Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний аграрний університет

Л.О. Волонтир, Л.В.Зелінскьа, Н.А. Потапова, І.А. Чіков

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

Навчальний посібник

ВНАУ - 2020

УДК 517.9(075.8)

Рекомендовано Вченою радою Вінницького національного аграрного університету як навчальний посібник для студентів першого освітнього рівня (бакалаврського) галузі знань 12 «Інформаційні технології» спеціальності 122 «Комп’ютерні науки» у вищих навчальних закладах ІІІ-IV рівнів акредитації.

(Протокол № 6 від 18.12.2020 р.)

Рецензенти:

Р.С. Гуревич – дійсний член (академік) НАПН України, доктор пед. наук, професор, директор ННІ педагогіки, психології, підготовки фахівців вищої кваліфікації Вінницького державного педагогічного університету імені М.Коцюбинського,

О.Н.Романюк -доктор техн. наук, професор, завідувач кафедри програмного забезпечення Вінницького національного технічного університету біоресурсв і природокористування України доктор техн. наук, професор Вінницького національного аграрного університета

Чисельні методи: Навчальний посібник. / Волонтир Л.О, Зелінська О.В., Потапова Н.А., Чіков І.А., Вінницький національний аграрний університет. – Вінниця: ВНАУ, 2020 – 322 с.

ISBN 978-617-7789-18-4

У навчальному посібнику міститься стислий виклад чисельних методів у відповідності до програми курсу «Чисельні методи», який включає основи чисельних методів розв’язання математичних задач.

Кожний розділ посібника містить теоретичні відомості, числові приклади застосування методу, блок-схеми алгоритмів цих методів та програми на мові С++, перелік питань для контролю. окремим розділом складено тести для перевірки знань та вмінь по предмету та окремим розділом наведено практичні заняття з курсу.

Посібник розрахований на студентів та аспірантів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів освіти.

Рекомендовано фахівцям з інформаційних технологій, а також викладачам, студентам і аспірантам економічних спеціальностей.

УДК 519.863(075.8)

ISBN 978-617-7789-18-4

ЗМІСТ

Вступ

Сучасний розвиток науки та обчислювальної техніки характеризується все більш зростаючим рівнем використання комп'ютерних моделей як для дослідження поведінки явищ та процесів, що оточують людину, так і для розв'язання практичних задач, пов'язаних з управлінням та прогнозуванням.

Вивчення навчальної дисципліни "Чисельні методи" дозволяє студентам оволодіти знаннями в галузі практичних методів рішення математичних проблем, що виникають у процесі інженерної діяльності та моделювання фізичних систем, засвоїти способи розрахунків на сучасних комп'ютерах із застосуванням пакетів спеціальних прикладних програм.

Об'єктом вивчення навчальної дисципліни є типові математичні задачі, до яких зводиться рішення практичних проблем, що виникають у ході розробки інформаційних систем та систем моделювання. Предметом вивчення навчальної дисципліни є чисельні методи розв'язання типових математичних задач.

Мета даного навчального посібника - ознайомлення студентів із постановками основних математичних задач і чисельних методів їх розв'язання, набуття студентами навичок реалізації на комп'ютері чисельних методів, навичок роботи з відомими комп'ютерними математичними пакетами.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми підготовки бакалаврів галузі знань 12 «Інформаційні технології» спеціальності «Комп'ютерні науки» студенти після вивчення навчальної дисципліни "Чисельні методи" повинні оволодіти такими компетентностями:

знати:

загальні поняття, пов'язані з чисельними методами;

постановки типових математичних задач;

чисельні методи лінійної та нелінійної алгебри;

чисельні методи наближення функцій;

методи чисельного диференціювання та інтегрування функцій;

чисельні методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь;

чисельні методи розв'язання інтегральних рівнянь;

чисельні методи розв'язання задач математичної фізики;

теоретичні особливості чисельних методів та можливості їх адаптації до інженерних задач;

вміти:

проектувати, програмувати, тестувати й налагоджувати програми, що реалізують чисельні методи;

розв'язувати математичні задачі з використанням математичних пакетів;

здійснювати обґрунтований вибір чисельного методу при вирішенні практичної задачі.

Одним із способів розв'язання практичної задачі є експеримент. Наприклад, будують ракету, запускають і перевіряють характеристики, які цікавлять. Якщо вони не задовольняють, то будують нову ракету і т. д. Зрозуміло, що потрібний результат (при необмежених ресурсах) буде, врешті-решт, досягнутий, проте занадто дорогою ціною.

Інший спосіб - побудова математичної (комп'ютерної) моделі об'єкта або явища, що вивчається, і проведення всіх розрахунків на комп'ютері. Для фізичних процесів математична модель зазвичай записується у вигляді набору рівнянь, в які як коефіцієнти входять характеристики тіл або речовин, що беруть участь у процесі.

Для того щоб зрозуміти місце чисельних методів у процесі розв'язання задач, виникаючих у практичній діяльності людини, з використанням комп'ютера, слід навести основні етапи цього процесу.

Етапи розв'язання практичних задач на комп'ютері.

1. Постановка задачі:
   - словесне формулювання задачі;
   - визначення кінцевої мети розв'язку.

2. Побудова математичної моделі, тобто математичне формулювання задачі.

3. Вибір чисельного методу для розв'язання математичної задачі.

4. Розроблення алгоритму.
5. Програмна реалізація алгоритму.
6. Тестування програми (налагодження на тестових задачах).
7. Проведення розрахунків на реальних даних.
8. Аналіз результатів.

Найскладнішим із перерахованих етапів є другий етап, а вивчення методів його реалізації є предметом інших навчальних дисциплін (наприклад, моделювання систем та ін.). У подальшому викладенні матеріалу даного навчального посібника передбачено, що математичне формулювання задачі вже є, потрібно тільки навчитися її розв'язувати на комп'ютері з використанням чисельних методів.

Як відомо, для розв’язання прикладної задачі потрібно використовувати математичну модель. Під математичною моделлю фізичної системи, об’єкта або процесу розуміють сукупність математичних співвідношень (формул, рівнянь, логічних виразів), які визначають характеристики стану і властивості системи, об’єкта і процесу та їх функціонування залежно від параметрів їх компонентів, початкових умов, вхідних збуджень і часу. Тобто, математична модель описує функціональну залежність між вихідними залежними змінними, через які відображається функціонування системи, незалежними (такими, як час) і змінюваними змінними (такими, як параметри компонентів, геометричні розміри), а також вхідними збудженнями, прикладеними до системи. Ця функціональна залежність, що відображається математичною моделлю, може бути явною, чи неявною, тобто може бути зображена або як просте алгебраїчне співвідношення, або як велика за розміром сумісна система диференціально-алгебраїчних рівнянь. Сучасні комп’ютери дозволяють у багатьох випадках відмовитися від макетування проектованих виробів, замінивши його математичним моделюванням (обчислювальним експериментом), що дуже важливо, коли натурне макетування або дуже складне, або взагалі неможливе (наприклад: макетування прориву дамби або дії смерчу). Але при цьому має бути підвищена точність математичної моделі об’єктів та систем. В результаті розмірність і складність математичної моделі істотно зростають, а їх розв'язання в аналітичному вигляді стає неможливим.

Таким чином, одержується нова якість одного параметру (велика точність обчислювального експерименту і відмова від натурного макетування) за рахунок зменшення чи ускладнення іншого параметра (відмова від звичних для вищої математики аналітичних рішень). Для кожної математичної моделі формулюється математична задача. У загальному випадку, коли функціональні залежності для множини вхідних даних (значення незалежних та змінюваних змінних і вхідних збуджень), що виступають як множина аргументів, задано неявно, за допомогою математичної моделі необхідно визначити множину вихідних залежних змінних, що виступають як множина значень функції. При цьому відповідно до виду математичної моделі розрізняють такі базові типи математичних задач:

- розв'язання системи лінійних рівнянь;
- розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь;
- апроксимація масиву даних або складної функції набором стандартних, більш простих функцій;
- чисельне інтегрування і диференціювання;
- розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь;
- розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних;
- розв'язання інтегральних рівнянь.

Прості математичні задачі малої розмірності, що вивчаються в курсі вищої математики допускають можливість отримання аналітичних рішень. Складні математичні моделі великої розмірності вимагають застосування чисельних методів.

Чисельні методи – це математичний інструментарій, за допомогою якого математична задача формулюється у вигляді, зручному для розв'язання на комп'ютері.

В цьому випадку кажуть про перетворення математичної задачі в обчислювальну. При цьому послідовність виконання необхідних арифметичних і логічних операцій визначається алгоритмом її розв’язання.

Алгоритм повинен бути рекурсивним і складатися з відносно невеликих блоків, які багаторазово виконуються для різних даних.

Чисельні методи є надзвичайно потужним інструментарієм для розв’язання проблемних задач, що описуються довільними нелінійними диференціально-алгебраїчними рівняннями великої розмірності, для яких на даний час не існує аналітичних рішень.

Освоївши такі методи, можна набути здібностей до системного аналізу через математичне моделювання найскладніших задач сучасної науки і техніки. Варто зазначити, що якщо математична модель вибрана недостатньо коректною, то які б методи не застосовувалися для розрахунків з її використанням, отримані висновки будуть ненадійні, або й зовсім неправильні.

Розв'язок, отриманий за допомогою чисельного методу, зазвичай є наближеним, тобто містить деяку погрішність. Джерелами погрішності є:

- невідповідність математичної постановки задачі досліджуваному реальному явищу;
- погрішність відправних даних;
- погрішність чисельного методу розв'язання;
- помилки округлення та розрахунків.

У навчальному посібнику висвітлюються питання, пов'язані з розкриттям основних понять предметної області: математичної постановки задачі, чисельного методу, ітерації, характеристик чисельних методів, абсолютної та відносної похибок розв'язку, джерел погрішності та інших; розглянуті постановки основних математичних задач та найбільш відомі чисельні методи їх розв'язання; наведені приклади програмної реалізації чисельних методів.

У ході розв'язання конкретної практичної задачі спеціаліст повинен, перш за все, визначити, до якого типу математичної задачі належить ця практична задача, вибрати чисельний метод для її розв'язання, розробити програмну реалізацію методу самостійно чи вміти застосувати для її розв'язання один із відомих комп'ютерних математичних пакетів.

РОЗДІЛ 1
ВСТУП ДО ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ

1.1.Сутність чисельних методів. Загальні поняття

Для розв'язання математичних задач в основному існує три групи методів:

1. **Аналітичні методи**, в яких розв'язок задачі подається у вигляді аналітичних виразів. Їх **перевагами** є: запис розв'язку у загальному вигляді; висока точність і малий об'єм комп'ютерної пам'яті для зберігання розв'язку. Основний **недолік** - неуніверсальність, бо тільки невелика частина математичних задач може бути розв'язана аналітично.

2. **Графічні методи**, в яких розв'язок задачі знаходиться візуально. Їх **перевагою** є наочність. **Недоліками** графічних методів є: велика трудомісткість; низька точність (залежить від точності побудови графіків); неуніверсальність (графіки можна побудувати тільки для невеликої розмірності та ін.).

3. **Чисельні методи**, що дозволяють звести розв'язування задачі до виконання скінченного числа арифметичних і логічних дій з числами. При цьому розв'язок визначається як набір чисел, які надалі можуть бути інтерпретовані різним способом (наприклад, подані у вигляді таблиць, графіків, анімації тощо). Їх **перевагами** є: абсолютна універсальність, бо теоретично можуть бути застосовані для розв'язання будь-яких задач; добре пристосовані для реалізації на комп'ютері. **Недоліком** є велика трудомісткість у ході ручного рахунку, що, зазвичай, не є проблемою, оскільки вони призначені для використання на комп'ютері.

Таким чином, чисельні методи є основним апаратом розв'язання математичних задач, а їх значущість тільки збільшуватиметься у міру вдосконалення комп'ютерної техніки.

Чисельні методи бувають двох типів: **прямі** та **ітераційні**. В прямих методах розв'язок задачі досягається за скінченну кількість **кроків** методу після виконання останнього кроку, в ітераційних методах виконується ряд **ітерацій** методу до отримання наближеного розв'язку із заданою точністю.

Поняття ітераційного методу.

В основному чисельні методи є **ітераційними**. **Ітерація** - це повторення сукупності операцій або процедур для покращення наявного (поточного) наближеного розв'язку задачі. Нехай x - розв'язок задачі, тоді ітераційний метод будує так звану **ітераційну послідовність** $\{x^{(k)}\}$ $(к = 0,1,2,..)$ наближень розв'язку, при цьому $x^{(k)}$ повинно наближатися до x^* зі збільшенням k.

Алгоритм ітераційного методу в найзагальнішому вигляді має таку схему:

1. Задається **початкове наближення** розв'язку $x^{(0)}$ (на основі апріорних знань про задачу).

2. На k -й ітерації методу ($k = 0,1, 2,..)$ буде поточне наближення розв'язку $x^{(k)}$. Далі обчислюється наступне наближення $x^{(k+)} = \Phi\ (x^{(k)})$, де Φ і *є* сукупністю операцій або процедур для покращення наближеного розв'язку задачі, яка є суттю конкретного чисельного методу.

3. Перевіряється **критерій останову**, тобто перевіряється: чи є отримане наближення $x^{(k+1)}$ розв'язку x^* достатньо близьким. Якщо цього немає, то відбувається перехід до наступної ітерації, тобто до пункту 2.

