, dx$,

$\int x \ln(1+x) \, dx$. $\int (\sin 2x)^4 \, dx$, $\int \frac{dx}{(x+2)(x-1)}$.

8. $\int \sqrt{4-x^2} \, dx$, $\int e^{-2x} \cos x \, dx$, $\int x \cos x \, dx$,

$\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$, $\int 2 \ln \sqrt{x} \, dx$, $\int \frac{dx}{x(x+1)(x-1)}$,

$\int x(\cos x)^2 \, dx$, $\int x^2 e^{2x} \, dx$, $\int \frac{dx}{(\sin 2x)^3}$.

9. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$, $\int arctg(2x)dx$, $\int \frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$,

$\int \frac{x+1}{x-1}dx$, $\int x(sin\, x)^2 \, dx$, $\int sin\, 2x\, cos\, 7x \, dx$,

$\int \sqrt{x^2+1} \, dx$, $\int \ln(2+3x) \, dx$, $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

10. $\int (ctg\, x)^2 \, dx$, $\int 5(\cos 2x)^2 \, dx$, $\int \ln x^2 \, dx$,

$\int \frac{dx}{x(x-3)(x+1)}$, $\int x e^{-x} \, dx$, $\int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2}dx$,

$\int \frac{dx}{\sin x}$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$, $\int arctg(x)dx$.

11. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$, $\int \frac{\cos\sqrt{pc}}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int xe^{-2x}\,dx$,

$\int \sqrt{4 - x^2}\,dx$, $\int \cos x \cos 4x\,dx$, $\int \frac{dx}{3 + \sin x}$,

$\int (\cos x)^2 (\sin x)^4\,dx$, $\int \frac{e^{arctg\,x}}{1 + x^2}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2 + 3x}}$, $\int \frac{e\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int x \sin 3x\,dx$,

$\int \frac{dx}{x(x + 5)}$, $\int \frac{dx}{x^2 + x + 2}$, $\int (tg\,x)^2\,dx$,

$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}\,dx$, $\int \sqrt{9 - x^2}\,dx$, $\int x^2 \ln x\,dx$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{2 + 3x}}$, $\int \frac{arcsin\,x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$, $\int 3 \ln \sqrt[3]{x}\,dx$,

$\int \frac{dx}{x^2 - 4}$, $\int \frac{x^3}{x + 1}\,dx$, $\int x^2 e^{-3x}\,dx$,

$\int \frac{dx}{x^2 + x + 4}$, $\int e^{-x} \cos 2x\,dx$, $\int \frac{dx}{(\sin 2x)^4}$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{9 + 2x}}$, $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$,

$\int \frac{dx}{x^2 - 9}$, $\int \frac{x^2}{x - 1}\,dx$, $\int x^3 \ln x\,dx$,

$\int \frac{dx}{2 - \sin x}$, $\int \frac{\sqrt{x}}{x + 2}\,dx$, $\int \sqrt{x^2 + 4}\,dx$.

15. $\int \sqrt[4]{3 - 2x}\,dx$, $\int xe^{-6x} \cos x\,dx$, $\int x\,arctg\,x^2\,dx$,

$\int \frac{(arctg\,x)^3}{1 + x^2}\,dx$, $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}$, $\int \frac{dx}{x(x^2 + 9)}$,

$\int \frac{dx}{(\cos 2x)^4}$, $\int \frac{dx}{2-\cos x}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}$.

16. $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}dx$, $\int \frac{arctg(x+1)}{x^2+2x+2}dx$, $\int \frac{dx}{(2x-1)(x+3)}$,

$\int (\cos x)^6\, dx$, $\int \frac{x}{x^2+1}dx$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$,

$\int \frac{dx}{\cos x+6}$, $\int \sqrt{\frac{x}{3x+1}}dx$, $\int x\sin 7x\, dx$.

17. $\int \frac{x}{x^2+x+3}dx$, $\int x\cos x^2\, dx$, $\int \ln\sqrt[5]{x+2}\, dx$,

$\int (sin(2x+1))^3\, dx$, $\int \frac{x^2+x+1}{3x-1}dx$, $\int cos\, x\, e^{sin\, x} dx$,

$\int \frac{dx}{\sqrt{3+5x}}$, $\int (\cos(3x+2))^4\, dx$, $\int sin\, x\cos 5x\, dx$.

18. $\int sin\ 2x\, e^{\cos 2x} dx$, $\int x^2\, sin\, 2x\, dx$, $\int sin\, x\sqrt{\cos x}\, dx$,

$\int \frac{dx}{(x+3)(x-4)}$, $\int \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}dx$, $\int \frac{dx}{sin\, 2x+3}$,

$\int \sqrt[3]{x-3}\, dx$, $\int xe^{x^2+1}\cos x\, dx$, $\int arctg\ 3x\, dx$.

19. $\int x\, sin\ (x^2+3)\, dx$, $\int \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\, dx$, $\int \frac{dx}{x^2+x+10}$,

$\int \frac{2x\, dx}{3x+4}$, $\int \frac{e^{arcsin\, x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $\int \frac{dx}{(\sin x)^2(\cos x)^2}$,

$\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$, $\int \frac{dx}{x\ln x}$, $\int \frac{\left(\sin\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}dx$.

20. $\int \sqrt[3]{3-2x}\, dx$, $\int \frac{(arcsin\, x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $\int 5x\ \cos(6x+1)\, dx$,

$\int \frac{dx}{x^2-3}$, $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$, $\int x^3 \ln\sqrt{x}\,dx$,

$\int \frac{dx}{3+\sqrt{x}}$, $\int (\sin x)^5\,dx$, $\int (\cos 2x)^4\,dx$.

21. $\int \sqrt{16+21x}\,dx$, $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int \frac{dx}{x\,(x^2+16)}$,

$\int \frac{dx}{2x+\sqrt{x}}$, $\int \arcsin x\,dx$, $\int \frac{dx}{x^2+3x+11}$,

$\int \frac{dx}{(\sin x)^3}$, $\int x^2\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$, $\int (\cos x)^2\,(\sin x)^4 dx$.

22. $\int \sqrt[3]{9+17x}\,dx$, $\int \mathrm{arctg}\,(x+6)\,dx$, $\int e^{-3x}\cos 2x\,dx$,

$\int \frac{dx}{x^2+5x+19}$, $\int \frac{dx}{x^3-3x^2+2x}$, $\int \frac{e^{\sqrt{x+2}}}{\sqrt{x+2}}\,dx$,

$\int \frac{dx}{(\cos x)^4}$, $\int (\cos x)^3\,(\sin x)^3 dx$, $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+2\sqrt{x}}$.

23. $\int \sqrt{5+6x}\,dx$, $\int \frac{\cos\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}\,dx$, $\int \frac{dx}{x\,(2x+3)}$,

$\int \frac{dx}{(\sin x)^6}$, $\int x\,3^{2x}\,dx$, $\int \frac{dx}{x^2+x+10}$,

$\int \sqrt{16-x^2}\,dx$, $\int \cos 3x \sin x\,dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+1}$.

24. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{3x-1}}$, $\int \frac{(\mathrm{arctg}\,(x+1))^2}{x^2+2x+2}\,dx$, $\int \frac{\sin\sqrt{3x}}{\sqrt{x}}\,dx$,

$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$, $\int \frac{dx}{x^2+3x+3}$, $\int \frac{dx}{x(x-4)}$,

$\int \frac{dx}{(\cos 2x)^4}$, $\int \cos 2x \sin 5x\,dx$, $\int \sqrt{16+4x^2}dx$.

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+7}}$, $\int \frac{e^{\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}}dx$, $\int x^2\ \cos 5x\, dx$,

$\int \frac{dx}{x(x-3)^2}$, $\int (ctg\ 2x)^2\, dx$, $\int cos\ 6x\ sin\, x\, dx$,

$\int \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{1+\sqrt{x}}$, $\int \sqrt{x^2+x+4}\, dx$, $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$.

26. $\int \sqrt{3x+10}\, dx$, $\int \frac{cos\sqrt{3x+1}}{\sqrt{1+3x}}dx$, $\int \sqrt{x}\cos\sqrt{x^3}\, dx$,

$\int \frac{dx}{x^2-x+2}$, $\int \frac{dx}{1-3\sqrt{x}}$, $\int \frac{dx}{(cos\ 2x)^6}$,

$\int cos\ 4x\ sin\, x\, dx$, $\int (cos\, x)^2\,(sin\, x)^6 dx$, $\int x^{\,3} e^{-x^4}\, dx$.

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{b+ax}}$, $\int (cos\ 2x)^3\, dx$, $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+81)}$,

$\int 3x\ sin\ 2x\, dx$, $\int x^{\,2} e^{-x^3}\, dx$, $\int cos\ 5x\ cos\ 2x\, dx$,

$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$, $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$, $\int \sqrt{3-5x}\, dx$.

28. $\int \sqrt{3+7x}\, dx$, $\int \frac{\sqrt{x}}{3+2\sqrt{x}}dx$, $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$,

$\int \frac{dx}{(sin\ 3x)^6}$, $\int \frac{dx}{3+sin\, x}$, $\int sin\ 4x\ sin\ 3x\, dx$,

$\int \sqrt{2x^2+4}\, dx$, $\int \frac{dx}{x(x+2)(x^2+4)}$, $\int 3\, x^{\,2} e^{-2x}\, dx$.

29. $\int \frac{(arctg\ (2x))^2}{1+4x^2}dx$, $\int \frac{dx}{3x\ (x+2)^2}$, $\int (5x+1)\ sin\ 2x\, dx$,

$\int \frac{dx}{(sin\ 2x)^3}$, $\int \sqrt{\frac{1+2x}{2-3x}}\, dx$, $\int \frac{dx}{x^2+3x+5}$,

$\int \sqrt{4x^2-1}\,dx,$ $\int \frac{e^{\sqrt{3x}}}{\sqrt{x}}\,dx,$ $\int (\ln 3x)^2 dx.$

30. $\int \frac{dx}{4x+3},$ $\int \sqrt{2x}\, e^{\sqrt{3x}}\,dx,$ $\int arcsin\, 2x\,dx,$

$\int \frac{dx}{(sin\, 2x)^4},$ $\int (tg\ 3x)^2\,dx,$ $\int \frac{4x}{7+9x^2}\,dx,$

$\int \frac{dx}{x(5x+1)^2},$ $\int \frac{dx}{x\ln 2x},$ $\int \ln(x+2)\,dx.$

31. $\int (ch\ 5x)^2\,dx,$ $\int e^{3x}\ln(1+e^{3x})\,dx,$ $\int \frac{dx}{\sqrt{9-7x}},$

$\int \frac{dx}{x^2+3x+11},$ $\int (tg\ 2x)^3\,dx,$ $\int \sin 7x \cos 3x\,dx,$

$\int x^2 e^{-6x}\,dx,$ $\int \frac{tg(\ln 2x)}{x}\,dx,$ $\int x\ln(1+2x)\,dx.$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x}(2x+5)},$ $\int \frac{2x}{(5+7x)}\,dx,$ $\int x^8 e^{-5x^9}\,dx,$

$\int \frac{5dx}{\sqrt{11+9x}},$ $\int x\ arctg\, 2x\,dx,$ $\int (ch\ (2x+1))^2\,dx,$

$\int (cos(3x-2))^3\,dx,$ $\int x\ln(1+3x)\,dx,$ $\int \frac{dx}{(x+4)(x-7)}.$

33. $\int \sqrt{9-x^2}\,dx,$ $\int e^{-7x} sin\, 2x\,dx,$ $\int (x+3)\,cos\, 5x\,dx,$

$\int 3\ln\sqrt[3]{x+1}\,dx,$ $\int (x+3)^2 e^{-5x}\,dx,$ $\int \frac{dx}{(sin(5x+1))^3},$

$\int x(cos\ 2x)^3\,dx,$ $\int \frac{dx}{3+5\sqrt{x+3}},$ $\int \frac{x\,dx}{x^2+x+7}.$

34. $\int \frac{dx}{2x^3+x^2},$ $\int arctg\, 12x\,dx,$ $\int x\,(sin(3x-2))^2 dx,$

$\int \frac{dx}{(sin\,x)^4}$, $\int cos\,4x\,sin\,9x\,dx$, $\int \frac{tg(\sqrt{x+2})}{\sqrt{x+2}}dx$,

$\int ln(7+9x)\,dx$, $\int \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2}dx$, $\int \sqrt{3x+7}\,dx$.

35. $\int (ctg\ (2x+3))^2\,dx$, $\int 5(cos\ (3x-2))^2\,dx$, $\int \ln(x+2)^2\,dx$,

$\int \frac{\sqrt{\ln(x+1)}}{x+1}dx$, $\int x\,e^{-(x+2)}\,dx$, $\int \frac{sin\frac{1}{x+1}}{(x+1)^2}dx$,

$\int arctg\ 2x\,dx$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$, $\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x-2)(x^2+4x+5)}$.

36. $\int \frac{dx}{2x^4+x}$, $\int \frac{sin\sqrt{4+3x}}{\sqrt{4+3x}}dx$, $\int x\,e^{-2x-3}\,dx$,

$\int \sqrt{9-x^2}\,dx$, $\int cos\,2x\,sin\,5x\,dx$, $\int \frac{dx}{5+6\,sin\,2x}dx$,

$\int \frac{e^{arctg\ 2x}}{1+4x^2}dx$, $\int \frac{\sqrt{x}\ +\sqrt[4]{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}}$, $\int cos\,x\ \ e^{sin\,x}\,dx$.

37. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{3-2x}}$, $\int \frac{e^{\sqrt{5x}}}{\sqrt{x}}dx$, $\int x\,sin(2x+1)\,dx$,

$\int \frac{dx}{x^2+3x+5}$, $\int x^2\ln 11x\,dx$, $\int cos\,x\,sin\,3x\,dx$,

$\int (ctg\ 6x)^2\,dx$, $\int \sqrt{4+2x^2}\,dx$, $\int \frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$.

38. $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{5x+6}}$, $\int \frac{arcsin\,9x}{\sqrt{1-81x^2}}dx$, $\int 3\ln\sqrt[4]{x}\,dx$,

$\int \frac{dx}{x^2-16}$, $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$, $\int \frac{2x^2}{x-1}dx$,

$\int (x+1)^2\,e^{-3x}\,dx$, $\int \sqrt{4x^2-1}\,dx$, $\int \frac{dx}{\left(cos\frac{x}{3}\right)^4}$.

39. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{5+3x}}$, $\int \frac{\sin\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}\,dx$, $\int \ln(3x+1)\,dx$,

$\int \frac{dx}{9x^2-1}$, $\int \frac{dx}{x^2+2x+6}$, $\int \frac{x^2}{2x+3}\,dx$,

$\int x^3 \ln(x-3)\,dx$, $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{3-2x}$, $\int \sqrt{9x^2-1}\,dx$.

40. $\int \sqrt[6]{5-3x}\,dx$, $\int \frac{(arctg\,2x)^3}{1+4x^2}\,dx$, $\int x\,e^{-7x}\,dx$,

$\int \frac{dx}{x^2+2x+4}$, $\int \frac{dx}{x(4x^2+1)}$, $\int x^2\,arctg\,x^3\,dx$,

$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, $\int \frac{dx}{(cos(3x+7))^4}$, $\int \sqrt{4x^2-3x}\,dx$.

41. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}\,dx$, $\int \frac{arctg(1-x)}{x^2-2x+2}\,dx$, $\int \sqrt{\frac{2x}{x-3}}\,dx$,

$\int \frac{x\,dx}{x^2+4}$, $\int (cos\,3x)^6\,dx$, $\int \frac{dx}{(2x+1)(x-2)}$,

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$, $\int \frac{dx}{7+cos\,x}$, $\int 2x\;cos\,5x\,dx$.

42. $\int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx$, $\int (1+3x)\;cos(x+\frac{3x^2}{2})\,dx$, $\int (cos(3x+1))^3\,dx$,

$\int \frac{x^2-x+1}{x+5}\,dx$, $\int cos\,2x\,e^{-\sin 2x}\,dx$, $\int \ln\sqrt[4]{2x+1}\,dx$,

$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$, $\int sin\,x\,cos\,4x\,dx$, $\int \sqrt{\frac{x-3}{x-2}}\,dx$.

43. $\int x^2 sin(x^3+1)\,dx$, $\int \sqrt{x+1}\,e^{-\sqrt{x+1}}dx$, $\int \frac{e^{arcsin\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}}\,dx$,

$\int \frac{dx}{x^2+2x+9}$, $\int \frac{3x}{2x+1}\,dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x}}$,

$\int (\ln(2x+1))^2 dx,$ $\int \frac{dx}{(cos(x+1))^2 (sin(x+1))^2},$ $\int \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}.$

44. $\int sin\,3x\, e^{cos3x}\, dx,$ $\int (x+3)^2 sin\,3x\, dx,$ $\int sin\,2x\ \sqrt{cos2x}\, dx,$

$\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)},$ $\int ln\sqrt[3]{3+x}\, dx,$ $\int \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}\, dx,$

$\int \frac{dx}{5+\cos 2x}$ $\int \frac{dx}{x^2+9x},$ $\int x e^{x^2+2}\, dx.$

45. $\int \sqrt[4]{7-3x}\, dx,$ $\int x^3 ln\sqrt[3]{x} dx,$ $\int \frac{(arcsin\,x)^3}{\sqrt{1-x^2}} dx,$

$\int 3x\, cos(5x-1) dx,$ $\int \frac{dx}{4x^2-9},$ $\int \frac{dx}{x^2+4x+9},$

$\int (cos\,x)^5\, dx$ $\int (cos(3x+2))^4 dx,$ $\int \frac{dx}{2+3\sqrt{x}}.$

46. $\int \sqrt{11+15x}\, dx,$ $\int \frac{cos\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}} dx,$ $\int arcsin\,4x\, dx,$

$\int \frac{dx}{x(x^2+10)},$ $\int \frac{dx}{x^2+2x+11},$ $\int x\, arctg(x+2) dx,$

$\int (cos\,2x)^2\ (sin\,2x)^4 dx,$ $\int \frac{dx}{(sin(x+1))^3},$ $\int \sqrt{x^2-9}\, dx.$

47. $\int \sqrt[3]{10+9x}\, dx,$ $\int \frac{e^{\sqrt{3-x}}}{\sqrt{3-x}} dx,$ $\int \frac{dx}{x^2+4x+10},$

$\int \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt[3]{x}} dx,$ $\int arctg\ (x-5)\, dx,$ $\int \frac{dx}{x^3+2x^2+3x},$

$\int e^{-x} cos\,3x\, dx,$ $\int (cos(2x+1))^3\ sin(2x+1)\, dx,$ $\int x^5 e^{-x^3} dx.$

48. $\int \sqrt[3]{3+2x}\, dx,$ $\int \frac{cos\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x-1}} dx,$ $\int \frac{dx}{x^2+x+9},$

$$\int \frac{dx}{x(3x+2)}, \qquad \int x\, 2^{3x} dx, \qquad \int \cos 7x \ \sin 2x\, dx,$$

$$\int (\cos 2x)^4\, dx, \qquad \int \frac{dx}{(\sin 3x)^6}, \qquad \int \sqrt{1-9x^2}\, dx.$$

49. $$\int \frac{dx}{\sqrt[7]{2x+7}}, \qquad \int \frac{(arctg\,(2x+1))^3}{4x^2+4x+2} dx, \qquad \int \frac{\sin\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}} dx,$$

$$\int \frac{dx}{x\,(x+2)}, \qquad \int \frac{dx}{x^2+2x+2}, \qquad \int x^2 \ln x\, dx,$$

$$\int \sin 6x \cos x\, dx, \qquad \int \sqrt{16+x^2}\, dx, \qquad \int \frac{dx}{2\sqrt{x}-x}.$$

50. $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{7x+5}}, \qquad \int \frac{e^{\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}} dx, \qquad \int x^2 \sin 7x\, dx,$$

$$\int \frac{dx}{x\,(2x+1)^2}, \qquad \int (tg\ 3x)^2\, dx, \qquad \int \sqrt{x^2+x+1}\, dx,$$

$$\int \frac{dx}{(\sin 2x)^6}, \qquad \int (ctg\ 3x)^2\, dx, \qquad \int \frac{\sqrt{x}\, dx}{2+\sqrt[3]{x}}.$$

51. $$\int \sqrt{19x+23}\, dx, \qquad \int \frac{\cos\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+2x}} dx, \qquad \int \sqrt{x} \sin\sqrt{x^3}\, dx,$$

$$\int \frac{dx}{1+3\sqrt{x}}, \qquad \int \frac{dx}{x^2-x+4}, \qquad \int \frac{dx}{(\cos(2x+1))^6},$$

$$\int x^2\, e^{x^3} dx, \qquad \int \cos 4x \ \sin 2x\, dx, \qquad \int (\cos 2x)^2\ (\sin 2x)^4 dx.$$

52. $$\int \frac{dx}{\sqrt{8-7x}}, \qquad \int \sqrt{2x} e^{3x\sqrt{x}} dx, \qquad \int (\sin 7x)^3 dx,$$

$$\int (\cos 5x)^4 dx, \qquad \int 2x \cos 3x\, dx, \qquad \int \frac{dx}{x^2(x^2-8)},$$

$$\int \cos 3x \sin 7x\, dx, \qquad \int \frac{dx}{x^2+5x+6}, \qquad \int \frac{dx}{x^2+5x}.$$

53. $\int \sqrt{2+8x}\,dx,$ $\int \frac{dx}{(\sin 7x)^6},$ $\int 3x^3 \cos 5x^2\,dx,$

$\int (\sin 3x)^2 dx,$ $\int \frac{dx}{5+\sin x},$ $\int \sqrt{9x^2+5}\,dx,$

$\int \frac{\sqrt{x}dx}{2+3\sqrt{x}},$ $\int \frac{dx}{x^2+x-2},$ $\int \frac{dx}{x(x+3)(x^2+5)}.$

54. $\int \frac{(arctg\,3x)^2}{1+9x^2}dx,$ $\int \frac{dx}{x\,(x-5)^2},$ $\int \sqrt{\frac{2x+1}{1+3x}}\,dx,$

$\int \frac{dx}{(\sin 5x)^3},$ $\int (3x-1)\cos 3x\,dx,$ $\int (\ln 7x)^2 dx,$

$\int \frac{dx}{x^2+5x+10},$ $\int \sqrt{16x^2-9}\,dx,$ $\int \frac{e^{\sqrt{4+x}}dx}{\sqrt{4+x}}.$

55. $\int (tg\,5x)^2 dx,$ $\int \frac{dx}{7+6x},$ $\int \sqrt{2x}\,e^{\sqrt{2x}}dx,$

$\int \frac{dx}{x\,(2x+3)^2},$ $\int \frac{dx}{(\sin 3x)^4},$ $\int \arcsin 4x\,dx\,,$

$\int \frac{5x\,dx}{5+4x^2},$ $\int \frac{dx}{x(9x^2+1)},$ $\int \frac{dx}{x\ln 5x}.$

56. $\int (ch\,3x)^2 dx,$ $\int e^{5x}\ln(1+e^{5x})\,dx,$ $\int (tg\,4x)^3 dx,$

$\int \frac{dx}{(x+2)(x-1)},$ $\int x^2\,e^{-7x}dx,$ $\int \frac{tg(\ln 3x)}{x}dx,$

$\int \sin 5x \cos 2x\,dx,$ $\int \frac{dx}{\sqrt{11-7x}},$ $\int \frac{dx}{x^2+2x+9}.$

57. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}\,(3x-1)},$ $\int x\,arctg\,3x\,dx,$ $\int x^6\,e^{-5x^7}dx,$

$\int (ch\,7x)^2 dx,$ $\int \frac{3x}{7-2x}dx,$ $\int (\sin(5x-1))^3 dx,$

$\int (cos(5x-2))^4 dx,$ $\int \frac{dx}{(x-2)(x+9)},$ $\int \frac{dx}{\sqrt{9+11x}}.$

58. $\int \sqrt{7-x^2}\, dx,$ $\int\ e^{-5x} cos\, 3x\, dx,$ $\int (x-2)\, cos\, 7x\, dx,$

$\int ln\sqrt{2x-3}\, dx,$ $\int \frac{dx}{x(x-7)(x+5)},$ $\int (x+1)(cos\, 3x)^2 dx,$

$\int \frac{dx}{(cos(3x-2))^3},$ $\int (x+1)^2 e^{-x}\, dx,$ $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-2}}.$

59. $\int \frac{dx}{x^3+5x^2},$ $\int arctg\, 7x\, dx,$ $\int \frac{3x+4}{x-2} dx,$

$\int \sqrt{x^2+9}\, dx,$ $\int \frac{tg\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx,$ $\int sin\, 3x\, cos\, 5x\, dx,$

$\int \frac{e^{\frac{1}{2x+1}} dx}{(2x+1)^2},$ $\int ln(5+11x)\, dx,$ $\int x(cos(5x+1))^2 dx.$

60. $\int \frac{dx}{x^3+3x},$ $\int \frac{cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx,$ $\int x\, e^{-3x+4}\, dx,$

$\int \sqrt{49-x^2}\, dx,$ $\int sin\, 3x\, cos\, 2x\, dx,$ $\int \frac{dx}{2+3\cos x},$

$\int (cos\, x)^2\ (sin\, x)^4 dx,$ $\int \frac{e^{arcsin\sqrt{x}}\ \sqrt{x}\, dx}{\sqrt{1-x}},$ $\int sin\, x\, e^{cosx}\, dx.$

61. $\int (tg\ (5x-3))^2 dx,$ $\int 3\ (sin(5x+3))^2 dx,$ $\int \frac{dx}{x(5x+1)(2x-2)},$

$\int ln(x+5)^2\, dx,$ $\int \frac{\sqrt{ln(2x-1)}\ dx}{2x-1},$ $\int (2x-1)\ e^{-3x}\, dx,$

$\int \frac{sin\left(\frac{1}{3x+1}\right)}{(3x+1)^2} dx,$ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}},$ $\int arctg\sqrt{x}\, dx.$

62. $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{7-11x}},$ $\int \frac{e^{\sqrt{6x}}}{\sqrt{x}} dx,$ $\int \frac{dx}{x^2-x+6},$

$$\int \frac{dx}{x\,(3x+1)}, \qquad \int x\cos(3x-2)\,dx, \qquad \int x^2 \ln 3x\,dx,$$

$$\int \sin 7x \cos x\,dx, \qquad \int \sqrt{4x^2+1}\,dx, \qquad \int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}.$$

63. $$\int \frac{dx}{\sqrt[8]{5x+1}}, \qquad \int \frac{\arcsin\, 7x}{\sqrt{1-49x^2}}dx, \qquad \int \frac{dx}{x^2-x+10},$$

$$\int \frac{dx}{x^2-81}, \qquad \int 2\ln \sqrt[6]{x}\,dx, \qquad \int \frac{3x^2\,dx}{2x-1},$$

$$\int e^{-4x}\cos 3x\,dx, \qquad \int \frac{dx}{(\cos(2x+1))^4}, \qquad \int \sqrt{x^2-81}\,dx.$$

64. $$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{7x+11}}, \qquad \int \frac{\cos\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx, \qquad \int \frac{dx}{x^2-2x+7},$$

$$\int \frac{dx}{25x^2-1}, \qquad \int \ln(5x+1)\,dx, \qquad \int \frac{x^3\,dx}{3x-1},$$

$$\int \frac{dx}{3+2\cos x}, \qquad \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{4+7x}, \qquad \int \sqrt{4x^2+1}\,dx.$$

65. $$\int \sqrt{5+10x}\,dx, \qquad \int \frac{(arctg\ 3x)^2}{1+9x^2}dx, \qquad \int (x+2)e^{-5x}dx,$$

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+4}, \qquad \int \frac{dx}{x\,(25x^2+1)}, \qquad \int \frac{dx}{3+\sin x},$$

$$\int x^3(arctg\ x)^4dx, \qquad \int \frac{dx}{5\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}}, \qquad \int \frac{dx}{(\cos(3x+1))^4}.$$

66. $$\int \frac{e^{\sqrt{1+3x}}dx}{\sqrt{1+3x}}, \qquad \int \frac{arctg\ (2-x)}{x^2-4x+5}dx, \qquad \int \frac{5x\,dx}{x^2+9},$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{x+3}}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{(3x-1)(x+5)}, \qquad \int \frac{dx}{5-\sin x},$$

$$\int (\sin 3x)^6dx, \qquad \int (x-2)\cos 7x\,dx, \qquad \int (\cos(3x+2))^3\,dx.$$

67. $\int \frac{2x}{x^2 - x + 2} dx,$ $\int (2x+1) sin(x^2+x)\, dx,$ $\int e^{-\sin 3x} \cos 3x\, dx,$

$\int (\cos 2x)^3 dx,$ $\int \frac{x^2 - 3x}{2x+1}\, dx,$ $\int \ln \sqrt[6]{3-2x}\, dx,$

$\int \frac{dx}{\sqrt{2+5x}},$ $\int \sin 2x \cos 3x\, dx,$ $\int \sqrt{\frac{2x+3}{x-2}} dx.$

68. $\int \cos 5x\, e^{-\sin 5x}\, dx,$ $\int (x+2)^2 \cos 2x\, dx,$ $\int \frac{dx}{(x-3)(x+1)},$

$\int \cos 3x \sqrt{\sin 3x}\, dx,$ $\int \ln \sqrt[4]{2x+1}\, dx,$ $\int arctg\, 6x\, dx,$

$\int \sqrt{\frac{x}{2x+1}} dx,$ $\int \frac{dx}{x^2+2x},$ $\int x^2 e^{x^3+1} dx.$

69. $\int x \cos(x^2+2)\, dx,$ $\int \sqrt{x-2}\, e^{\sqrt{x-2}} dx,$ $\int \frac{e^{\arccos \sqrt{x}} dx}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}},$

$\int \frac{dx}{x^2+3x+10},$ $\int \frac{5x}{2x+1} dx,$ $\int x^3 e^{x^4+1} dx,$

$\int (\ln(2x-3))^2\, dx,$ $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x}},$ $\int \frac{\left(\sin \sqrt{2-x}\right)^2}{\sqrt{2-x}} dx.$

70. $\int (5+2x)^{-\frac{1}{2}} dx,$ $\int \frac{(\arcsin x)^4}{\sqrt{1-x^2}} dx,$ $\int 2x \sin(3x+2)\, dx,$

$\int \frac{dx}{x^2-x+2},$ $\int x^2 \ln \sqrt[4]{x}\, dx,$ $\int \sqrt{25x^2+1}\, dx,$

$\int (\cos(2x-1))^5 dx,$ $\int (\sin(2x+1))^4 dx,$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+5}.$

71. $\int \sqrt{12-7x}\, dx,$ $\int \frac{\cos \sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}} dx,$ $\int \frac{dx}{x\,(x^2+7)},$

$\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x}},$ $\int \arcsin 7x\, dx,$ $\int x\, arctg(x-3)\, dx,$

$\int \frac{dx}{(\cos(x-3))^3}$, $\int \sqrt{4x^2-1}\, dx$, $\int (\ln(x+1))^2\, dx$.