Варто зазначити, що вид критерію останову (тобто припинення обчислень за ітераційним методом) залежить від виду розв'язуваної математичної задачі.

1.2. Характеристики чисельних методів

Для оцінки чисельних методів, тобто порівняння між собою методів для розв'язання однієї задачі, вводять такі їх основні характеристики:

- трудомісткість;

- порядок методу;
- збіжність;
- швидкість збіжності;
- стійкість до погрішностей обчислень;
- стійкість до погрішностей у відправних даних.

Під **трудомісткістю** методу розуміють кількість і якість обчислень, необхідних для досягнення достатньо близького наближення розв'язку задачі.

Під **порядком** методу розуміють вимоги до знань про функції, що входять у математичне формулювання задачі (наприклад, використання в методі похідних цих функцій):

• метод **нульового порядку**, якщо він використовує тільки значення цих функцій;

• метод **першого порядку**, якщо він використовує значення функцій і їх перших похідних;

• метод **другого порядку**, якщо він використовує значення і функцій та їх перших і других похідних і т. д.

Чисельний метод називається **таким, що збігається**, якщо *к* * наближення *x* прямує до розв'язку *x* зі збільшенням *к*. Очевидно, що методи, які не збігаються, не цікаві з прикладної точки зору. Тому одним з найважливіших етапів при введенні нового чисельного методу є теоретичне доведення його збіжності, тобто формулювання умов, за яких метод гарантовано збігається.

В основному розрізняють такі **швидкості збіжності** методів.

1. **Лінійна збіжність**. Указують, що послідовність $\{x^{(k)}\}$ ($k = 0,1,2,$**...)** лінійно збігається до розв'язку x^* (або зішвидкістю геометричної прогресії),

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq q\|x^{(k)} - x^*\| \qquad \text{для всіх } \kappa > \kappa_o.$$

якщо існують числа $q \in (0,1)$ і $\kappa_o > 0$ такі, що

Тут норма $\|x - y\|$ означає відстань між *x* і *y*.

2. **Надлінійна збіжність**. Указують, що послідовність $\{x^{(k)}\}$ $(\kappa = 0,1,2,..)$ надлінійно збігається до розв'язку *x* , якщо існує послідовність $\{q_k\}$ $(\kappa = 0,1,2,..),$

$$||x^{(k+1)} - x^*|| \le q_k||x^{(k)} - x^*|| \; i \quad q_k \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

q_k є $(0,1)$ для всіх *к,* така, що

4. **Квадратична збіжність**. Указують, що послідовність $\{x^{(k)}\}$ $(к = 0,1,2,..)$ квадратично збігається до розв'язку x , якщо існують числа $C > 0$ і $к_o > 0$ такі, що

$$||x^{(k+1)} - x^*|| \le C||x^{(k)} - x^*|| \qquad \text{для всіх } k \ge k_0.$$

Під **стійкістю до погрішностей обчислень** розуміють те, що застосування чисельного методу приводить до розв'язку задачі на комп'ютері, незважаючи на помилки округлень і обчислень. Для цього в чисельних методах, якщо потрібно, передбачаються додаткові операції, що не змінюють суть методу, але забезпечують його стійкість до помилок обчислень.

Під **стійкістю до погрішностей у відправних даних** розуміють те, що при невеликих погрішностях у відправних даних застосування чисельного методу дозволяє отримати наближений розв'язок задачі з не дуже великою погрішністю. Стійкість до погрішностей у відправних даних досягається, як правило, шляхом модифікації чисельного методу, тобто внесенням змін до суті методу.

1.3. Похибки обчислень

Похибки обчислень можна поділити на:

- похибки вхідних даних і спрощення моделей компонентів;
- округлення під час обчислень, локальні відсікання;
- похибки зображень чисел у комп'ютері.

Розрізняють також глобальну похибку, як різницю точного і обчисленого значень, і локальну похибку, як похибку методу в основному обумовлену відсіканням частини ряду Тейлора, тому обмежену значенням першого неврахованого члену цього ряду.

Під похибкою будемо розуміти величину, що характеризує точність результату.

Похибки, що виникають при розв'язуванні задачі, можна поділити на три групи:

1) неусувна похибка
2) похибка методу
3) похибка обчислень

Неусувна похибка є наслідком

а) неточності вхідних даних, що входять до математичного описання задачі,

б) невідповідності математичної моделі реальній задачі (інколи цю похибку називають похибкою математичної моделі).

Похибка методу пояснюється тим, що для розв'язування математичної задачі доводиться використовувати наближені методи, оскільки отримання точного розв'язку необмеженої або неприйнятно великої кількості арифметичних операцій, а в багатьох випадках і просто неможливо.

Похибка обчислень виникає при вводі-виводі даних до ПЕОМ та при виконанні математичних операцій.

Основна задача теорії похибок – знаходження області невизначеності результату.

Розглянемо процес заокруглення чисел. Якщо число x=4,167493 і його потрібно заокруглити до п'яти десяткових знаків після коми, то будемо мати x^*=4,16749. Тобто, якщо старший розряд, що відкидається менше 5, то попередня цифра не змінюється. Якщо x=4,167493 потрібно заокруглити до чотирьох знаків після коми, то x^*=4,1675. Тобто, якщо старший розряд, що відкидається дорівнює, або більше 5, то попередня цифра в числі збільшується на 1.

Зауваження. Інколи вважають, якщо старший розряд, що відкидається дорівнює 5, а попередня до нього цифра парна, то вона не змінюється, якщо ж попередня цифра непарна, то вона збільшується на одиницю.

Розглянемо приклади заокруглення чисел:

x=2,8497621	x=345,453275
x^*=2,849762	x^*=345,45328
x^*=2,84976	x^*=345,4533

x^*=2,8498	x^*=345,453
x^*=2,850	x^*=345,45
x^*=2,85	x^*=345,5
x^*=2,8	x^*=345
x^*=3	$x^*=3{,}5\cdot 10^2$

Визначимо, що при заокруглені цілого числа відкинуті знаки не можна заміняти нулями, а потрібно застосовувати множення на відповідний степінь 10.

Абсолютна та відносна похибки

Нехай x – точне значення деякої величини, а x^* – її відоме наближене значення.

Абсолютною похибкою *числа* x^* *називається деяка величина* Δx^*, *що задовольняє умові*

$$\left|x^* - x\right| \le \Delta(x^*)\,. \tag{1.1}$$

Відносною похибкою *числа* x^* *називається деяка величина* δx^*, *що задовольняє умові*

$$\left|\frac{x^* - x}{x^*}\right| \le \delta(x^*)\,. \tag{1.2}$$

Відзначимо, що точність результату краще характеризує відносна похибка. Інформацію про абсолютну та відносну похибки можна використати для наступного представлення числа x:

$$x = x^* \pm \Delta(x^*),$$
$$x = x(1 \pm \delta(x^*)).$$

Значущими цифрами числа *називаються всі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва.*

Наприклад:

1. x=4,570345 – всі цифри в запису цього числа значущі;
2. x=0,007614 – значущі цифри тільки 7,6,1,4;
3. x=0,03105600 – значущі цифри 3,1,0,5,6,0,0 (два останні нулі в запису числа є значущими);

4. а) x=3750000 – всі цифри значущі;

б) $x=3{,}75\cdot 10^6$ – значущі цифри тільки 3,7,5.

Значуща цифра називається вірною*, якщо абсолютна похибка числа не перевищує ½ одиниці розряду, що відповідає цій цифрі.*

Приклад 1. Нехай $x^*=14{,}537$ і відомо, що $\Delta(x^*)=0{,}04$. Скільки вірних значущих цифр має число x^*?

Розв'язання. Маємо $\Delta(x^*)>0{,}5\cdot 10^{-2}$ і $\Delta(x^*)<0{,}5\cdot 10^{-1}$. Отже у числа x^* вірними будуть значущі цифри 1,4,5, а цифри 3 і 7 – сумнівні.

Приклад 2. Нехай $x^*=8{,}677142$ і $\Delta(x^*)=3\cdot 10^{-4}$. Скільки вірних значущих цифр має число x^*?

Розв'язання. Оскільки $\Delta(x^*)=0{,}3\cdot 10^{-3}<0{,}5\cdot 10^{-3}$, то x^* має вірні три значущі цифри після коми, тобто вірними будуть значущі цифри 8,6,7,7.

Приклад 3. Нехай $x^*=0{,}046725$ і $\Delta(x^*)=0{,}008$. Скільки вірних значущих цифр має число x^*?

Розв'язання. Маємо $\Delta(x^*)=0{,}0\cdot 10^{-2}>0{,}5\cdot 10^{-2}$. Отже у числа x^* всі значущі цифри сумнівні.

1.4. Пряма задача теорії похибок

В деякій області G n-вимірного простору розглядається неперервно-диференційована функція $y=f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$. Припустимо, що потрібно обчислити значення цієї функції в точці $(x_1, x_2,\ldots, x_n)\in G$, а відомі тільки наближені значення $x_1^*, x_2^*,\ldots, x_n^*$ такі, що точка $(x_1^*, x_2^*,\ldots, x_n^*)\in G$, та їх похибки.

обчислимо наближене значення $y^* = f(x_1^*, x_2^*,\ldots, x_n^*)$ та оцінимо його абсолютну похибку.

Використовуючи формулу Лагранжа, будемо мати

$$\Delta(y^*) = \left| f(x_1^*, x_2^*,\ldots, x_n^*) - f(x_1, x_2,\ldots, x_n) \right| \le \sum_{j=1}^{n} B_j \Delta(x_j^*), \tag{1.3}$$

де

$$B_j = \sup_G \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} \right|.$$

При практичних розрахунках окрім оцінки (1.3) використовують оцінку

$$\Delta(y^*) \le \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)}{\partial x_j} \right| \Delta(x_j^*), \tag{1.4}$$

яку називають лінійною оцінкою похибки.

Виходячи з оцінки (4), знайдемо відносну похибку:

$$\delta(y^*) \le \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\dfrac{\partial f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)}{\partial x_j}}{f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)} \right|. \tag{1.5}$$

Використовуючи формули (1.4), (1.5), визначимо похибки результатів математичних операцій.

1. **Похибка суми.**

$y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad x_1, x_2 > 0$.

Оскільки $f'_{x_j}(x^*) = 1$, то з (1.4) будемо мати

$$\Delta(y^*) = \Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*), \tag{1.6}$$

а з (1.5) відповідно

$$\delta(y^*) = \left| \frac{x_1^*}{x_1^* + x_2^*} \right| \delta(x_1^*) + \left| \frac{x_2^*}{x_1^* + x_2^*} \right| \delta(x_2^*). \tag{1.7}$$

Аналогічно знаходимо похибки для інших математичних операцій.

2. **Похибка різниці.**

$y = f(x_1, x_2) = x_1 - x_2, \quad x_1 > x_2 > 0$.

$$\Delta(y^*) = \Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*), \tag{1.8}$$

$$\delta(y^*) = \frac{x_1^* \delta(x_1^*) + x_2^* \delta(x_2^*)}{x_1^* - x_2^*}. \tag{1.9}$$

3. **Похибка множення.**

$y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2, \quad x_1, x_2 > 0$.

$$\Delta(y^*) = \left|x_2^*\right|\Delta(x_1^*) + \left|x_1^*\right|\Delta(x_2^*), \tag{1.10}$$

$$\delta(y^*) = \delta(x_1^*) + \delta(x_2^*). \tag{1.11}$$

4. **Похибка ділення.**

$y = f(x_1, x_2) = x_1 / x_2, \quad x_1, x_2 > 0$.

$$\Delta(y^*) = \frac{\left|x_2^*\right|\Delta(x_1^*) + \left|x_1^*\right|\Delta(x_2^*)}{(x_2^*)^2}, \tag{1.12}$$

$$\delta(y^*) = \delta(x_1^*) + \delta(x_2^*). \tag{1.13}$$

Відзначимо, що для суми та різниці абсолютні похибки додаються, а для операцій множення та ділення складаються відносні похибки. З формули (1.9) видно, що якщо віднімаються два близьких числа, то відносна похибка результату може значно зрости. А при діленні на досить мале число може значно зрости абсолютна похибка.

Розглянемо деякі приклади.

Приклад 4. *Заокруглюючи наступні числа до трьох значущих цифр, визначити абсолютну та відносну похибки отриманих наближених чисел:*
1) 0,1545; 2) 1,343; 3) –372,75.

Розв'язання.

1) x=0,1545. Заокруглення до трьох значущих цифр дає x^*=0,155, тоді $\Delta(x^*)=0{,}0005=5\cdot10^{-4}$, а відносна похибка
$\delta(x^*)=5\cdot10^{-4}/0{,}155\approx0{,}32\cdot10^{-4}$.

2) x=1,343. Тоді x^*=1,34, $\Delta(x^*)=|x^*-x|=0{,}003$. Відповідно відносна похибка
$\delta(x^*)=3\cdot10^{-3}/1{,}34=2{,}2\cdot10^{-3}$.

3) x=–372,75. Тоді x^*=–373, $\Delta(x^*)$=0,25, а
$\delta(x^*)=0{,}25/373=6{,}7\cdot10^{-4}$.

Приклад 5. *Визначити кількість вірних цифр в числі x^*, якщо відома його відносна похибка:*

1) x^*=22,351, $\delta(x^*)$=0,1;

2) x^*=9,4698, $\delta(x^*)=0{,}1\cdot10^{-2}$;

3) $x^*=47361$, $\delta(x^*)=0,01$;

Розв'язання.