72. $\int \sqrt[3]{11-12x}\, dx$, $\int \frac{e^{-\sqrt{2+x}} dx}{\sqrt{2+x}}$, $\int arctg(3x-2)\, dx$,

$\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$, $\int \frac{dx}{(\sin(2x+1))^4}$, $\int \frac{\sqrt[4]{x}\, dx}{1+3\sqrt{x}}$,

$\int e^{-2x} \sin 3x\, dx$, $\int \frac{dx}{x^3+2x^2+5x}$, $\int x^5 \sin x^3\, dx$.

73. $\int \sqrt[6]{7x+2}\, dx$, $\int \frac{\sin\sqrt{3x+2}\, dx}{\sqrt{3x+2}}$, $\int \frac{dx}{x^2-x+4}$,

$\int \frac{dx}{x(5x+1)}$, $\int \frac{dx}{(\cos 3x)^6}$, $\int \frac{dx}{3+2\sqrt[4]{x}}$,

$\int 2x\, 4^{3x}\, dx$, $\int \cos 5x\, \sin 3x\, dx$, $\int \sqrt{49-x^2}\, dx$.

74. $\int \frac{dx}{\sqrt[8]{3x+2}}$, $\int \frac{(arctg\,(1-2x))^2}{4x^2-4x+2}\, dx$, $\int \frac{\cos\sqrt{3x}\, dx}{\sqrt{x}}$,

$\int \frac{dx}{x^2+x+4}$, $\int \frac{dx}{x(3x+1)}$, $\int \frac{dx}{(\sin(3x+1))^4}$,

$\int (x+1)^2 \ln x\, dx$, $\int \cos 2x\, \sin 3x\, dx$, $\int \sqrt{9x^2+1}\, dx$.

75. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}}$, $\int \frac{e^{\sqrt{2x+1}} dx}{\sqrt{2x+1}}$, $\int (x-2)\cos 3x\, dx$,

$\int (tg\, 9x)^2\, dx$, $\int \frac{dx}{x(x+4)^2}$, $\int \cos 5x\, \sin 6x\, dx$,

$\int \sqrt{x^2-x+3}\, dx$, $\int \frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt[3]{x}}\, dx$, $\int \frac{dx}{(\cos 3x)^6}$.

76. $\int \sqrt{7x+11}\, dx$, $\int \frac{\sin\sqrt{3x+2}\, dx}{\sqrt{3x+2}}$, $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$,

$\int \frac{dx}{3+2\sqrt[3]{x}}$, $\int \sqrt{x}\cos\sqrt{2x^3}$, $\int \cos 6x\ \sin 3x\,dx$,

$\int (\cos x)^4\ (\sin x)^2 dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+4}}$, $\int x\,e^{-x^2}\,dx$.

77. $\int \frac{dx}{\sqrt{11x+3}}$, $\int \sqrt{5x}\,e^{7x\sqrt{x}}\,dx$, $\int \cos 4x\ \sin 5x\,dx$,

$\int (\sin 8x)^3 dx$, $\int 3x\ \cos 5x\ dx$, $\int (\cos 7x)^4\,dx$,

$\int \frac{dx}{x^2+3x}$, $\int \frac{dx}{x^2(2x^2+12)}$, $\int \sqrt{4+x^2}\,dx$.

78. $\int \sqrt{4+5x}\,dx$, $\int \frac{dx}{(\sin 5x)^6}$, $\int \sqrt{16x^2+6}\,dx$,

$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{5+2\sqrt{x}}$, $\int 5\,x^3 \sin 3x^2\,dx$, $\int (\cos 7x)^2\,dx$,

$\int 2\,x^2 e^{-5x} dx$, $\int \frac{dx}{x^2-9x+20}$, $\int \frac{dx}{x(x+3)(x^2+7)}$.

79. $\int \frac{(arctg\ 5x)^2}{1+25x^2}\,dx$ $\int \frac{dx}{x(x+7)^2}$, $\int \sqrt{\frac{1-3x}{2+x}}\,dx$,

$\int \frac{dx}{(\cos 3x)^3}$, $\int (3x-1)\ \cos 5x\ dx$, $\int (\cos(2x+1))^4\,dx$,

$\int (\ln 8x)^2 dx$, $\int \sqrt{9x^2-1}\,dx$, $\int \frac{e^{\sqrt{5x}}dx}{\sqrt{x}}$.

80. $\int (tg\ 7x)^2\,dx$, $\int \frac{dx}{5-3x}$, $\int \sqrt{5x}\,e^{\sqrt{3x}}\,dx$,

$\int \frac{dx}{x(3x+2)^2}$, $\int \arcsin 3x\,dx$, $\int \frac{dx}{(\sin 5x)^4}$,

$\int \frac{2x}{3+2x^2}\,dx$, $\int \frac{dx}{x(16x^2+1)}$, $\int \frac{dx}{x\ln 3x}$.

81. $\int (\,sh\,3x)^2\,dx,$ $\int e^{7x} ln(1+e^{7x})\,dx,$ $\int (\,tg\,3x)^3\,dx,$

$\int \frac{dx}{(x+3)(x-2)},$ $\int \frac{tg(\,ln\,5x)}{x}dx,$ $\int \frac{dx}{\sqrt{9x+5}},$

$\int \frac{dx}{x^2+x+10},$ $\int x^2 e^{-5x} dx,$ $\int sin\,6x\,cos\,x\,dx.$

82. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(2x-4)},$ $\int \frac{dx}{\sqrt{7x+5}},$ $\int \frac{dx}{(x-3)(x+9)},$

$\int x\;arctg\,5x\,dx,$ $\int x^5 e^{-2x^6} dx,$ $\int (sin(2x-4))^3 dx,$

$\int (\,ch\,3x)^2\,dx,$ $\int (cos(2x-3))^4 dx,$ $\int x\,ln(7x+5)\,dx.$

83. $\int \sqrt{11-x^2}\,dx,$ $\int e^{-3x}\;cos\,2x\;dx,$ $\int 2\,ln\sqrt{2x+1}\,dx,$

$\int (x-2)(sin\,3x)^2 dx,$ $\int (x-2)^2 e^{-2x} dx,$ $\int \frac{dx}{x(x+3)(x+2)},$

$\int \frac{dx}{(cos(2x+3))^3},$ $\int \frac{dx}{5+\sqrt{2x-1}},$ $\int \frac{dx}{x^2+4x+9}.$

84. $\int \frac{dx}{x^4+x^2},$ $\int \frac{3x+2}{2x-3}dx,$ $\int \frac{tg\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}}dx,$

$\int \frac{e^{\frac{1}{x+3}}dx}{(x+3)^2},$ $\int arctg\,9x\,dx,$ $\int x\,(cos(2x-3))^2 dx,$

$\int cos\,2x\;\,sin\,3x\,dx\,,$ $\int ln(2+7x)\,dx,$ $\int \sqrt{x^2+10}\,dx.$

85. $\int (\,tg(3x+2))^2\,dx,$ $\int 2(sin(\,7x-2))^2 dx,$ $\int ln(2x-3)^2\,dx,$

$\int \frac{dx}{x\,(3x+2)(x-2)},$ $\int \frac{\sqrt{\ln(x+2)}}{x+2}dx,$ $\int \frac{dx}{cos(2x-1)},$

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$, $\int (x+2)e^{-3x}dx$, $\int arctg(5x+1)dx$.

86. $\int \frac{dx}{x^4+3x^2}$, $\int \frac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx$, $\int \frac{x}{1+\sqrt[3]{x}}dx$,

$\int e^{e^x+1}dx$, $\int (x-2)e^{-3x}dx$, $\int \sqrt{16-x^2}\,dx$,

$\int \cos 3x\ \cos 5x\ dx$, $\int \frac{dx}{4+3\cos 2x}$, $\int \frac{e^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

87. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2+5x}}$, $\int \frac{e^{\sqrt{3x}}dx}{\sqrt{x}}$, $\int \frac{dx}{x\,(2x+3)}$,

$\int \frac{dx}{x^2-2x+7}$, $\int x\cos(5x+3)dx$, $\int x^2\ln 5x\,dx$,

$\int \sin 5x\cos 7x\,dx$, $\int (\,tg\,5x)^2\,dx$, $\int \frac{\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

88. $\int \frac{dx}{\sqrt[9]{2x-9}}$, $\int \frac{\arcsin 11x}{\sqrt{1-121x^2}}dx$, $\int \frac{dx}{x^2-2x+4}$,

$\int \frac{dx}{4x^2-1}$, $\int 5\ln\sqrt[7]{x+2}\,dx$, $\int x^2e^{-5x+1}dx$,

$\int e^{-3x}\cos 2x\,dx$, $\int \frac{x^3}{2x-3}dx$, $\int \sqrt{9x^2-1}\,dx$.

89. $\int \frac{dx}{\sqrt[9]{3-13x}}$, $\int \frac{\cos\sqrt{2+3x}}{\sqrt{2+3x}}dx$, $\int \frac{dx}{16x^2-1}$,

$\int \frac{x^3}{2x+1}dx$, $\int \ln(2x-1)\,dx$, $\int x^3\ln(2x+1)\,dx$,

$\int \frac{dx}{3-2\sin x}$, $\int \frac{\sqrt{x}}{5-2x}dx$, $\int \sqrt{25x^2+1}\,dx$.

90. $\int \sqrt[4]{7x+5}\,dx$, $\int \frac{(arctg\,5x)^3dx}{25x^2+1}$, $\int (2x-1)\,e^{-3x}\,dx$,

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+9}, \qquad \int \frac{dx}{x\,(9x^2+1)}, \qquad \int \frac{dx}{2-\sin 4x},$$

$$\int x^4 \operatorname{arctg} x^5 \; dx, \qquad \int \frac{dx}{(\sin(2x+1))^4}, \qquad \int \sqrt{x^2-2x+3}\, dx.$$

91. $$\int \frac{x}{x^2-2x+3} dx, \qquad \int (x-3) \sin\left(\frac{x^2}{2}-3x\right), \qquad \int \frac{x^2+1}{2x-1} dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+7x}}, \qquad \int e^{-\cos 5x} \sin 5x\, dx, \qquad \int \frac{dx}{3-2\cos 2x},$$

$$\int \ln \sqrt[3]{2+3x}\, dx, \qquad \int \sin 3x \cos 2x\, dx, \qquad \int \sqrt{\frac{2x+1}{x-2}}\, dx.$$

92. $$\int \cos 7x\, e^{-\sin 7x} \qquad \int \frac{dx}{(2x+1)(x-2)}, \qquad \int \sqrt{\frac{3+x}{2x-1}}\, dx,$$

$$\int \frac{dx}{x^2-3x}, \qquad \int (2x-1)^2 \sin 2x\, dx, \qquad \int \ln \sqrt[5]{x+5}\, dx,$$

$$\int x^3 e^{x^4+2} dx, \qquad \int \frac{dx}{3-\cos 2x}, \qquad \int \cos 5x \sqrt{\sin 5x}\, dx.$$

93. $$\int x^2\, (\cos(x-1))^3 dx, \qquad \int \sqrt{x+3}\, e^{-\sqrt{x+3}}\, dx, \qquad \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx,$$

$$\int \frac{dx}{x^2-x+9}, \qquad \int \frac{dx}{(\sin x)^4 (\cos x)^2}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{5x-1}},$$

$$\int (\ln(3x-2))^2 dx, \qquad \int \frac{\left(\cos\sqrt{x+3}\right)^2 dx}{\sqrt{x+3}}, \qquad \int \frac{dx}{(x-3)\ln(x-3)}.$$

94. $$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-4x}}, \qquad \int \frac{(\arcsin x)^5}{\sqrt{1-x^2}} dx, \qquad \int \frac{dx}{x^2-2x+8},$$

$$\int \frac{dx}{3x^2-1}, \qquad \int x \sin(7x-3)\, dx, \qquad \int x^4 \ln \sqrt[3]{x}\, dx,$$

$$\int (\sin(x+3))^5 dx, \qquad \int \frac{dx}{3\sqrt{x}-4}, \qquad \int \sqrt{9x^2-11}\, dx.$$

95. $\int \sqrt{7-11x}\,dx,$ $\int \frac{\sin\sqrt{2x-1}\,dx}{\sqrt{2x-1}},$ $\int \frac{dx}{x\,(x^2+9)},$

$\int \frac{dx}{x-3\sqrt{x}},$ $\int \arcsin 3x\,dx,$ $\int \frac{dx}{x^2-2x+11},$

$\int x\,arctg(x+5)\,dx,$ $\int (\cos 2x)^2\,(\sin 2x)^4 dx,$ $\int \frac{dx}{(\cos(x+1))^3}.$

96. $\int \sqrt[4]{9+15x}\,dx,$ $\int \frac{e^{\sqrt{x+5}}dx}{\sqrt{x+5}},$ $\int \frac{dx}{x^2+7x+14},$

$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx,$ $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x},$ $\int arctg(2x+1)\,dx,$

$\int e^{-5x}\sin 4x\,dx,$ $\int \frac{dx}{(\sin(3x+2))^4},$ $\int x^5\ \cos x^3\,dx.$

97. $\int \sqrt[5]{2+3x}\,dx,$ $\int \frac{\cos\sqrt{3x+2}\,dx}{\sqrt{3x+2}},$ $\int \frac{dx}{x\,(4x-2)},$

$\int \frac{dx}{(\cos 2x)^6},$ $\int \frac{dx}{x^2-x+12},$ $\int x\,2^{5x}\ dx,$

$\int \cos 11x\ \sin x\,dx\,,$ $\int \frac{dx}{2+3\sqrt{x}},$ $\int \sqrt{25-x^2}\,dx.$

98. $\int \frac{dx}{\sqrt[9]{5-3x}},$ $\int \frac{arctg(3x+1)}{9x^2+6x+2}dx,$ $\int \frac{\cos\sqrt{5x+1}\,dx}{\sqrt{5x+1}},$

$\int \frac{dx}{x^2+x+2},$ $\int (x-1)^2\ln x\,dx,$ $\int \sin 3x\cos 4x\,dx,$

$\int (\sin(x+3))^5 dx,$ $\int \frac{dx}{3x(x+1)},$ $\int \sqrt{x^2+4}\,dx.$

99. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{3x+1}},$ $\int \frac{e^{\sqrt{x-2}}dx}{\sqrt{x-2}},$ $\int \frac{dx}{x(x+7)^2},$

$\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}dx,$ $\int (x+3)\sin 6x\,dx,$ $\int (ctg\,5x)^2\,dx,$

$$\int\sqrt{x^2-2x+9}\,dx,\qquad \int cos\,3x\ \ cos\,4x\,dx\,,\qquad \int\frac{dx}{(cos\,5x)^6}.$$

100. $$\int\sqrt{11x+13}\,dx,\qquad \int\frac{sin\sqrt{7+5x}\,dx}{\sqrt{7+5x}},\qquad \int\sqrt{x}\ \ sin\sqrt{4x^3}\,dx,$$

$$\int\frac{dx}{x^2-2x+9},\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+9}},\qquad \int\frac{dx}{(sin(2x-1))^6},$$

$$\int cos\,5x\ \ sin\,3x\,dx\,,\qquad \int\ x^4e^{-x^5}dx,\qquad \int\sqrt{x^2-2x+3}\,dx.$$

Завдання 7.1. Геометричні додатки означених інтегралів. Обчислення площ

Обчислити площу фігури, обмежену лініями (зробити схематичне креслення):

1. а) $\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ y^2=\dfrac{3}{2}x; \end{cases}$ б) $\rho=2\cos\varphi$; в) $\begin{cases} x=2\sqrt{2}(\cos t)^3, \\ y=2\sqrt{2}(\sin t)^3. \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{4}x^2, \\ y=3x-\dfrac{1}{2}x^2; \end{cases}$ б)$\rho=2\,(1+\cos\varphi)$; в) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(t-\cos t), \\ 0\le t\le 2\pi. \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} y=\sqrt[3]{x}, \\ x=2, x=4\ \ ; \end{cases}$ б) $\rho=\sqrt{1-tg\varphi}$; в) $\begin{cases} y=\sqrt{t}, \\ x=t^2(t-1)^2. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2, \\ 2y=3x-2; \end{cases}$ б) $\begin{matrix} \rho=\dfrac{3}{2\pi}\varphi, \\ (0\le\varphi\le 2\pi); \end{matrix}$ в) $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t)\,. \\ (0\le\varphi\le 2\pi). \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} y=\sin x, \\ y=2x, \\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ б) $\rho=4\cos\varphi$; в) $\begin{cases} x=a\cos t\,, \\ y=b\sin t\,. \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} y=e^x-1, \\ y=e^{2x}-3, \\ x=0. \end{cases}$ б) $\rho=2\sin 2\varphi$; в) $\begin{cases} x=3t^2, \\ y=3t-t^3. \end{cases}$

7. а) $\begin{cases} y^2 = x^3, \\ x + y = 1, \\ x = 0. \end{cases}$ б) $\rho = 3\cos 3\varphi$; в) $\begin{cases} x = t^2 - 4, \\ y = t^3 - 4t. \end{cases}$

8. а) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -chx; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = arctg\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} y = arcsin\, x, \\ x = 0, y = \dfrac{\pi}{4}\ ; \end{cases}$ б) $\rho = \cos 5\varphi$; в) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t\left(\dfrac{1}{3} - t^2\right). \end{cases}$

10. а) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{1 + x^2}, \\ y = x^2; \end{cases}$ б)$\rho = 2\,(2 + \cos\varphi)$; в) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ x = t, y = 2t. \end{cases}$

11. а) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x^2, \\ y = 3x - \dfrac{1}{2}x^2; \end{cases}$ б)$\rho = 2\,(1 + \cos\varphi)$; в) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(a - \cos t) \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} y = ch2x, \\ y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = \cos\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^2 - 1, \\ x = t^3 - t. \end{cases}$

13. а $\begin{cases} 16x^2 + 25y^2 = 100, \\ y = 1, y > 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 4\cos 3\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{6}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^2, \\ x = \dfrac{1}{3}(3t - t^3). \end{cases}$

14. а) $\begin{cases} y = \ln x, \\ y = (\ln x)^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 3\cos\varphi, \\ 0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^2 + 1, \\ x = t^3 - 3t. \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} y = x\sqrt{x}, \\ x + y = 2, \\ y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 2\sin 2\varphi, \\ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{6}t^6, \\ y = \dfrac{1}{4}t^4. \end{cases}$

16. а) $\begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = a\left(\sin\frac{\varphi}{3}\right)^3, \\ (a > 0); \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^2 + 2, \\ x = \dfrac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$

17. а) $\begin{cases} y = sin\, x, \\ y = x, x = 0, x = \dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{1 + 2\sin\varphi}$; в) $\begin{cases} x = 2t^2, \\ y = t^5(t - 1). \end{cases}$

18. а) $\begin{cases} y = 3 - e^{x+1}, \\ x = 0, x = 1, y = 0; \end{cases}$ б) $\rho = 2(3 + \cos\varphi)$; в) $\begin{cases} x = \sqrt{3}t^2, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$

19. а) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}\sin(3x+1), \\ x = 0, x = \dfrac{\pi}{6}; \end{cases}$ б) $\rho = a^2\left(\sin\frac{\varphi}{4}\right)^2$; в) $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2 - 2. \end{cases}$

20. а) $\begin{cases} y = e^{3+x}, \\ x = 0, y = 0, x = -3; \end{cases}$ б) $\rho = a(\cos\varphi)^3$; в) $\begin{cases} y = t^2 - 1, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$

21. а) $\begin{cases} y = \ln x + 1, \\ y = 0, x = 1, x = e; \end{cases}$ б) $\rho = a(1 + \sin\varphi)$; в) $\begin{cases} x = t^3 - 3t^2, \\ y = 2t - t^2. \end{cases}$

22. а) $\begin{cases} y = e^x + 4, \\ x + y = 6, x = 0, y = \end{cases}$ б) $\rho = a(\cos\varphi)^3$; в) $\begin{cases} y = t^2 - 1, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$

23. а) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 4x^3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = a\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = 2\pi; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^4 + t^5. \end{cases}$

24. а) $\begin{cases} y = 2 + tg\, x, \\ x = 0, x = \dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{ctg\,\varphi - 1}$; в) $\begin{cases} x = t^2(t-1)^2, \\ y = t^3. \end{cases}$

25. а) $\begin{cases} y = 2^x, \\ y = 0, x = 0, x = 3; \end{cases}$ б) $\rho = \sin 3\varphi$; в) $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}(t^3 - 3t), \\ y = 2(t^2 + 1). \end{cases}$

26. а) $\begin{cases} y = \cos 5x, \\ y = 0, x = 0, x = \dfrac{\pi}{5}; \end{cases}$ б) $\rho = (\cos\varphi)^2$; в) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 4t - t^4. \end{cases}$

27. а) $\begin{cases} y = \cos 2x, \\ y = x^2, x = 0; \end{cases}$ б) $\rho = 4 - \cos\varphi$; в) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{6}t^6 \\ y = 2 - \dfrac{1}{4}t^4. \end{cases}$

28. а) $\begin{cases} y = \ln(2x+3), \\ y = 0, x = 0, x = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = tg\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^2(t-1)^2, \\ x = t^2 - 1. \end{cases}$

29. а) $\begin{cases} y = \sqrt[3]{x} + 2, \\ y = 0, x = 1; \end{cases}$ б) $\rho = 1\sin\varphi$; в) $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$

30. а) $\begin{cases} y = \cos\dfrac{\pi x}{2}, \\ x + 1 = 1; \end{cases}$ б) $\rho^2 = 4\cos 2\varphi$; в) $\begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$

31. а) $\begin{cases} y = x^2 + 3x, \\ y = 4 + x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 4(1 + \sin\frac{\varphi}{2}), \\ 0 \le \varphi \le 2\pi; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^4, \\ x = t - t^3. \end{cases}$

32. а) $\begin{cases} y = ch3x, \\ y = x^2, \\ x = 0, x = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 1 - \varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = 6t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$

33. а) $\begin{cases} y = 3ch2x, \\ y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = tg\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^2(t-1)^2, \\ x = t^2 - 1. \end{cases}$

34. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = 2x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = e^{\varphi}, \\ \varphi = 0, \varphi = \pi; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = t^2 - 4. \end{cases}$

35. а) $\begin{cases} y = e^x - 1, \\ y = e^{2x} - 3, \\ x = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 2\sin\varphi, \\ \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^3 - 3t, \\ x = t^2 - 2. \end{cases}$

36. а) $\begin{cases} y = arcsin\, x, \\ x = 0, y = \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{1 - 2(\cos\varphi)^2}$; в) $\begin{cases} x = t^3 - 3t^2, \\ y = t^2 - 2t. \end{cases}$

37. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = 1, \\ x = 2, y = 2; \end{cases}$ б) $\rho = 2 - 3\cos\varphi$; в) $\begin{cases} x = 2t^2, \\ y = -5(t^4 + t^5). \end{cases}$

38. а) $\begin{cases} y = arccos\, x, \\ y = \dfrac{\pi}{2}, y = 0, x = 0; \end{cases}$ б) $\rho = 3 + 3\cos\varphi$; в) $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$

39. а) $\begin{cases} y = x^2 - 3x, \\ x + y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = \frac{1}{\varphi}, \\ \varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = \pi; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = a(\cos t)^4, \\ y = a(\sin t)^4, \\ x = 0, y = 0, \\ \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$

40. а) $\begin{cases} y^2 = x^3, \\ y = 2, y = 0, x = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 3 + \cos 4\varphi, \\ \rho = 2 - \cos 4\varphi; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t). \end{cases}$

41. а) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = \sqrt{x}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = \frac{1}{\varphi + \frac{\pi}{2}}, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = 8at^3, \\ y = 3a(2t^2 - t^4). \end{cases}$

42. а) $\begin{cases} y = e^x - 2, \\ y = e^{3x} + 1, \\ x = -1, x = 0; \end{cases}$ б) $\rho = 5 + 2\cos\varphi$; в) $\begin{cases} x = t^4, \\ y = t - t^3. \end{cases}$

43. а) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2, \\ y = \dfrac{1}{8}x^3; \end{cases}$ б) $\rho^2 = \cos 2\varphi$; в) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{6}t^6, \\ y = 2 - \dfrac{1}{4}t^4. \end{cases}$

44. а) $\begin{cases} y = \cos x, \\ y = \sin x, \\ y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = \frac{1}{\sin\varphi}, \\ \varphi = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^3 - 1, \\ x = t^2(t-1)^2. \end{cases}$

45. а) $\begin{cases} y = 2\sin 3x, \\ x = 0, x = \dfrac{2\pi}{3}; \end{cases}$ б) $\rho^2 = -\sin\varphi$; в) $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}a\sin t, \\ y = a\sin 2t. \end{cases}$

46. а) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x}, \\ x = 1, x = 4; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$; в) $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^2(t-1)^2. \end{cases}$

47. а) $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = 0; \end{cases}$ б) $\rho = 1 + \cos\varphi$; в) $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = \sqrt{t(1-t)}, \\ y = 0. \end{cases}$

48. а) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x-1}, \\ x = 2, x = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 3\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = \sqrt{t(1-t)}, \\ x = 0. \end{cases}$

49. а) $\begin{cases} y^2 = 2(x-1)^2, \\ y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 2 + 4\sqrt{\varphi}, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t(2 - t^2). \end{cases}$

50. а) $\begin{cases} y = 2e^{-x}, \\ x = -1, x = 2; \end{cases}$ б) $\rho^2 = -\cos\varphi$; в) $\begin{cases} x = t^2(t-1)^2, \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$

51. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y = -\sqrt{3}x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 2(1 - \cos\varphi), \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = (\cos t)^3, \\ y = (\sin t)^3. \end{cases}$

52. а) $\begin{cases} y^2 = (x-1)^3, \\ y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 2(1 + \cos\varphi), \\ \varphi = 0, \varphi = \pi; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = (\cos t)^5, \\ y = (\sin t)^5. \end{cases}$

53. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y = 5 - x^2, \\ x = 0, x = 1; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{1 - 2\cos\varphi}$; в) $\begin{cases} y = t^3 - 1, \\ x = t^2(t-1)^2. \end{cases}$

54. а) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1, \\ y = x + 1; \end{cases}$ б) $\rho = (\cos\varphi)^2$; в) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = t\sin t, \\ y = 0, (0 \le t \le \pi). \end{cases}$

55. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18, \\ 3y = x^2; \end{cases}$ б) $\rho = (\sin\varphi)^2$; в) $\begin{cases} y = \cos t, \\ x = t\sin t, \\ x = 0, (0 \le t \le \pi). \end{cases}$

56. а) $\begin{cases} y = e^x - 1, \\ x = 2; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{\sin\varphi}$; в) $\begin{cases} x = (\cos t)^2, \\ y = t\sin t, \\ y = 0, (0 \le t \le \pi). \end{cases}$

57. а) $\begin{cases} y = \sin 2x, \\ y = \cos 2x, \\ x = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 2\sin\frac{\varphi}{3}, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = \mathrm{t}\cos t, \\ y = \sin t, \\ y = 0, (0 \le t \le \pi). \end{cases}$

58. а) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 8x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 2 - \cos\varphi, \\ \rho = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = t\sin t, \\ y = (\cos t)^2, \\ x = 0, (0 \le t \le \pi). \end{cases}$

59. а) $\begin{cases} xy = 20, \\ x^2 + y^2 = 41; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 1 + \cos\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = t^2\sin t, \\ y = \cos t, \\ y = 0, (-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}). \end{cases}$

60. а) $\begin{cases} y = (x-1)^2, \\ y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = \varphi + \varphi^2, \\ \varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^2\sin t, \\ x = \cos t, \\ x = 0, (-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}). \end{cases}$

61. а) $\begin{cases} y = \frac{4}{x}, \\ x = 3, x = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 2\cos\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t(t-1), \\ y = 0. \end{cases}$

62. а) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = \varphi^2, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ x = 0. \end{cases}$

63. а) $\begin{cases} y = tgx, \\ x = 0, x = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = \sqrt{\varphi}, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^2 - 1, \\ x = t^3 - t. \end{cases}$

64. а) $\begin{cases} y = ctgx, \\ x = 0, x = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = \varphi^2, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2 - 2. \end{cases}$

65. а) $\begin{cases} y = arctg\, x, \\ x = 0, x = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = \frac{1}{\cos\varphi}, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = t^3 - 2t^2, \\ y = 2t - t^2. \end{cases}$

66. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y^2 = \frac{2}{3}x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 2e^{-\varphi}, \\ \varphi = 0, \varphi = 2\pi; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 4t - t^3. \end{cases}$

67. а) $\begin{cases} y = 2x^2, \\ y = x - \frac{1}{2}x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = \varphi\cos\varphi\,, \\ \varphi = -\frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^5 - t^4, \\ x = t^2 - 1. \end{cases}$

68. а) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -chx; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = arctg\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$

69. а) $\begin{cases} y = \sin x\,, \\ y^2 = x^3; \end{cases}$ б) $\rho = 4(\sin\varphi)^2;$ в) $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t\,, \\ y = 2\sin t - \sin 2t\,. \end{cases}$

70. а) $\begin{cases} y = e^x + 1, \\ y = x^2 + 4; \end{cases}$ б) $\rho = a(1 + \sin\varphi);$ в) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3. \end{cases}$

71. а) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x^2, \\ y = 3x - \dfrac{1}{2}x^2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \rho = 2\cos\varphi\,, \\ \rho = 2\sin\varphi, \\ \left(0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = t^2 - \pi^2 \\ y = \sin t\,, \\ y = 0, (0 \le t \le \pi). \end{cases}$

72. а) $\begin{cases} y^2 = 5(x-1)^3, \\ x = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = \ln\varphi\,, \\ \varphi = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^2 - \pi^2 \\ x = \sin t\,, \\ x = 0, (0 \le t \le \pi). \end{cases}$

73. а) $\begin{cases} y = 3ch2x, \\ y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = tg\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^2(t-1)^2, \\ x = t^2 - 1. \end{cases}$

74. а) $\begin{cases} y = \ln(2x+3)\,, \\ y = 0, x = 0, x = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = tg\varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^2(t-1)^2, \\ x = t^2 - 1. \end{cases}$

75. а) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4, \\ y = x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = ctg\varphi, \\ \varphi = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^2(t-1)^2. \end{cases}$

76. а) $\begin{cases} y = \sqrt[3]{x}, \\ y = (x+1)^3\ ; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 2^\varphi, \\ 0 \le \varphi \le \pi; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^2 - 1, \\ x = t^2(t-1)^2. \end{cases}$

77. а) $\begin{cases} y = \cos 2x\,, \\ y = x^2, x = 0; \end{cases}$ б) $\rho = 4 - \cos\varphi;$ в) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{6}t^6, \\ y = 2 - \dfrac{1}{4}t^4. \end{cases}$

78. а) $\begin{cases} y = e^{3x}, \\ y = 2 - x^2; \end{cases}$ б) $\rho = 1 - \cos\varphi;$ в) $\begin{cases} x = 8at^3, \\ y = 3a(2t^2 - t^4). \end{cases}$

79. а) $\begin{cases} y = \ln x, \\ y = x^2 + 3; \end{cases}$ б) $\rho = 3 + \sin\varphi$ в) $\begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = t^2 - 2. \end{cases}$

80. а) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2, \\ 2y = 3x - 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = \frac{3}{2\pi}\varphi, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \\ (0 \le \varphi \le 2\pi). \end{cases}$

81. а) $\begin{cases} y = arcsin2x, \\ y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{6} \end{cases}$; б) $\begin{cases} \rho = 1 + \sqrt{\varphi}, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^2 - 1, \\ x = t(2 - t^2). \end{cases}$

82. а) $\begin{cases} y = ch3x, \\ y = x^2, \\ x = 0, x = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 1 - \varphi, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = 6t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$

83. а) $\begin{cases} y^2 = 2(x-1)^2, \\ y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 2 + 4\sqrt{\varphi}, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t(2 - t^2). \end{cases}$

84. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = chx, \\ x = 0, x = \frac{1}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 3 - \sqrt{\varphi}, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = 6t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$

85. а) $\begin{cases} y = e^x - 2, \\ y = e^{3x} + 1, \\ x = -1, x = 0; \end{cases}$ б) $\rho = 5 + 2\cos\varphi$; в) $\begin{cases} x = t^4, \\ y = t - t^3. \end{cases}$

86. а) $\begin{cases} y = arccos\,2x, \\ y = 0, y = \frac{\pi}{2}, x = 0 \end{cases}$; б) $\rho^2 = 3\cos 2\varphi$; в) $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$

87. а) $\begin{cases} y = x^2 + 3x, \\ y = 4 + x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 4(1 + \sin\frac{\varphi}{2}), \\ 0 \le \varphi \le 2\pi; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^4, \\ x = t - t^3. \end{cases}$

88. а) $\begin{cases} y^2 = 4x^3, \\ y = 2, y = 0, \\ x = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = 4\left(a + \left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2\right), \\ 0 \le \varphi \le \pi; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = t^2 + 1, \\ x = t^3 + t. \end{cases}$

89. а) $\begin{cases} y = x^2, x = 0, \\ y = \sqrt[3]{x}, x = 2 \end{cases}$; б) $\rho = |2 - \cos\varphi|$; в) $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^3 + 2t. \end{cases}$

90. а) $\begin{cases} y = 2\sin 4x, \\ x = 0, x = \frac{\pi}{8} \end{cases}$; б) $\rho = |1 + 2\sin\varphi|$; в) $\begin{cases} y = t^3, \\ x = t^3 + 2t. \end{cases}$

91. а) $\begin{cases} y = 3(x-1)^2, \\ x = 0, x = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = |1 - tg\varphi|, \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2(t-1)^2. \end{cases}$

92. а) $\begin{cases} y = \frac{1}{x}, \\ x = 1, x = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = |ctg\varphi - 1|, \\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = t^2(t-1)^2. \end{cases}$

93. а) $\begin{cases} y = \sqrt[3]{x}, \\ x = 2, x = 4; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{1 - tg\varphi}$; в) $\begin{cases} y = \sqrt{t}, \\ x = t^2(t-1)^2. \end{cases}$

94. а) $\begin{cases} y = 2 + tgx, \\ x = 0, x = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{ctg\varphi - 1}$; в) $\begin{cases} x = t^2(t-1)^2, \\ y = t^3. \end{cases}$

95. а) $\begin{cases} y = arctg3x, \\ x = 0, x = \frac{1}{3}; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{1 + 2\cos\varphi}$; в) $\begin{cases} x = t^3 - 1, \\ y = t^2(1-t)^2. \end{cases}$

96. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y = 5 - x^2, \\ x = 0, x = 1; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{1 - 2\cos\varphi}$; в) $\begin{cases} y = t^3 - 1, \\ x = t^2(t-1)^2. \end{cases}$

97. а) $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = x, x = 0, x = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{1 + 2\sin\varphi}$; в) $\begin{cases} x = 2t^2, \\ y = t^5(t-1). \end{cases}$

98. а) $\begin{cases} y = 3^x + 1, \\ x = 0, x = 2; \end{cases}$ б) $\rho = \sqrt{1 - 2\sin\varphi}$; в) $\begin{cases} x = t^5(t-1), \\ y = 2t^2. \end{cases}$

99. а) $\begin{cases} y = \ln x + 5, \\ y = \frac{x}{4}, x = 0, x = 4; \end{cases}$ б) $\rho^2 = 4\sin\varphi$; в) $\begin{cases} x = (\cos t)^2, \\ y = t\sin t, \\ y = 0. \end{cases}$

100. а) $\begin{cases} y = \frac{1}{x-1}, \\ x = 2, x = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = \sqrt{\frac{\pi}{4} - \varphi}, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = (\cos t)^2, \\ x = t\sin t, \\ x = 0. \end{cases}$

Завдання 7.2. Невластиві інтеграли та їх збіжність

Дослідити збіжність невластивих інтегралів:

1. $\int_0^{\infty} \frac{arctg\, x}{1+x^2}\, dx$ $\qquad \int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{(x+1)^4}$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$ $\qquad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+\sqrt[4]{x^2+3}}$

3. $\int_2^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$ $\qquad \int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-2x}\, dx$

4. $\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{(4x^2+1)^2}}$ $\qquad \int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt[4]{(3-2x)^3}+1}$

5. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+4}$ $\qquad \int_0^{\infty} x^3\, e^{-2x} dx$

6. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+5}$ $\qquad \int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x} dx$

7. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ $\qquad \int_0^{\infty} x e^{-x^2}\, dx$

8. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}$ $\qquad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\, ln^2 x}$

9. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{lnx}}$ $\qquad \int_0^{\infty} \frac{dx}{cos^2 x + x^3 + 1}$

10. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$ $\qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{(x-1)\, dx}{x^5-4x^2+3}$

11. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\,(x+1)}$ $\qquad \int_1^{\infty} \frac{arctg\, x}{x^2}\, dx$

12. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\,\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad \int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{x^3-4x+3}$

13. $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ $\qquad \int_0^{\infty} x^4\, e^{-3x} dx$

14. $\int_3^{\infty} \sqrt{\frac{x}{x^5+1}}\, dx$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{3x\, dx}{(x+1)^6}$

15. $\int_0^{\infty} x\, e^{-x^2} dx$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{(x+1)^2}$

16. $\int_2^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1}\, dx$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$

17. $\int_1^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\, dx$ $\qquad$ $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}$

18. $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{xln(lnx)}$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{x\, arctgx}{\sqrt[3]{1-x^4}}\, dx$

19. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\,(lnx)^{\frac{3}{2}}}$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^3+1)^5}$

20. $\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{x^4+1}$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{3^x\, dx}{(3^x+7x)^{\frac{3}{2}}}$

21. $\int_0^{\infty} \frac{e^x\, dx}{e^{2x}+1}$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt{x^5+1}}$

22. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x)^3}}$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$

23. $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{1-x^4}$ $\qquad$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[5]{x^7}}$

24. $\int_0^{\infty} \frac{2^x dx}{1+2^x}$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}+5x^7+1}$

25. $\int_0^{\infty} \frac{sinx\, dx}{cos^3 x}$ $\qquad$ $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

26. $\int_0^{\infty} \frac{arctg\frac{x}{3}dx}{x^2+9}$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{3x\, dx}{\sqrt{x}+2}$

27. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+9}$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{4-\sqrt[4]{x^3+3}}$

28. $\int_3^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^4-10)^3}}$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-3x} dx$

29. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{(4x^2+1)^3}}$ $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(3+2x)^2-1}}$

30. $\int_1^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(x^2+5)^4}}$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^2+3)^2}-4x}$

31. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+9}$ $\int_0^{\infty} x^5 e^{-2x} dx$

32. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$ $\int_0^{\infty} e^{-5x^2} dx$

33. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\,ln\sqrt{x}}$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{cos^2 x - x^3 + 1}$

34. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^6}$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{xsin^2 2x}$

35. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3+1}$ $\int_{-\infty}^{0} \frac{(x-1)dx}{x^4-3x^2+1}$

36. $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x(x-3)}$ $\int_1^{\infty} \frac{arctg\ 3x}{x^3} dx$

37. $\int_2^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{4+x^2}}$ $\int_0^{\infty} \frac{(x+1)dx}{x^3-4\sqrt[3]{x}+2}$

38. $\int_0^{\infty} xcos3x\,dx$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{x}}$

39. $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{5x}} dx$ $\int_3^{\infty} \sqrt[5]{\frac{x}{x^5+4x+1}}$

40. $\int_0^{\infty} xe^{-3x^2} dx$ $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{(x+1)^3}$

41. $\int_2^{\infty} \frac{\ln(x+5)}{x+5} dx$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+x+1}$

42. $\int_1^{\infty} \frac{x^3+x}{x^4} dx$ $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{(1+x^2)^3}$

43. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln(ln2x)}$ $\int_0^{\infty} \frac{xarctg3x}{\sqrt[3]{x^4+2}}$

44. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln\frac{x}{3})^4}$ $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^5+1}}$

45. $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\frac{x^4}{16}+1}$ $\int_0^{\infty} \frac{2^x dx}{(2^x-3x^3)^{\frac{4}{3}}}$

46. $\int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}\,dx}{1+e^x}$ $\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^5-3x}}$

47. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3+x)^5}}$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+\sqrt[5]{x^3+4}}$

48. $\int_0^{\infty} \frac{x^3\,dx}{16+x^4}$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{3x-\sqrt[5]{x^7}}$

49. $\int_0^{\infty} \frac{2^{\frac{x}{2}}\,dx}{1+2^x}$ $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^4}$

50. $\int_0^{\infty} \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^4 2x}$ $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^4}$

51. $\int_0^{\infty} \frac{arctg\frac{x}{3}dx}{x^2+9}$ $\int_2^{\infty} \frac{\sqrt[5]{x}\,dx}{e^{5x}-1}$

52. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1-\sqrt[5]{x^2+x}}$

53. $\int_2^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(x^2-3)^2}}$ $\int_0^{\infty} \sqrt{x}\,e^{-\frac{x}{2}}dx$

54. $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}$ $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^5+\sqrt{x}}+x}$

55. $\int_1^{\infty} \frac{3x\,dx}{(x^2+25)^2}$ $\int_0^{\infty} \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt[4]{x^3+7}+\sin x}$

56. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+4}$ $\int_0^{\infty} x^4 e^{-\frac{x}{3}}dx$

57. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\cos^2 x-x^4+1}$

58. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln 2x}}$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sin^2 x+\sqrt[3]{x}+1}$

59. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5}$ $\qquad$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x sin^2 5x}$

60. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+7}$ $\qquad$ $\int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{x^4-3}$

61. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(x+2)}$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{arctg2x}{x^4+3}dx$

62. $\int_2^{\infty} \frac{2x\,dx}{\sqrt[5]{4+x^2}}$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{(x-1)\,dx}{x^3+4\sqrt{x}+3}$

63. $\int_0^{\infty} x sin2x\,dx$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2+1}}$

64. $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{3x}}dx$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x^5+1}}dx$

65. $\int_0^{\infty} xe^{-2x^2}dx$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{3x\,dx}{(1+x)^2+\sqrt{x^3}}$

66. $\int_0^{\infty} \frac{\ln(x+4)}{x+4}dx$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{5-x^3}$

67. $\int_1^{\infty} \frac{x^3+3}{x^5+1}dx$ $\qquad$ $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{(1+x)^2}$

68. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(ln3x)^{\frac{2}{3}}}$ $\qquad$ $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{5x}-4}$

69. $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{xln(lnx)}$ $\qquad$ $\int_2^{\infty} \frac{x\,arctg5x}{\sqrt[3]{3+x^4}}dx$

70. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^4+16}$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{5^x dx}{x^3+6^x}$

71. $\int_0^{\infty} \frac{e^{2x}dx}{1++e^{4x}}$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^5+1}}$

72. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+2)^3}}$ $\qquad$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2-\sqrt[3]{x^4+2}}$

73. $\int_0^{\infty} \frac{arctg\frac{x}{5}}{x^2+25}$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{5x\,dx}{\sqrt{x}+x^3-4}$

74. $\int_0^{\infty} \frac{3xdx}{1+3^x}$ $\qquad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^5+x^{\frac{3}{2}}-1}$

75. $\int_0^{\infty} \frac{arctg\,\frac{x}{2}}{x^2+4}dx$ $\qquad \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{5x^7+1}+x}$

76. $\int_0^{\infty} \frac{arctg\,\frac{x}{2}}{x^2+4}dx$ $\qquad \int_2^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}dx}{2^{x^2}+3}$

77. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-3}$ $\qquad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+\sqrt[5]{x^2-1}}$

78. $\int_2^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ $\qquad \int_0^{\infty} \sqrt{3x}\,e^{-3x}dx$

79. $\int_2^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ $\qquad \int_0^{\infty} \frac{dx}{3+\sqrt[3]{x+cosx}}$

80. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{ln3x}}$ $\qquad \int_1^{\infty} \frac{e^{-x^2}dx}{x}$

81. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x(x-1)}$ $\qquad \int_2^{\infty} \frac{arcyg4x}{1+x^2+x^{\frac{3}{4}}}dx$

82. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x-1}$ $\qquad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2-\sqrt{x}}}$

83. $\int_3^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[5]{(x^2-2)^3}}$ $\qquad \int_0^{\infty} \frac{dx}{cos^2x+x^4+3}$

84. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{9x^2+1}$ $\qquad \int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3}}$

85. $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2+1}}$ $\qquad \int_0^{\infty} \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x\sqrt{x}+4}}$

86. $\int_0^{\infty} \frac{(arctg3x)^2}{x^2+9}dx$ $\qquad \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{2^x+3}$

87. $\int_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{4+x^2}}$ $\qquad \int_0^{\infty} \frac{(x+3)dx}{x^3+\sqrt[5]{x}+4}$

88. $\int_0^{\infty} xcos5x\,dx$ $\qquad \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^4}-\sqrt{x}}$

89. $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{7x}}dx$ $\int_0^{\infty} \sqrt[4]{\frac{x}{x^5+1}}dx$

90. $\int_0^{\infty} xe^{-4x^2}dx$ $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{(x+1)^5}$

91. $\int_2^{\infty} \frac{\ln(x+6)}{x+6}dx$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3-3x+1}$

92. $\int_1^{\infty} \frac{x^3+2}{x^4+3}dx$ $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}dx}{(1+2x)^3}$

93. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{xln^2x}$ $\int_0^{\infty} \frac{xarctgx}{\sqrt[3]{2+x+x^4}}dx$

94. $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x(lnx)^{\frac{1}{2}}}$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+5x-1}$

95. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^4+81}$ $\int_0^{\infty} \frac{4^x dx}{(4^x+2x^4)^{\frac{4}{5}}}$

96. $\int_0^{\infty} \frac{e^{3x}dx}{1+e^{6x}}$ $\int_0^{\infty} \frac{(x+1)dx}{\sqrt[4]{x^5+4}}$

97. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x)^5}}$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[5]{1+x^6}}$

98. $\int_0^{\infty} \frac{x^4dx}{1+x^5}$ $\int_0^{\infty} \frac{3x\,dx}{x^2-\sqrt{x}+2}$

99. $\int_0^{\infty} \frac{5^x dx}{1+5^x}$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}-\sqrt{x}}$

100. $\int_0^{\infty} \frac{sinx\,dx}{cos^4x}$ $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}$

Завдання 8.1. Диференціальні рівняння 1-го порядку

Знайти розв’язок диференціальних рівнянь.

1. 1) $\mathrm{tgx}\,(\sin y)^2 dx + \cos^2 x\,\mathrm{ctgy}dy = 0$; 2) $y' = -\frac{x+y}{x}$;
3) $xy' + y - e^x = 0$; 4) $y' + \frac{x}{y} = -xy^2$.

2. 1) $xy' = e^y + 2y'$; 2) $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$;

3) $y' - \frac{y}{x} = x\cos x$; 4) $y' + xy = y^2 e^{\frac{x^2}{2}}$.

3. 1) $xydx + (x+1)dy = 0$; 2) $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$;

3) $(xy' - 1)\ln x = 2y$; 4) $y' - \frac{y}{x} = y^2$.

4. 1) $e^{-y}(1 + y') = 1$; 2) $x^3y' = y(2x^2 - xy)$;

3) $y' + y\operatorname{tg}x = \sec x$; 4) $2xy + y' = 2x^3y^3$.

5. 1) $xy' + y = y^2$; 2) $(x^2 + y^2)y' = xy$;

3) $y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1$; 4) $y' - \frac{y}{x} = y^3$.

6. 1) $y' - xy^2 = 2xy$; 2) $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$;

3) $xy' - 2y = 2x^4$; 4) $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$.

7. 1) $y'\operatorname{ctg}x + y = 2$; 2) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2dx}$;

3) $(xy' - 1)\ln x = 2y$; 4) $y' + \frac{y}{1+x} = 3y^2$.

8. 1) $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$; 2) $y' = -\frac{x+y}{y}$;

3) $xy' + y = 3x^2e^{-x}$; 4) $xy' + y = y^2\ln x$.

9. 1) $2xy' + y^2 = 1$; 2) $y' = \frac{y}{x} - 4$;

3) $y = x(y' - x\cos x)$; 4) $xy' + y = y^2\ln x$.

10. 1) $(1 - x^2)dy + xydx = 0$; 2) $(x - y)ydx - x^2dy = 0$;

3) $2x(x^2 + y) = y'$; 4) $y' - y\operatorname{tg}x + y^2\cos x = 0$.

11. 1) $x^2y' - 2xy = 3y$; 2) $x\ln\frac{x}{y}dy - ydx = 0$;

3) $y' + xy = x^3e^{\frac{x^2}{2}}$; 4) $y' - y - y^2\cos x = 0$.

12. 1) $xy' - y = y^3$; 2) $xy' = y\cos\frac{y}{x}$;

3) $y' = y\operatorname{tg}x - 4\cos x$; 4) $xy' - 4y - x^2y^2 = 0$.

13. 1) $xyy' = 1 - y^2$; 2) $xy' - y = (x + y)\ln\frac{x+y}{x}$;

3) $xy' + y = \ln x$; 4) $y' - y - y^2\cos x = 0$.

14. 1) $y - xy' = 1 - x^2y'$; 2) $(x^2 + y^2)y' = 2xy$;

3) $3x + y - 2 + y'(x - 1) = 0$; 4) $y - y'\cos x = y^2\cos x(1 - \sin x)$.

15. 1) $3e^{x}\text{tgy}dx+\frac{1-e^{x}}{\cos^{2}y}dy=0$; 2) $(x+2y)dx-xdy=0$;

3) $y'-\frac{y}{x}=x^{3}$; 4) $y'+2y=y^{2}e^{2x}$.

16. 1) $y'\text{tg}x=y$; 2) $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$;

3) $(1+x^{2})y'=2xy+(1+x^{2})^{2}$; 4) $y'+\text{tg}x\,y=y^{3}$.

17. 1) $y'\sin x=y\ln y$; 2) $xy'=\sqrt{x^{2}-y^{2}}+y$;

3) $y'+2xy=xe^{-x^{2}}$; 4) $y'-\frac{x}{x^{2}+1}y=y^{3}$.

18. 1) $y'=xe^{y}$; 2) $(2x-4y)dx+(x+y)dy=0$;

3) $y'=\frac{2y}{x+1}+e^{x}(x+1)^{2}$; 4) $y'-\frac{e^{x}}{1+e^{x}}y=y^{2}$.

19. 1) $xy'+y=xy\ln x$; 2) $x\ln\frac{x}{y}dy-ydx=0$;

3) $y'+y\text{tg}x=\frac{1}{\cos x}$; 4) $y'+y\frac{x}{1+x^{2}}=y^{3}$.

20. 1)$x^{2}(y+1)+(x^{3}-1)(y-1)y'=0$; 2) $y'=\frac{y}{x}+\text{tg}\frac{y}{x}$;

3) $xy'+2y=e^{3x}$; 4) $y'+y\frac{x}{x+1}=y^{2}$.

21. 1) $y'\sqrt{1-x^{2}}=1+y^{2}$; 2) $xy'-y=x\text{tg}\frac{y}{x}$;

3) $y'=y\text{tg}3x+3\cos 3x$; 4) $y'=y\text{ctg}x+\frac{y^{3}}{\sin x}$.

22. 1) $y'=e^{x+y}$; 2) $y'=\frac{x-y}{x+y}$;

3) $y'+y\cos x=\sin x\cos x$; 4) $3y'=(1-3y^{3})y\sin x$.

23. 1) $y'=-\frac{x\sin x}{y\cos y}$; 2)$(x^{2}+xy)y'=x\sqrt{x^{2}+y^{2}}+xy'+y^{2}$;

3) $y'-y\frac{2x-1}{x^{2}-x}=1$; 4) $y'+xy=x^{3}y$.

24. 1) $(1+y^{2})xdx+(1+x^{2})dy=0$; 2) $(x+3y)dy+xdx=0$;

3) $y'\cos x-y\sin x=\sin 2x$; 4) $xy'=-y+y^{2}$.

25. 1) $xydy+\sqrt{1-x^{2}}dy=0$; 2) $y'=\frac{y}{x}=\cos\frac{y}{x}$;

3) $xy'-\frac{y}{x+1}-x=0$; 4) $y'=y^{4}\cos x+y\text{tg}x$.

26. 1) $ye^{2x}dx-(1-e^{2x})dy=0$; 2) $y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$;

3) $xy'-\frac{y}{x+1}-1-x=0$; 4) $2xy'-y=xy^{3}$.

27. 1) $2^x \mathrm{tg}y dx + (1 + 2^x)\sec^2 y dy = 0$; 2) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$;
3) $xy' + y - e^x = 0$; 4) $y' + 2y = y^2 e^x$.

28. 1) $3x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2)$; 2) $(y^2 + 2xy)dx - x^2 dy = 0$;
3) $y' - \frac{2y}{x} = x\cos 3x$; 4) $y' - 2xy = y^2 e^{-x^2}$.

29. 1) $e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x})\cos y\, y' = 0$; 2) $5x^3 y' = y^2(2x - y)$;
3) $y' + 3y\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos x}$; 4) $xy' - y^2 \ln x = 2y$.

30. 1) $y\sin^2 x dx + \cos x \ln y\, dy = 0$; 2) $xy' - xe^{-\frac{y}{x}} = y$;
3) $xy' - 2y = x^3 + 1$; 4) $y' - \frac{x}{2(x^2+1)}y = y^2$.

31. 1) $y' = \sin(x - y)$; 2) $y + \left(2\sqrt[3]{x^2 y} - x\right)y' = 0$;
3) $y' = \frac{3x^2}{1+x^3}y + (1 + x^3)$; 4) $y^3 y'' = 1$.

32. 1) $(a^2 + y^2)dx + 2x\sqrt{ax - x^2}dy = 0$; 2) $(y - x)xdy = y^2 dx$;
3) $y' - y\mathrm{ctg}3x = \frac{1}{\sin 3x}$; 4) $y' - \frac{y}{x-1} = y^2(x - 1)$.

33. 1) $x^2 y' \cos y + 1 = 0$; 2) $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{\cos\frac{y}{x}x}$;
3) $y' + y\mathrm{ctg}2x = \cos 2x$; 4) $y' + \frac{y}{x+3} = 4y^2(x + 3)^2$.

34. 1) $x^2 y' + \cos 3y = 1$; 2) $y' + 3xy^2 = 4xy$;
3) $y' + \frac{y}{x+1} = e^x$; 4) $y' = \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^2 \cos x}$.

35. 1) $x^3 y' - \sin y = 1$; 2) $xy' + y + \mathrm{tg}\frac{y}{x}$;
3) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$; 4) $xy' + y + 5y^2 e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

36. 1) $(1 + x^2)y' - \frac{1}{2}\cos^2 2y = 0$; 2) $2x^2 y' = x^2 + y^2$;
3) $y' - y\mathrm{ctg}x = \sin x$; 4) $y' + \frac{y}{x} = \frac{2\ln x + 1}{x^2}y^2$.

37. 1) $e^y = y'(x + 1)$; 2) $xy' = y(\ln y - \ln x)$;
3) $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 1$; 4) $\left((x - 1)y' - y^2\right)\ln(x - 1) = y$.

38. 1) $y' = 2x(\pi + y)$; 2) $y' - yx^2 = 2xy$;
3) $y' + \mathrm{ctg}4x = \frac{1}{\sin 4x}$; 4) $y' + \frac{y}{x+1} = 3y^2(x + 1)$.

39. 1) $x^2y' + \sin 2y = 1$; 2) $y' + \left(3\sqrt[3]{x^2y} + 2x\right)y' = 0$;

3) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\mathrm{tg}x}{x}$; 4) $y' - \frac{3y}{x^2} = y^2 e^{\frac{3}{x}}$.

40. 1) $y'\sin^2 y = 2 + x$; 2) $y' - \frac{y}{x} = \sec^2\frac{y}{x}$;

3) $2xy + y' = 2x^3$; 4) $y' - \frac{y}{x} = \cos 2x\, y^2$.

41. 1) $y'\mathrm{tg}3x + y = 2$; 2) $y' + xy^3 = 5xy$;

3) $x^2y' + xy = \ln x$; 4) $y' - \frac{y}{x} = (3\ln x + x^2)y^2$.

42. 1) $(x+3)y' + y = y\ln(x+3)$; 2) $xy' = y + \mathrm{ctg}\frac{y}{x}$;

3) $xy' - 4y = x^2$; 4) $y' + xy = xe^{\frac{x^2}{2}}$.

43. 1) $2yy' + x^2 = 1$; 2) $y\ln\frac{y}{x}dx = xdy$;

3) $y' + \mathrm{tg}3x\, y = \frac{1}{\cos 3x}$; 4) $x^2y' + xy = x^2y^2\ln x$.

44. 1) $x^3y' - 2x^2y = 5y$; 2) $y + \left(\sqrt[4]{x^3y} - 2x\right)y' = 0$;

3) $xy' + 2y + x^5e^x = 0$; 4) $y' - y + y^2\sin 3x = 0$.

45. 1) $y'\mathrm{tg}(x+2) = y^2 + 1$; 2) $(y + 2x)dy - ydx = 0$;

3) $y' + \frac{y}{x} = 3xe^x$; 4) $y' = 3y + e^xy^2$.

46. 1) $5xyy' = 1 - y^2$; 2) $4y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4$;

3) $y' + \frac{y}{x} = e^x$; 4) $xy' - y + 3y^2 e^x = 0$.

47. 1) $y'\mathrm{tg}5x + y^2 = 4$; 2) $xy' = y + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)}$;

3) $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$; 4) $y' + y\cos x = y^2\sin 2x$.

48. 1) $2y^2y' + x^4 = x$; 2) $y' - \frac{y}{x} = e^{\frac{y+2x}{x}}$;

3) $y' + 2\mathrm{tg}(x-1) = \frac{1}{\cos(x-1)}$; 4) $xy' + y + e^xy^2 = 0$.

49. 1) $yx^2y' = (y^2+1)e^{\frac{1}{x}}$; 2) $ydx + \left(\sqrt[4]{x^3y} + x\right)dy = 0$;

3) $y' - \frac{y}{x} = 3\ln x + x^2$; 4) $xy' + 2y = x^e e^{3x}$.

50. 1) $x^2yy' = \sqrt{y^2 - 1}e^{\frac{1}{x}}$; 2) $\frac{y-x}{x}dy = \frac{y^2}{x^2}dx$;

3) $2xy - y' = x^2\sin x$; 4) $y' - \frac{2x-1}{x^2-1}y = y^2$.

51. 1) $(y-3)e^{-2x}dx-(1--e^{-2x})dy=0$; 2) $y'=4-\frac{y}{x}\sin\frac{5y}{x}$;

3) $y'+\frac{y}{1-x^2}+2+x=0$; 4) $y'+\frac{y}{x}=xy^2\cos x$.

52. 1) $xy'=e^{-y}-3y'$; 2) $xyy'=x^2-y^2$;

3) $y'-y\operatorname{tg}(x-3)=\frac{1}{\sin(x-3)}$; 4) $y'+\frac{y}{x}=xy^2\sin x$.

53. 1) $4x\sqrt{1-y^2}=y'(1-x^2)$; 2) $(y^2-3xy)dx+x^2dy=0$;

3) $y'-\frac{3y}{x}=\frac{\cos x}{x^2}$; 4) $y'-xy=y^2e^{-\frac{x^2}{2}}$.