1) Обчислимо абсолютну похибку $\Delta(x^*)=x^*\delta(x^*)=2,2351$. Тоді будемо мати, що в числі x^* вірною є тільки цифра 2, тобто одна вірна цифра.

2) Обчислимо абсолютну похибку $\Delta(x^*)=x^*\delta(x^*)=9,4698\cdot 0,1\cdot 10^{-2}=0,0094698$. Тоді в числі x^* будуть вірними дві цифри 9 та 4.

3) Абсолютна похибка буде дорівнювати $\Delta(x^*)=47361\cdot 0,01=473,61$. Отже в числі x^* будуть вірними дві цифри 4 та 7.

Визначимо, що поведінка обчислювальної похибки залежить від правил заокруглення та алгоритму чисельного розв'язування задачі.

Приклад 6. *На гіпотетичній ЕОМ з мантисою довжини чотири знайти суму*

$S=0,2764+0,3944+1,475+26,46+1364$

а) сумуючи від меншого доданку до більшого;

б) сумуючи від більшого доданку до меншого.

Розв'язання.

а) Маємо $S_2=0,2764+0,3944=0,6708$, $S_3=S_2+1,475$. Вирівнюючи порядки у цих двох доданків будемо мати $S_3=1,475+0,671=2,146$. Аналогічно далі

$S_4=S_3+26,46=2,15+226,46=28,61$,

$S=S_5=S_4+1364=29+1393$.

б) Маємо $S_2=1364+26,46=1364+26=1390$,

$S_3=S_2+1,475=1390+1=1391$,

$S_4=S_3+0,3944=1391$,

$S=S_5=S_4+0,2764=1391$.

Враховуючи, що точне значення $S=1392,6058$, бачимо, що сумування потрібно проводити починаючи з менших доданків. В протилежному випадку може мати місце значна втрата значущих цифр.

Приклад 7. *Нехай числа* $\sqrt{2,01}$ *=1,417744688 та* $\sqrt{2}$ *=1,414213562 задані з десятьма вірними значущими цифрами. Скільки вірних значущих цифр матиме число* $x^* = \sqrt{2,01} - \sqrt{2}$ *?*

Розв'язання. Віднімаючи, отримаємо x^*=0,003531126. Позначимо x_1^* =1,417744688, x_2^*=1,414213562. Тоді абсолютні похибки $\Delta(x_1^*) = \Delta(x_2^*) = 0,5 \cdot 10^{-9}$. Абсолютна похибка різниці $x^* = x_1^* - x_2^*$ буде дорівнювати $\Delta(x^*) = \Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*) = 10^{-9}$. Оскільки 10^{-9}<$0,5\cdot10^{-8}$, то робимо висновок, що число x^* має шість вірних значущих цифр 3,5,3,1,1,2.

Відзначимо, що те ж саме значення можна отримати, подавши x^* у вигляді

$$x^* = \frac{\left(\sqrt{2,01} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2,01} + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{2,01} + \sqrt{2}} = \frac{0,01}{\sqrt{2,01} + \sqrt{2}},$$

причому для цього достатньо взяти величини x_1^* і x_2^* достатньо взяти з сімома вірними значущими цифрами.

Приклад 8. *Оцінити похибку обчислення функції*

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 z}{y^3},$$

якщо x=0,15±0,005, y=2,13±0,01, z=1,14±0,007.

Розв'язання. Згідно з формулою (4), для абсолютної похибки результату отримаємо

$$\Delta(f^*) = \left|\frac{2x^* z^*}{(y^*)^3}\right| \Delta(x^*) + \left|\frac{3(x^*)^2 z}{(y^*)^4}\right| \Delta(y^*) + \left|\frac{(x^*)^2}{(y^*)^3}\right| \Delta(z^*) = \frac{2 \cdot 0,15 \cdot 1,14}{(2,13)^3} \cdot 0,005 +$$

$$+ \frac{3 \cdot (0,15)^2 \cdot 1,14}{(2,13)^4} \cdot 0,01 + \frac{(0,15)^2}{(2,13)^3} \cdot 0,007 = 0,00017695 + 0,00003738 +$$

$$+ 0,000016298 \approx 0,00023 = 2,3 \cdot 10^{-4}.$$

Знайдемо $f(x^*, y^*, z^*) = \dfrac{(0,15)^2 \cdot 1,14}{(2,13)^3} = 0,0022265429.$

Тоді $\delta(f^*) = \dfrac{2{,}3 \cdot 10^{-4}}{0{,}00265429} = 0{,}08665.$

Приклад 9. *Висота h та радіус основи циліндра виміряні з точністю до 0,5%. Яка відносна похибка при обчисленні об'єму циліндра, якщо π^* 3,14?*

Розв'язання. $V = \pi R^2 h$. Більш точне значення π=3,14159265, отже $\Delta(\pi^*)=0{,}16\cdot10^{-2}$, а $\delta(\pi^*)=0{,}16\cdot10^{-2}/3{,}14=0{,}0005=0{,}05\%$. Тоді, згідно до формули про відносну похибку добутку будемо мати

$$\delta(V^*) = \delta(\pi^*) + 2\delta(R^*) + \delta(h) = 1{,}55\%.$$

Приклад 10. *Ребро куба виміряне з точністю до 0,02 см. дорівнює 8 см. Знайти абсолютну та відносну похибки при обчисленні об'єму куба.*

Розв'язання. позначимо сторону куба через *a*. Тоді $V = a^3$, $V^* = (a^*)^3 = 512$ см. Застосовуючи формулу (4), будемо мати $\Delta(V^*) = 3(a^*)^2 \cdot \Delta(a^*)$=$(3\cdot8^2\cdot0{,}02)$см^3=3,84см^3, а $\delta(V^*) = (3{,}84/512) = 0{,}0075$.

Приклад 11. *Визначити відносну похибку числа, що записане в ЕОМ з счислення β та довжиною мантиси t.*

Розв'язання. Число x^* можна записати в ЕОМ у вигляді

$$x^* = \pm(d_1\beta^{-1} + d_2\beta^{-2} + \ldots + d_t\beta^{-t})\beta^{\ell},$$

де ℓ визначає порядок числа, d_i – цілі, причому $0 \le d_i \le \beta - 1,\ d_1 \ne 0$. Нехай точне значення числа дорівнює

$$x^* = \pm(d_1\beta^{-1} + d_2\beta^{-2} + \ldots + d_t\beta^{-t} + d_{t+1}\beta^{-t-1})\beta^{\ell}.$$

Тоді

$$\frac{|x_* - x|}{|x_*|} = \frac{d_{t+1}\beta^{\ell-t-1}}{|x_*|} = \left|\frac{d_{t+1}}{d_1\beta^t + d_2\beta^{t-1} + \ldots + d_t\beta}\right| \le \frac{d_{t+1}}{d_1\beta^t} \le \frac{d_{t+1}}{\beta^t} = \beta^{1-t}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \le \beta^{1-t}.$$

Отже $\delta(x^*) \le \beta^{1-t}$.

Якщо ж числа вводяться за правилами заокруглення, то $d_{t+1} \le 0{,}5\beta$ і тоді будемо мати, що

$$\delta(x^*) \le \frac{1}{2}\beta^{1-t}.$$

1.5. Обернена задача теорії похибок

Обернена задача теорії похибок полягає в наступному: з якою точністю потрібно задати значення аргументів $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, щоб похибка значення функції $f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ не перевищувала заданої величини ε. Для функції однієї змінної $y=f(x)$ абсолютну похибку можна наближено обчислити за формулою

$$\Delta(x^*) = \frac{\Delta(y^*)}{|f'(x^*)|}, \quad f'(x^*) \ne 0. \tag{1.14}$$

Для функції декількох змінних $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ задача розв'язується за допомогою наступних рекомендацій:

а) принцип рівних впливів, тобто вважаємо, що всі доданки $c_i = |\partial f / \partial x_i| \Delta(x_i^*), \quad i = \overline{1,n}$ рівні між собою. Тоді абсолютні похибки всіх аргументів визначаються формулою

$$\Delta(x_i^*) = \frac{\Delta(y^*)}{n\left|\frac{\partial f^*}{\partial x_i}\right|}, \quad i = \overline{1,n}; \tag{1.15}$$

б) вважаємо всі похибки рівними, причому максимально можливими, тобто покладемо

$$\Delta(x_1^*) = \Delta(x_2^*) = ... = \Delta(x_n^*) = \delta,$$

де

$$\delta = \varepsilon / (c_1 + c_2 + ... + c_n).$$

Приклад 12. *Сторона квадрату дорівнює 2м. З якою точністю її* *потрібно виміряти, щоб похибка знаходження площі не перевищувала 1см²?*

Розв'язання. Позначимо сторону квадрату через x; $S=x^2$, $S'=2x$. Тоді за формулою (14) отримаємо

$$\Delta(x^*)=\frac{1}{2\cdot 200}=\frac{1}{4}10^{-2}\text{ см.}$$

Приклад 13. *З якою кількістю вірних значущих цифр потрібно взяти вільний член квадратного рішення*

$x^2-2x+\lg 2=0$,

щоб отримати корені рівняння з чотирма вірними значущими цифрами?

Розв'язання. Для коренів рівняння (17) маємо $x_1=1+\sqrt{1-\lg 2}$, $x_2=1-\sqrt{1-\lg 2}$. Оскільки $\lg 2\approx 0{,}3...$, тоді $x_1\approx 1{,}8...$, $x_2\approx 0{,}1...$. Отже за змістом задачі x_1^* потрібно визначити так, щоб $\Delta(x_1^*)\le 0{,}5\cdot 10^{-3}$, а для x_2^*, щоб $\Delta(x_2^*)\le 0{,}5\cdot 10^{-4}$. Позначимо $z=\ln 2$ і розглянемо функцію $f(z)=1+\sqrt{1-z}$. З'ясуємо, з якою точністю потрібно обчислити z^* в околі точки 0,3, щоб $\Delta f'(z)=\dfrac{1}{2\sqrt{1-z}}$, то використовуючи формулу (14), будемо мати

$$\Delta(z^*)\le 0{,}5\cdot 10^{-3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{0{,}7}}=0{,}000299.$$

Звідси робимо висновок, що для знаходження кореня x_1 потрібно обчислити lg2 з трьома вірними значущими цифрами після коми, тобто lg2=0,301.

Аналогічно, розглядаючи функцію $f(z)=1-\sqrt{1-z}$ отримаємо, що для знаходження кореня x_2 з точністю $0{,}5\cdot 10^{-4}$ потрібно обчислити lg2 з чотирма вірними значущими цифрами після коми, тобто lg2=0,3010.

Приклад 14. *В п'ятизначних логарифмічних таблицях дано значення десяткових логарифмів з точністю до $\varepsilon=0{,}5\cdot 10^{-6}$. Оцінити величину можливої похибки при знаходженні числа за його логарифмом, якщо саме число знаходиться між 300 та400.*

Розв'язання. Позначимо $y = \lg x,\ x \in [300;400]$. За умовою задачі $\Delta(y^*) \le 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ і потрібно знайти $\Delta(x^*)$. Маємо $y' = \dfrac{1}{x\ln 10}$. Тоді за формулою (14) будемо мати

$\Delta(x^*) = x(\ln 10) \cdot \Delta(y^*) \le 400 \cdot 2{,}30 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6} = 0{,}00046$.

отже x можна знайти принаймні з трьома вірними значущими цифрами після коми.

Для зменшення похибок можна використовувати більшу кількість значущих розрядів або змінювати послідовність обчислень.

Для зменшення обумовленості задачі необхідно змінювати форму зображення вхідних і вихідних величин математичної задачі.

Під час реалізації практичних обчислень зазвичай загально задана похибка розподіляється по кроках обчислень, а потім на кожному кроці здійснюється контроль похибки за локальною оцінкою, оскільки точні значення глобальної похибки невідомі.

Тому в процедурах чисельних методів виділяють три рівноправні частини:

1) обчислення наближення розв'язку за рекурсивною формулою вибраного алгоритму;

2) оцінювання похибки;

3) управління продовженням розв'язування задачі.

Це управління може зводитися до зміни кроку приросту аргументів наявної задачі функціональної залежності (зокрема часового кроку), заміни формули обчислення наближення розв'язку, зміни значень загальної заданої похибки розв'язку і допустимої кількості ітерацій.

За всіх інших умов найкращим буде розв'язок, отриманий у результаті виконання меншої кількості ітерацій.

Похибки у вхідних даних задачі – неусувні. Обчислювач не може їх змінити, але повинен знати, як вони впливають на точність кінцевого результату. Чутливість задачі до неточностей у вхідних даних характеризується поняттям стійкості. Задача називається **стійкою** за вхідними даними, якщо її розв’язок неперервно залежить від вхідних даних, тобто малі похибки вхідних даних спричиняють малі похибки розв’язку задачі. Якщо ця умова не виконується, то задача вважається нестійкою за вхідними даними.

Задача називається **коректно поставленою**, якщо для будь-яких вхідних даних існує єдиний і стійкий за вхідними даними її розв’язок. Для розв’язання некоректно поставлених задач застосовувати класичні чисельні методи не варто, оскільки похибки округлень при розрахунках можуть катастрофічно зростати і призвести до результату, далекого від шуканого розв’язку. Для розв’язання некоректно поставлених задач використовують так звані методи регуляризації, які замінюють дану задачу коректно поставленою.

Також варто зазначити, що абсолютна погрішность розв'язку - це не різниця між точним і наближеним розв'язком задачі, а оцінка цієї різниці.