54. 1) $y'(x+1)=x+3xy$; 2) $(2y'=\left(\frac{y}{x}\right)^2+1$;

3) $y'-3y\operatorname{tg}x=\cos x$; 4) $xy'+y-y^2e^{\frac{1}{x}}=0$.

55. 1) $y'\operatorname{ctg}(x-2)+\frac{1}{y}=1$; 2) $y'-\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}=0$;

3) $y'-\frac{y}{x}=xe^x$; 4) $(xy'-y^2)=\frac{3y}{\ln x}$.

56. 1) $xy'+y\sqrt{x^2+4}=0$; 2) $xy'-y=\sqrt{4x^2+y^2}$;

3) $y'+2\frac{e^x}{1-e^{2x}}y=e^{-2x}$; 4) $(xy'-y^2)\ln x=2y$.

57. 1) $3yy'+x^3=x$; 2) $xdy=(1+\sqrt{1-\frac{y}{x}})dx$;

3) $y'-2\frac{y}{x}=x\cos x$; 4) $y'+y=y^2\sin 2x$.

58. 1) $y'\operatorname{tg}(y-1)=\frac{1}{x}$; 2) $y'=(\frac{y}{x}+\sin(2\frac{y}{x}-1)$;

3) $y'-y-\cos x=0$; 4) $x^2y'-xy=y^2\ln x$.

59. 1) $\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dy=xydx$; 2) $y'=(\frac{y}{x}+\sin(2\frac{y}{x}-1)$;

3) $y'-\frac{y}{x}=e^x+\cos x$; 4) $y'-\frac{y}{x}=x^3y^2$.

60. 1) $(y^3+3)x+y^3(x+2)y'=0$; 2) $xy'=y(\ln y-\ln x)$;

3) $y'=\frac{y}{x-1}-\frac{2-3x}{x-1}$; 4) $y'=\frac{2x}{1+x^2}y+(1+x^2)y^2$.

61. 1) $y'=y^2\sin 5x$; 2) $\frac{y-x}{x}dy=\frac{y^2}{x^2}dx$;

3) $y'=\frac{2y}{x}+\frac{1}{\cos^2x}$; 4) $y'=y\operatorname{tg}x+2\sin xy^2$.

62. 1) $y'=(y+2)\cos^3x$; 2) $(y+4x)xdy+y^2dx=0$;

3) $y' - \frac{y}{x} = x\sin x$;

4) $y' = \frac{x^2}{1+x^3}y + (1+x^3)y^2$.

63. 1) $y' = \mathrm{tg}3x\ln x$;

2) $y' = \frac{4x+y}{3x-y}$;

3) $y' - \frac{y}{x-1} = (x-1)^2$;

4) $y' = y\mathrm{tg}x - y^2\cos 3x$.

64. 1) $y'\mathrm{tg}(x+3) + \frac{y^2+1}{y} = 0$;

2) $xy' - y = 4x^2 + y^2$;

3) $2xy + y' = x^2e^x$;

4) $y' - y + y^2\cos 2x = 0$.

65. 1) $y'\cos^2 x = ye^{-y^2}$;

2) $xy' = y + \frac{1}{\sin^2\frac{y}{x}}$;

3) $y' - \frac{3y}{x^2} = e^{\frac{3}{x}}$;

4) $xy' + \frac{y}{x+1} = xy^2$.

66. 1) $\sqrt{x^2+3}dy = xydx$;

2) $xy'\left(\ln\frac{y}{x} - 1\right) - y = 0$;

3) $y' + 3y\mathrm{tg}x = \cos x$;

4) $3y' = (1-y)y\sin x$.

67. 1) $xy'(\ln x - 1) - y^3 = 0$;

2) $xy' - y = (4x^2 + y^2)^2$;

3) $y' - \frac{y}{x} = x^2e^x$;

4) $y' + y\mathrm{ctg}x = \frac{y^3}{\sin^2 x}$.

68. 1) $xy' + 3y = 0$;

2) $xy' = y - y\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)^2$;

3) $y' - y\sin x = \sin y$;

4) $xy' - 2y = \frac{e^x}{x^2}y^2$.

69. 1) $x^2y' + \cos xy = 5y$;

2) $2xy - y' = x^3$;

3) $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{2y}{x}$;

4) $y' - \frac{3x^2}{x^3-1}y = y^2$.

70. 1) $x^3y^2y' = 1 - x^2$;

2) $y' = \frac{y}{x} + \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}$;

3) $xy' - 2y = xe^{\frac{1}{x}}$;

4) $y' = y\sin x + y\mathrm{ctg}x$.

71. 1) $xy' + y = y^2$;

2) $y' + \frac{y}{x} + \mathrm{ch}\frac{y}{x} = 0$;

3) $y' - \frac{y}{x} = x^2e^{-x}$;

4) $y' + xy = xy^3e^{x^2}$.

72. 1) $yy' = \frac{\cos^2 y}{x-1}$;

2) $xy' = x^2\sqrt[3]{x^2 - y^2} + y$;

3) $y' - \frac{y}{x} = x^2\sin x$;

4) $xy' - 2y = 2x^4y^2$.

73. 1) $xy' + \frac{1}{\cos^2 x}y = y$;

2) $xy' - y = \frac{x}{\sin^2(3\frac{y}{x})}$;

3) $2xy + y' = 2x^3\sin x$;

4) $y' = y\mathrm{tg}x = y\sec^2 x$.

74. 1) $y' = (x-1)^2 e^{x+y}$; 2) $y' = \frac{y}{x} + \sin^2(1 - \frac{y}{x})$;

3) $y' - y\mathrm{tg}x = \cos x$; 4) $y' + \frac{x}{x^2+4} y = y^3$.

75. 1) $y' = e^y \cos 5x$; 2) $y' = \frac{y}{x} + (x+1)^2$;

3) $xy' - 2y = x^3 e^x$; 4) $3y' = (1-y^3) y\cos x$.

76. 1) $(y-1)e^{2x}dx = (1+e^{2x})dy$; 2) $y' = 1 + \frac{y}{x} + \sin\frac{3y}{x}$;

3) $y' + \frac{y}{1+x^2} - 1 - x = 0$; 4) $xy' + y = xy^3$.

77. 1) $yy' = e^x + 2y'$; 2) $(x+3y)dx - (5x+y)dy = 0$;

3) $y' - \frac{y}{x} = 5$; 4) $(y' + xy^2)x = y$.

78. 1) $5x\sqrt{1+y^2} = y'(1+x^2)$; 2) $(y^2 - 4xy)dx + 2x^2 dy = 0$;

3) $y' + \frac{2y}{x} = x\cos 2x$; 4) $y' + 2xy = y^2 e^{x^2}$.

79. 1) $e^{-3y}(2 + y') = 1$; 2) $x^2 y' = y(x-y)$;

3) $y' - 5y\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos x}$; 4) $\left((x+1)y' - y^2\right)\ln(x+1) = 2y$.

80. 1) $xy' = y(\ln^2 x + x)$; 2) $xy' = y - y\mathrm{tg}3y$;

3) $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 4$; 4) $xy' - 2y = 2x^4 y^2$.

81. 1) $xe^{2y}dy - (1 - e^{2y})dx = 0$; 2) $xdy = y - x\sin\left(\frac{y}{x} - 1\right)$;

3) $xy' - y = \ln x$; 4) $y = x(y' - xy^2\cos x)$.

82. 1) $x^2\sqrt{4-y^2} = y'(1+x^2)$; 2) $xy' = \sqrt{4x^2 - y^2} + y$;

3) $y' - y\mathrm{ctg}x = \frac{1}{\sin x}$; 4) $y' + xy = x^3 y^2$.

83. 1) $y'\sqrt{1+x^2} = x\sec 2x$; 2) $y' = \frac{y}{x} + \frac{y}{x}\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right)^2$;

3) $y' + \frac{y}{x+5} = (x+5)e^x$; 4) $y' + xy = y^2 e^{\frac{x^2}{2}}$.

84. 1) $x\mathrm{tg}5x dx = e^{2x^2}dy$; 2) $y' = \frac{y}{x}\left(1 - 2\frac{y^2}{x^2}\right)$;

3) $y' = 2\frac{y}{x} - \frac{2}{\cos^2 x}$; 4) $\frac{1}{2}y' + xy = xy^4$.

85. 1) $5x^3 y^3 + y'(1-y) = 0$; 2) $(x+5y)ydy - x^2 dy = 0$;

3) $y' + \frac{y}{x} = \frac{2\ln x + 1}{x^2}$; 4)

$xy' + (x+1)y = 3x^2y^2e^{-x}$.

86. 1) $ye^{3x}dy = (1 - e^{3x})dx$; 2) $y' - \frac{y}{x} = \cos\frac{y}{x}$;

3) $y' = \frac{2y}{x} + \frac{1}{\sin^2 3x}$; 4) $3y' = (1-y)y\cos x$.

87. 1) $2^x \mathrm{tg}3y dy = \sec^2 3y dx$; 2) $(x^2 + 2xy)dy = y^2dx$;

3) $y' + 5y\mathrm{ctg}x = \frac{1}{\cos x}$; 4) $y' - \frac{y}{x+3} = \frac{y^2}{(x+3)^2}$.

88. 1) $xe^{y-1}y' = \ln x$; 2) $x^3y' = y^2(2x+y)$;

3) $y' + \frac{y}{x} = x^2 + 1$; 4) $y' + y\mathrm{ctg}x = \frac{1}{\sin x}y^2$

89. 1) $3^x\sin^2 y + (1 + 3^{2x})y' = 0$; 2) $x^3y' = y(x^2 + 2xy)$;

3) $y' + xy = 2x$; 4) $y' = y^4\cos 3x + y\mathrm{ctg}3x$.

90. 1) $(1+x)^2\sqrt{1-y^2} = y$; 2) $xdy = \left(y + x\cos\frac{3y}{x}\right)dx$;

3) $y' = \frac{2y}{x} - \frac{1}{\sin^2 2x}$; 4) $y' - xy = y^3e^{-x^2}$.

91. 1) $y^2 - xy' = y - x^2y'$; 2) $y' = \frac{2x+y}{x-3y}$;

3) $y' + y\mathrm{ctg}(x+3) = \frac{1}{\cos(x+3)}$; 4) $y' + \frac{2x}{x^2+4}y = y^2$.

92. 1) $e^y\mathrm{tg}x dy + (1-e^y)\frac{1}{\cos^2 x}dx$; 2) $xdy + ydx = xe^{\frac{y}{x}-4}dx$;

3) $(x+1)y' = \frac{2y}{\ln(x+1)}$; 4) $y' + y\mathrm{tg}5x = \frac{1}{\cos 5x}y^2$.

93. 1) $x^2y' + y\sin^2 x = y$; 2) $xy' - y = \frac{x^2}{y}\ln\frac{y}{x}$;

3) $y' - \frac{3y}{x^2} = \frac{1}{x^2}$; 4) $y' - y\mathrm{tg}x = y^2\cos x$.

94. 1) $y'\sqrt{1-x^2} + xy = 0$; 2) $xy' = y\ln\frac{y}{x}$;

3) $y' + 3y\mathrm{tg}x = \sin x$; 4) $y' - \frac{y}{x} = y^4$.

95. 1) $y'\ln y = y(1-x^2)$; 2) $yy' = \sqrt{x^2 - y^2}$;

3) $y - y'\cos x = \cos x(1 - \sin x)$; 4) $y' + y\mathrm{tg}x = \frac{y^3}{\cos^2 x}$.

96. 1) $5xy' + y^2x = 9$; 2) $xy' - y = (x^2 + y^2)^2$;

3) $y'x - 2y = x^4\cos x$; 4) $y' - \frac{2x}{x^2+9}y = y^3$.

97. 1) $\sqrt{y^2+5}dx = 3xydy$; 2) $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}e^{\frac{y}{x}}$;

3) $y' - 5y\mathrm{tg}x = \sin x$;

4) $2x(y^2 + y) = y'$.

98. 1) $y - xy' = y^2 - x^2y$;

2) $(3x - y)y' = x + y$;

3) $y' - \frac{y}{x} = x^2e^{-x}$;

4) $y' = y\mathrm{ctg}2x + y^3\cos 2x$.

99. 1) $3e^x dx + (1 - e^x)ydy = 0$;

2) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$;

3) $y' + 3y\mathrm{ctg}x = \cos x$;

4) $y' - y\mathrm{ctg}x = y^2\sin x$.

100. 1) $y'\mathrm{tg}(2x - 1) = y^2$;

2) $y' = \frac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}} + 1$;

3) $y' + \frac{y}{x+1} = 4$;

4) $y' = y\mathrm{tg}x + 2y^3\sin x$.

Завдання 8.2. Диференціальні рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами

Знайти розв'язок диференціальних рівнянь, які задовольняють початковим умовам (розв'язок задачі Коші).

1. 1) $y'' - 3y' = x + 2$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$;

2) $y'' + 2y' + y = e^x$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$;

3) $y'' - y' + y = \cos 2x$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$;

4) $y'' + 9y = \sin 3x$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

2. 1) $y'' - 3y' + 2y = x^2$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$;

2) $y'' - 2y' + 3y = e^{4x}$, $y(0) = 1, y'(0) = -1$;

3) $y'' + 9y = x\cos x$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $y'' - y = 4\sin x$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

3. 1) $y'' - 6y' + 2y = 1 - 3x$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$;

2) $y'' - 2y' + y = 6xe^x$, $y(0) = 1, y'(0) = -1$;

3) $y'' + y' + 3y = 2\cos x$, $y(0) = -2, y'(0) = 1$;

4) $y'' + 5y = \sin 5x$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

4. 1) $y'' + 6y' = x^2 + 2$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$;

2) $y'' + 6y' + 9y = e^{3x}$, $y(0) = 3, y'(0) = 1$;

3) $y'' + 2y' + y = \sin 5x$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$;

4) $y'' + 16y = \cos 4x$, $y(0) = 0, y'(0) = 2$.

5. 1) $y'' - \frac{4}{5}y' = x$,
$y(0) = 3, y'(0) = 1$;
3) $4y'' + y' + 3y = 4\cos 3x$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

2) $y'' - y' + \frac{1}{4}y = e^{x-1}$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$;
4) $y'' + \frac{1}{25}y' = \text{x}\cos x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0.$

6. 1) $y'' + 2y' - 3y = x^2$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$;
3) $6y'' + 3y' + 4y = \cos\frac{x}{4}$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

2) $y'' + 2y' + y = (3x + 2)e^{-x}$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;
4) $y'' - 11y = \sin x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1.$

7. 1) $y'' - 2y' - 3y = x + 5$,
$y(0) = 2, y'(0) = 1$;
3) $3y'' + 10y' + 8y = \frac{x}{2}$
$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

2) $y'' - 2y' + y = (x + 7)e^{\frac{x}{2}}$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;
4) $7y'' + 5y = \cos x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1.$

8. 1) $y'' - y' - 3y = 1 - 4x$,
$y(0) = 1, y'(0) = -1$;
3) $3y'' + y' + 7y = 3\cos\frac{x}{3}$
$y(0) = -1, y'(0) = 0$;

2) $y'' + y' + \frac{1}{7}y = xe^{-\frac{x}{2}}$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;
4) $5y'' + 6y = \sin 3x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1.$

9. 1) $y'' - 3y' = x$,
$y(0) = 1, y'(0) = 1$;
3) $y'' + y' + 6y = 2\cos x$,
$y(0) = -1, y'(0) = 0$;

2) $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 2e^{\frac{x}{2}}$,
$y(0) = 1, y'(0) = 1$;
4) $4y'' - 9y = (1 - 4x)\cos x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0.$

10. 1) $y'' - y = (x - 1)^2$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;
3) $y'' + 3y' + 7y = \sin x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

2) $y'' + 3y' + \frac{9}{4}y = 4e^{-4x}$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$;
4) $6y'' + 5y = \cos\frac{x}{4}$,
$y(0) = -1, y'(0) = 1.$

11. 1) $y'' + 3y' - y = 8x$,
$y(0) = 2, y'(0) = 1$;
3) $3y'' + 6y' + 8y = \sin 2x$,

2) $\frac{y''}{2} + 3\sqrt{2}y' + 9y = e^{-\frac{x}{3}}$,
$y(0) = -1, y'(0) = 0$;

$y(0)=0, y'(0)=1;$

4) $8y''+3y=e^{-2x}\cos x,$

$y(0)=0, y'(0)=0.$

12. 1) $y''+3y'-2y=x^2,$

$y(0)=0, y'(0)=1;$

2) $\frac{1}{5}y''+2y'+5y=(4-5x)e^{3x},$

$y(0)=0, y'(0)=0;$

3) $y''-4y'+6y=\sin 6x,$

$y(0)=1, y'(0)=0;$

4) $y''+2y=\cos x,$

$y(0)=1, y'(0)=1.$

13. 1) $y''-3y'+2y=5x,$

$y(0)=1, y'(0)=1;$

2) $y''-2y'+y=(x+7)e^{\frac{x}{2}},$

$y(0)=0, y'(0)=0;$

3) $8y''+3y'+y=\text{x}\sin 4x,$

$y(0)=0, y'(0)=0;$

4) $y''+\sqrt{3}y=\sin 2x,$

$y(0)=1, y'(0)=0.$

14. 1) $y''-3y'-3y=6x+1,$

$y(0)=0, y'(0)=1;$

2) $6y''+12y'+6y=(x-1)e^{-x},$

$y(0)=1, y'(0)=0;$

3) $4y''+2y'+y=x\cos 3x,$

$y(0)=0, y'(0)=0;$

4) $\frac{3}{4}y''+7y=\sin 8x,$

$y(0)=-1, y'(0)=0.$

15. 1) $y''+3y'-3y=3-x,$

$y(0)=0, y'(0)=0;$

2) $\frac{1}{2}y''-2y'+2y=e^{\frac{3}{2}x+2},$

$y(0)=1, y'(0)=0;$

3) $8y''+7y'+3y=(x+1)\cos x,$

$y(0)=0, y'(0)=0;$

4) $y''+\sqrt{2}y=\sin 2x,$

$y(0)=1, y'(0)=0.$

16. 1) $y''-y'-4y=(x-1)^2,$

$y(0)=0, y'(0)=0;$

2) $16y''+4y'+\frac{1}{4}y=e^{-5x},$

$y(0)=0, y'(0)=1;$

3) $y''+9y'-12y=\sin 3x,$

$y(0)=-1, y'(0)=0;$

4) $y''+y=x\cos 2x,$

$y(0)=0, y'(0)=0.$

17. 1) $y''+y'-4y=3x+2,$

$y(0)=2, y'(0)=1;$

2) $3y''-4\sqrt{3}y'-4y=e^{-\frac{x}{5}},$

$y(0)=0, y'(0)=1;$

3) $3y''+5y'+5y=x\sin 7x,$

$y(0)=0, y'(0)=0;$

4) $2y''+5y=\cos 3x,$

$y(0)=1, y'(0)=0.$

18. 1) $y''-2y'-4y=5x,$

2) $y''-\sqrt{2}y'+y=(x-1)e^{\frac{x}{3}},$

$y(0) = 2, y'(0) = -1;$

3) $5y'' + 6y' + 3y = (x + 2)\sin x,$

$y(0) = 0, y'(0) = 0;$

$y(0) = 0, y'(0) = 0;$

4) $5y'' + y = 4\cos 3x,$

$y(0) = 0, y'(0) = 1.$

19. 1) $y'' + 2y' - 4y = x + 12,$

$y(0) = 1, y'(0) = 1;$

2) $6y'' - 12y' + 6y = e^{1-x},$

$y(0) = 0, y'(0) = 0;$

3) $3y'' + 4y' + 5y = x\sin 2x,$

$y(0) = 0, y'(0) = 0;$

4) $3y'' + y = \cos 4x,$

$y(0) = 0, y'(0) = 1.$

20. 1) $y'' - 3y' - 4y = 12x,$

$y(0) = 0, y'(0) = 1;$

2) $\frac{y''}{5} + 2y' + 5y = xe^{-3x},$

$y(0) = 1, y'(0) = 0;$

3) $5y'' + 2y' + y = (1 + x)\sin 3x,$

$y(0) = 0, y'(0) = 0;$

4) $\frac{3}{2}y'' + 3y = \cos 4x,$

$y(0) = -1, y'(0) = 0.$

21. 1) $y'' + 3y' - 4y = 4x,$

$y(0) = 1, y'(0) = -1;$

2) $y'' + 4y' + 4y = (1 - x)e^{\frac{x}{2}},$

$y(0) = 0, y'(0) = 1;$

3) $7y'' + 8y' + 3y = (5 - \mathrm{x})\sin x,$

$y(0) = 0, y'(0) = 0;$

4) $3y'' + 7y' = \cos 3x,$

$y(0) = 1, y'(0) = 0.$

22. 1) $y'' - 4y' - 4y = x^2,$

$y(0) = 0, y'(0) = 0;$

2) $3y'' + 2y' + \frac{1}{3}y = xe^{\frac{x}{4}},$

$y(0) = 0, y'(0) = 1;$

3) $y'' - 3y' + 6y = 4\sin 2x,$

$y(0) = 0, y'(0) = -1;$

4) $5y'' + 3y = \cos\frac{x}{2},$

$y(0) = 1, y'(0) = 0.$

23. 1) $y'' - 4y = 5x,$

$y(0) = 2, y'(0) = 1;$

2) $\frac{1}{4}y'' - 3y' - 9y = (x + 4)e^{-x},$

$y(0) = 0, y'(0) = 1;$

3) $y'' - 3y' + 6y = (6 - x)\sin x,$

$y(0) = 0, y'(0) = 0;$

4) $6y'' + 7y = \cos 3x,$

$y(0) = 0, y'(0) = 1.$

24. 1) $y'' - y' - 5y = 1 - 3x,$

$y(0) = 1, y'(0) = 0;$

2) $y'' + 2y' + 2y = (x - 3)e^{\frac{x}{3}},$

$y(0) = 0, y'(0) = 0;$

3) $2y'' + 7y' + 8y = 4\sin 2x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

4) $\frac{3}{2}y'' - 7y = 3\cos x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$.

25. 1) $y'' + y' - 5y = 10x$,

$y(0) = 1, y'(0) = -1$;

2) $9y'' - 3y' - \frac{1}{4}y = e^{5x}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

3) $3y'' + 10y' + 9y = (7 - x)\sin x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $\frac{2}{5}y'' - 5y = \cos 5x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$.

26. 1) $y'' - 5y' + y = 4x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 2$;

2) $9y'' + 3y' + \frac{1}{4}y = (3x - 5)e^{x}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

3) $y'' + 5y' + 6y = 8x\sin 3x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $y'' + 7y = 8\cos 4x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$.

27. 1) $y'' + 5y' + y = 12x - 3$,

$y(0) = 1, y'(0) = 1$;

2) $y'' + 3y' + \frac{9}{4}y = xe^{3x}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

3) $y'' - 5y' + 6y = (4 - 3x)\sin 3x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $3y'' + 8y' = \cos 2x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$.

28. 1) $y'' - 5y' - y = 1$,

$y(0) = 1, y'(0) = 3$;

2) $\frac{1}{2}y'' - 3\sqrt{2}y' + 9y = e^{5-2x}$,

$y(0) = -1, y'(0) = 0$;

3) $3y'' + 5y' + 7y = e^{x}\sin 4x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $2y'' + 7y = \cos 5x$,

$y(0) = 0, y'(0) = -1$.

29. 1) $y'' + 5y' - y = 5x$,

$y(0) = 2, y'(0) = 1$;

2) $y'' - 5y' + \frac{25}{4}y = e^{\frac{x}{3}}$,

$y(0) = 0, y'(0) = -1$;

3) $8y'' + 4y' + 3y = (7x - 4)\sin x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $\frac{2}{5}y'' + y = \cos 3x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$.

30. 1) $y'' + 2y' - 5y = 7x + 2$,

$y(0) = 1, y'(0) = 1$;

2) $16y'' - 8y' + y = xe^{-7x}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

3) $7y'' + 9y' + 3y = \sin 7x$,

4) $\frac{4}{5}y'' + y = \cos 3x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1;$

31. 1) $y'' - 2y' - 5y = 4,$

$y(0) = 1, y'(0) = 2;$

3) $y'' + 4y' + 6y = e^{2x}\sin x,$

$y(0) = 0, y'(0) = 0;$

32. 1) $y'' + 5y' - 2y = x - 3,$

$y(0) = 1, y'(0) = -1;$

3) $y'' + 4y' + 6y = e^{2x}\sin x,$

$y(0) = 0, y'(0) = 0;$

33. 1) $y'' - 5y' + 2y = 2,$

$y(0) = 2, y'(0) = 1;$

3) $4y'' + y' + 3y = \sin x,$

$y(0) = 1, y'(0) = 0;$

34. 1) $y'' + 5y' + 2y = (x-1)^2,$

$y(0) = 0, y'(0) = 0;$

3) $5y'' - 3y' + 2y = \cos 2x,$

$y(0) = 1, y'(0) = 0;$

35. 1) $y'' - 5y' - 2y = 4x,$

$y(0) = 1, y'(0) = 2;$

3) $3y'' + y' - 3y = \sin x,$

$y(0) = 0, y'(0) = 1;$

36. 1) $y'' - 3y' = x^2 + 4,$

$y(0) = 2, y'(0) = 0;$

3) $y'' - 2y' + 6y = \sin 3x,$

$y(0) = 0, y'(0) = 0;$

37. 1) $y'' + 3y' = (1-x)^2,$

$y(0) = 0, y'(0) = 0;$

$y(0) = 2, y'(0) = 1.$

2) $2y'' - 6y' + \frac{9}{2}y = (x+2)e^{-\frac{x}{2}},$

$y(0) = 0, y'(0) = 0;$

4) $y'' + 3y = \cos 3x,$

$y(0) = 1, y'(0) = 0.$

2) $y'' + 5y' + \frac{25}{4}y = e^{-\frac{4}{5}x},$

$y(0) = 0, y'(0) = 1;$

4) $y'' + 9y = x\sin x,$

$y(0) = 0, y'(0) = 0.$

2) $\frac{1}{5}y'' - 2y' + 5y = e^{2x},$

$y(0) = 0, y'(0) = 1;$

4) $3y'' + 5y' = x\cos 3x,$

$y(0) = 0, y'(0) = 0.$

2) $y'' + 3y' + \frac{9}{4}y = (x+1)e^{x},$

$y(0) = -1, y'(0) = 0;$

4) $2y'' + 7y = \sin x,$

$y(0) = 0, y'(0) = 1.$

2) $2y'' - 4y' + 2y = xe^{-\frac{3}{2}x},$

$y(0) = 0, y'(0) = 0;$

4) $4y'' + 5y = \cos 4x,$

$y(0) = -1, y'(0) = 0.$

2) $3y'' - \sqrt{3}y' + \frac{1}{4}y = e^{3x},$

$y(0) = 1, y'(0) = 1;$

4) $3y'' + 7y = \cos 5x,$

$y(0) = 1, y'(0) = 0.$

2) $\frac{1}{4}y'' + y' + y = e^{7-x},$

$y(0) = -1, y'(0) = 0;$

3) $y'' + 2y' + 6y = \sin\frac{x}{2}$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

4) $5y'' + 7y = \cos 2x$,

$y(0) = 0, y'(0) = -1$.

38. 1) $y'' + 5y' + 3y = 3x$,

$y(0) = 1, y'(0) = -1$;

2) $9y'' + 6y' + y = xe^{3x+\frac{2}{5}}$,

$y(0) = 1, y'(0) = 1$;

3) $\sqrt{3}y'' + 2y' + 5y = 6\sin 2x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

4) $6y'' + 5y = 3\cos x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 1$.

39. 1) $y'' - 5y' = 7x + 2$,

$y(0) = 1, y'(0) = 2$;

2) $16y'' + 8y' + y = 3e^{-4x}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

3) $8y'' + 7y' + 6y = \cos 2x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

4) $8y'' + \frac{3}{2}y = x\sin x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$.

40. 1) $y'' - 3y' = 4x$,

$y(0) = 1, y'(0) = -1$;

2) $3y'' + 4\sqrt{3}y' + 4y = xe^{5x}$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

3) $6y'' + 10y' + 5y = (1 - \mathrm{x})\sin x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

4) $3y'' + \frac{1}{5}y = \cos 2x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$.

41. 1) $y'' - 5y = x^2 + 2$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

2) $3y'' - 2\sqrt{5}y' + \frac{5}{3}y = 3e^{x}$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

3) $y'' - y + 7y = \sin 3x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

4) $\sqrt{7}y'' + 2y = x\cos 2x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$.

42. 1) $y'' - 4y' - 5y = 3x + 2$,

$y(0) = 1, y'(0) = 2$;

2) $y'' + \frac{4}{\sqrt{3}}y' + \frac{4}{3}y = e^{7x-2}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

3) $y'' + 7y' + 12y = \sin 5x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

4) $8y'' + 9y = x\cos 3x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$.

43. 1) $y'' + 4y' - 5y = x - 7$,

$y(0) = 1, y'(0) = -1$;

2) $\frac{1}{4}y'' + \sqrt{7}y' + 7y = (x - 3)e^{2x}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

3) $y'' + y' + 7y = x\sin x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $y'' + 12y = \cos 5x$,

$y(0) = 2, y'(0) = 0$.

44. 1) $y'' - 5y' - 4y = x + 2$,
$y(0) = 1, y'(0) = 3$;
2) $6y'' + \sqrt{3}y' + \frac{1}{8}y = (4 - 2x)e^{-2x}$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;
3) $y'' - y' + 7y = \text{x}\sin 3x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;
4) $3y'' + 7y = \cos 2x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 2$.

45. 1) $y'' - 5y' + 4y = x^2 + 1$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;
2) $\frac{y''}{2} - \sqrt{2}y' + y = xe^{1-x}$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$;
3) $y'' + y' + 3y = \sin 5x$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$;
4) $3y'' + 7y = \cos 5x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1$.

46. 1) $y'' + 5y' - 4y = 3x$,
$y(0) = -1, y'(0) = 0$;
2) $y'' - 3y' + \frac{9}{4}y = (x + 3)e^x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1$;
3) $y'' + 2y' + 3y = (2x - 3)\cos x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;
4) $5y'' + 6y = \sin 3x$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$.