Варто звернути увагу на те, що наближений розв'язок задачі x^*, отриманий за допомогою чисельного методу, зазвичай залежить від вибраних параметрів цього методу. Без обмеження загальності, можна вважати, що параметр у методу один (умовно можна позначити його через h) і при цьому він задовольняє умову $0 < h < 1$.

Тоді абсолютна погрішність $A(x^*)$ також залежить від h, тобто $A(x^*) = A(h)$.

Якщо існують деякі числа $M > 0$ і $k > 0$ (не обов'язково цілі) такі, що виконується нерівність $A(h) < M\,h^k$, то говорять, що абсолютна погрішність $A(h)$ має порядок $O(h^k)$. Цим хочуть підкреслити **якісну** (на відміну від кількісної) залежність погрішності наближеного розв'язку задачі x від параметра чисельного методу h. Наприклад, це показує, що зменшення значення параметра h на один порядок призводить до зменшення величини абсолютної погрішності $A(x)$ на k порядків.

1.6. Висновки

1. Чисельні методи є одним із основних апаратів розв'язання математичних задач.
2. Універсальних чисельних методів розв'язання математичної задачі, як

правило, не існує. Тому треба розглядати кілька методів.

3. Вибір чисельного методу для розв'язання математичної задачі треба здійснювати з урахуванням його характеристик.

4. Є ряд математичних пакетів, за допомогою яких можна достатньо швидко розв'язати багато відомих математичних задач.

1.7. Контрольні запитання

1. Назвіть основні групи методів розв'язання математичних задач та їх характеристики.
2. Назвіть основні характеристики чисельних методів. Розкрийте їх суть.
3. Які є основні швидкості збіжності ітераційних методів?
4. Назвіть та охарактеризуйте основні етапи розв'язання практичних задач на комп'ютері.
5. Що називають "ітерацією"? Наведіть загальну схему ітераційного методу.
6. Які методи розв'язання математичних задач називають ітераційними?
7. Які методи розв'язання математичних задач називають чисельними?
8. Дайте визначення поняттям абсолютної та відносної погрішностей.
9. Дайте визначення лінійної і квадратичної швидкості збіжності ітераційного методу.
10. Що є причинами появи погрішності при арифметичних обчисленнях на комп'ютері?

1.8. Завдання для самостійного опрацювання

Задача 1. Записати число π з п'ятьма вірними значущими цифрами та визначити відносну похибку отриманого наближення.

Задача 2. Знайти $\sqrt{3{,}02}-\sqrt{3}$ з трьома вірними значущими цифрами.

Задача 3. При вимірі радіуса кола з точністю до 0,5 см, отримали число 14 см. Знайти абсолютну та відносну похибки при обчислені площі кола.

Задача 4. Визначити відносну похибку обчислення повної поверхні зрізаного конуса, якщо радіуси його основ R і r та твірна ℓ, виміряні з точністю до 0,01 см, рівні: R=23,64 см, r=17,31 см, ℓ=10,21 см.

Задача 5. Обчислити значення функції f. Знайти абсолютну та відносну похибки результату, вважаючи всі значущі цифри вхідних даних вірними:

$f=x_1, x_2, x_3$,

де

1) x_1=381,56 , x_2=6157 , x_3=0,0053;
2) x_1=0,147 , x_2=653 , x_3=76,3;
3) x_1=1,28 , x_2=6,3 , x_3=2,173.

Задача 6. Обчислити значення функції f. Знайти абсолютну та відносну похибки результату, вважаючи всі значущі цифри вхідних даних вірними:

$$f = \ln(x_1 + x_2^2),$$

де x_1=0,93 , x_2=1,123.

Задача 7. Обчислити значення функції f. Знайти абсолютну та відносну похибки результату, вважаючи всі значущі цифри вхідних даних вірними:

$$f = \frac{x_1 + x_2^2}{x_3},$$

де x_1=3,15 , x_2=0,831 , x_3=1,123.

Задача 8. Оцінити абсолютну та відносну похибки обчислення функції:

$$1)\quad f(x, y, z) = \frac{x^2 + 4xy + y^2)(2z-1)^2}{(x+y)^2} \cdot \frac{z^2}{18},$$

при x=27,51±0,001, y=21,78±0,003, z=32,5±0,06;

$$2)\quad f(x, y,) = \frac{1}{64}\pi\sqrt{x^4 - y^4},$$

при x=36,5±0,01, y=26,35±0,005, π=3,14.

Задача 9. Знайти межі абсолютної та відносної похибки аргументів, які дозволяють обчислити з чотирма вірними знаками функції

$$f = \frac{x_1 + x_2^2}{3},$$

де x_1=2,10415 , x_2=1,93521 , x_3=0,84542.

РОЗДІЛ 2
ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь з одним невідомим

Розглядається рівняння виду:

$$f(x) = 0, \tag{2.1}$$

де $f(x)$ - нелінійна неперервна функція однієї змінної, тобто f: R^1 ^ R^1.

Розв'язати рівняння (2.1) - означає знайти таке $x \in R^1$, для якого $f(x\ ) = 0$. При цьому x називають **коренем рівняння**.

У загальному випадку рівняння (2.1) може мати багато коренів. Чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь, які розглянуто далі, дозволяють знаходити один корінь на заданому відрізку [a,b]. При цьому на інтервалі повинен існувати тільки один корінь. Знайти відрізок, що задовольняє цю умову можна різними способами:

а) з фізичних міркувань, тобто на основі фізичних знань про задачу;

б) на основі досвіду розв'язання аналогічних задач;

в) за допомогою графічних методів;

г) шляхом відокремлення коренів.

Якщо функція $f(x)$ заздалегідь відома, то найбільш ефективним є графічний спосіб пошуку відрізка [a,b]. В інших випадках, коли відрізок [a,b] треба найти автоматично (не візуально), то застосовують алгоритм відокремлення коренів.

Означення 1. Розв‘язати рівняння $f(x)=0$ означає знайти множину всіх його коренів (тобто таких значень x є [a;b], при яких воно стає числовою тотожністю) або ж довести, що їх не існує. Розв‘язок (корінь) рівняння $f(x)=0$ називають ще нулем функції $f(x)$.

В чисельних методах рівняння вважається розв‘язаним, якщо всі корені знайдені з заданою точністю, тобто з наперед заданою похибкою.

Означення 2. Відрізком ізоляції кореня рівняння називають такий відрізок множини дійсних чисел, в якому рівняння має один і тільки один розв‘язок.

Знаходження наближених коренів рівняння звичайно складається з двох етапів:

1) відокремлення коренів, тобто знаходження для кожного з них відрізку ізоляції;
2) обчислення кореня у відрізку ізоляції з наперед заданою точністю.

Для знаходження відрізків ізоляції застосовуються методи графічні, аналітичні та деякі їх комбінації. Найпростіше скористатися *графічним* методом: можна побудувати графік функції $f(x)$ за допомогою Майстра діаграм Excel і знайти відрізки ізоляції з графіку та з таблиці даних, за якою цей графік побудований.

Проте, отримані так результати не є обґрунтованими, не завжди є правильними. Точні результати ґрунтуються на такому відомому твердженні математичного аналізу.

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$ і набуває на кінцях цього відрізка значень протилежних знаків, тобто $f(a)*f(b) < 0$, то на відрізку існує хоча б один корінь рівняння $f(x) = 0$.

Теорема 2. Якщо при цьому $f(x)$ має першу похідну, яка зберігає сталий знак всередині відрізка $[a;b]$, то рівняння на цьому відрізку має єдиний корінь.

Аналітичний метод відокремлення коренів для рівняння $f(x) = 0$ з диференційовною функцією $f(x)$ полягає в тому, щоб

1. Знайти критичні точки функції f(x).

2. Знайти інтервали монотонності функції f(x) (це інтервали між критичними точками. На інтервалі монотонності не більш як один корінь за теоремою 2).

3. Інтервал монотонності містить корінь функції f(x), якщо f(x) набуває на кінцях цього інтервалу значень протилежних знаків (за теоремою 1).

4. Відрізки ізоляції коренів (бажано якнайменші) обрати так, щоби кожний з них містив корінь і містився у відповідному інтервалі монотонності.

На жаль, приклади рівнянь, до яких можна застосувати аналітичний метод поодинокі. Тому для таких рівнянь доречним є *комбінований* метод:

1. У таблиці значень функції f(x) (за допомогою відповідного графіка) знайти відрізки зміни знака цих значень (бажано як найменші). На кожному такому відрізку існує корінь рівняння f(x) = 0 (за теоремою 1).

2. Побудувати таблицю значень похідної f'(x) і відповідний графік.

3. Якщо на відрізку зміни знака функції f(x) з пункту 1 похідна f'(x) не змінює знака, то на ньому єдиний корінь (за теоремою 2), тобто це відрізок ізоляції кореня.

4. Якщо на відрізку зміни знака функції f(x) змінює знак і похідна f'(x), то треба повернутись до пункту 1 і зменшити відрізки зміни знаку функції f(x).

Комбінований метод може бути застосований до довільного рівняння f(x) = 0 з диференційованою функцією f(x). У повному обсязі він є точним [2].

Алгоритм відокремлення коренів

Відокремити корінь - це означає вказати на осі Ох відрізок [a,b], який містить лише один корінь. Алгоритм відокремлення коренів розбивається на такі кроки:

1. Розбивається деяка область на деяку кількість рівних відрізків $[X_I, X_{I+1}]$, де x_0 задано, $X_{j+i} = X_j + h$, h - крок розбиття, $i = 0,\ldots,n$.

2. Визначається знак функції $f(x)$ на кінцях кожного I -го відрізка $[x_i, x_{+1}]$.

3. Якщо добуток $f(X_i)f(X_{j+1})$ додатний і h достатньо мале, то можна

сподіватися, що на відрізку [$x_i;x_{i+1}$] коренів рівняння немає.

4. Якщо добуток $f(X_j)f(X_{j+1})$ від'ємний, то на відрізку [x_j,x_{j+1}] існує розв'язок рівняння, хоча можливо, що він не один.

5. Перевіряється, чи змінює знак похідна $f'(x)$ на кінцях відрізка [x_j,x_{j+1}]. Якщо h достатньо мале і знак похідної $f'(x)$ на кінцях відрізка [x_j,x_{j+1}] не змінюється, то можна сподіватися, що на відрізку корінь один. Таким чином, корінь рівняння відокремлений.

6. Якщо знак похідної $f'(x)$ змінюється, то впевненості, що корінь один немає.

7. Відрізки, для яких немає упевненості в тому, що розв'язок рівняння лише один, продовжують розбивати вже з меншим кроком, тобто повторюється для них описана процедура відокремлення коренів.

Варто розглянути декілька методів розв'язання нелінійного рівняння (2.1) на відрізку [a,b].

2.2. Методи уточнення коренів

2.2.1. Метод дихотомії

Метод дихотомії ще називають **методом половинного поділу**. При розв'язанні нелінійного рівняння методом половинного поділу задаються відрізок [a,b], на якому існує лише один розв'язок, і бажана точність $e > 0$ розв'язання задачі.

Алгоритм методу дихотомії полягає в наступному.

Позначимо через x^* точне значення кореня рівняння $f(x) = 0$ на відрізку ізоляції $[a;b]$, а через ε – його задану абсолютну похибку. Суть методу в тому, що відрізок $[a;b]$ ділять пополам точкою $c = 0.5(a+b)$ і обчислюють $f(c)$. Якщо $f(c) = 0$, то $x = c$ є точним значенням кореня. Якщо $f(c) \neq 0$, а $b - a \leq 2\varepsilon$, то $|x^* - c| \leq \varepsilon$ і значення $x = c$ буде шуканим наближенням коренем. Якщо $f(c) \neq 0$ і $b - a > 2\varepsilon$, то обирають той з двох відрізків $[a;c]$ і $[c;b]$, на кінцях якого функція

$f(x)$ набуває значень протилежних знаків. Позначимо цей відрізок $[a_1;b_1]$. Далі відрізок $[a_1;b_1]$ точкою $c_1 = 0.5(a_1 + b_1)$ знов ділять пополам і роблять так само, як і для відрізка $[a;b]$. В результаті процесу ділення відрізків пополам дістають послідовність вкладених відрізків $[a;b]$, $[a_1;b_1]$, $[a_2;b_2]$, ..., $[a_n;b_n]$, ..., кожен з яких містить точне значення кореня x^*. Довжина відрізка $[a_n;b_n]$ дорівнює $(b-a)/2^n$, тому $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Звідси випливає, що для деякого n $b_n - a_n \le 2\varepsilon$, а $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ – наближене значення x^* з заданою абсолютною похибкою ε, оскільки $\left|x^* - c_n\right| \le \varepsilon$.

Графічна інтерпретація розв'язання нелінійних рівнянь методом половинного поділу наведена на рис. 2.1.