47. 1) $y'' + 5y' + 4y = 4$,
$y(0) = 2, y'(0) = 1$;
2) $y'' - 4y' + 4y = xe^{-3x}$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$;
3) $y'' - 2y' + 3y = e^{-2x}\cos x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;
4) $3y'' + 10y = \sin 2x$,
$y(0) = 0, y'(0) = -1$.

48. 1) $y'' - 5y' = 6 - x$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$;
2) $y'' + 4y' + 4y = (1 + x)e^{-\frac{x}{2}}$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;
3) $y'' - y' + 3y = \sin x$,
$y(0) = 0, y'(0) = -1$;
4) $y'' + 7y = \cos\frac{x}{4}$,
$y(0) = 1, y'(0) = 1$.

49. 1) $y'' - 5y' + 5y = x^2$,
$y(0) = 1, y'(0) = -1$;
2) $y'' + 5y' + \frac{25}{4}y = (4 - 2x)e^x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;
3) $y'' + 3y = \sin\frac{x}{3}$,
$y(0) = 2, y'(0) = 0$;
4) $3y'' + 4y = \cos 2x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1$.

50. 1) $y'' - 5y' = 7 - x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1$;
2) $y'' + 6y' + 9y = e^{-5x}$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

3) $y'' + 9y = 5\sin 7x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $y'' + 5y = \cos 2x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 2$.

51. 1) $y'' + 5y' + 5y = x$,

$y(0) = 2, y'(0) = -1$;

2) $y'' + 7y' + \frac{49}{4}y = xe^{2x}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

3) $3y'' + 7y' + 8y = 7\sin x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 3$;

4) $\sqrt{3}y'' + 2y = 4\cos 3x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$.

52. 1) $y'' + 6y' + y = x + 3$,

$y(0) = 1, y'(0) = -2$;

2) $\frac{1}{4}y'' + 2y' + 1 = e^{-7x}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

3) $y'' + 3y' + 7y = (1 - x)\cos x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $3y'' + 7y = \sin 3x$,

$y(0) = -1, y'(0) = 0$.

53. 1) $y'' + y' - 6y = 12x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 2$;

2) $y'' + 8y' + 16y = xe^{x}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

3) $5y'' + 7y' + 4y = 5\cos 2x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

4) $y'' + 10y = \sin x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$.

54. 1) $y'' - y' - 6y = 1$,

$y(0) = 3, y'(0) = 5$;

2) $4y'' - 8y' + y = e^{x+3}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

3) $y'' - 4y' + 7y = e^{x}\cos 2x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

4) $3y'' + 7y = 4\sin 3x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$.

55. 1) $y'' - 6y' - y = 4x$,

$y(0) = 2, y'(0) = 1$;

2) $2y'' - 2\sqrt{2}y' + y = e^{7-2x}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 3$;

3) $y'' + 4y' + 7y = \cos 7x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

4) $12y'' + 5y = x\sin 4x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$.

56. 1) $y'' - 6y' + y = 5x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

2) $25y'' - 10y' + y = e^{x-\frac{4}{3}}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 2$;

3) $y'' - 3y' + 5y = \sin\frac{x}{2}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

4) $y'' + 8y = \sin x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$.

57. 1) $y'' + 6y' - y = x^2 + 2$,

$y(0) = 0, y'(0) = -1$;

2) $\frac{y''}{2} - 4\sqrt{2}y' + 16y = xe^{2x}$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

3) $y'' + 3y' + 5y = \sin\frac{x}{2}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

4) $2y'' + 7y = \cos 2x$,

$y(0) = 2, y'(0) = 0$.

58. 1) $y'' - 2y' - 6y = x - 1$,

$y(0) = 1, y'(0) = 3$;

2) $y'' - 10y' + 25y = e^{5x-\frac{1}{2}}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

3) $3y'' - 7y' + 5y = (4 - 5\mathrm{x})\sin x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $3y'' + 10y = \cos 3x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$.

59. 1) $y'' + 2y' - 6y = 3x + 2$,

$y(0) = 3, y'(0) = 1$;

2) $\frac{y''}{2} - 2\sqrt{2}y' + 4y = 3xe^{-\frac{x}{5}}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

3) $5y'' + 3y' + 4y = \sin 2x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

4) $\frac{3}{2}y'' + y = \cos\frac{x}{2}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$.

60. 1) $y'' - 6y' = x^2$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

2) $\frac{y''}{3} + 2\sqrt{3}y' + 9y = e^{3x-\frac{2}{5}}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

3) $6y'' + 7y' + 3y = \sin x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 3$;

4) $y'' + 7y = \cos 3x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$.

61. 1) $y'' - 6y' + 2y = 12x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 2$;

2) $\frac{y''}{2} + 4\sqrt{2}y' + 16y = e^{-\frac{x}{3}}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

3) $y'' + 3y' + 4y = x\cos 3x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $3y'' + 5y = \sin 8x$,

$y(0) = 4, y'(0) = 0$.

62. 1) $y'' + 6y' - 2y = 7 - x$,

$y(0) = 3, y'(0) = 1$;

2) $\frac{y''}{3} - 2\sqrt{3}y' + 9y = e^{\frac{3}{2}-x}$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

3) $y'' - 4y' + 5y = x\sin 2x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $y'' + 4y = -\cos 3x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$.

63. 1) $y'' + 6y' + 2y = 3$,

$y(0) = 3, y'(0) = 1$;

2) $y'' + 10y' + 25y = xe^{-\frac{3}{2}x}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

3) $3y'' - 2y = (x + 4)\sin\frac{x}{2}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 30$;

4) $y'' + 9y = \cos\frac{x}{5}$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$.

64. 1) $y'' - 3y' - 6y = x^2$,

$y(0) = 0, y'(0) = 2$;

2) $25y''+10y' + y = (x+2)e^{-3x}$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

3) $y'' - y' + 5y = \sin\frac{x}{4}$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

4) $3y'' - 2y = \cos 3x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 2$.

65. 1) $y'' + 3y' - 6y = 1 - x^2$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

2) $4y'' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{64}y = e^{x-1}$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

3) $y'' + y' + 5y = \sin\frac{x}{3}$,

$y(0) = 3, y'(0) = 0$;

4) $\frac{3}{4}y'' - 2y = \cos 6x$,

$y(0) = 0, y'(0) = \frac{1}{6}$.

66. 1) $y'' - 6y' + 3y = 5x$,

$y(0) = 2, y'(0) = 3$;

2) $3y'' - 5y' + \frac{25}{4}y = e^{-5x}$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

3) $y'' + 3y' + y = x\cos 3x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $y'' + 4y = e^x\cos 2x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$.

67. 1) $y'' - 6y' - 3y = 5x$,

$y(0) = 2, y'(0) = 3$;

2) $y'' - 3y' + \frac{9}{4}y = xe^{3x}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

3) $y'' + 3y' + 2y = 5x\cos 2x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $\frac{1}{2}y'' + y = \sin x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$.

68. 1) $y'' + 6y' - 3y = x^2$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

2) $\frac{y''}{2} - 6y' + 18y = e^{\frac{1}{2}+4x}$,

$y(0) = 2, y'(0) = 0$;

3) $y'' - 3y' + 2y = \sin 3x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

4) $y'' + 16y = \cos 7x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$.

69. 1) $y'' + 6y' + 3y = 5x + 1$,

$y(0) = 1, y'(0) = 3$;

2) $y'' + \sqrt{7}y' + \frac{7}{4}y = e^{-7x}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

3) $y'' - 3y' + 3y = \mathrm{x}\sin 4x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $2y'' + 9y = \cos 8x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$.

70. 1) $y'' - 6y = 3x + 2$,

$y(0) = 1, y'(0) = 3$;

2) $y'' + 5y' + \frac{25}{4}y = (3x+2)e^{-3x}$

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

3) $y'' + 3y' + 3y = x\sin 6x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $y'' + \frac{4}{3}y = 4\cos 5x$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$.

71. 1) $y'' + 4y' - 6y = x + 2$,
$y(0) = -1, y'(0) = 0$;

2) $16y'' - 4y' + \frac{1}{4}y = xe^{3x}$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

3) $y'' - 2y' + 5y = \cos 2x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $2y'' - 7y = \sin\frac{x}{2}$,
$y(0) = 2, y'(0) = 0$.

72. 1) $y'' - 6y' - 4y = x$,
$y(0) = 1, y'(0) = 2$;

2) $9y'' - 6y' + y = (1 - x)e^{x}$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

3) $3y'' + 3y' + 2y = (4 - x)\sin x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $2y'' + 5y = 2\cos 3x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$.

73. 1) $y'' + 6y' - 4y = 4$,
$y(0) = -2, y'(0) = 4$;

2) $\frac{y''}{4} + y' + y = (x + 3)e^{5x}$,
$y(0) = 0, y'(0) = -1$;

3) $3y'' + 2y' + 3y = e^{-2x}\cos 3x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $y'' + 6y = \sin x$,
$y(0) = -1, y'(0) = 0$.

74. 1) $y'' - 6y' + 4y = x^2$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

2) $y'' - 7y' + \frac{49}{4}y = e^{-3x}$,
$y(0) = 0, y'(0) = -2$;

3) $y'' + 6y' + 6y = \sin x$,
$y(0) = 0, y'(0) = -1$;

4) $6y'' + y = \cos 2x$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$.

75. 1) $y'' + 6y' + 4y = -1$,
$y(0) = 2, y'(0) = -1$;

2) $3y'' + \sqrt{3}y' + \frac{1}{4}y = e^{2x}$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

3) $2y'' + 5y' + y = e^{-3x}\cos x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $5y'' + 2y = \sin 2x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1$.

76. 1) $y'' + 5y' - 6y = 12x + 3$,
$y(0) = -\frac{1}{4}, y'(0) = 1$;

2) $3y'' + 2\sqrt{5}y' + \frac{5}{3}y = e^{-5x}$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1$;

3) $4y'' + y' + y = (3 - 2x)\sin 3x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $y'' + 9y = \cos 2x$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$.

77. 1) $y'' - 5y' - 6y = 7x$,

$y(0) = 2, y'(0) = 1$;

2) $\frac{y''}{2} + 2\sqrt{2}y' + 4y = e^{1-3x}$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

3) $2y'' + 5y' + 7y = \text{x}\sin 5x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $3y'' + 5y = \cos 2x$,

$y(0) = 0, y'(0) = -1$.

78. 1) $y'' - 6y' + y = (4 - x)^2$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

2) $4y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{64}y = xe^{-3x}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

3) $y'' + 2y' + 5y = \sin 3x$,

$y(0) = 2, y'(0) = 0$;

4) $5y'' + 6y = \cos 4x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$.

79. 1) $y'' - 6y' - 5y = 4x$,

$y(0) = 4, y'(0) = 1$;

2) $y'' - 3y' + \frac{9}{4}y = (6 - x)e^x$

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

3) $5y'' + y' + 2y = 3x\sin 3x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $3y'' + 4y = 5\cos 6x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$.

80. 1) $y'' + 6y' - 5y = 8$,

$y(0) = 1, y'(0) = 3$;

2) $\frac{1}{4}y'' - \sqrt{7}y' + 7y = xe^{-2x}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

3) $3y'' + y' + 3y = e^x \sin x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

4) $5y'' + 2y = \cos 3x$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$.

81. 1) $y'' + 6y' + 5y = 3x - 2$,

$y(0) = -1, y'(0) = 0$;

2) $3y'' + 2y' + \frac{1}{3}y = e^x$,

$y(0) = 0, y'(0) = -1$;

3) $2y'' - 5y' + 8y = \cos 3x$,

$y(0) = 2, y'(0) = 0$;

4) $y'' + 5y = 5\sin 2x$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$.

82. 1) $y'' - 6y' = 4x$,

$y(0) = 2, y'(0) = 0$;

2) $y''+2y' + \frac{1}{5}y = xe^{5x}$,

$y(0) = 0, y'(0) = 0$;

3) $3y'' + 2y' + 5y = \sin 2x$,

$y(0) = -1, y'(0) = 0$;

4) $3y'' + 2y = \sin x$,

$y(0) = -1, y'(0) = 0$.

83. 1) $y'' - 6y' + 6y = 5$,

$y(0) = 2, y'(0) = -1$;

2) $\frac{1}{5}y'' + 2y' + 5y = e^{3x}$,

$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

3) $y'' - y' + 2y = e^{-3x}\sin\frac{x}{2}$,

$y(0)=0, y'(0)=0;$

4) $y''+\frac{5}{2}y=\cos 2x,$

$y(0)=0, y'(0)=1.$

84. 1) $y''+6y'=x^2,$

$y(0)=0, y'(0)=0;$

2) $y''-3y'+\frac{9}{4}y=xe^{-3x},$

$y(0)=1, y'(0)=0;$

3) $3y''+2y'+4y=\sin 3x,$

$y(0)=3, y'(0)=0;$

4) $7y''+3y=\cos 2x,$

$y(0)=0, y'(0)=1.$

85. 1) $y''+6y'+6y=(x-2)^2,$

$y(0)=0, y'(0)=0;$

2) $2y''+4y'+2y=e^{-x},$

$y(0)=1, y'(0)=0;$

3) $2y''+3y'+5y=\sin x,$

$y(0)=1, y'(0)=0;$

4) $y''+\frac{3}{7}y=\cos 2x,$

$y(0)=0, y'(0)=1.$

86. 1) $y''-y'-7y=5x+4,$

$y(0)=2, y'(0)=-1;$

2) $\frac{y''}{2}+6y'+18y=e^{-\frac{4}{3}x},$

$y(0)=0, y'(0)=1;$

3) $y''-4y'+5y=3x\cos x,$

$y(0)=0, y'(0)=0;$

4) $5y''+3y=e^{x}\cos 2x,$

$y(0)=0, y'(0)=0.$

87. 1) $y''-7y'=1-x,$

$y(0)=2, y'(0)=-1;$

2) $y''-\sqrt{7}y'+\frac{7}{4}y=e^{-2x},$

$y(0)=0, y'(0)=2;$

3) $y''+4y'+5y=\mathrm{x}\sin x,$

$y(0)=2, y'(0)=0;$

4) $3y''+\frac{4}{3}y=\cos x+3\sin x,$

$y(0)=0, y'(0)=0.$

88. 1) $y''-7y'+y=x+2,$

$y(0)=1, y'(0)=-3;$

2) $3y''-2y'+\frac{1}{3}y=e^{3x-\frac{1}{4}},$

$y(0)=0, y'(0)=-1;$

3) $y''+5y'+8y=\cos x,$

$y(0)=2, y'(0)=0;$

4) $5y''-\frac{3}{5}y=e^{2x}\sin x,$

$y(0)=0, y'(0)=0.$

89. 1) $y''+7y'=x-3,$

$y(0)=1, y'(0)=-2;$

2) $y''+\frac{4}{\sqrt{3}}y'+\frac{4}{3}y=e^{7x},$

$y(0)=1, y'(0)=0;$

3) $y''-5y'+8y=\mathrm{x}\cos x,$

$y(0)=0, y'(0)=0;$

4) $3y''+\frac{5}{7}y=\sin 4x,$

$y(0)=0, y'(0)=1.$

90. 1) $y'' - 7y' - y = 2x$,
$y(0) = -1, y'(0) = 1$;
2) $6y'' + \sqrt{3}y' + \frac{1}{8}y = (5x + 2)e^{-6x}$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;
3) $y'' + 2y' + 7y = e^x \sin 3x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;
4) $5y'' - \frac{3}{5}y = e^{-x} \sin x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1$.

91. 1) $y'' + 7y' + y = 3x$,
$y(0) = 2, y'(0) = 1$;
2) $y'' - 5y' + \frac{25}{4}y = e^{3x}$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1$;
3) $y'' - y' + 4y = (1 - x) \sin 2x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;
4) $y'' + 6y = \cos 3x$,
$y(0) = 2, y'(0) = 1$.

92. 1) $y'' - 7y' + 2y = 4x^2 + x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;
2) $\frac{1}{4}y'' + 3y' + 9y = xe^{-2x}$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;
3) $y'' + y' + 4y = \sin 3x$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$;
4) $y'' + 3y = \cos 4x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$.

93. 1) $y'' + 7y' - 2y = 3x^2$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$;
2) $3y'' - 2y' + \frac{1}{3}y = (1 - x)e^{3x}$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;
3) $y'' - 2y' + 4y = \sin 7x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1$;
4) $y'' + 8y = \cos 2x$,
$y(0) = 3, y'(0) = 0$.

94. 1) $y'' + 7y' + 2y = x - 1$,
$y(0) = 1, y'(0) = 2$;
2) $y'' - 2\sqrt{3}y' + 3y = e^{x-2}$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1$;
3) $y'' + 2y' + 4y = (2x - 1) \sin x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;
4) $y'' + 7y = \cos 3x$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$.

95. 1) $y'' - 7y' - 2y = 5x$,
$y(0) = 1, y'(0) = -1$;
2) $2y'' - 6y' + \frac{9}{2}y = 3e^{-3x}$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1$;
3) $y'' - 3y' + 4y =$
$(1 - 5x)\sin 4x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 0$;
4) $\frac{3}{4}y'' + 2y = \cos x$,
$y(0) = -1, y'(0) = 0$.

96. 1) $y'' - 7y' - 3y = 4$,
$y(0) = 2, y'(0) = -1$;
2) $4y'' - 8y' + y = (3 + x)e^x$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1$;
3) $7y'' + 5y' + 4y = e^x \cos 3x$,
4) $3y'' - 10y = \sin 2x$,

$y(0)=0, y'(0)=0;$ $y(0)=-1, y'(0)=0.$

97. 1) $y''-7y'=3x^2,$
$y(0)=0, y'(0)=0;$
2) $\frac{1}{4}y''+2y'+1=e^{-5x}$,
$y(0)=-1, y'(0)=0;$
3) $y''+y'+6y=\cos x,$
$y(0)=1, y'(0)=0;$
4) $y''+5y=\cos 2x,$
$y(0)=1, y'(0)=0.$

98. 1) $y''+7y'=x-2,$
$y(0)=1, y'(0)=0;$
2) $y''-8y'+16y=xe^{2x},$
$y(0)=-1, y'(0)=0;$
3) $8y''+11y'-7y=(4-x)sin2x,$
$y(0)=0, y'(0)=0;$
4) $y''+3y=4\cos 2x,$
$y(0)=0, y'(0)=1.$

99. 1) $y''-4y'-7y=5x,$
$y(0)=1, y'(0)=0;$
2) $y''-5y'+\frac{25}{4}y=xe^{\frac{3x}{2}},$
$y(0)=0, y'(0)=1;$
3) $y''-y'+6y=(4-3x)\cos 3x,$
$y(0)=0, y'(0)=0;$
4) $4y''+9y=\sin 2x,$
$y(0)=-1, y'(0)=0.$

100. 1) $y''+4y'-7y=4-x,$
$y(0)=1, y'(0)=0;$
2) $y''-6y'+9=(2x^2-1)e^{-3x},$
$y(0)=0, y'(0)=0;$
3) $5y''+6y'+4y=\sin 2x,$
$y(0)=0, y'(0)=1;$
4) $\frac{3}{2}y''+y=\cos x,$
$y(0)=-1, y'(0)=0.$

Завдання 9.1. Функції багатьох змінних, їх частинні похідні

Знайти усі частинні похідні 1-го порядку, градієнт функції *z* та частинні похідні 2-го порядку.

1. $z=4x^3+3x^2y+3xy^2-y^3.$
2. $z=lntg(x+y).$
3. $z=xy+\sin(x+y).$
4. $z=arctg\dfrac{x+y}{1-xy}.$
5. $z=xsinxy+$ ycosxy.
6. $z=x^2\ln(x+y).$

7. $z = \sin(x + cosy).$

8. $z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2).$

9. $z = \cos(ax + e^y).$

10. $z = \frac{x^4 - 8xy^3}{x - 2y}.$

11. $z = x^2 y^3 e^{x+y}.$

12. $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}.$

13. $z = arctg\frac{2xy}{1 - xy^2}.$

14. $z = e^{xe^y}.$

15. $z = arcsinxy.$

16. $z = y^{lnx}.$

17. $z = \ln(e^x + e^y).$

18. $z = ln\sqrt{x^2 + y^4}.$

19. $z = lntg\frac{x}{y}.$

20. $z = \sin(x^2 + y^2).$

21. $z = \ln\left(x + \sqrt{(x^2 + y^2)}\right).$

22. $z = e^{xy(x^2+y^2)}$

23. $z = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{x}.$

24. $z = e^{\frac{x}{y}} - e^{-y}.$

25. $z = x^2\text{arctg}\frac{y}{x}.$

26. $z = e^{3x^2+2y^2}.$

27. $z = xye^{x+2y}.$

28. $z = e^{-x^2+2cosy}.$

29. $z = y^2\text{arctg}\frac{y}{x}.$

30. $z = \sqrt{y}x^y.$

31. $z = \sqrt{y^3}e^{-2x}cos3y.$

32. $z = \cos(5x^2 + 3y).$

33. $z = \cos(x^2 - y) + 4x^3e^y.$

34. $z = \sqrt[3]{e^x + e^{-y}}.$

35. $z = ln\sqrt[5]{\frac{1}{x + y}}.$

36. $z = \sin(x + 3y^3).$

37. $z = x^3 - 7^{x+5y}.$

38. $z = x^{ln\frac{y}{x}}.$

39. $z = (x + y)^{x^3}.$

40. $z = cos\sqrt[3]{x^2 + y}.$

41. $z = tg^2\frac{x + 1}{3xy}.$

42. $z = x^{ln^3y}.$

43. $z = sin^2(3x - 2y).$

44. $z = \ln(x + \sqrt{(x^2 + y^2)}.$

45. $z = arcsin\frac{\sqrt{x}}{y^3}.$

46. $z = y * 4^{x-5y^2}.$

47. $z = \ln(3^x - 5^{xy})$.

48. $z = \sqrt[3]{y} \cdot x^y$.

49. $z = 2^{\frac{x}{y}} \ln y$.

50. $z = \frac{\sin(3x - y)}{x}$.

51. $z = xe^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$.

52. $z = \frac{x}{x^4 + y^2}$.

53. $z = arctg\frac{x^2}{1+y}$.

54. $z = \ln(x^3 + \sqrt{(4 + y)}$.

55. $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y})$.

56. $z = (3 - \sqrt{x})^y$.

57. $z = arcctg\frac{y^2}{1+xy}$.

58. $z = \sqrt{(x^4 + y^5 - 4)}$.

59. $z = \sqrt[5]{x^3 + 5y^2 - 1}$.

60. $z = \sqrt[3]{x} \cdot e^{xy}$.

61. $z = \ln\left(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - 3\right)$.

62. $z = \cos(y + sinx)$.

63. $z = xsinxy + y\cos(x + y)$.

64. $z = lnctg(5x - y)$.

65. $z = \frac{1}{2}\ln(5x^2 + y^2)$.

66. $z = \sin(e^x + 3y)$.

67. $z = \frac{\cos(3x - y)}{x}$.

68. $z = arctg\frac{y - x}{x + 2y}$.

69. $z = x^3y^2e^{x+3y}$

70. $z = e^{ye^{5x}}$.

71. $z = \frac{y^4 - 2yx^3}{x + 2y}$.

72. $z = x^{ln5y}$.

73. $z = arcsin\frac{xy}{1 - y^2}$.

74. $z = \ln(2^{x^2} + 2^{-y})$.

75. $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + 2y^2)^5}$

76. $z = lnctg\frac{x}{y}$.

77. $z = \ln(y + \sqrt{(x^2 + 3y^2)}$.

78. $z = e^{\frac{x}{y}} + e^{x^2}$.

79. $z = 2y\sqrt{x} + 3x^2\sqrt[3]{y}$.

80. $z = e^{x^2 - xy}$.

81. $z = \sqrt[3]{y^2}\sin(x + y)$.

82. $z = e^{x^2 - siny}$

83. $z = \cos(5y^2 - x)$.

84. $z = \ln\sqrt[6]{\frac{1}{x + y}}$.

85. $z = s\,in(3y^2 - 5x)$.

86. $z = (x + y)^{y^2}$.

87. $z = y^3 - 6^{3x^2-y}$.

88. $z = y^{ln^3 x}$.

89. $z = sin\sqrt[3]{(x+y)^2}$.

90. $z = cos^2(x-y)$.

91. $z = ctg^2\,\dfrac{x+y}{x-y^2}$.

92. $z = (x - \sqrt[3]{y})^x$.

93. $z = e^{\frac{x}{y}} + lny^2$.

94. $z = \sqrt[4]{x} \cdot y^x$.

95. $z = \sqrt{(5x^4 + y^5 - 7)}$.

96. $z = \sqrt[7]{y^2} - 3\sqrt[3]{x} + e^x$.

97. $z = 4\ln\left(\sqrt{x} + \sqrt[5]{y}\right)$.

98. $z = cos\,\dfrac{xy}{5x-y}$.

99. $z = \dfrac{x^4 + \mathrm{xy}}{1-y}$.

100. $z = (lnx)^{yx}$.

Завдання 9.2. Рівняння дотичної площини та нормалі

Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні у відповідній точці.

1. $x^2 + 2z^2 = 9, \quad M_0(1,1,2)$.

2. $y^2 = z + 2\,, \; M_0(2,1,-1)$.

3. $x^2 = 3z, \quad M_0(-3,1,3)$.

4. $5z^2 - 4y^2 = 1, \quad M_0(2,1,1)$.

5. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1, \quad M_0(4,-3,-2)$.

6. $x + y^2 - tgz = 1, \quad M_0(2,0,\frac{\pi}{4})$.

7. $e^{xy} + z^2 = 2, \quad M_0(0,1,1)$.

8. $z^2 + sinxy = 1, \quad M_0(0,2,1)$.

9. $x^2 + y^3z - z^2 = 1, \; M_0(1,1,1)$

10. $z = e^{xy}, \quad M_0(0,2,1)$.

11. $x^3 - y^2z + z^3 = 1, \; M_0(1,1,1)$.

12. $z = \cos(x-y), \; M_0(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},1)$.

13. $xlny + z^3 = 1, \quad M_0(2,1,1)$

14. $x^2 - 3y^2 - z^2 = 1, \quad M_0(4,2,0)$.

15. $xcosy + z^2 - 1 = 0, \quad M_0(1,0,0)$.

16. $xe^{-x} - 3 + 2z^2 = 0, \; M_0(0,1,1)$.

17. $tgxy + z^2 = 0\,, \; M_0(0,1,0)$.

18. $2x^3 - y^2 + 4z = 0\,, \quad M_0(0,2,1)$.

19. $x + e^{y-z} = 1, \quad M_0(0,1,1)$.

20. $x^2 + 2\cos(z+y) = 2, \; M_0(0,1,-1)$.

21. $z = \dfrac{1}{xy}\,, \quad M_0(1,1,1)$.

22. $z = \ln(1+xy), \quad M_0(0,1,0)$.

23. $x^2 + z^2 - y = 0\,, \; M_0(1,2,1)$.

24. $2x^3 - y^2 + z^4 = 1, \; M_0(1,1,0)$.

25. $x - y^4 + z^5 = 1, \quad M_0(1,1,1)$.

26. $y\ln x + z^2 = 1, \quad M_0(1,1,1)$.

27. $y^2 + e^{x-z} = 2\,, \quad M_0(1,-1,1).$

28. $lnz + e^{x^2-y} = 1\,, \quad M_0(1,1,1).$

29. $cosx + z^2 - 2y = 0,$

$M_0\left(\frac{\pi}{2},1,1\right).$

30. $x^5 - 4y^3 + 2z = -1, \quad M_0(1,1,1).$

31. $x^2 - cos\frac{z}{y} = 3, \quad M_0(2,1,0).$

32. $x^4 - y^2 + zy = 1, \quad M_0(1,1,1).$

33. $-z^2 + x\cos(1+y) = 0,$

$M_0(1,-1,1)$

34. $x + 2y^3 - 4z^2 = -1, \; M_0(1,1,1).$

35. $x^2 - ze^{y^2} + 1 = 0, \; M_0(1,0,2).$

36. $x^2 + y^2 - z^3 = 1, \quad M_0(1,1,1).$

37. $xy^2 - x^2z + z^2 = 1, M_0(1,1,1)$

38. $yx^2 - yz + z^2 = 4, \quad M_0(1,1,1).$

39. $-2zy^2 + x + z^3 = 0, \; M_{\,0}(1,1,1).$

40. $z = arctg^2\frac{y}{x}, \quad M_0\left(1,1,\frac{\pi^2}{16}\right).$

41. $3z^2 + x = 4, \quad M_0(1,-2,1).$

42. $4x^2 - 9y^2 = z, \quad M_0(1,-2,1).$

43. $3z^2 + 2y^2 = x, \quad M_0(5,1,1).$

44. $x^2 - z^2 + y^2 = 0, \quad M_0(3,4,5).$

45. $2x^2 + 4z^2 + 3y^2 = 9,$

$M_0(1,-1,1).$

46. $x^2 + 3z^2 + 2y^2 = 6, \quad M_0(1,-1,1).$

47. $x^2 + y^2 + 1 = z, \quad M_0(1,1,3).$

48. $x^2 - z^2 + y^2 = -1, \qquad M_0(2,2,3).$

49. $\ln(x^2 + y^2) = z, \quad M_0(1,0,0).$

50. $z = \cos x siny\,, \qquad M_0\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right).$

51. $2x^2 - 4y^2 = z, \quad M_0(2,1,4).$

52. $z = xy, \quad M_0(1,1,1).$

53. $z = \frac{x^3 - 3axy + y^3 = 0}{a^2}\,,$

$M_0(a,a,-a).$

54. $arctg\frac{y}{x} = z\,, \quad M_0\left(4,1,\frac{\pi}{4}\right).$

55. $2x^2 + 2y^2 = z, \quad M_0(2,2,4).$

56. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0\,, \quad M_0(4,3,4).$

57. $x^2 + y^2 = z, \quad M_0(1,2,-5).$

58. $4x^2 + 9y^2 = z, \quad M_0(1,2,1).$

59. $x^2 + y^2 - z^2 - 2 = 0\,,$

$M_0(1,1,0)$

60. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1,$

$M_0\left(\sqrt{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$

61. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21,$

62. $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz\,,$

$M_0(3\sqrt{2}, 0, 1)$. $M_0\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}, \frac{R\sqrt{2}}{2}, R\right)$.

63. $x^3 + y^2 + z^3 + xyz = 0$, $M_0(1, 2, -1)$.

64. $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, $M_0\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}, \frac{R\sqrt{2}}{2}, R\right)$.

65. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$, $M_0(2, 1, \sqrt{3})$.

66. $x + 2y - lnz + 4 = 0$, $M_0(2, -3, 1)$.

67. $x^2 + y^2 + z^2 = 4x, M_0(1, 0, \sqrt{3})$.

68. $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$, $M_0(2, -3, 1)$.

69. $x^2 - y^2 - 3z = 0$, $M_0(0, 0, -1)$.

70. $cosx + y^2 - 2z + 2 = 0$, $M_0(0, 1, 2)$.

71. $x^2 - lny + \frac{1}{z} = 1$, $M_0(0, 1, 1)$.

72. $z - e^{-2y} + x^2 = 2$, $M_0(2, 0, 1)$.

73. $x^5 + y^3 - z^2 - 1 = 0$, $M_0(1, 1, 1)$.

74. $x^6 - y^3 + 2z = 0$, $M_0(1, 1, 0)$.

75. $x^2 - \sqrt{y} + \frac{1}{z} = 1, M_0(1, 1, 1)$.

76. $\frac{1}{z^2} - y^2 + \sqrt{x} = 1$, $M_0(1, 1, 1)$.

77. $x^2 + y^2 + tgz = 3$, $M_0\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$.

78. $x^2 - 2y^2 + cosz = 0, M_0(1, 1, 0)$.

79. $x^2 - y^2 + e^{xyz} = 1$, $M_0(1, 1, 0)$.

80. $x^3 - 3xy + y^2 - z = 0$, $M_0(1, 1, -1)$.

81. $xy + cos^2 z = 2$, $M_0(1, 1, 0)$.

82. $\frac{x}{y} - z^3 = 0$, $M_0(1, 1, 1)$.

83. $x^2 - z + e^{xyz} = 2$, $M_0(0, 1, -1)$.

84. $\frac{y + x^2}{z - y} + y^3 = 3$, $M_0(1, 1, 2)$.

85. $zx^4 - xy^2 + xyz = 1, M_0(1, 1, 1)$.

86. $2\sqrt{x^2 + y^2} - xz = 1, M_0(1, 0, 1)$.

87. $yx^3 + xy^2 - z^2 = 1$, $M_0(1, 1, 1)$.

88. $y^2x^4 - yz^2 + y^3 = 1$, $M_0(1, 1, 1)$.

89. $yx^3 + xy^2 - z^2 = 1, M_0(1, 1, 1)$.

90. $yx^3 - x + z^2 = 1$, $M_0(1, 1, 1)$.

91. $x^4y^2z + e^{x-y} = 0$, $M_0(1, 1, 1)$.

92. $xyz - \frac{1}{x - y^2} = \frac{1}{2}$, $M_0(1, 1, 1)$.

93. $-\frac{1}{z} + x^2 + \sqrt{y} = 1$, $M_0(1, 1, 1)$.

94. $x - \frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{1}{y} = 1$, $M_0(1, 1, 1)$.

95. $x^3 + y^2 - z^5 = 1$, $M_0(1,1,1)$.

96. $x^2 + y^3 - z^4 = 1$, $M_0(1,1,1)$.

97. $xz + xy - z^3 = 1$, $M_0(1,1,1)$.

98. $z^3 + xy^2 - xz = 1$, $M_0(1,1,1)$.

99. $x^2 + \frac{1}{y} lnz = 2$, $M_0(1,1,e)$.

100. $-y^3 + lny + z = 0$, $M_0(1,1,1)$.

Завдання 10.1. Знакосталі числові ряди, необхідна та достатні умови їх збіжності

Дослідити на збіжність числові ряди.

1.
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+2)!}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

2.
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n+1]{50}}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot n^2}{2^{n+1}}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n+1)^n}$.

3.
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(2n)!}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$;
4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$.

4.
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 4n}{n!}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{3n+2}}$.

5.
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{1}{n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{4^{3n-1}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

6.
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n^3+3}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \, tg \frac{1}{5^n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(n+1)!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

7.
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n+1]{20}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+2}{n+1}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot n!}{5^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(3n+1)^n}$.

8.
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+3}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n-1}}{3^{4n+1}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,(\ln(n+1))^2}$.

9.
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^5}$.

10.
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4n+2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} tg \frac{1}{\sqrt{n}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(5n+1)^n}$.

11.
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{3n^2+2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{\pi}{4^n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+5)\ln(n^2+5)}$.

12.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+2}{2n^2+5n+1}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n\sqrt[3]{n}})$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{(n+1)!}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{(2n+3)^n}}$.

13.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\frac{\pi}{5^n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n\cdot n!}$;

4) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$.

14.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+1}{3n^2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^2}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(3n+1)^{3n}}$.

15.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^4+2n+3}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{1}{\sqrt{n^3}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(3n+4)^{3n}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

16.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{n^2(n+1)}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n\sqrt{n}})$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot \ldots \cdot (3n+2)}{2^n(n+1)!}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ln(n^2+9)}{n^2+9}$.

17.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}+4}{n^2+5n+3}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} arctg\frac{1}{2\sqrt{n}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1\cdot 6\cdot 11\cdot \ldots \cdot (5n-4)}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-5}{2n+7}\right)$.

18.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n+1]{60}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{n^3}}\right)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2^n}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n+1)}}$.

19.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(3n+5)}{n^2+3n+7}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1+(\ln(n^2+3))^3)}{n^2+3}$.

20.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{n^2+6n+2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n tg\frac{\pi}{3^n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,(\ln(n+1))^2}$.

21.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{\sqrt[3]{n^5}(n^3+1)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)!}{n^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{2n+3}}}{\sqrt{2n+3}}$.

22.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+3}{9n+1}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+4}{n^2+3}\right) n^2$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot \ldots \cdot (3n+4)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot \ldots \cdot (4n+2)}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[3]{n^2}}$.

23.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{(2n+1)^2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} arcsin\frac{1}{n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,(\ln(n+1))^3}$.

24.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12n^3+3n+1}{\sqrt[3]{n^2(n^4+5)}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n arcsin\frac{\pi}{5^n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{3^n(n!)^2}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt[3]{n^5}}}{\sqrt[3]{n^5}}$.

25.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3}{5n^2+2n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}{2^n \cdot n!}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^5}$.

26.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3}{5n^2+2n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{(n+1)^3}\left(1-\cos\frac{\pi}{n^2}\right)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+2)!}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$.

27.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{\sqrt{n}\,(n^2+6)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)3^n}{n!}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\,(\ln(n+3))^6}$.

28.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+4}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(1-\cos\frac{\pi}{n^2}\right)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(3n+2)5^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-2n^2}$.

29.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+11}{2n^2+3}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{n\sqrt{n}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n-1}}{3^{4n+1}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\,(\ln(n+2))^3}$.

30.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+5n+1}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)\cdot n^n}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^n$.

31.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+3}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^n(2n+1)}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

32.
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+5}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{\pi}{4^n}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

33.
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{(3n^2+1)\sqrt{n}}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{n^n}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arcsin\frac{1}{n}\right)^n$.

34.
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{\pi}{\sqrt{n}}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(2n)!}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}}{\sqrt{n}}$.

35.
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5n+1}}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^3}\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{(n+3)n^n}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(\ln(n+2))^3}$.

36.
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n-1}{3n+4}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin\frac{\pi}{n^2}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot6\cdot11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n}$.

37.
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(n+1)}{n^3+5}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)2^n}{(n+1)!}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{3^n}$.

38.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{4n^2+3n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} 2n \sin \frac{1}{n^3}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$.

39.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} arcsin \frac{1}{2n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$.

40.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(4n-1)}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} tg \frac{1}{n\sqrt{n}}$;

4) $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \, (\ln \ln n)^2}$.

41.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{2n}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(arctg \frac{1}{n}\right)^n$.

42.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{3n^2-1}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n+1}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n}\right)^n$.

43.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(2n^2+1)\sqrt[3]{n}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (2n+5)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$.

44.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, arctg \frac{1}{\sqrt{n^5}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n(3n-2)}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n$.

45.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n+5}{2n^3+3n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} n\, tg\frac{1}{2^n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!\,2^n}{n^n}$; 4) $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{3}{2}}}$.

46.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n-1)2^{2n-1}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$.

47.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n n!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[3]{n}}$.

48.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n}\, arctg\frac{1}{2n^2}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 11\cdot 21\cdot \ldots \cdot (10n-2)}{(2n-1)!}$; 4) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-3)\sqrt{\ln(n-3)}}$.

49.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1-e^{-\frac{1}{n^2}}\right)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}{4\cdot 8\cdot 18\cdot \ldots \cdot 4n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n+4)}$.

50.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+3}{(n+1)^2\,n^3}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.

51. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{(2n^2+3)n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} n\, arcsin\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}(n^2-1)}{(n+3)!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$.

52. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+8}{n(n+2)(n+3)}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+\sin n}{5^n+\cos n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot \ldots \cdot n^2}{5^{n+1}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n\sqrt{\ln(2n^2+1)}}{2n^2+1}$.

53. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^5-3n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^5+3}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n^2+2)}{n!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(\ln(n+4))^3}$.

54. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+\sqrt[3]{n}}{10n+\sqrt{n}+1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 8\cdot 12\cdot \ldots \cdot 4n}{(2n)!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5-\sqrt{\ln n}}{n}$.

55. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n^3}}{n^2+4n+1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(tg\frac{\pi}{n}\right)^5$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}(n+2)}{5^{n-1}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n+6}}}{\sqrt{n+6}}$.

56. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{n^3+4n^2-3}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n+1} arctg\frac{1}{3^n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(2n)!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n((\ln n)^2+1)}$.

57. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{\sqrt[3]{n^5}(1+n^2)}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+5}{n+3}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{n(n+2)!}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(5n+4)^n}$.

58.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n-1}{5n^2+7}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\, arcsin \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{(3n+4)3^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}$.

59.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^5+4}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n!}{n^{n+1}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(\ln(n+1))^5}$.

60.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+7}{10n+4}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}\, tg \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(n+1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n-3)}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(3n+4)^n}$.

61.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{\sqrt{n^5+2n}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+8}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n!}{n^{n+2}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n+4)^6}$.

62.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^4}+n-1}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n^4}\right)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+2)!}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n$.

63.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+4}{\sqrt{n^5+7n^2+1}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{3n+2}{n^2(n+3)^2}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{4^n(n+1)!}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n((\ln n)^2+4)}$.

64. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-\sqrt{n^3}}{\sqrt[3]{n^6+7n^2+1}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos\pi n+2)n}{3n^2-1}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\sqrt[3]{n^2+1}}{(n+1)!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+1)^n}{(4n+1)^{3n}}$.

65. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{\sqrt{n^5+3n^2+5}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}arctg\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)2^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+6)(\ln(n+2))^3}$.

66. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{\sqrt[4]{n^3(n+2)}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{4^n\,n!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+10)^n\,2^n}$.

67. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{(n+1)^2}}{n^3-7n+8}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}arctg\frac{5}{\sqrt[3]{n}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)}{1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{2n}$.

68. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt[4]{n^5}+n+2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt[5]{n^3}}\right)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2\,5^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^3}{n\,((\ln n)^4+1)}$.

69. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(3n-5)}{n^5+24n^3-1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\,n^3}{e^n(n+1)!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt{\ln(2n+1)}}$.

70. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n+5}{n^2-\sqrt[3]{n^2+4}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+5}tg\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+3}}{(n+1)}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+\ln(n^2+1))}{(n^2+1)}$.

71.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+1}{\sqrt[3]{n^7}+8n^2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^4}\left(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^5}}\right)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n}{n^{n+2}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{3n-1}}}{\sqrt{3n-1}}$.

72.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-5}{4n+8}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+7}{n^2+4}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot \ldots \cdot (3n+1)}{n^{n+2}(n+5)}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{-\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^2}}$.

73.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}-n}{(2n+4)^2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{(n+2)!}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(\ln(n+3))^2}$.

74.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{\sqrt[3]{n^2}(2n^3-1)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n arcsin\frac{\pi}{3^n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{5^n(2n-1)!}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+3}{2n^2+5}\right)^{n^2}$.

75.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n^5+\sqrt[3]{n^3+3n}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} sin\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n-3)}{2^{n+1}(n+1)!}$;

4) $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{\ln n+1}{n(\ln n)^2}$.

76.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n+4}{\sqrt{n^5}+5}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} arctg\frac{4}{\sqrt{n^5}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,e^n}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{3n-1}\right)^n$.

77.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{\sqrt{n}(3n^2-n+1)}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!\,3^{n+1}}{n^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n-1}{2n+5}\right)^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)e^{-(n+1)^2}$.

78.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3+4n-1}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+5)\,n^n}{(n+1)!\,6^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{(n+1)^3}\left(1-\cos\frac{\pi}{n^2}\right)$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\sqrt{\ln(n+3)}}$.

79.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{5n^3-4n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(n+1)!}{n^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n tg\frac{\pi}{2^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(3n^2+1))^n}$.

80.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{9n-4}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+4}\,(2n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots\cdot (4n-3)}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+2)^3\sin\frac{\pi}{n^5}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)((\ln(n+1))^2+2)}$.

81.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^3-1}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 n^n}{3n-1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^3+4}{n^3+5}\right)$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{5n+7}{5n+4}\right)^{n^2}$.

82.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n}}{\sqrt[3]{n^4}+2n-1}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n+1)}{n^{2n}}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n sin\frac{\pi}{2^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n\left(\frac{n}{5n-4}\right)^{2n}$.

83.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt[3]{n}(3n+10)}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n^2+4}{2n^2+3}\right)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{n^{2n-1}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(arcsin \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^n$.

84.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{(n+2)(n^2+7)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg \frac{\pi}{\sqrt{3n}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!\, 3^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)e^{-(n+2)^2}$.

85.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n+1}{\sqrt{n^4+7n}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} e^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{2^n}\right)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n+1)!}{(n+2)n^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+5)}$.

86.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+4}{10n^2-3}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+2}\, \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^5}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{5^{n+1}(n!)^2}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+5)e^{-(n+5)}$.

87.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}(n+3)}{8n^3-7n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^3} \ln\left(1 + \frac{2}{n^4}\right)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n-3)3^n}{n!}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \frac{1}{4^n}$.

88.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-1}{7n^2+2n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+3)^2 \left(1 - \cos \frac{3}{n^2}\right)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n 2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$;

4) $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1 + \ln n}{n\,(\ln n)^3}$.

89.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n^5 - n + 3}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 arcsin \frac{1}{5n^3}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, 4^n}{n^{n+1}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n-7}{2n+3}\right)^{4n}$.

90.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{\sqrt{5n-3}(n^2+1)}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}(n+1)!}{n^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} tg \frac{4n+3}{n^2\sqrt[3]{n}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\ln(n+1)}{(n+1)(\ln(n+1)^2)}$.

91.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{\frac{n^4+1}{n^8+7}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{3^{n+1}\, n!}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{n^3}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(arctg \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^n$.

92.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-2}{7n^3+4}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)\, 3^n\, n!}{3\cdot 7\cdot 11\cdot \ldots \cdot (4n-1)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+3}\sin\frac{\pi}{n^2}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^n}\left(\frac{\sqrt{n}+3}{5n}\right)^n$.

93.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(n^3+4)\sqrt{n}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{5^n\, n!}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2n+1)}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^3+6}{3n^2-1}\right)^n \frac{1}{n^n}$.

94.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n^5+4}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 n^n}{2^{n+3}(n+1)!}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n}\, arctg \frac{\pi}{n^2+1}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)\sqrt[3]{\ln(n+4)}}$.

95.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n^5}-n^2+1}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\ 4^{n+2}}{n^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, tg \frac{\pi}{3^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\sqrt[5]{(\ln(n+3))^2}}$.

96.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n+1}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2n+1)}{n\sqrt{n^3+2}}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(n+4)2^n}$;   4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{3n^2+2}\right)^{2n} n^{3n}$.

97. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{n^2\sqrt[3]{n+3}}$;   3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^3} \sin\frac{\pi}{5^n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (2n+5)}{3^n\, n!}$;   4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{3n^3}-1}\right)^{n} \sqrt{n^n}$.

98. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{\sqrt{n+1}(n^2+3)}$;   3) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+2) arctg\frac{1}{7n^3}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 11 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot (10n-9)}{3^{2n}(n+1)!}$;   4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$.

99. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n}}{(n+3)\sqrt[3]{n}}$;   3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1-e^{-\frac{1}{n^2}}\right)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+3)!}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 4n}$;   4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(\ln(n+2))^4}$.

100. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n\sqrt[3]{n^5}+4}$;   3) $\sum_{n=1}^{\infty} n\, arcsin\frac{\pi}{n^3}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (5n-4)}{(n+4)!\, 3^{2n+1}}$;   4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n}{n^2+1}\right)^{n} (1+n)^n$.

Завдання 10.2. Знакозмінні числові ряди, їх умовна збіжність. Ознака Лейбніца

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність знакозмінні ряди.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt[5]{3n+1}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n(2n+1)}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2+1}{3^n}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2(n+1)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+1}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2n^3+3}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2(n+1)}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{2n+5}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n^2+1}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\,(2n+1)}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^2+1}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+2}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2+1}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}arctg\frac{1}{n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)(2n-1)}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{(-1)^n}{n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\,(2n+1)}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\,(3n+4)}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+4}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^3+n+1}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos na}{n^2}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^2+n+1}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\,\ln(n+1)}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^4+n+1}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n\,(3n-1)}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^4+n+5}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}arctg\frac{1}{n^2}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^3+4}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^4+n}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^3+n}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{tg\frac{\pi}{\sqrt[4]{n}}}{\sqrt{5n-1}}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{\sqrt{n^5+1}}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

44. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^6+n+3}}$

45. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

46. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

47. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

48. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

49. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{\sqrt{n^2+3}}$

50. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[5]{n^7+n}}$

51. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$

52. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2\sqrt{n}}$

53. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sqrt{arctg\frac{1}{n^3}}$

54. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\sqrt[4]{2n+3}}$

55. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{\sqrt{n^3+2}}$

56. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n+1)}{\sqrt{n^3}}$

57. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{\sqrt{n^3+4}}$

58. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{-\sqrt{n}}$

59. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^4+1}$

60. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{1+e^{2n}}$

61. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^4+1}$

62. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}\,(\sqrt{n}+2)}$

63. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$

64. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(n+1)\,2^{2n}}$

65. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n^2}{n^4-n^2+1}$

66. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n+5)}{\ln(n+6)}$

67. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n^2+1}$

68. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n(3+\sqrt{n})}$

69. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$

70. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2(1+\sqrt{n})}$

71. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin 3^n}{3^n}$

72. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n} arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$

73. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{arctg\, n}{n+1}$

74. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n} arctg\frac{1}{n^2}$

75. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$

76. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}\,(1+3\sqrt{n})}$

77. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$

78. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^3+4n-1}$

79. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

80. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{n^2+1}$

81. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+4}$

82. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{e^{-\frac{1}{n}}}{3n^2+4}$

83. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n}{5n+1}$

84. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$

85. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+1}$

86. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n} tg\frac{1}{n^2}$

87. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt{n}}{n^2+4}$

88. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{3n+4}}$

89. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt{2n}}{3n+2}$

90. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\sin\frac{1}{n}\right)^2$

91. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sqrt{tg\frac{1}{2n}}$

92. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\sqrt[5]{2n+3}}$

93. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} arctg\frac{1}{n^3}$

94. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}+1}$

95. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(n+2)\ln(n+1)}$

96. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n^2+\sqrt{n}}$

97. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$

98. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n+2}{5n+1)}\right)^n$

99. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n}{\sqrt[3]{5n^4+n-1}}$

100. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{(n+2)(\ln(n+2))^3}$

Завдання 10.3. Степеневі ряди, їх область збіжності

Знайти інтервал збіжності заданого степеневого ряду і дослідити його збіжність на кінцях цього інтервалу:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,3^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{5^n(2n+1)}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{2n-2}}{(3n-2)^2}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{20}x^n}{(2n+1)\,3^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(n+2)\,2^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\,x^n}{3n-1}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^n}{n\,2^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(5n-3)5^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(2n-1)\,3^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+2)^n}{(2n-1)n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(5n-3)\,2^n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2n\,(n+1)}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{2n\,4^n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(3n-2)n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n-2)\,3^n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n\,3^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n-1)\,2^n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)x^n}{(2n-1)\,2^n}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\,5^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^n}{3n(n^2+1)}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(2n-1)\,3^n}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{(n^2+2)2^n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{3n-2}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3 5^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{2n+1}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n^2(2n-1)}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(x+3)^n}{n^n}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{(n+3)3^n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n^2(4n-3)}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x+1)^n}{(3n+4)2^n}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n(n^2+1)}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{(n+1)3^n}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{(n+1)n^2}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^{2n}}{(n+2)3^{2n}}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(5x)^n}{(2n+1)n}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\,x^n}{(n+1)\,n!}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3n^2(n+1)}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\;x^n}{(x+3)^4}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n\,2^n}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{2n+1}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3 4^n}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{(n+5)\,2^n}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{(n+3)\,2^n}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{n\,(n+5)}$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n\,(n+1)}$

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{(n+3)\,5^n}$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n^2+1)\,9^n}$

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+10)^n}{(n-1)\,6^n}$

49. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2n\,(n+2)}$

50. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{(n^2+3)\,4^n}$

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{(n+6)^2}$

52. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(n+1)\,9^n}$

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x+1)^n}{n^2+1}$

54. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n(n+4)}$

55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{n^2+4}$

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{3n\,(n+2)}$

57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n(n+1)}{n!}$

58. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n}}{n\,(2n-1)}$

59. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2(3n+1)}$

60. $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n+1}x^n$

61. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^{2n}}{n(n^2+n+1)}$

62. $\sum_{n=1}^{\infty} (x-5)^n tg\,\frac{1}{3^n}$

63. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n 3^n}{n+4}$

64. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{5n-4}$

65. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}4^n}{\ln n}$

66. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n3^n}}$

67. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+2)\ln(n+2)}$

68. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x-1)^n}{(n^2+4)^n}$

69. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n+3)x^n}{\left(\sqrt{5}\right)^n}$

70. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}$

71. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(x-3)^{2n}}{5n+4}$

72. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$

73. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$

74. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^n(n+2)}$

75. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^2}{n^{n+1}}$

76. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^{n+2}}{n^2+3}$

77. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n+1}$

78. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(n+1)5^n}$

79. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5x^4}{n!}$

80. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{5^n\,(n+2)}$

81. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(x+5)^n}{4^n}$

85. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n(x-1)^{2n}}{n^2+8}$

83. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x+1)^{2n}}{n}$

86. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{4^n}$

85. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$

87. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^{2n}}{(n+1)3^{2n}}$

87. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+4)^n}{n^2+1}$

88. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+6)^n}{(n+3)}$

89. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^{2n}}{n!}$

90. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2\,2^{n+1}}$

91. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+3)^n}$

92. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-6)^n}{(n+1)8^n}$

93. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(n+1)!}$

94. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$

95. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+4)\,2^n}$

96. $\sum_{n=1}^{\infty}3^{n^2}\,x^{n^2}$

97. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(2n+1)\,3^n}$

98. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+10)^n}{n!\,3^n}$

99. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x+1)^n}{n^2+6}$

100. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5x^4}{(2n)!\,(n+1)}$

Завдання 10.4. Ряди Тейлора

Розкласти в ряд Тейлора за степенями $x-x_0$ функцію:

1. $y=\frac{1}{x},\ \ x_0=1;$

2. $y=\frac{1}{x^2+4x+7},\ \ x_0=-2;$

3. $y=\frac{1}{x^2},\ \ x_0=-2;$

4. $y=\frac{1}{x^2+3x+2},\ \ x_0=-3;$

5. $y=\frac{1}{x^2+4x+7},\ \ x_0=-1;$

6. $y=\sqrt{x},\ \ x_0=4;$

7. $y = cosx,\ \ x_0 = \dfrac{\pi}{2};$

8. $y = e^x,\ \ x_0 = 2;$

9. $y = sin^2x,\ \ x_0 = \dfrac{\pi}{4};$

10. $y = \sqrt[3]{x},\ \ x_0 = 1;$

11. $y = \dfrac{1}{x+1},\ \ x_0 = 3;$

12. $y = \sqrt{x+1},\ \ x_0 = 3;$

13. $y = \dfrac{1}{x+3},\ \ x_0 = 2;$

14. $y = e^x,\ \ x_0 = 1;$

15. $y = cos^2x,\ \ x_0 = \dfrac{\pi}{4};$

16. $y = ln(x-1),\ \ x_0 = 2;$

17. $y = \dfrac{1}{x-1},\ \ x_0 = -2;$

18. $y = \sqrt{x},\ \ x_0 = 1;$

19. $y = e^{-x},\ \ x_0 = -1;$

20. $y = ln(2x+1),\ \ x_0 = 2;$

21. $y = e^{3x},\ \ x_0 = 1;$

22. $y = sin2x,\ \ x_0 = -\dfrac{\pi}{4};$

23. $y = cos3x,\ \ x_0 = \dfrac{\pi}{2};$

24. $y = \dfrac{1}{(x+1)^2},\ \ x_0 = 1;$

25. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}},\ \ x_0 = 5;$

26. $y = \dfrac{1}{2x+1},\ \ x_0 = 1;$

27. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}},\ \ x_0 = 1;$

28. $y = e^{2x-1},\ \ x_0 = 1;$

29. $y = sin(3x-3),\ \ x_0 = 1;$

30. $y = cos(2x-4),\ \ x_0 = 2;$

31. $y = \dfrac{1}{3x+2},\ \ x_0 = 1;$

32. $y = \dfrac{2}{5x+4},\ \ x_0 = -1;$

33. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+11}},\ \ x_0 = -1;$

34. $y = \dfrac{1}{x^2+2x},\ \ x_0 = -1;$

35. $y = sinx,\ \ x_0 = \dfrac{\pi}{2};$

36. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}},\ \ x_0 = -3;$

37. $y = \sqrt[4]{(x-2)^3},\ \ x_0 = 3;$

38. $y = \dfrac{2}{x^2-1},\ \ x_0 = 2;$

39. $y = \sqrt{x+1},\ \ x_0 = 3;$

40. $y = ln(x+3),\ \ x_0 = -2;$

41. $y = cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \ \ x_0 = -\frac{\pi}{4};$

42. $y = \sqrt[5]{3x+7}, \ \ x_0 = 1;$

43. $y = \frac{1}{3x-7}, \ \ x_0 = 1;$

44. $y = \frac{1}{(5x-1)^3}, \ \ x_0 = -1;$

45. $y = \sqrt[3]{(5-x)^2}, \ \ x_0 = 3;$

46. $y = e^{5x+4}, \ \ x_0 = -2;$

47. $y = sin^2 3x, \ \ x_0 = \frac{\pi}{4};$

48. $y = ln(3x+4), \ \ x_0 = 2;$

49. $y = \frac{1}{2x+1}, \ \ x_0 = 3;$

50. $y = 2^{x+1}, \ \ x_0 = 1;$

51. $y = \sqrt[10]{x+4}, \ \ x_0 = 1;$

52. $y = \sqrt[3]{(x+7)^2}, \ \ x_0 = -3;$

53. $y = lnx, \ \ x_0 = 2;$

54. $y = e^{2x+8}, \ \ x_0 = -4;$

55. $y = \sin(5x-2), \qquad x_0 = \frac{2}{5};$

56. $y = \frac{1}{x^5}, \ \ x_0 = 1;$

57. $y = \frac{1}{x^2+4x+4}, \ \ x_0 = 3;$

58. $y = \cos(3x+8), \ x_0 = -\frac{8}{3};$

59. $y = \sqrt{x^5}, \ \ x_0 = 2;$

60. $y = \frac{7}{5x-4}, \ \ x_0 = 1;$

61. $y = \cos(3x-1), \qquad x_0 = \frac{1}{3};$

62. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{3x-2}}, \ \ x_0 = 1;$

63. $y = e^{5x-1}, \ \ x_0 = 2;$

64. $y = \sin(3x-4), x_0 = \frac{4}{3};$

65. $y = \frac{1}{3x-1}, \ \ x_0 = -1;$

66. $y = 3^{2x-1}, \ \ x_0 = \frac{1}{2};$

67. $y = \sqrt[4]{x^3}, \ \ x_0 = 2;$

68. $y = \ln(5x-4), x_0 = 1;$

69. $y = sin^2(5x+6), \ \ x_0 = -\frac{1}{5};$

70. $y = \sqrt[4]{(x-2)^3}, \ \ x_0 = 3;$

71. $y = \sqrt{5x+2}, \ \ x_0 = \frac{1}{5};$

72. $y = cos(5x-4), \ \ x_0 = \frac{4}{5}$

73. $y = \frac{1}{5x+3}, \ \ x_0 = -1;$

74. $y = \frac{1}{5x+4}, \ \ x_0 = 1;$

75. $y = cos^2(x-6), \ \ x_0 = 6;$

76. $y = cos^2(x-4), \ \ x_0 = 4;$

77. $y = ln(5x-4), \ \ x_0 = 1;$

78. $y = sin^2(3x+1), \ \ x_0 = -\frac{1}{3};$

79. $y = \dfrac{1}{4x+1}, \ \ x_0 = 1;$

80. $y = 5^{3x+7}, \ \ x_0 = -\dfrac{7}{3};$

81. $y = \sqrt[3]{2x+3}, \ \ x_0 = 2;$

82. $y = ln(x+4), \ \ x_0 = 4;$

83. $y = 2^{x+4}, \ \ x_0 = 4;$

84. $y = e^{2-x}, \ \ x_0 = 1;$

85. $y = lnx, \ \ x_0 = e;$

86. $y = \dfrac{1}{x^2+5x-3}, \ \ x_0 = 0;$

87. $y = e^{1-6x}, \ \ x_0 = \dfrac{1}{6};$

88. $y = \sin(5x-1), \ x_0 = \dfrac{1}{5};$

89. $y = \sin(x-4), \qquad x_0 = 4;$

90. $y = \dfrac{1}{4x-2}, \ \ x_0 = 1;$

91. $y = \cos 5x, \ \ x_0 = \dfrac{\pi}{4};$

92. $y = \sqrt{4x+2}, \ \ x_0 = 0;$

93. $y = \sqrt{(x+1)^3}, \ \ x_0 = 0;$

94. $y = 3^{-5x}, \ \ x_0 = 1;$

95. $y = \dfrac{1}{x-1}, \ \ x_0 = 3;$

96. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}, \ \ x_0 = 5;$

97. $y = \sin(3x-12), x_0 = 4;$

98. $y = \cos(6x-2), x_0 = \dfrac{1}{3};$

99. $y = \sqrt[5]{(3x-1)^2}, \ \ x_0 = 1;$

100. $y = \dfrac{1}{(3x+2)^3}, \ \ x_0 = 1.$

Завдання 10.5. Застосування степеневих рядів для розв’язування диференціальних рівнянь