Справедлива така **оцінка швидкості збіжності** [1]:

$$\left|x_k - x^*\right| \le \left|b_k - a_k\right| \le \frac{|b-a|}{2^{k+1}}.$$

Тобто метод половинного поділу збігається з лінійною швидкістю (зі швидкістю геометричної прогресії) з коефіцієнтом *q =1/2.*

Слід зазначити, що метод половинного поділу є методом 0-го порядку, оскільки не використовує обчислення похідних функції *f(x).*

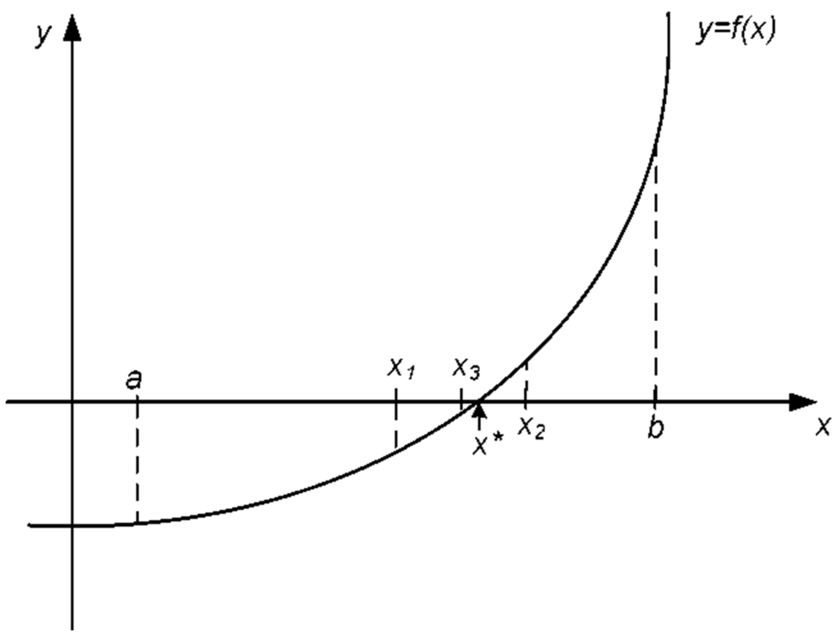


Рис. 2.1. Графічна інтерпретація розв'язання нелінійних рівнянь методом

половинного поділу

Блок-схему алгоритму методу наведено на рисунку 2.2.

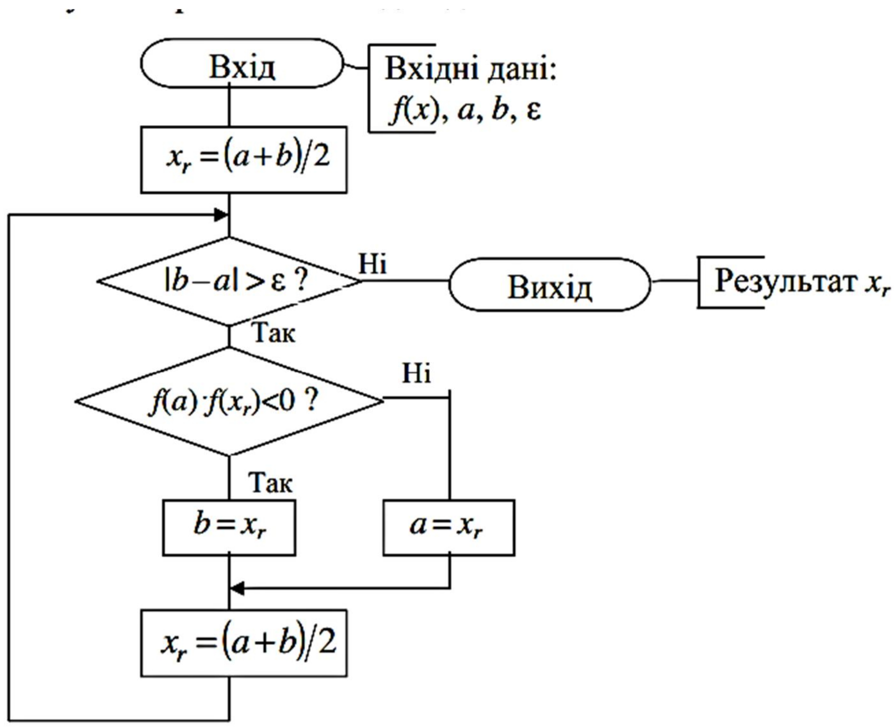


Рис. 2.2. Блок-схема алгоритму методу дихотомії

Приклад 2.1. Розв'язати нелінійне рівняння $x^3 + 2 = 5x$ методом дихотомії з точністю $\epsilon = 10^{-6}$.

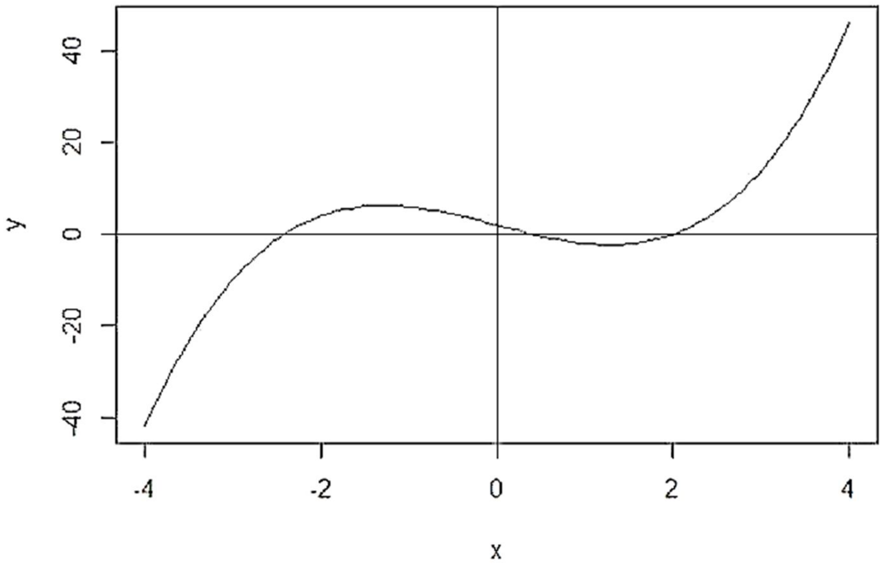
Оскільки метод дихотомії призначений для розв'язання нелінійного рівняння у загальному вигляді (2.1), то спершу треба привести задане рівняння до виду (2.1), тобто перенести всі члени рівняння у ліву частину.

Відправними даними задачі є функція $F(x)$ та точність розв'язку ϵ:

$$F(x) = x^3 - 5x + 2,\ \epsilon = 10^{-6}.$$

Оскільки метод дихотомії дозволяє знаходити розв'язки нелінійних рівнянь на відрізку, що містить тільки один корінь, то спершу необхідно визначити такі відрізки. Скористаємося графічним методом.

Графік заданої функції *F(x)* має такий вигляд:



Розв'язками рівняння виду (2.1) є точки перетину графіка функції з віссю абсцис. Звідси задане рівняння має розв'язки на інтервалах: [-*3*, - *2*], [*0*, *1*], *[1, 2.5*].

Знайдені відрізки [*a,b*] почергово будуть додатковими відправними даними.

Відправні дані (функція, точність розв'язку, знайдені відрізки).

Згідно з алгоритмом підпрограма мовою С++ розв’язання нелінійного рівняння методом ділення відрізка навпіл може бути записана так:

```
// Функція методу ділення навпіл
float bis(float a, float b, float eps)
{ float   xr=(a+b)/2;
  while (fabs(b-a)>=eps)
   {   if (f(a)*f(xr)<0) b=xr; else a=xr;
       xr=(a+b)/2;
   }
  return xr;  }
```

Результат розв'язання нелінійного рівняння з використанням записаної процедури:

Таким чином, розв'язками заданого рівняння є знайдені значення невідомого: *x1 = -2.414, x2 = 0.414, x3 = 2.*

Для перевірки отриманих результатів знайдені розв'язки підставляються в рівняння. Отже, знайдені значення невідомого є наближеннями точного розв'язку з заданою точністю.

На рисунку 2.3. показана геометрична інтерпретація точного та наближеного розв’язку за методом дихотомії.

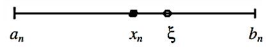


Рис. 2.3. Геометрична інтерпретація точного та наближеного розв’язку за методом дихотомії

2.2.2. Метод хорд

При розв'язанні нелінійного рівняння методом хорд задаються відрізок [a,b], на якому існує лише один розв'язок, і бажана точність $\epsilon > 0$ розв'язку задачі.

Якщо на 0-й ітерації методу позначити [a_o,b_o]=[a,b], то на k -й ($k = 0,1,2,...$) ітерації методу буде поточний відрізок [a_k,b_k]. Потім через дві точки з координатами $(a_k,f(a_k))$ і $(b_k,f(b_k))$ проводиться відрізок прямої лінії (**хорда**) і визначається точка перетину цієї лінії з віссю абсцис (точка x_k). Якщо при цьому $f(a_k)f(x_k) < 0$, то права межа інтервалу переноситься в точку x_k (тобто $b_{k+1} = x_k$, $a_{k+1} = a_k$). Якщо вказана умова не виконується, то в точку x_k переноситься ліва межа інтервала ($a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$). Пошук розв'язку припиняється при досягненні заданої точності: $|f(x_k)| \leq \epsilon$.

Це класичний ітераційний метод наближеного обчислення кореня рівняння f(x) = 0 на відрізку його ізоляції [a;b]. Цей метод визначає формула

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(c)}(x_k - c), \qquad k = 0,1,2,..., \tag{2.2}$$

де $c \in$ [a;b].

Для застосування методу лінійного інтерполювання необхідно забезпечити наступні передумови.

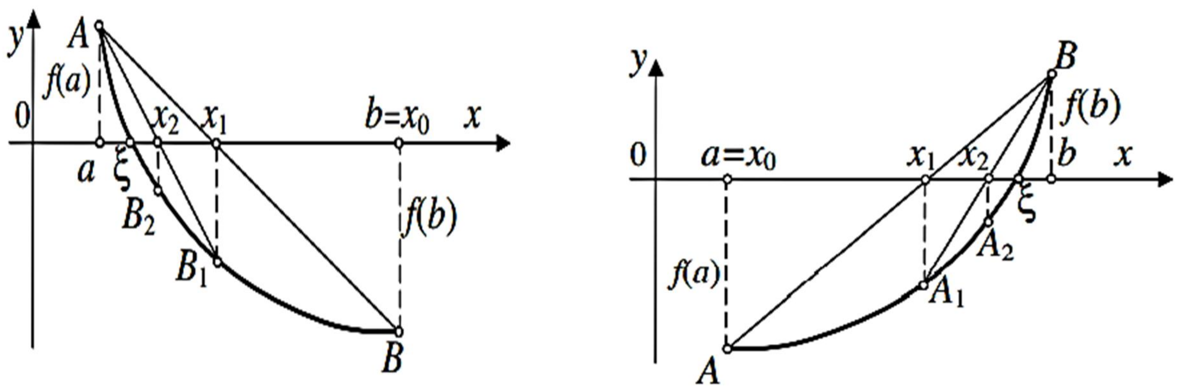
1. Треба знайти відрізок ізоляції шуканого кореня.

2. Треба забезпечити, щоби на відрізку ізоляції не змінювалися знаки у першої та другої похідних, зменшуючи при необхідності початковий відрізок.

3. За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(x) \cdot f''(x) < 0$.

4. За нерухомий кінець c, який входить до формули методу, можна взяти будь – яку точку відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(c) \cdot f''(c) > 0$.

Графічна інтерпретація розв’язання нелінійних рівнянь методом хорд наведена на рис. 2.4.



а) б)

Рис. 2.4. Графічна інтерпретація розв’язання нелінійних рівнянь методом хорд; а) у випадку, коли f(a)>0; б) f(a)<0.

Слід зазначити, що метод хорд є методом *0*-го порядку, оскільки не використовує обчислення похідних функції *f(x)*.

Блок-схема алгоритму розв’язання нелінійного рівняння методом хорд надана на рисунку 2.5.

Приклад 2.2. Розв'язати нелінійне рівняння, задане в прикладі 2.1 методом хорд.

Відправні дані - ті ж самі, що й для методу дихотомії.

Процедура розв'язання нелінійного рівняння методом хорд на мові С++

може бути записана так:

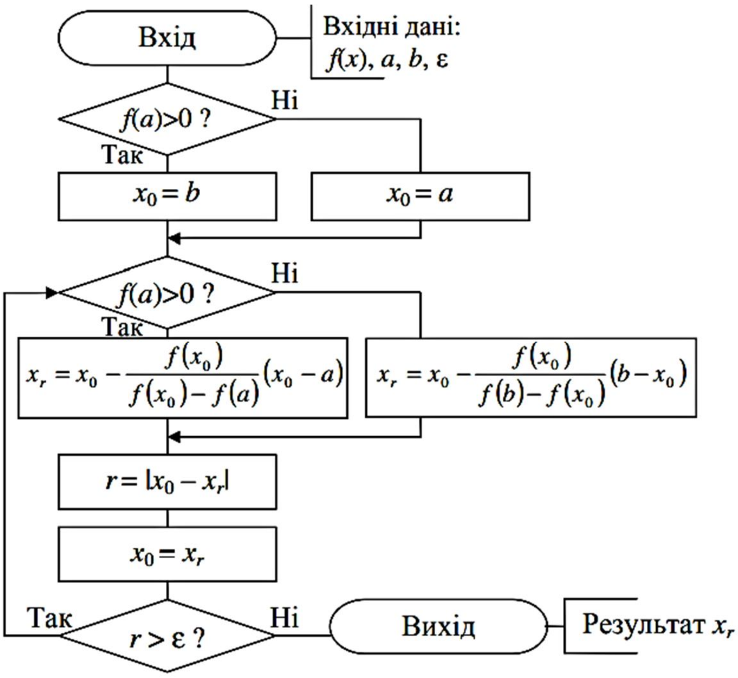


Рис.2.5. Блок-схема алгоритму розв'язання нелінійного рівняння методом хорд

```
// Функція методу хорд
float xord(float a, float b, float eps)
{ float x0, r, xr;
  if (f(a)> 0)  x0=b; else  x0=a;
  do
    { if (f(a) > 0)  xr=x0-f(x0)/(f(x0)- f(a))*(x0-a);
          else xr=x0-f(x0)/(f(b)-f(x0))*(b-x0);
      r=fabs(x0-xr);
      x0=xr; }
  while  (r>=eps);
  return xr;
}
```

Таким чином, розв'язками заданого рівняння є знайдені значення невідомого: $x1 = -2.414$, $x2 = 0.414$, $x3 = 2$.

2.2.3. Метод Ньютона

Метод Ньютона ще називають **методом дотичних.** При розв'язанні нелінійного рівняння методом дотичних задаються відрізок [a,b], на якому існує лише один розв'язок, початкове наближення розв'язку x_o є [a,b] і бажана точність $\varepsilon > 0$ розв'язку рівняння.

На k-й ($k = 0,1,2,...$) ітерації методу буде поточне наближення розв'язку $x_k \epsilon R^1$. Наступне наближення розв'язку x_{k+1} ϵ R^1 визначається таким чином. У точці $(x_k, f(x_k))$ проводиться дотична до графіка $f(x)$ і визначається точка x_{k+1} як точка перетину дотичної з віссю абсцис. Пошук розв'язку припиняється при досягненні заданої точності $|f(x_k)| < \varepsilon$.

Для визначення точки перетину $(k+1)$ -ї дотичної з віссю абсцис користуються формулою:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{2.3}$$

Для застосування методу Ньютона необхідно забезпечити наступні передумови.

1. Треба знайти відрізок ізоляції шуканого кореня.
2. Треба забезпечити, щоби на відрізку ізоляції не змінювалися знаки у першої та другої похідних, зменшуючи при необхідності початковий відрізок ізоляції.
3. За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(x)*f''(x) > 0$.

Графічна інтерпретація розв'язання нелінійних рівнянь методом Ньютона наведена на рис. 2.6.

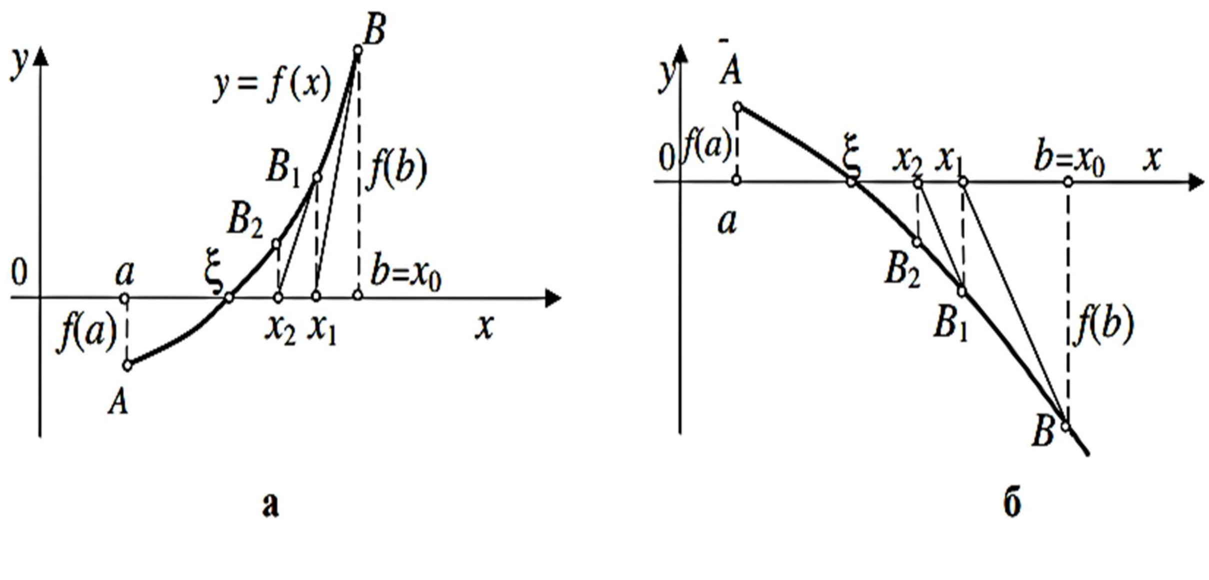


Рис. 2.6. Геометрична інтерпретація пошуку розв’язку нелінійного рівняння методом Ньютона: а) для увігнутої функції; б) для опуклої

функції.

Умова збіжності методу дотичних [1] $f(x)*f''(x) > 0$. При цьому швидкість збіжності буде квадратичною: $\left| x_k - x^* \right| \leq C \cdot \left| x_{k-1} - x^* \right|^2$, *де* $C = \max\limits_{[a;b]} \left| \dfrac{f''(x)}{2f'(x)} \right|$.

Слід зазначити, що метод дотичних є методом 1-го порядку, оскільки використовує обчислення першої похідної функції *f(x)*.

Варто зауважити, що ідея методу дотичних (як і методу хорд) полягає в наближенні нелінійної функції *f(x)* лінійною функцією (дотичною, а в методі хорд - хордою) на кожній ітерації методу.

Блок-схема алгоритму розв'язання нелінійного рівняння методом Ньютона показана на рисунку 2.7.

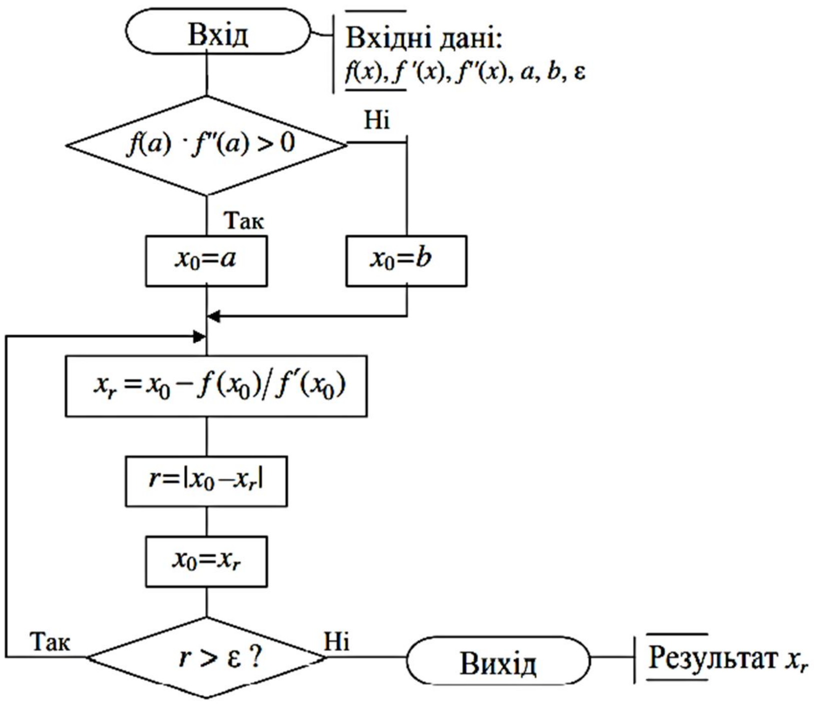


Рис.2.7. Блок-схема алгоритму розв'язання нелінійного рівняння методом Ньютона

Приклад 2.3. Розв'язати нелінійне рівняння $x^3 - 5x + 2 = 0$ методом Ньютона з ТОЧНІСТЮ $\epsilon = 10^{-6}$.

Процедура розв'язання нелінійного рівняння методом Ньютона на мові

С++ може бути записана так:

```
// Функція методу Ньютона
newton(float a, float b, float eps, float &xr)
{ float x0, r;
  if (f(a)*f2(a)>0) x0=a;
            else  x0=b;
  do
   {  xr=x0-f(x0)/f1(x0);
      r=fabs(x0-xr);
      x0=xr; }
  while (r>=eps);
 }
```

Результат розв'язання нелінійного рівняння з використанням записаної процедури: *x1 = -2.414, x2 = 0.414, x3 = 2.*

2.2.4. Комбінований метод

Характерною особливістю методів дотичних і хорд є те, що послідовності їх наближень монотонні. Причому, якщо для даного рівняння послідовність наближень методу хорд монотонно спадна, то послідовність наближень методу дотичних – монотонно зростаюча, і навпаки. Одночасне застосування цих методів дає змогу наближатися до кореня рівняння з двох боків, отримуючи наближення з недостачею і надлишком. Розглянемо рівняння f(x)=0, корінь якого $x^* \in [a,b]$. За початкове наближення в методі хорд вибирають точку x=a, а в методі дотичних – точку b. На відрізку [a,b] застосовують спочатку метод дотичних, а потім – метод хорд. У результаті одержують нові наближення a_1, b_1, і початковий відрізок ізоляції кореня звузився. Для знаходження нових наближень застосовують метод дотичних і хорд уже на відрізку $[a_1,b_1]$. Такий процес продовжують до тих пір, поки довжина відрізка [ak,bk] не стане меншою або дорівнюватиме величині ε, де ε – наперед задана точність кореня. Графічна інтерпретація комбінованого методу показана на рисунку 2.8.

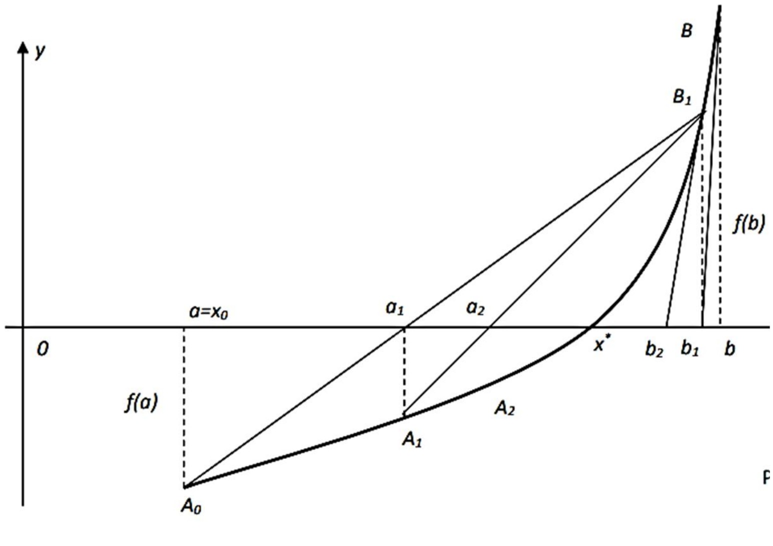


Рис. 2. 8. Графічна інтерпретація комбінованого методу

2.2.5. Метод простої ітерації

При розв'язанні нелінійного рівняння (2.1) методом ітерацій його потрібно записати у вигляді $x = \Phi(x)$. Задаються початкове наближення X_0 й точність $\epsilon > 0$. Перше наближення розв'язку X_i знаходиться з виразу $X_1 = \Phi(x_o)$, друге - $X_2 = \Phi(x_1)$ і т. д. У загальному випадку $(к +1)$ -це наближення обчислюється за формулою $X_{к+1} = \Phi(X_к)$. Зазначена процедура повторюється доти, доки

$$|\Phi(X_к)| = |X_к - \Phi(X_к)| > \epsilon.$$

Умова збіжності методу ітерацій $\backslash\Phi'(x)\backslash < q < 1$ для всіх x є[a,b]. При цьому швидкість збіжності буде лінійною [1]:

$$|X_к - x^*| < M^*q^k \text{ для всіх } k > k_o, \text{ де } k_0 > 0, M > 0.$$

Варіанти пошуку розв’язків нелінійного рівняння методом ітерацій показані на рисунку 2.9.

Отже, згідно з методом простої ітерації, задане рівняння $f(x) = 0$ замінюють на еквівалентне $x = \varphi(x)$, де $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$, а λ – дійсна стала $(\lambda \neq 0)$ і обчислюють ітерації $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ диференційована на відрізку $[a;b]$ ізоляції її кореня з незмінним там знаком $f'(x)$. Тоді найефективнішим (тобто найшвидшім) збіг ітерацій $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ з $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$ на відрізку $[a;b]$ до кореня рівняння $f(x) = 0$ буде за умов:

1) $|\lambda| = 1/M1$, де $M_1 = \max\limits_{[a;b]}|f'(x)|$,

2) $\lambda f'(x) > 0$.

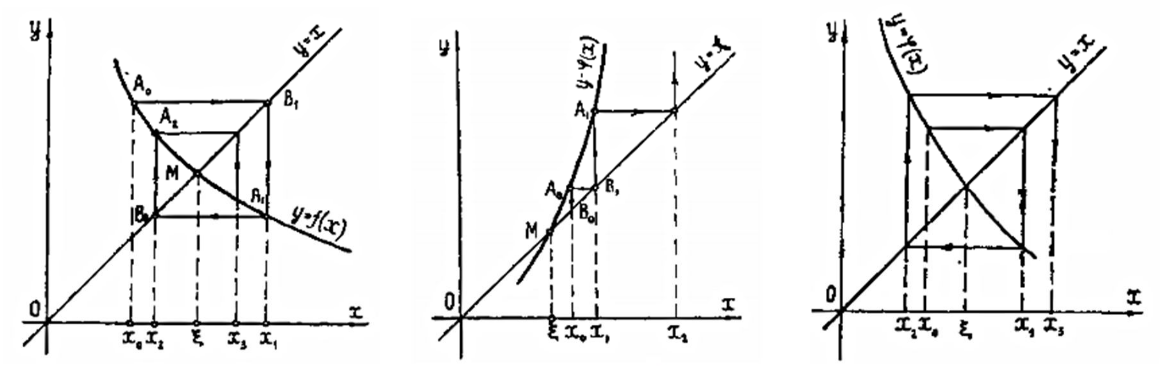


Рис.2.9. Варіанти пошуку розв'язків нелінійного рівняння методом ітерацій: а) -1<Ф'(х)<0;б)-Ф'(х) >1;-Ф'(х) <-1

Якщо і знак $f''(x)$ є незмінним на відрізку ізоляції $[a;b]$ (тобто якщо функція $f'(x)$ монотонна на $[a;b]$), то $M1 = \max\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$. Якщо на відрізку ізоляції кореня знак $f''(x)$ змінюється, то такий відрізок ізоляції треба зменшити.