Використовуючи розклад в ряд Тейлора, обчислити перші чотири, відмінні від нуля, члени розв’язку диференціального рівняння:

1. $y' = cosx + y^2, \quad y(0) = 1;$
2. $y' = e^x + y^2, \ \ y(0) = 0;$
3. $y' = x^2y + y^2, \ \ y(0) = 3;$
4. $y' = xy - 2e^y, \ \ y(0) = 0;$
5. $y' = sinx + y^2, \ \ y(0) = 1;$
6. $y' = xy + x^2 + y^2, \ \ y(0) = 1;$
7. $y' = ye^x + 2y^2, \ \ y(0) = \dfrac{1}{3};$
8. $y' = e^{3x} + 2xy^2, \ \ y(0) = 2$
9. $y' = x + e^y, \ \ y(0) = 0;$
10. $y' = ycosx + 2cosy, y(0) = 0$
11. $y' = x + y + y^2, \ \ y(0) = 0;$
12. $y' = e^{sinx} + x, \ \ y(0) = 0;$

13. $y' = x^2y^2 + ysinx, y(0) = \frac{1}{2};$

14. $y' = x^2 + e^{2y},\ \ y(0) = 0;$

15. $y' = e^{2x} + xy,\ \ y(0) = 1;$

16. $y' = e^{sinx} + y,\ \ y(0) = 0;$

17. $y' = 2e^y + xy,\ \ y(0) = 0;$

18. $y' = sinx + 0{,}5y^2,\ \ y(0) = 1;$

19. $y' = xy - y - e^x,\ \ y(0) = 2;$

20. $y' = \ xy^2 - y,\ \ y(0) = 2;$

21. $y' = y^2x + xy,\ \ y(0) = 1;$

22. $y' = y^2 + xsiny,\ \ y(0) = \frac{1}{2},$

23. $y' = x^2y^2 - cosy,\ \ y(0) = 0;$

24. $y' = x^2 + e^{2y},\ \ y(0) = 0;$

25. $y' = e^{2x} + xy,\ \ y(0) = 1;$

26. $y' = \ x^2 + y^2,\ \ \ \ \ \ y(0) = 1;$

27. $y' = x^2y + y^3,\ \ y(0) = 2;$

28. $y' = x + 2y^2,\ \ y(0) = 0;$

29. $y' = e^{sinx} + xy,\ \ y(0) = 0;$

30. $y' = x + y^2,\ \ y(0) = 1;$

31. $y' = e^x + x^2y^2,\ \ y(0) = 0;$

32. $y' = 3y^2 + xy,\ \ y(0) = \frac{1}{3};$

33. $y' = sinx + xy,\ \ y(0) = 1;$

34. $y' = cosx + xy^2,\ \ y(0) = 2;$

35. $y' = y^3 + 2xy^2,\ \ y(0) = 2;$

36. $y' = xy^3 + y,\ \ y(0) = 1;$

37. $y' = 3x - y^2,\ \ y(0) = 1;$

38. $y' = cosy + x^2y,\ \ y(0) = 1$

39. $y' = x^2y + sinx,\ \ y(0) = 1;$

40. $y' = xy^2 - x^2y + y, y(0) = 2;$

41. $y' = cos5x - y^2,\ \ y(0) = 1;$

42. $y' = e^{5x^2} + y^3,\ \ y(0) = 0;$

43. $y' = y^2sinx,\ \ y(0) = 0;$

44. $y' = e^y + x^3y,\ \ y(0) = 0;$

45. $y' = x^2y + y^2 - x,\ \ y(0) = 1;$

46. $y' = sin3x - 5y^3,\ \ y(0) = 0;$

47. $y' = xye^x + 3y^2,\ \ y(0) = 0;$

48. $y' = e^{3x^2} + xy^5,\ \ y(0) = 1;$

49. $y' = x^2 + e^y,\ \ y(0) = 2;$

50. $y' = ysinx + cos3y, y(0) = 0;$

51. $y' = x - ysin3x,\ \ y(0) = 0;$

52. $y' = e^{sinx} + y^3,\ \ y(0) = 0;$

53. $y' = x^2y - xcosy,\ \ y(0) = 1;$

54. $y' = x^2 + y,\ \ y(0) = -2;$

55. $y' = x^2 + 2y - 2,\ \ y(0) = 3;$

56. $y' = y^2 - 7x^3,\ \ y(0) = 1;$

57. $y' = x^2 - x - y^2,\ \ y(0) = 0;$

58. $y' = x + 1 - sinxy, y(0) = 0;$

59. $y' = e^{xy} + x^2,\ \ y(0) = 0;$

60. $y' = xe^{y^2} + y,\ \ y(0) = 0;$

61. $y' = x^3 + ysin5x,\ \ y(0) = \frac{1}{2};$

62. $y' = x^2y^2 - cos2y,$
$y(0) = 0;$

63. $y' = x^2y + e^{5y},\ \ y(0) = 0;$

64. $y' = e^{5x} + y^2 - x,\ \ y(0) = 0;$

65. $y' = x^4 + x - 3y^2,\ \ y(0) = 1;$

66. $y' = x^2y - y^5,\ \ y(0) = 0;$

67. $y' = x - 7e^{xy},\ \ y(0) = 0;$

68. $y' = e^{cosy} + xy,\ \ y(0) = 0;$

69. $y' = x + y^2 - y,\ \ y(0) = 1;$

70. $y' = cosx + e^y,\ \ y(0) = 0;$

71. $y' = sinxy - x^2,\ \ y(0) = 0;$

72. $y' = 5x^2 - y^2 - y,\ \ y(0) = 0;$

73. $y' = siny^2 - x,\ \ y(0) = 0;$

74. $y' = x^2 - xy^2 + 1,\ \ y(0) = 2;$

75. $y' = cosxy - 5x,\ \ y(0) = 0;$

76. $y' = e^{x^2+y^2} - y,\ \ y(0) = 0;$

77. $y' = ye^x + 2y^2,\ \ y(0) = \frac{1}{3};$

78. $y' = x^3 + y^3 - x,\ \ y(0) = 1;$

79. $y' = sin3x - y^2,\ \ y(0) = 0;$

80. $y' = e^{x^2y} + x,\ \ y(0) = 0;$

81. $y' = sinx^2y + y,\ \ y(0) = 0;$

82. $y' = x - 5xy^3,\ \ y(0) = 2;$

83. $y' = e^{cosx} - y^2,\ \ y(0) = 0;$

84. $y' = e^y + xy^3,\ \ y(0) = 1;$

85. $y' = xy^2 - 5x^3,\ \ y(0) = 2;$

86. $y' = e^{x^3} + y,\ \ y(0) = 0;$

87. $y' = x + cos5xy,\ \ y(0) = 0;$

88. $y' = e^{xy^2} + y,\ \ y(0) = 1;$

89. $y' = cos3xy + y^3,\ \ y(0) = 0;$

90. $y' = x - e^{x+y},\ \ y(0) = 0;$

91 $y' = x + y^2 + 1,\ \ y(0) = 1;$

92. $y' = y - 7e^{xy},\ \ y(0) = 0;$

93. $y' = x^3 - xy,\ \ y(0) = 0;$

94. $y' = y^3 - ye^x,\ \ y(0) = 1;$

95. $y' = cosx + e^{3y},\qquad y(0) = 2;$

96. $y' = sin\,xy - 2^{3x},\ \ y(0) = 0;$

97. $y' = x^3y - 3e^{xy} + y, y(0) = 0;$

98. $y' = cos^2xy + 1,\ \ y(0) = 0;$

99. $y' = sin^2xy + 2,\ \ y(0) = 0;$

100. $y' = e^{x+y} + y,\ \ y(0) = 0.$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бабенко В.В., Зіневич А.Г., Кічура С.М., Тріщ Б.М., Цаповська Ж.Я.* Збірник задач з вищої математики. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2005. 256 с.
2. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. Москва: Наука, 1975. 416 с.
3. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Москва: Наука, 1988. 240 с.
4. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. Москва: Наука, 1988. 432 с.
5. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальные уравнения, интегралы, ряды, функции комплексного переменного. Москва: Наука, 1989. 464 с.
6. *Валєєв К.Г., Джалладова І.А.* Вища математика: навч. посібник: У 2-х ч. К.: КНЕУ, 2001. Ч. 1. 546 с.
7. *Валєєв К.Г., Джалладова І.А., Лютий О.І. та ін.* Вища математика: навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. К.: КНЕУ, 1999. 396 с.
8. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. Москва: Наука, 2003. 870 с.
9. Збірник задач з вищої математики. З*а ред. Ф.С. Гудименка*. Київ: КУ, 1967. 352 с.
10. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для студ. втузов, в 2 ч. Ч. 1. Москва: Высшая школа, 1986. 415 с.
11. Задачи и упражнения по математическому анализу. *Под ред. Б.П. Демидовича*. Москва: Наука, 1968. 472 с.
12. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика. навч. посіб. для студ. техн. і технол. спец. вищ. навч. закл. К.: А.С.К., 2003. 648 с.
13. *Дубчак В.М., Новицька Л.І.* Про одну модифікацію методу Гауса розв'язування систем алгебраїчних рівнянь в енергетичних задачах. *Техніка, енергетика, транспорт АПК*. 2018. №2 (101). С. 95-103.

14. *Дубчак В.М., Новицька Л.І.* Методика порівняння деяких енергетичних характеристик в симетричних задачах. *Техніка, енергетика, транспорт АПК*. 2015. №1 (91). С. 112-114.

15. *Дубчак В.М., Новицька Л.І.* Окремі методичні аспекти розв’язування задач у процесі вивчення курсу вищої математики. Матеріали Всеукр. наук.-практич. інтернет-конф., 17 лютого 2016 року [Електронний ресурс]. Вінниця. ВНАУ. 2016. С.141-149.

16. *Дубчак В.М., Пришляк В.М., Новицька Л.І.* Вища математика в прикладах та задачах. Навч. посіб. Вінниця: ВНАУ, 2018. 254 с.

17. *Дюженкова Л.І. Дюженкова О.Ю. Михалін Г.О.* Вища математика. Приклади і задачі: посібник. Київ: Академія, 2003. 624 с.

18. *Ефимов Н.В*. Краткий курс аналитической геометрии. Москва: Наука, 1975. 272 с.

19. *Каплан И.А*. Практические занятия по высшей математике. Ч. 1: Аналитическая геометрия на плоскости и пространстве: учеб. пособие для вузов 5-е изд., стер. Х.: Харьк. ун-т, 1973. 203

20. *Каплан И.А*. Практические занятия по высшей математике. Ч. 2: Дифференциальное исчисление функций одной и многих независимых переменных: учеб. пособие для высш. шк.. 5-е изд. Х: Харьк. ун-т,1973. 367с.

21. *Каплан И.А*. Практические занятия по высшей математике. Ч. 3: Интегральное исчисление функции одной независимой переменной. Интегрирование дифференциальных уравнений. Х.: Вища школа, 1974. 374 с.

22. *Каплан И.А*. Практические занятия по высшей математике. Ч.4. Кратные и криволинейные интегралы 3-е изд., стереотип. Х.: Харьк. ун-т, 1971. 498 с.

23. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. Москва: Наука, 1986. 224 с.

24. *Клепко В.Ю. Голець В.Л.* Вища математика в прикладах і задачах: навч. посібн. К.: ЦУЛ, 2009. 592 с.

25. *Коваленко І.П.* Вища математика: навчальний посібник. К.: Вища школа, 2006. 624 с.

26. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики; *под ред. Г.И. Кручковича*. М.: Высш, шк., 1970. 512 с.

27. *Кудрявцев В.А*. Краткий курс высшей математики: учеб. пособие для студ. вузов. Изд. 4-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1975. 624 с.

28. *Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.* Краткий курс высшей математики. М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1985. 576 с.

29. Вища математика: Підручник. У 2-х кн. Кн. 1. Основні розділи. *За ред. Г.Л. Кулініча*. К.: Либідь, 2003. 400 с.

30. Вища математика: Підручник. У 2-х кн. Кн. 2. Спеціальні розділи. *За ред. Г.Л. Кулініча*. К.:Либідь, 2003. 368 с.

31. *Левчук О.В., Новицька Л.І.* Вища математика: методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня освіти галузей знань – 13 «Механічна інженерія», 14 «Електрична інженерія», спеціальностей – 133 «Галузеве машинобудування», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» денної та заочної форм навчання. Вінниця: ВНАУ, 2019. 53 с.

32. *Минин Н.А. Перевозников А.Ю. Черенков А.А. Чинаев П.И.*: Высшая математика. Специальные главы. К.: Вища школа, 1981. 368 с.

33. *Минорский В.П*. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для вузов. 13-е изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 352 с.

34. *Мисюркеев Й.В*. Сборник задач по методам математической физики. М.: Просвещение, 1975. 220 с.

35. *Михайленко В.В., Добряков Л.Д., Головня Р.М.* Вища математика. Книга 2. Диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних: навч. посібн. Житомир: ЖДТУ, 2012. 576 с.

36. *Натансон И.П*. Краткий курс высшей математики. 4-е изд., стер. СПб: Лань, 2001. 736 с.

37. *Новицька Л.І., Левчук О.В*. Вища математика. Частина II: методичні вказівки для проведення практичних занять та самостійної підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня освіти галузей знань – 13 «Механічна

інженерія», 14 «Електрична інженерія», спеціальностей – 133 «Галузеве машинобудування», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка». Вінниця: ВНАУ, 2017. 115 с.

38. *Новицька Л.І., Хрипко Т.Є.* Вища математика. методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня освіти галузей знань – 13 «Механічна інженерія», 14 «Електрична інженерія», спеціальностей – 133 «Галузеве машинобудування», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» денної та заочної форм навчання. Вінниця: ВНАУ, 2019. 141 с.

39. *Новицька Л.І., Хрипко Т.Є.* Вища математика. Частина 1. Навч. посіб. Вінниця: ТОВ «ТВОРИ», 2020. 258 с.

40. *Новицька Л.І., Дубчак В.М.* Застосування математичного апарату у транспортній логістиці АПК. *Всеукраїнський науково-технічний журнал «Техніка, енергетика, транспорт АПК»* №1 (100) 2018. С. 123-128.

41. *Овчинников П.Ф., Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П. Михайленко В.М.* Высшая математика. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Введение в математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. пособие для студ. втузов. К.: Вища освіта, 1987. 552 с.

42. *Рудавський Ю.К. та ін.* Математичний аналіз: навч. посібник. Львів: Видавництво НУ «Львівська політехніка», 2002. 404 с.

43. *Пак В.В., Носенко Ю.Л.* Вища математика: підручник. Донецьк: Сталкер, 2003. 496 с.

44. *Пак В.В., Носенко Й. Л.* Вища математика. К: Либідь, 1996. 440 с.

45. *Привалов И.И.* Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1961. 300 с.

46. *Призва Г.Н., Плахотник В.В., Гординський Л.Д.* Вища математика: підручник: у 2 ч. Ч. 1: Основні розділи. Київ: Либідь, 2003. 400 с.

47. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О.* Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. К.: Вища шк., 1994. 454 с.

48. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. *Под ред. Г.И. Кручковича.* М.: Высш, шк., 1970. 512 с.

49. *Сизоненко В.Л., Чібісов Д.В., Коваленко М.Й., Масленніков Д.І.* Вища математика: навч. посіб. для студ. аграр. вузів / Харківський держ. аграрний ун-т ім. В.В.Докучаєва. Х., 1999. 106 с.

50. *Стрижак Т.Г., Коновалова Н.Р.* Математичний аналіз. К.: Либідь, 1995. 240 с.

51. *Соколенко О.І.* Вища математика: підруч. для студ. вузів. К.: Академія, 2003. 432 с.

52. *Тевяшов А.Д.* Вища математика. Заг. курс: збірник задач та вправ. Харків: ХТУРЕ, 1997. 192 с.

53. *Турчанінова Л.І.*, *Доля О.В.* Практикум із вищої математики: підруч. для студ. вищ. навч. закл. К.: Кондор, 2010. 172 с.

54. *Шкіль М.І.*, *Колесник Т.В.* Вища математика: Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди: підручник у 3 кн. К.: Либідь, 2004. 251 с.

55. *Щипачев В.С.* Высшая математика. М.: Высшая школа, 1985. 479 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Контрольні питання

1. Сформулюйте означення матриці.

2. Назвіть основні види матриць.

3. Що називають сумою, добутком двох матриць? як помножити матрицю на число?

4. За якими правилами обчислюють визначники 2-го та 3-го порядків?

5. Назвіть властивості визначників.

6. Сформулюйте означення мінору та алгебраїчного доповнення елемента матриці.

7. Вкажіть методи обчислення визначників n-го порядку.

8. Сформулюйте означення оберненої матриці. Як знайти таку матрицю?

9. За яких умовах існує обернена матриця?

10. Що таке ранг матриці? Як його знайти?

11. Сформулюйте означення системи лінійних алгебраїчних рівнянь та її розв’язку.

12. Як розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера?

13. Як розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса?

14. Як розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом?

15. Сформулюйте критерії сумісності та визначеності системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

16. Яку систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають однорідною?

17. Що називають вектором? Наведіть приклади векторних величин.

18. Сформулюйте означення суми і різниці векторів, добутку вектора на число.

19. Які вектори називають колінеарними? Сформулюйте умову колінеарності двох векторів у просторі.

20. Які вектори називають компланарними? Сформулюйте умову компланарності трьох векторів у просторі.

21. Сформулюйте означення лінійно залежної і лінійно незалежної системи

векторів.

22. Як розкласти вектор за певним базисом?

23. Що називають скалярним добутком векторів?

24. Що називають векторним добутком векторів? Як можна використати векторний добуток векторів для обчислення площі паралелограма і площі трикутника?

25. Що називають мішаним добутком векторів? Як обчислити мішаний добуток трьох векторів? Як можна використати мішаний добуток векторів для обчислення об’єму паралелепіпеда і об’єму тетраедра?

26. Запишіть відомі Вам рівняння прямої на площині і у просторі.

27. Як визначити взаємне розміщення двох прямих на площині й у просторі?

28. Як визначити кут між прямими?

29. Як визначити відстань від точки до прямої та відстань між мимобіжними прямими?

30. Сформулюйте означення кола. Запишіть його канонічне рівняння.

31. Сформулюйте означення еліпса. Запишіть його канонічне рівняння.

32. Як визначити координати фокусів та ексцентриситет еліпса?

33. Сформулюйте означення гіперболи та її асимптот. Запишіть канонічне рівняння гіперболи.

34. Сформулюйте означення параболи, її фокуса та директриси. Запишіть канонічне рівняння параболи.

35. Запишіть загальне рівняння лінії другого порядку.

36. Сформулюйте означення функції.

37. Які є способи задання функції?

38. Що називають областю визначення та областю значень функції?

39. Наведіть приклади застосування функцій в агроінженерії, машинобудуванні, енергетиці.

40. Сформулюйте означення спадної (зростаючої) функції на множині. Наведіть приклади.

41. Які функції називають парними, непарними, періодичними, обмеженими? Наведіть приклади.

42. Що таке обернена функція? Як її знайти?

43. Що таке складна функція? Наведіть приклади складних функцій.

44. Які функції називають основними елементарними? Побудуйте графіки цих функцій.

45. Які функції називають елементарними? Наведіть приклади.

46. Сформулюйте означення числової послідовності. Наведіть приклади.

47. Які є способи задання послідовності? Наведіть приклади.

48. Які послідовності називають обмеженими? Наведіть приклади.

49. Які послідовності називають зростаючими (спадними)? Наведіть приклади.

50. Сформулюйте означення границі послідовності.

51. Які послідовності називають збіжними, розбіжними? Наведіть приклади.

52. Сформулюйте основні теореми про границі послідовностей.

53. Які послідовності називають нескінченно малими (великими)? Наведіть приклади.

54. Який зв'язок існує між нескінченно малими та нескінченно великими послідовностями?

55. Сформулюйте означення границі функції в точці.

56. Яку границю функції називають односторонньою?

57. Сформулюйте теорему про існування границі функції в точці.

58. Запишіть першу і другу чудові границі.

59. Сформулюйте означення функції, неперервної в точці, мовою границь і мовою приростів.

60. Сформулюйте означення функції, неперервної на проміжку.

61. Сформулюйте основні теореми про неперервні функцій.

62. Назвіть основні властивості функцій, неперервних на відрізку.

63. Що таке точка розриву функції? Які бувають точки розриву функції? Наведіть приклади.

64. Що таке точка усувного розриву?

65. Що таке приріст аргументу і приріст функції?
66. Сформулюйте означення похідної функції в точці.
67. Яку функцію називають диференційованою в точці?
68. Що таке диференціювання функції?
69. У чому полягає геометричний, механічний та економічний зміст похідної функції?
70. Який існує зв'язок між неперервністю і диференційованістю функції?
71. Назвіть основні правила обчислення похідних.
72. Запишіть похідні основних елементарних функцій.
73. Як обчислюють похідні складених та обернених функцій?
74. Що таке похідна другого порядку, похідна n-го порядку?
75. Що таке диференціал функції? Назвіть основні правила знаходження диференціала.
76. Який існує зв'язок між диференціалом і похідною функції?
77. Наведіть приклади застосування диференціала для наближених обчислень.
78. Сформулюйте теорему Ферма.
79. Сформулюйте теорему Ролля.
80. Сформулюйте теорему Лагранжа.
81. У чому полягає правило Лопіталя?
82. Сформулюйте достатні умови зростання (спадання) функції. Як знайти інтервали зростання і спадання функції?
83. Сформулюйте означення точки мінімуму (точки максимуму) функції, мінімуму (максимуму) функції. Наведіть приклади.
84. Що таке точки екстремуму і екстремуми функції?
85. Які точки називають критичними точками функції? Як їх знайти?
86. Сформулюйте достатню умову існування екстремуму.
87. Як знайти точки екстремуму і екстремуми функції?
88. Яку функцію називають опуклою вгору, опуклою вниз на інтервалі? Сформулюйте достатні умови опуклості вгору і опуклості вниз функції. Як знайти інтервали опуклості вгору і опуклості вниз функції?

89. Що таке точка перегину функції? Як знайти точки перегину функції?

90. Сформулюйте означення асимптоти кривої. Як знайти вертикальні, горизонтальні і похилі асимптоти графіка функції?

91. За якою схемою проводять дослідження функції з метою побудови її графіка?

92. Який простір називають n-вимірним евклідовим? За якою формулою визначають відстань між будь-якими двома точками цього простору?

93. Сформулюйте означення граничної, межової, внутрішньої точки множини. Наведіть приклади.

94. Сформулюйте означення замкненої і відкритої множин. Наведіть приклади.

95. Яка множина називається областю? Наведіть приклади.

96. Сформулюйте означення функції багатьох змінних. Наведіть приклади.

97. Що називають графіком функції багатьох змінних?

98. Що являє собою графік функції двох змінних?

99. Сформулюйте означення границі і неперервності функції двох змінних у точці.

100. Що таке частинний і повний прирости функції двох змінних?

101. Сформулюйте означення частинних похідних функції двох змінних. Наведіть приклади знаходження частинних похідних функції двох змінних.

102. У чому полягає геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних?

103. Сформулюйте означення диференціала функції двох змінних.

104. Сформулюйте достатню умову диференційованості функції двох змінних.

105. Сформулюйте означення точки мінімуму (точки максимуму), мінімуму (максимуму) функції двох змінних.

106. Сформулюйте необхідну умову існування екстремуму функції двох змінних.

107. Сформулюйте достатню умову існування екстремуму функції двох змінних. Наведіть приклади знаходження точок екстремуму і екстремумів функції двох змінних.

108. Як знайти найменше і найбільше значення функції двох змінних у замкненій області?

109. Сформулюйте означення первісної функції та невизначеного інтеграла.
110. Назвіть властивості невизначеного інтеграла.
111. Запишіть, чому дорівнюють інтеграли від основних елементарних функцій.
112. Назвіть основні методи інтегрування. Наведіть приклади.
113. Як інтегрують раціональні функції?
114. Як інтегрують тригонометричні функції?
115. Як інтегрують ірраціональні функції?
116. Сформулюйте означення визначеного інтеграла та вкажіть його основні властивості.
117. Який геометричний та економічний зміст визначеного інтеграла?
118. Що таке інтеграл зі змінною верхньою межею? Які він має властивості?
119. Запишіть формулу Ньютона–Лейбніца.
120. Назвіть основні методи обчислення визначених інтегралів.
121. Як застосовують визначені інтеграли для обчислення площ плоских фігур?
122. Як застосовують визначені інтеграли для обчислення довжини лінії?
123. Як застосовують визначені інтеграли для обчислення об’ємів і площ тіл обертання? Наведіть приклади.
124. Як обчислити невласний інтеграл із нескінченною межею інтегрування?
125. Як обчислити невласний інтеграл від необмеженої функції?
126. Сформулюйте означення диференціального рівняння. Наведіть приклади.
127. Що називають порядком диференціального рівняння?
128. Сформулюйте означення загального та частинного розв’язків диференціального рівняння. Що таке задача Коші?
129. Сформулюйте теорему про існування та єдиність розв’язку диференціального рівняння.
130. Які диференціальні рівняння називають рівняннями з відокремлюваними змінними? Вкажіть спосіб їх розв’язування.
131. Що таке однорідне диференціальне рівняння першого порядку? Як знайти його розв’язок?
132. Які диференціальні рівняння називають лінійними однорідними та

лінійними неоднорідними рівняннями першого порядку? Як знайти їх розв'язки?
133. Що є загальним розв'язком диференціального рівняння другого порядку? Як знайти його частинний розв'язок?
134. Які диференціальні рівняння називають лінійними однорідними та лінійними неоднорідними рівняннями другого порядку зі сталими коефіцієнтами? Як знайти їх розв'язки?
135. Сформулюйте означення числового ряду, часткових сум ряду, суми ряду.
136. Який ряд називають збіжним, а який розбіжним? Наведіть приклади.
137. Який ряд називають геометричною прогресією? За яких умов цей ряд збігається?
138. Що таке гармонічний ряд? Чи є він збіжним?
139. Що таке узагальнений гармонічний ряд? За яких умов він є збіжним?
140. Сформулюйте необхідну умову збіжності числового ряду.
141. Сформулюйте властивості збіжних рядів.
142. Який ряд називають знакододатним? Наведіть приклади.
143. Сформулюйте ознаки збіжності знакододатних числових рядів (ознаку порівняння, граничну ознаку порівняння, ознаку Даламбера, ознаку Коші, інтегральну ознаку Коші).
144. Сформулюйте означення знакопочережного ряду.
145. Сформулюйте ознаку збіжності знакопочережного ряду (теорему Лейбніца).
146. Які ряди називають абсолютно збіжними та умовно збіжними? Наведіть приклади.
147. Сформулюйте означення функціонального ряду. Наведіть приклади.
148. Що таке область збіжності функціонального ряду?
149. Сформулюйте означення степеневого ряду. Наведіть приклади.
150. Сформулюйте теорему Абеля.
151. Що таке радіус та інтервал збіжності степеневого ряду? Як їх знайти?
152. Сформулюйте властивості степеневих рядів.
153. Як розкласти функцію у ряд Маклорена, у ряд Тейлора?

Додаток Б

Тести

1. За теоремою про розкладання обчислюється:

а) обернена матриця;

б) визначник;

г) елементи матриці.

в) алгебраїчне доповнення;

2. Умовою паралельності прямих $y = k_1 x + b_1$ та $y = k_2 x + b_2$ є рівність:

а) $\dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$; б) $k_1 k_2 + b_1 b_2 = 0$; в) $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$; г) $k_1 = k_2$.

3. Кут φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ обчислюється за формулою:

а) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$; б) $\sin\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$; в) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$; г) $\cos\varphi = \pi - \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$:

а) 7; б) 15; в) –7; г) 8.

5. Відстань від точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюється за формулою:

а) $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}$; б) $d = \dfrac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$;

в) $d = \dfrac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}}{|x_0^2 + y_0^2 + z_0^2|}$; г) $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

6. Границя $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^2}{x^2 - x}$ дорівнює:

а) ∞; б) 0; в) -2; г) 2.

7. Сума добутків елементів рядка матриці на їхні алгебраїчні доповнення дорівнює:

а) нулеві;

б) оберненій матриці;

в) визначнику матриці;

г) визначнику оберненої матриці.

8. Умовою перпендикулярності прямих $y = k_1 x + b_1$ та $y = k_2 x + b_2$ є рівність:

а) $k_1 \cdot k_2 = -1$; б) $k_1 \cdot k_2 = 1$; в) $\frac{k_1}{k_2} = -\frac{b_1}{b_2}$; г) $k_1 b_2 = k_2 b_1$.

9. Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;5)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{-3;8\}$ має вигляд:

а) $2(x+3)+5(y-8)=0$; б) $-3(x-2)+8(y-5)=0$;

в) $2(x-3)+5(y+8)=0$; г) $-3(x+2)+8(y+5)=0$.

10. Площина $-3x-2y+z+4=0$ перпендикулярна до площини:

а) $3x+2y-z+5=0$; б) $2x+2y+10z+1=0$;

в) $2x+3y-z-4=0$; г) $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{1}=\frac{1}{4}$.