Отже, застосовувати метод простої ітерації будемо за умови, що знак першої та другої похідних функції $f(x)$ є незмінними на відрізку ізоляції кореня $[a;b]$, а λ оберемо так, що

1) $|\lambda| = 1/M1$, де $M1 = \max\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$,

2) $\lambda f'(x) > 0$;

тоді за початкову точку методу простої ітерації можна обрати довільну точку з відрізку $[a;b]$.

Графічна інтерпретація ітераційного методу показана на рисунку 2.10.

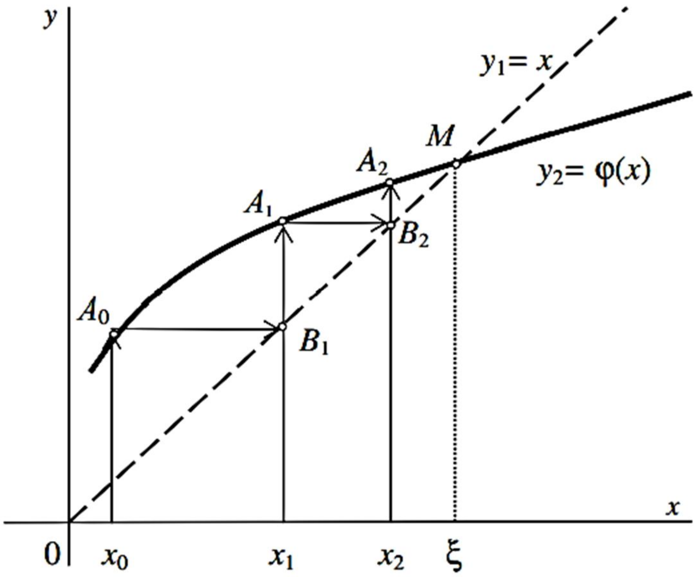


Рис.2.10. Графічна інтерпретація методу ітерацій

Приклад 2.4. Розв'язати нелінійне рівняння $x^3 - 5x + 2 = 0$ ітераційним методом з ТОЧНІСТЮ $\epsilon = 10^{-6}$.

Процедура розв'язання нелінійного рівняння методом Ньютона на мові C++ може бути записана так:

```
// Функція методу ітерацій
iter(float a, float b, float eps, float &xr)
{  float x0,r;
   x0=(a+b)/2;
   do { xr=f_iter(x0);
         r=fabs(x0-xr);
         x0=xr;}
    while (r>=eps);
}
```

Результат розв'язання нелінійного рівняння з використанням записаної процедури: $x1 = -2.414$, $x2 = 0.414$, $x3 = 2$.

2.3. Висновки

1. У загальному випадку нелінійне рівняння з одним невідомим може мати безліч коренів. Тому для застосування чисельного методу необхідно вказати відрізок, на якому існує тільки один корінь.

2. Існуючі чисельні методи мають різну швидкість збіжності і кожен з

них виявляється ефективним для свого класу нелінійних рівнянь з одним невідомим.

2.4. Контрольні запитання

1. Сформулюйте постановку задачі розв'язання рівняння з одним невідомим.
2. Які умови повинен задовольняти відрізок, на якому ведеться пошук розв'язку рівняння? Як його можна знайти?
3. У чому полягає метод дихотомії для розв'язання рівняння з одним невідомим? Яку він має швидкість збіжності?
4. З яких етапів складається знаходження наближених коренів рівняння методом дихотомії?
5. В чому полягає алгоритм методу дихотомії?
6. Чи можливо знайти наближений корінь методом дихотомії вже на першому кроці?
7. Як виглядають формули методу дихотомії в Excel, якщо дана функція f(x) є спадною?
8. Як виглядають формули методу дихотомії, якщо дана функція f(x) має максимум?
9. Якщо зміна значень послідовних ітерацій методу дихотомії припинилась, то чи є це відповідь, тобто наближений корінь даного рівняння з даною точністю?
10. Чи можливо не знайти методом дихотомії правильної відповіді, не зробивши жодної помилки?
11. У чому полягає метод хорд для розв'язання рівняння з одним невідомим? Яку він має швидкість збіжності?
12. З яких етапів складається знаходження наближених коренів рівняння методом лінійного інтерполювання?
13. В чому полягає алгоритм методу хорд?
14. Які передумови необхідно забезпечити для застосування методу хорд?
15. Що можна зробити, якщо на відрізку ізоляції кореня знак f'(x) або f''(x) змінюється і отже умови застосування методу хорд не виконані?
16. Яку точку треба обрати за початкову точку метода Ньютона?
17. Яку точку треба обрати за нерухомий кінець методу лінійного інтерполювання?
18. Якщо для початкової точки x методу Ньютона виконується умова $f(x) * f''(x) > 0$, то чи можна стверджувати, що не буде збіжності цього методу?

19. Якщо зміна значень послідовних ітерацій методу Ньютона припинилась, то чи є це відповідь, тобто наближений корінь даного рівняння з даною точністю?
20. У чому полягає метод Ньютона для розв'язання рівняння з одним невідомим? Яку він має швидкість збіжності? Яку ще назву має цей метод?
21. З яких етапів складається знаходження наближених коренів рівняння методом Ньютона?
22. В чому полягає алгоритм методу Ньютона?
23. Які передумови необхідно забезпечити для застосування методу Ньютона?
24. Що можна зробити, якщо на відрізку ізоляції кореня знак $f''(x)$ змінюється і отже умови застосування методу Ньютона не виконані?
25. Яку точку треба обрати за початкову точку метода Ньютона?
26. Якщо для початкової точки x методу Ньютона виконується умова $f(x) \cdot f''(x) < 0$, то чи можна стверджувати, що не буде збіжності цього методу?
27. Якщо зміна значень послідовних ітерацій методу Ньютона припинилась, то чи є це відповідь, тобто наближений корінь даного рівняння з даною точністю?
28. З яких етапів складається знаходження наближених коренів рівняння методом простої ітерації?
29. В чому полягає алгоритм методу простої ітерації?
30. Чи може значення λ змінюватись в області визначення функції $f(x)$ у методі простої ітерації?
31. За яких умов збіг ітерацій методу простої ітерації буде найшвидшим?
32. Що можна зробити, якщо на відрізку ізоляції кореня знак $f''(x)$ змінюється і отже умови застосування методу простої ітерації не виконані?
33. Яку точку треба обрати за початкову точку методу простої ітерації?
34. Якщо зміна значень послідовних ітерацій методу простої ітерації припинилась, то чи є це відповідь, тобто наближений корінь даного рівняння з даною точністю?

2.5. Завдання для самостійного виконання

1. Знайдіть відрізки, на яких рівняння $x^3 - 4x + 2 = 0$ має корені методом відокремлення коренів.

2. Розв'яжіть вказане рівняння методами половинного поділу та простої ітерації.

РОЗДІЛ 3
ПРЯМІ ТА ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

3.1.1. Постановка задачі

Розглядається система алгебраїчних рівнянь виду:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_{n.} \end{array}\right\} \tag{3.1}$$

де $a_{ij} \in R^1, i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n};$;

$b_i \in R^1, i = \overline{1,n},$ - задані;

$x_j \in R^1, j = \overline{1,n},$ - невідомі.

Якщо ввести позначення:

$$A = \left\{\begin{array}{l} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \ldots a_{nn} \end{array}\right\},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},$$

де A - матриця розмірності n х n;

b- вектор-стовпець розмірності n ($b \in R^n$);

x - вектор-стовпець розмірності n ($x \in R^n$), то систему (3.1) можна записати в матричному вигляді:

$$Ax = b. \tag{3.2}$$

Розв'язати систему (3.2)- це означає знайти таке x^* є R^n $(x^* = (x_i^*)_{i=1}^n)$, при якому значення лівої частини рівняння тотожно дорівнює правій.

Визначення. Нев'язкою системи (3.2), що відповідає довільному вектору x, називається вектор $r = Ax - b$. Очивидно, що для розв'язку $x \in R^n$ нев'язка ($Ax - b$) дорівнює нулю.

Для того щоб система (3.2) мала єдиний розв'язок, необхідно й достатньо, щоб $det\ A \neq 0$ [8]. У цьому випадку розв'язок системи (3.2) може бути отриманий за формулами Крамера:

$$x_i = \frac{\det(A^{(i)})}{\det(A)},\ i = \overline{1, n},$$

де матриця $A^{(i)}$ утворюється з матриці A заміною її i -го стовпця стовпцем вільних членів b .

Але такий спосіб розв'язання системи лінійних рівнянь з n невідомими призводить до обчислення (n $+1$)-го визначника порядку n, що є дуже трудомісткою операцією при великих n.

Чисельні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (3.2) можна розбити на дві групи: прямі (точні) й ітераційні (наближені).

Визначення. Точними (прямими) **методами** називаються методи, які в припущенні, що обчислення ведуться точно (без округлень), приводять за скінчене число кроків до точних значень x_i^* . Оскільки обчислення на комп'ютері ведуться з округленнями, то розв'язок неминуче міститиме погрішності. До прямих методів відносяться, наприклад, метод Гауса, метод Холецького та ін. [3; 4; 5; 19].

Визначення. Наближеними (ітераційними) **методами** називаються такі методи, які навіть у припущенні, що обчислення ведуться без округлень, дозволяють отримати розв'язок x^* тільки із зазначеною точністю. Точний розв'язок системи в цьому випадку може бути отриманий теоретично як результат нескінченного (ітераційного) процесу. До наближених методів відносяться, наприклад, метод ітерацій, метод Зейделя та ін. [3; 4; 5; 19]. Кожний із цих методів не завжди є збіжним у застосуванні до конкретного класу систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

3.1.2. Метод виключення Гауса

Найбільш відомим із прямих методів розв'язання системи (3.2) є **метод виключення Гауса**, ідея якого полягає в послідовному виключенні невідомих із рівнянь. Спочатку відправна система (3.2) приводиться до системи трикутного вигляду (прямій хід), а потім невідомі визначаються за простими формулами (зворотний хід).

Розрахункові формули методу Гауса:

Нехай $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}, i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}; b_i^{(0)} = b_i, i = \overline{1,n}$

Прямий хід: k -й крок

при k=$\overline{1,n-1}$:

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, j = \overline{k+1,n};\ b_k^{(k)} = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}};$$
$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)}, j = \overline{k+1,n};$$
$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} b_k^{(k)}, i = \overline{k+1,n};$$

При $k=n$:

$$b_k^{(k)} = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Зворотний хід:

$$\begin{aligned} x_n &= b_n^{(n)}; \\ x_k &= b_k^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j, k = \overline{n-1,1}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Тут $A^{(k)} = (a_{kj}^{(k)})$ - це проміжна матриця, а $b^{(k)} = (b_i^{(k)})$ -проміжний вектор на k -му кроці прямого ходу методу Гауса, причому $A^{(0)} = A,\ b^{(0)} = b$. Елементи $a_{kk}^{(k)} = 1$ для усіх k формально, але виконувати це обчислювальня фактично не потрібно.

Також не потрібно обчислювати і піддіагональні (нульові) елементи матриці.

Рядки, що містять одиницю на діагоналі, називаються **виділеними рядками**. Процес отримання виділених рядків (приведення системи до трикутного вигляду) називається **прямим ходом**, а процес знаходження невідомих шляхом використання виділених рядків - **зворотним ходом** методу Гауса.

Елементарними перетвореннями матриці називають перетворення слідуючого вигляду:

- відкидання нульового рядка (стовпця);
- множення всіх елементів рядка (стовпця) на ненульове число;
- перестановка рядків (стовпців);
- додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на довільне ненульове число;
- транспонування матриці.

Мінором k-го порядку матриці називають визначник порядку k, який отримують викресленням будь-яких рядків і стовпців з матриці А.

Приклад 3.1. Обчислити всі мінори третього порядку і довільний мінор другого порядку матриці А

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розвязок.

$$\begin{vmatrix} 7 & 17 & 3 \\ 8 & 18 & 7 \\ 4 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 126 + 476 + 240 - $$
$$- 216 - 136 - 490 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 17 & 3 \\ 4 & 18 & 7 \\ 0 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 18 + 120 - 68 - 70 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 17 \\ 4 & 8 & 18 \\ 0 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 80 + 272 - 280 - 72 = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 8 & 7 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 48 - 28 - 28 = 0,$$

Мінор другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 28 = -20 \neq 0.$$

Рангом матриці А називають найвищий порядок її ненульового мінора.