11. Границя: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2}{1-2x^2}$ дорівнює

а) $-\frac{4}{9}$; б) $-\frac{3}{2}$; в) 0; г) ∞.

12. Формули Крамера використовуються для:

а) знаходження оберненої матриці;

б) обчислення визначника;

в) знаходження скалярного добутку векторів;

г) розв’язування системи алгебраїчних рівнянь.

13. Мішаний добуток векторів $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3; y_3; z_3\}$ дорівнює:

а) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$; в) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \times \vec{c}$; г) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$.

14. Вектор $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$ перпендикулярний до вектора:

а) $\{0; -1; -2\}$; б) $\{1;\ 1;\ 1\}$; в) $\{-6;\ 4;\ -2\}$; г) $\{3;\ 1;\ -2\}$.

15. Площина $3x + 5y - 2z + 1 = 0$ паралельна площині:

а) $-3x - 5y - 2z - 1 = 0$; б) $3x - 5y + 2z = 5$;

в) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} + \dfrac{z}{-2} + 1 = 0$; г) $-6x - 10y + 4z + 1 = 0$.

16. Довжиною вектора $N\{-1;\ 2;\ 2\}$ є :

а) 5; б) 10; в) 1 ; г) 3.

17. Границя $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x - 8}{\sin(x - 4)}$ дорівнює:

а) 0; б) 1; в) 2; г) ∞.

18. Нехай φ – кут між векторами $\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1;\}$ та $\vec{b} = \{x_2;\ y_2;\ z_2;\}$. Тоді скалярним добутком цих векторів називається число, яке дорівнює:

а) $\sqrt{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$; б) $|\vec{a}| \cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b}$;

в) $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$; г) $x_1x_2 + z_1y_2 + y_1z_2$.

19. Квадратна матриця А не має оберненої, якщо:

а) $A \cdot A^{-1} \neq E$; *б)* $\det A \neq 0$; *в)* $\det A = \det A^{-1}$; *г)* $\det A = 0$.

20. Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ дорівнює:

а) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$; *б)* $|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$; *в)* $|\vec{a}|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$; *г)* $|\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.

21. Вектор $\vec{a}=\{2;\ -1;\ 3\}$ паралельний вектору:

а) $\{2;\ 1;\ -3\}$; *б)* $\{-2;\ 1;\ -3\}$; *в)* $\{-2;\ -1;\ 3\}$; *г)* $\{2;\ -1;\ -3\}$.

22. Прямі $\frac{x-1}{-2}=\frac{z+5}{2}$ та $\frac{x-1}{2}=\frac{z+5}{-2}$:

а) паралельні; б) перпендикулярні ; в) мимобіжні; г) збігаються.

23. Нормальний вектор площини $2x = y$ має вигляд:

а) $\{2;\ 1;\ 1\}$; б) $\{2;\ -1;\ 1\}$; в) $\{2;\ -1;\ 0\}$; г) $\{2;\ 0;\ 1\}$.

24. Границя $\lim\limits_{x\to 2}\frac{e^{x-2}}{x-1}$ дорівнює:

а) 0; б) 1; в) e^4; г) ∞ .

25. Перетином прямих $2x-y=1$ та $x+y=5$ є точка:

а) $A(3;\ 2)$; б) $B(2;\ -1)$; в) $C(2;\ 3)$; г) $D(0;\ -1)$.

26. Рівняння прямої $2x+3y-6=0$ з кутовим коефіцієнтом має вигляд:

а) $y=-\frac{2}{3}x+2$; б) $3x+2y=1$;

в) $\frac{x}{6}+\frac{y}{-6}=1$; г) $3(x-1)+2(y-1)=1$.

27. Прямі $\frac{x-2}{3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z+7}{-10}$ та $\frac{x-2}{-6}=\frac{y-5}{-8}=\frac{z+7}{20}$:

а) паралельні; б) збігаються; в) мимобіжні; г) перпендикулярні.

28. Направляючий вектор прямої $\frac{x-5}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-4}{1}$ паралельний вектору:

а) $\{-5;\ 1;-4\}$; б) $\{5;-1;\ 4\}$; в) $\{6;\ -4;\ -1\}$; г) $\{-6;\ 4;\ -2\}$.

29. Границя $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2-x}$ дорівнює:

а) ∞ ; б) 4; в) -4; г) 0.

30. Для того, щоб вектори були колінеарні, необхідно, щоб :

а) їх скалярний добуток дорівнював нулеві;

б) їхній мішаний добуток дорівнював нулеві;

в) їх координати були пропорційні;

г) сума добутків їх відповідних координат дорівнювала нулеві.

31. Відстань від точки $M_0(x_0;\ y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ дорівнює:

а) $|Ax_0 + By_0 + C|$; б) $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$;

в) $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$; г) $\sqrt{Ax_0 + By_0 + C}$.

32. Пряма проходить через точку: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+5}{4}$

а) $M_1(3;\ 4)$; б) $M_2(-2;\ 5)$; в) $M_3(-3;\ -4)$; г) $M_4(2;\ -5)$.

33. Площина $3x - 2y + z - 5 = 0$ містить точку:

а) $M_1(-1;2;-6)$; б) $M_2(2;-1;6)$;

в) $M_3(0;0;2)$; г) $M_4(1;-1,0)$.

34. Відстань від початку координат до точки, в якій площина $3x - 2y - 5z + 15 = 0$ перетинає вісь Oz дорівнює:

а) 3; б) 2; в) 5; г) 15.

35. Границя $\lim\limits_{x\to 0} 3\dfrac{x}{\sin 3x}$ дорівнює:

а) 0; б) $\dfrac{1}{3}$; в) $\dfrac{1}{9}$; г) 1.

36. Векторний добуток вектора $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ на вектор $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ обчислюється за формулою:

а) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$; б) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$; в) $\sqrt{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}$; г) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

37. Для того, щоб вектори $\vec{a}=\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ та $\vec{b}=\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ були перпендикулярні, необхідно, щоб:

а) $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$; б) $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$;

в) $Пр_{\vec{b}}\vec{a}=0$; г) $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=0$.

38. Відносно прямої $3x-4y+1=0$ вектор $\vec{s}=\{3;\ -4\}$ є:

а) паралельним; б) перпендикулярним;

в) належить прямій; г) утворює з нею тупий кут.

39. Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(4;-3)$ паралельно вектору $\vec{s}=\{-5;\ 2\}$ має вигляд:

а) $\dfrac{x-4}{-5}=\dfrac{y+3}{2}$; б) $\dfrac{x+4}{-5}=\dfrac{y-3}{2}$; в) $\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y+2}{-3}$; г) $\dfrac{x+5}{4}=\dfrac{y-2}{-3}$.

40. Довжина нормального вектора площини $(x-2)+3(y+2)-3(z+3)=0$ дорівнює:

а) $\sqrt{17}$; б) $\sqrt{19}$; в) $\sqrt{7}$; г) $2\sqrt{3}+1$.

41. На прямій $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+5}{6}$ лежить точка:

а) $A_1(2;\ 0;\ -5)$; б) $A_2(2;\ 1;\ -5)$; в) $A_3(3;\ -4;\ 6)$; г) $A_4(-3;\ 4;\ -6)$.

42. Кут між прямими $2x-y+5=0$ та $-3x-6y+1=0$ дорівнює:

а) 90^0; б) 0^0; в) 45^0; г) 60^0.

43. Який з векторів має одиничну довжину:

а) $\{1;1;1\}$; б) $\{0;1;1\}$; в) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$; г) $\left\{\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{3}\right\}$.

44. На перетині двох площин $2(x-1)-5(y+6)+3(z-4)=0$ та $x-y+z-12=0$ лежить точка:

а) $M_1(1;\ -6;\ 4)$; б) $M_2(2;\ -5;\ 3)$; в) $M_3(2;\ -5;\ 5)$; г) $M_4(-1;\ 6;\ -4)$.

45. Відстань від точки $M_0(2;\ 3;\ -5)$ до площини Oxy дорівнює:

а) $\sqrt{2^2+3^2+(-5)^2}$; б) $|2+3-5|$; в) $\sqrt{2^2+3^2}$; г) 5.

46. Границя $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ дорівнює:

а) 0; б) ∞; в) 3; г) 1.

47. Модуль векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$ дорівнює:

а) $|\vec{a}|\times|\vec{b}|$; б) площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

в) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$; г) $np_{\vec{b}}\vec{a}$.

48. Рівняння прямої, що проходить через точки $A(5;\ -2)$ та $B(1;\ 1)$ має вигляд:

а) $5(x-1)-2(y-1)=0$; б) $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-2}$;

в) $\dfrac{x-5}{-4}=\dfrac{y+2}{3}$; г) $1\cdot(x-5)+1(y+2)=0$.

49. Вектор $\vec{a}=\{4;\ -6\}$ вдвічі довший за вектор:

а) $\{4;\ 4\}$; б) $\{-2;\ 3\}$; в) $\{2;\ -3\}$; г) $\{16;\ -24\}$.

50. Дано точки $A(2;\ 1;\ -3)$, $B(4;\ 2;\ -2)$ та площину $2x+y+z-8=0$. Вектор $\overrightarrow{AB}$:

а) перпендикулярний до площини; б) паралельний площині;

в) його початок належить площині; г) його кінець належить площині.

51. Площина $2x-3y+6z+30=0$ перетинає вісь Oy в точці:

а) $A_1(2;\ 0;\ 6)$; б) $A_2(0;\ -10;\ 0)$; в) $A_3(2;\ -3;\ 6)$; г) $A_4(0;\ 10;\ 0)$.

52. Границя $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, 3x}{5x}$ дорівнює:

а) $\dfrac{9}{5}$; б) 0; в) $\dfrac{3}{5}$; г) $\dfrac{1}{15}$.

53. Для того, щоб три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ були компланарні необхідно, щоб:

а) їх координати були компланарними;

б) вони лежали на одній прямій;

в) їх скалярний добуток дорівнював нулеві;

г) їх мішаний добуток дорівнював нулеві.

54. Вектор $\vec{s} = \{2;\ -7\}$ паралельний прямій:

а) $\dfrac{x+4}{7} = \dfrac{y-5}{-2}$; б) $\dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y-5}{-7}$;

в) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+7}{-1}$; г) $\dfrac{x-2}{-7} = \dfrac{y+7}{2}$.

55. Дві прямі $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1}$ та $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y+8}{-1}$:

а) паралельні; б) перпендикулярні; в) збігаються; г) мимобіжні.

56. Два вектори $\vec{a}\{3;\ 4;\ 0\}$ $\vec{b}\{-4;\ 3;\ -2\}$:

а) не паралельні; б) паралельні;

в) перпендикулярні; г) однакової довжини.

57. Дано точки $A(2;\ 1;\ -4)$, $B(3;\ 2;\ -2)$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярний до площини:

а) $x + y + 2z + 3 = 0$; б) $2x + y - 4z + 3 = 0$;

в) $3x + 2y - 2z + 3 = 0$; г) $x + y - 2z + 3 = 0$.

58. Границя $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 + 1}{2x^2 - 1}$ дорівнює:

а) $\dfrac{3}{2}$; б) ∞; в) 4; г) 2.

59. Відстань від точки $M_0(4;\ 3;\ 0)$ до початку координат $O(0;\ 0;\ 0)$ дорівнює:

а) 7; б) 4; в) 3; г) 5.

60. Скалярний добуток векторів $\vec{a}\{3;\ 1\}$, $\vec{b}\{5;\ -2\}$ дорівнює:

а) 13; б) 10; в) 7; г) -1.

61. Модуль векторного добутку векторів $\vec{a}\{3;\ 1\}$, $\vec{b}\{5;\ -2\}$ дорівнює:

а) 3; б) 5; в) 7; г) 11.

62. Відстань від осі OX до прямої $y = 2$ дорівнює:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

63. Одиничним називається вектор:

а) його довжина дорівнює 1; б) усі координати дорівнюють 1;

в) усі координати рівні 0; г) одна координата рівна 1, а друга рівна –1.

64. Границя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,6x}{2x}$ дорівнює:

а) 6; б) 2; в) 3; г) 1.

65. Границя $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x}$ дорівнює:

а) 0; б) 1; в) -1; г) ∞ .

66. Відстань між точками $A(1;1)$ і $B(4;5)$ дорівнює:

а) 1; б) 3; в) 5; г) 7.

67. Відстань між паралельними площинами $z = 0$ і $z = 4$ дорівнює:

а) 2; б) 4; в) 16; г) 64.

68. Мимобіжними називаються прямі:

а) паралельні; б) перпендикулярні;

в) не паралельні і не перетинаються; г) не паралельні і перетинаються.

69. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$:

а) 26; б) 16; в) 5; г) –4.

70. При додаванні відповідних чисел двох довільних рядків визначника його значення:

а) збільшиться; б) зменшиться; в) не зміниться ; г) подвоїться.

71. Довжина векторного добутку векторів $\vec{a} = \{1;1;1\}$ та $\vec{b} = \{-2;-2;-2\}$ дорівнює:

а) 0; б) 1; в) 2; г) 4.

72. Границя константи дорівнює:

а) 0; б) ∞ ; в) константі; г) не існує.

73. Якщо вектор $\vec{a} = \{1;-2;2\}$, тоді вектор $2\vec{a}$ буде:

а) $\{2;-2;2\}$; б) $\{1;1;1\}$; в) $\{-2;4;-4\}$; г) $\{2;-4;4\}$.

74. Векторний добуток $\vec{i} \times \vec{j}$ дорівнює:

а) 0; б) 1; в) ∞ ; г) $\vec{k}$.

75. Скалярний добуток $(\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ дорівнює:

а) 0; б) 1; в) ∞ ; г) . 2

76. Яка точка належить прямій $2x + 3y - 6 = 0$?

а) $M_1(2;\ 3)$; б) $M_2(0;\ 2)$; в) $M_3(0;\ 3)$; г) $M_4(6;\ 0)$.

77. Яка точка належить площині $x + y + z - 3 = 0$?

а) $M_1(1;\ 1;1)$; б) $M_2(-1;1;1)$; в) $M_3(0;\ 1;-1)$; г) $M_4(2;\ 5;1)$.

78. Визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ дорівнює:

а) 3; б) 15; в) 0; г) –7.

79. Рівність $tg\, x \approx x$ діє, коли:

а) $x \to 1$; б) $x \to 0$; в) $x \to -1$; г) $x \to \infty$.

80. Три вектори компланарні, якщо;

а) взаємноперпендикулярні; б) усі три одиничні;

в) всі лежать в одній площині; г) утворюють базис.

81. Похідна функції $y=\cos^3 x$ дорівнює:

а) $-3\cos^2 x\cdot\sin x$; б) $3\sin^2\cos x$; в) $\dfrac{\cos^4 x}{4}$; г) $\dfrac{\cos^2 x}{3}$.

82. Інтеграл $\int\dfrac{1}{\sin^2(3x+1)}dx$ дорівнює:

а) $ctg(3x+1)+C$; б) $tg(3x+1)+C$;

в) $-3ctg(3x+1)+C$; г) $-\dfrac{1}{3}ctg(3x+1)+C$.

83. Похідна функції $y=tg^5 x$ дорівнює:

а) $5tg^4 x$; б) $\dfrac{tg^6 x}{6}$; в) $\dfrac{tg^4 x}{4}$; г) $5tg^4 x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

84. Інтеграл $\int\sqrt{1+x}dx$ дорівнює:

а) $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}+C$; б) $\dfrac{(1+x)^{3/2}}{3/2}+C$;

в) $\dfrac{1}{2}\sqrt{1+x}+C$; г) $\dfrac{(1+x)^{2/3}}{2/3}+C$.

85. Похідна функції $y=e^{-3x}$ дорівнює:

а) $\dfrac{e^{-3x+1}}{-3x+1}$; б) $\dfrac{e^{-3x-1}}{-3x-1}$; в) $-3e^{-3x}$; г) $\dfrac{e^{-3x}}{-3}$.

86. Інтеграл $\int\sin^4 x\cdot\cos x\,dx$ дорівнює:

а) $\dfrac{\sin^5 x}{5}+C$; б) $\dfrac{\cos^5 x}{5}+C$; в) $4\sin^3 x+C$; г) $4\cos^3 x+C$.

87. Похідна функції $y=\arcsin 3x$ дорівнює:

а) $3\arccos x$; б) $\dfrac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$; в) $3\arcsin x$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

88. Інтеграл $\int \sin^4 x \cdot \cos x\,dx$ дорівнює:

а) $\dfrac{\sin^5 x}{5} + C$; б) $\dfrac{arctg^3 x}{3}$; в) $\dfrac{2}{1+x^2}$; г) $2\,arctg\,x$.

89. Похідна функції $y = arctg^2 x$ дорівнює:

а) $\dfrac{2arctg\ x}{1+x^2}$; б) $\dfrac{arctg^3 x}{3}$; в) $\dfrac{2}{1+x^2}$; г) $2\,arctg\,x$.

90. Інтеграл $\int tg^3 x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}dx$ дорівнює:

а) $\dfrac{tg^4 x}{4} + C$; б) $3tg^2 x + C$; в) $\dfrac{1}{3}tg^4 x + C$; г) $\dfrac{tg^2 x}{2} + C$.

91. Інтеграл $\int \dfrac{1}{x^2}dx$ дорівнює:

а) $-\dfrac{1}{x} + C$; б) $\dfrac{x^{-3}}{-3} + C$; в) $\ln^2 x + C$; г) $\dfrac{x^3}{3} + C$.

92. Інтеграл $\int \cos(1-2x)dx$ дорівнює:

а) $2\sin(1-x) + C$; б) $-4\sin(1-2x) + C$;

в) $-\dfrac{1}{2}\sin(1-2x) + C$; г) $\dfrac{1}{4}\sin(1-2x) + C$.

93. Похідна функції $y = \ln(5x+1)$ дорівнює:

а) $\dfrac{1}{x+1}$; б) $\dfrac{5}{x+1}$; в) $\dfrac{5}{5x+1}$; г) $\dfrac{5\ln^2(5x+1)}{2}$.

94. Інтеграл $\int \sin(2x-3)dx$ дорівнює:

а) $-\dfrac{1}{2}\cos(2x-3) + C$; б) $2\cos(2x-3) + C$;

в) $\dfrac{1}{4}\sin^2(2x-3) + C$; г) $2\cos(x-3) + C$.

95. Похідна функції $y = ctg(4x+1)$ дорівнює:

а) $-\dfrac{4}{\sin^2(4x+1)}$; б) $-\dfrac{4}{\cos^2(4x+1)}$; в) $\dfrac{1}{\sin^2(4x+1)}$; г) $-\dfrac{4}{\sin^2(x+1)}$.

96. Інтеграл $\int \frac{1}{3x+5}dx$ дорівнює:

а) $\dfrac{(3x+5)^{-2}}{-2}+C$; б) $\dfrac{1}{3}\ln(3x+5)+C$;

в) $3\ln(3x+5)+C$; г) $arctg\,\dfrac{5}{3}x+C$.

97. Похідна функції $y=\cos(\ln x)$ дорівнює:

а) $\dfrac{\cos^2(\ln x)}{2}$; б) $-\dfrac{\sin(\ln x)}{x}$; в) $\sin(\ln x)$; г) $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

98. Похідна функції $y=\ln(\sin x)$ дорівнює:

а) $tg\,x$; б) $ctg\,x$; в) $\dfrac{1}{\sin x}$; г) $\dfrac{1}{\cos x}$.

99. Інтеграл $\int e^{-5x}dx$ дорівнює:

а) $-\dfrac{e^{-5x}}{5}+C$; б) $\dfrac{e^{-5x+1}}{-5x+1}+C$; в) $\dfrac{e^{-5x-1}}{-5x-1}+C$; г) $-5e^{-5x}+C$.

100. Точка $x_1=1$ для функції $y=x^2-2x$ є точкою:

а) максимуму; б) мінімуму; в) перегину; г) розриву.

101. Означений інтеграл дорівнює $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$:

а) $\dfrac{1}{4}$; б) $\dfrac{\pi}{6}$; в) 4π; г) $\dfrac{\pi}{4}$.

102. Означений інтеграл дорівнює $\int\limits_1^2\left(x^2+\dfrac{1}{x^4}\right)dx$:

а) $\dfrac{21}{8}$; б) $\dfrac{3}{8}$; в) 4; г) $4\dfrac{1}{16}$.

103 . Означений інтеграл дорівнює $\int_1^3 x^3 dx$

а) 10; б) 20; в) 30; г) 40.

104. Означений інтеграл дорівнює $\int_1^4 \sqrt{x}dx$:

а) $\frac{14}{3}$; б) $\frac{7}{2}$; в) $\frac{3}{14}$; г) 5.

105. Означений інтеграл дорівнює $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx$

а) $3e$; б) $1+e$; в) $3e-3$; г) 3.

106. Означений інтеграл дорівнює $\int_{-1}^2 x^2 dx$

а) 3; б) 6; в) 9; г) -5.

107. Означений інтеграл дорівнює $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$

а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{3}{2}$; г) $\frac{2}{3}$.

108. Означений інтеграл дорівнює $\int_0^a (x^2 - ax) dx$

а) $\frac{a^2}{2}$; б) $\frac{a^3}{6}$; в) $3a^2$; г) $-\frac{a^3}{6}$.

109. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку є:

а) $y' = \frac{x+y}{x}$; *б)* $y' - y = e^x$; *в)* $xydx + (x+1)dy = 0$; *г)* $y'' - y = 0$.

110. Загальним розв'язком диференціального рівняння $y' - y = e^x$ є:

а) $y = e^x(C+x)$; *б)* $y = C + x$; *в)* $y = Ce^x$; *г)* $y = e^x x$.

111. Корені характеристичного рівняння $k^2+4k+13=0$ $k_1=-2+3i,\ k_2=-2-3i.$ Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння $y''+4y'+13y=0$ має вигляд

а) $y=C(e^{-2x}+e^{3x})$; *б)* $y=C_1(e^{-2x}\sin 3x+e^{-2x}\cos 3x)$;

в) $y=e^{-2x}(C_1\sin 3x+C_2\cos 3x)$; *г)* $y=e^{2x}(C_1\sin 3x+C_2\cos 3x)$.

112. Загальним розв'язом диференціального рівняння $\frac{1}{x}dx+\frac{1}{y}dy=0$ є $y=\frac{1}{x}e^C$. Частинний розв'язок ДР, що задовольняє початкову умову $y(1)=1$, має вигляд:

а) $y=1$; *б)* $y=\frac{1}{x}$; *в)* $y=\frac{1}{x}e$; *г)* $y=e$.

113. Характеристичне рівняння для диференціального рівняння $y''-3y'+2y=0$ має вигляд:

а) $k^2-3k+2=0$; *б)* $k^2-3k=0$; *в)* $k-3=0$; *г)* $k^2+2=0$.

114. Рівнянням з відокремлюваними змінними є:

а) $xydx+(x+1)dy=0$; *б)* $y'-y=e^x$; *в)* $y'=\frac{x+y}{x}$; *г)* $y''-y=0$.

115. Загальним розв'язком диференціального рівняння $xy'-y=x$ є:

а) $y=x(C+\ln x)$; *б)* $y=x\ln x$; *в)* $y=xC$; *г)* $y=C+\ln x$.

116. Загальним розв'язком диференціального рівняння $y'+2y=4x$ є:

а) $y=Ce^{-2x}+2x-1$; *б)* $y=Ce^{-2x}+2x$;

в) $y=Ce^{-2x}-1$; *г)* $y=e^{-2x}+2x-1$.

117.Характеристичне рівняння для диференціального рівняння $y''+4y'+5y=0$ має вигляд:

а) $k^2+4k+5=0$; *б)* $k^2+4k=0$; *в)* $4k+5=0$; *г)* $k^2+5=0$.

118. Однорідним рівнянням є:

а) $y' = \dfrac{x+y}{x}$; *б)* $y' - y = e^x$; *в)* $xydx + (x+1)dy = 0$; *г)* $y'' - y = 0$.

119. Визначити тип диференціального рівняння $x\sin x + 2y = 2xy'$:

а) однорідне; б) у повних диференціалах;

в) лінійне; г) з відокремлюваними змінними.

120. Яка функція є розв'язком диференціального рівняння $y' + y = 2x + 1$ є:

а) $y = x$; *б)* $y = e^x$; *в)* $y = 2x - 1$; *г)* $y = x^2 + 1$.

121. Визначити тип диференціального рівняння $x^2 + xy + y^2 = x^2 y'$:

а) однорідне; б) у повних диференціалах;

в) лінійне; г) з відокремлюваними змінними.

122. Загальний розв'язок диференціального рівняння $y' + 2xy = 2x$ $y = Ce^{-x^2} + 1$. Частинний розв'язок ДР, що задовольняє початкову умову $y(0) = 2$, має вигляд:

а) $y = e^{-x^2} + 1$; *б)* $y = 2e^{-x^2} + 1$; *в)* $y = 1$; *г)* $y = e^{-x^2}$.

123. Корені характеристичного рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0$ $k_1 = 2,\ k_2 = 3.$ Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0$ має вигляд

а) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$; *б)* $y = C_1(e^{2x} + e^{3x})$;

в) $y = C_2(e^{2x} + e^{3x})$; *г)* $y = e^{2x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$.

124. Загальний інтеграл диференціального рівняння $(1 + x^2)dy + ydx = 0$ дорівнює $\ln|y| + arctgx = C$. Частинний розв'язок ДР, що задовольняє початкову умову $y(0) = 1$, має вигляд:

а) $y = e^{-arctgx}$; *б)* $y = e^{-arctgx} + 1$; *в)* $y = 1$; *г)* $y = 0$.

125. Інтервал збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$ має вигляд $(-2;\ 8)$. При $x = -2$ отриманий числовий ряд збіжний, а при $x = 8$ розбіжний. Тоді областю збіжності даного ряду є:

а) $[-2;8)$; б) $[-8;2)$; в) $[-2;8]$; г) $(-2;8]$.

126. Який з перерахованих рядів є рядом Маклорена?

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}f^{(n)}(x)\cdot(x-x_0)^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!}f^{(n)}(0)\cdot x^n$;

в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)\cdot x^{n+1}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x)\cdot(x-x_0)$.

127. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ є:

а) збіжним; б) розбіжним;

в) абсолютно збіжним; г) умовно збіжним.

128. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$ є:

а) збіжним; б) розбіжним;

в) абсолютно збіжним; г) умовно збіжним.

129. Чому дорівнює коефіцієнт a_n ряду Фур'є $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$?

а) $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$; б) $a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cdot\sin x\,dx$;

в) $a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)dx$; г) $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\,dx$.

130. Розклад в степеневий ряд Маклорена функції $f(x)=e^x$ має вигляд:

а) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+\frac{(-1)^n x^{2x+1}}{(2n+1)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2x+1}}{(2n+1)!}$;

б) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$;

в) $1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

г) $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

131. Дослідивши за радикальною ознакою Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, можна зробити висновок, що він є:

а) збіжним; б) розбіжним;

в) абсолютно збіжним; г) умовно збіжним.

132. Розклад в степеневий ряд Маклорена функції $f(x)=\sin x$ має вигляд:

а) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+\frac{(-1)^n x^{2x+1}}{(2n+1)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2x+1}}{(2n+1)!}$;

б) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$;

в) $1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

г) $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

133. Який з наведених рядів є знакозмінним рядом?

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+2)^{2n}}{n^2\cdot 5^n}$.

134. При яких значеннях α узагальнений гармонічний ряд (ряд Діріхлє) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ буде розбіжним?

а) $-1<\alpha\le 0$; б) $\alpha>1$; в); $\alpha<0$ г) $\alpha\le 1$.

135. Ряд $1-1-1+1+1-1-1+...+(-1)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$ є:

а) знакозмінним; б) степеневим ; в) гармонічним; г) знакододатнім.

136. Розклад в степеневий ряд Маклорена функції $f(x)=\ln(1+x)$ має вигляд:

а) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+\frac{(-1)^n x^{2x+1}}{(2n+1)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2x+1}}{(2n+1)!}$;

б) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$;

в) $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$;

г) $1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-...+\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

137. Дослідивши за радикальною ознакою Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n}{n+1}\right)^n$, можна зробити висновок, що він є:

а) збіжним; б) розбіжним; в) абсолютно збіжним; г) умовно збіжним.

138. Розклад в степеневий ряд Маклорена функції $f(x)=\cos x$ має вигляд:

а) $x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-...+\dfrac{(-1)^n x^{2x+1}}{(2n+1)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2x+1}}{(2n+1)!}$;

б) $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$;

в) $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$;

г) $1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-...+\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

139. Щоб дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$ на збіжність, застосовуючи ознаку Даламбера, необхідно знайти:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

140. Якщо радіус збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ дорівнює нулю $R=0$, то ряд збіжний:

а) при $x\in(-\infty;+\infty)$; б) при $x\in(-1;+\infty)$;

в) при $x\in(-\infty;0)$; г) при

Навчальне видання

Дубчак Віктор Миколайович

Новицька Людмила Іванівна

Дячинська Олена Миколаївна

ВИЩА МАТЕМАТИКА.
ПРИКЛАДИ ТА ЗАДАЧІ

Навчальний посібник

Підписано до друку 28.08.2021.
Формат 60x84/16. Папір офсетний крейдований.
Друк різографічний цифровий офсетний.
Друк. арк. 24. Умов. друк. арк. 22,32. Обл.-вид. арк. 7,24.
Наклад 100 прим. Зам. № 5676/1.

Віддруковано з оригіналів замовника.
ФОП Корзун Д.Ю.
Свідоцтво про державну реєстрацію фізичної особи-підприємця
серія В02 № 818191 від 31.07.2002 р.

Видавець та виготовлювач ТОВ «ТВОРИ».
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції серія ДК № 6188 від 18.05.2018 р.
21034, м. Вінниця, вул. Немирівське шосе, 62а.
21027, м. Вінниця, вул. Келецька, 51а, прим. 143.
Тел.: 0 (800) 33-00-90, (096) 97-30-934, (093) 89-13-852, (098) 46-98-043.
e-mail: info@tvoru.com.ua
http://www.tvoru.com.ua