Позначення: $rang(A)$, $r(A)$

Властивості рангів:

- $r(A) \leq \min(m;n)$
- $r(A) = 0$, коли A=0
- $r(A)$ не змінюється при ***Е.П.***
- у матриці трапецієвидного вигляду
-

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}$$

; де $a_{ii} \neq 0,\ i = 1,2,\dots,r$

r(A)=r

Приклад 3.2. Обчислити ранг матриці за допомогою елементарних перетворень.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Розвязок:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad r(\mathrm{A}) = 2.$$

Теорема Кронекера-Капеллі. Система m лінійних рівнянь з n невідомими **сумісна** тоді і тільки тоді, коли $r(\mathrm{A}) = r(\mathrm{A})$

Причому система

- сумісна визначена, якщо $r(\mathrm{A}) = r(\mathrm{A}) = n$;
- сумісна невизначена, якщо $r(\mathrm{A}) = r(\mathrm{A}) \quad n$.
- у випадку $r \quad n$ невідомі називають **базисними**, якщо мінор, утворений з коефіцієнтів при них, не дорівнює нулю.
- усі інші невідомі називають **вільними**.

Приклад 3.3. Дослідити систему рівнянь на сумісність і у випадку сумісності знайти розв'язки

$$\text{а)} \quad \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3, \\ 3x_1 + 12x_2 + 3x_3 - x_4 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - 12x_3 + 25x_4 = -4. \end{cases}$$

Розв'язок.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & 12 & 3 & -1 & 11 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & -12 & 25 & -4 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 11 & 2 \\ 0 & -9 & -2 & 13 & 2 \\ 0 & -9 & -18 & 33 & -10 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 16 & -20 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 \end{array}\right)$$

Ранг матриці -3, ранг мінора -4. Отже, система є несумісною.

$$\text{б)} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

Розв’язок.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 2 & 1 & 2 & 9 \\ -3 & 1 & 4 & 10 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & -3 & -4 & -15 \\ 0 & 7 & 13 & 46 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & -3 & -4 & -15 \\ 0 & 1 & 5 & 16 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 5 & 16 \\ 0 & -3 & -4 & -15 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 11 & 33 \end{array}\right)$$

Ранг матриці дорівнює рангу мінору дорівнює 3. Отже система сумісна.

$11*x_3=33$, $x_3=3$; $x_2=16-5*x_3=16-5*3=1$; $x_1=12-3*x_3-2*x_2=12-2-9=1$

Відповідь {1,1,3}.

в) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

Розв’язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -3 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Отже, ранг матриці дорівнює рангу мінору дорівнює 3, система є сумісною та невизначеною.

Покладемо $x_4=a$, тоді

$$x_3 = \frac{2}{3}a, x_2 = \frac{9-a}{15}, x_1 = \frac{2a+7}{5}.$$

Якщо ми прийдемо до такої системи, одне з рівнянь якої має відмінний від нуля вільний член, а всі коефіцієнти лівої частини дорівнюють нулю, то наша вихідна система буде несумісною.

В іншому випадку система (3.1) буде сумісною. Вона є визначеною при $k=n$ і невизначеною при $k < n$.

Якщо $k < n$, то для вільних невідомих $x_{k+1}, \ldots, x_n$ візьмемо довільні числові значення, після чого, рухаючись по системі (3.3) знизу вверх, знайдемо для невідомих $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_2, x_1$ цілком певні значення. Так як значення для вільних невідомих можна вибрати нескінченним числом способів, то наша система (3.3), а, отже, і система (3.1) будуть сумісними, але невизначеними. Даним методом (при різноманітних виборах значень для вільних невідомих) будуть знайдені всі розв'язки системи (3.1).

Таким чином, метод Гаусса застосовний до будь-якої системи лінійних рівнянь. При цьому система буде несумісна, якщо в процесі перетворень ми отримаємо рівняння, в якому коефіцієнти при всіх невідомих рівні нулю, а вільний член відмінний від нуля; якщо ж такого рівняння не існує, то система буде сумісною. Сумісна система рівнянь буде визначеною, якщо вона зводиться до трикутного виду, і невизначеною, якщо зводиться до трапецієдального виду при $k < n$.

Нехай в розглядуваній системі число рівнянь менше числа невідомих. Тоді наша система не може зводитися до трикутного виду, бо в процесі перетворень по методу Гаусса число рівнянь може зменшуватися, але не може збільшуватися; отже, вона зводиться до трапецієдального вигляду, тобто невизначена. Якщо в СЛОР число рівнянь менше числа невідомих, то ця система має, крім нульового розв'язку, також і ненульові розв'язки, тобто розв'язки, в яких значення деяких (або навіть всіх) невідомих відмінні від нуля; таких розв'язків буде нескінченно багато. Будемо виписувати матрицю з коефіцієнтів системи, приєднавши до неї стовпчик із вільних членів, відділених вертикальною рискою, і всі перетворення здійснювати над рядками цієї розширеної матриці.

Кількість арифметичних операцій, необхідних для реалізації метода Гауса, визначається формулою [5]:

$$K(n) = \frac{2n(n+1)(n+2)}{2} + n(n-1),,$$

де n - розмірність системи (2.2), тобто пропорційна кубу числа невідомих ($O(n^3)$).

Слід зазначити, що з логічної точки зору кращою є модифікація методу Гауса, що зветься **метод Гауса - Жордана**. Його суть полягає в тому, що зворотний хід виконується не за формулами (2.3), а проводиться виключення невідомих у зворотному порядку з рівнянь, отриманих після виконання прямого ходу методу Гауса. При цьому система приводиться до діагонального вигляду з одиницями на діагоналі, а розв'язок системи виявляється на місці вектора b. Таким чином, зворотний хід дійсно є зворотним, тобто виконуються операції симетричні відносно прямого ходу.

3.1.3. Метод Гауса з вибором головного елемента

Стандартний метод Гауса може стати чисельно нестійким, якщо серед $a_{kk}^{(k-1)}$, на які проводиться ділення, виявляються дуже малі числа по абсолютній величині, хоча і відмінні від нуля (не говорячи вже про нульові значення). Тоді при діленні на них отримуються великі числа з великими абсолютними погрішностями. В результаті цього отриманий розв'язок сильно відрізнятиметься від дійсного розв'язку, тобто метод Гауса буде нестійким до помилок обчислень.

Щоб цього уникнути, на практиці застосовують метод виключення Гауса з вибором головного елемента. Діагональний елемент $a_{kk}^{(k-1)}$, на який проводиться ділення на k -му кроці, називається головним (ведучим) елементом. Якщо головний елемент близький до нуля по абсолютній величині, то можна знайти у відповідному (k -му) стовпці максимальний за модулем елемент і переставити рядки місцями так, щоб цей елемент став головним. Але така перестановка теж не завжди забезпечує стійкість. Тому при програмній реалізації зазвичай вибирають максимальний за модулем елемент не в k -му стовпці, а в усій матриці, що залишилася. Потрібно зазначити, що якщо доводиться переставляти місцями стовпці матриці, то ці перестановки потрібно запам'ятовувати, а потім (після отримання розв'язку) проводити їх у зворотному порядку вже у векторі отриманого розв'язку.

Сенс вибору головного елемента полягає в тому, щоб зробити якомога меншими по абсолютній величині числа $a_{kj}^{(k)} = \dfrac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$ і, тим самим, зменшити погрішність обчислень і округлень. Тому для реалізації методу Гауса на комп'ютері зазвичай використовують саме схему з вибором головного елемента.

3.1.4. LU-розкладання матриці, метод Холецького

Метод LU-розкладання в принципі еквівалентний методу Гауса, відмінність полягає тільки в порядку дій.

У методі LU-розкладання матриця A системи (3.2) спочатку подається у вигляді LU-розкладання, тобто у вигляді добутку двох матриць:

$$A = LU, \tag{3.4}$$

де L - нижньотрикутна матриця;

U - верхньотрикутна матриця з одиницями на діагоналі.

Тоді розв'язання системи (3.2) проводиться в два етапи: спочатку розв'язується система:

$$Ly = b, \tag{3.5}$$

відносно $y \in R^n$, а потім вже знаходиться шуканий розв'язок x^* шляхом розв'язання системи:

$$Ux = y. \tag{3.6}$$

Оскільки матриці L, U - трикутні, то знаходження розв'язків систем (2.5) та (2.6) проводиться за простими формулами, аналогічними формулам зворотного ходу методу Гауса.

Можна ввести позначення:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді зі співвідношення (3.4) будуть отримані формули для визначення елементів матриць L і U:

$$l_{i1} = a_{i,1},$$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \; i \ge j > 1$$

i

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}},$$

$$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}), \; 1 < i < j.$$

Слід зазначити, що якщо A - симетрична знакопевна матриця [21], то розкладання (2.4) може бути записане у вигляді:

$$A = U^T DU, \tag{3.7}$$

де U^T - нижньотрикутна матриця, транспонована до U;

D – діагональна матриця $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$, всі d_{ii} мають однаковий знак.

Застосування розкладання (3.7) для розв'язання системи (3.2) має назву **методу Холецького**.

Оскільки проблема розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь виду (3.2) з'являється, як правило, як проміжна задача при розв'язанні більш складних задач (розв'язання систем нелінійних рівнянь, оптимізації та ін.), то використання розкладань (3.4) та (3.7) часто буває корисним для отримання додаткової інформації про відправну задачу. Наприклад, коли матриця A обчислюється як матриця других похідних деякої функції $f(x)$ n змінних у деякій точці $x^{(0)} \in R^n$, то якщо всі діагональні елементи матриці D з розкладання (3.7) додатні, то це означає, що функція $f(x)$ опукла в околі точки $x^{(0)}$.

Розкладання (3.4) може бути використане і для обчислення визначника ($det\ A$) матриці A. Так $det\ A = det(L)det(U)$ [10], але визначник трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів. Тому $det(U) = 1$, оскільки матриця U - трикутна і має одиниці на діагоналі, а $\det(L) = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}$. Тоді $\det(A) = \det(L) = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}$.

3.1.5. Метод ітерацій

Як приклад ітераційного (наближеного) методу розв'язання системи (2.2) варто розглянути метод ітерацій.

Для застосування методу ітерацій систему (3.2) необхідно подати у вигляді:

$$x = Cx + d, \tag{3.8}$$

де $C \in R^{n*n}$, $d \in R^n$.

Алгоритм методу ітерацій.

1. Задається $\varepsilon > 0$ - точність розв'язку задачі і початкове наближення розв'язку $x^{(0)} \in R^n$ (наприклад, $x^{(0)} = d$).

2. На k-й ітерації методу ($k = 0,1,2,...$) обчислюється наступне наближення:

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d. \tag{3.9}$$

3.Перевіряється критерій останову $\frac{q}{1-q}\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \le \varepsilon,$де 0<q<1 (визначається з умови збіжності).

Метод простої ітерації збігається тільки при виконанні умови:

$$\|C\| \le q < 1, \tag{3.10}$$

де 0<q<1 [3;5;6;19;21]. При цьому як норму матриці C можна розглядати величину

$$\|C\| \equiv \underbrace{\max}_{j} \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| \ \textit{або} \ \underbrace{\max}_{i} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|. \tag{3.11}$$

Тоді метод ітерації збігається з лінійною швидкістю збіжності, тобто $\left\|x^{k+1}-x\right\| \le q\left\|x^{k}-x^{*}\right\|$ для всіх $k \ge 0$. Справедлива також оцінка $\left\|x^{k+1}-x^{*}\right\| \le \frac{q}{1-q}\left\|x^{k+1}-x^{k}\right\|$ для всіх $k \ge 0$, яка і використовується в критерії останову [4].

Приведення системи (3.2) до виду (3.8) можна здійснити різними способами, важливо тільки, щоб виконувалася умова збіжності (3.10) і (3.11). Варто розглянути один із них.

Якщо діагональні елементи матриці відмінні від нуля, тобто $a_{ii} \ne 0, i=\overline{1,n},$ то систему (3.1) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n + b_1), \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n + b_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1 - a_{n3}x_3 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1} + b_n). \end{cases}$$

У цьому випадку елементи матриці C дорівнюють $c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, i \ne j,\ i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n},\ c_{ii}=0$. Елементи вектора d при цьому будуть дорівнювати $d_i = \frac{b_i}{a_{ii}},\ i=\overline{1,n}$.

Тобто

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a12}{a11} & -\frac{a13}{a11} & \ldots -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a21}{a22} & 0 & -\frac{a23}{a22} & \ldots -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ -\frac{an1}{ann} & -\frac{an2}{ann} & -\frac{an3}{ann} & \ldots 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} \frac{b1}{a11} \\ \frac{b2}{a22} \\ \ldots \\ \frac{bn}{ann} \end{pmatrix}$$

Тоді умова (2.10) і (2.11) виконуватиметься, якщо

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 1}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \le q <, j = \overline{1,n}, або \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \le q < 1, i = \overline{1,n} \qquad (3.12)$$

У свою чергу, ці нерівності будуть справедливі, якщо діагональні елементи матриці А задовольняють умову $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|, i = \overline{1,n}$, тобто модулі діагональних коефіцієнтів для кожного рівняння системи (2.1) більше суми модулів решти всіх коефіцієнтів.

Слід зазначити, що описана процедура приведення системи (3.2) до виду (3.8) з подальшим застосуванням методу ітерацій називається **методом Якобі.**

3.1.6. Метод Гауса - Зейделя

Метод Гауса - Зейделя є модіфікацією метода Якобі, який було описано у розділі 2.5 для розв'язання системи (2.2). Він також застосовується для матриць *A*, для яких виконується умова $a_{jj}\neq 0$ для всіх *i*. По суті це той самий ітераційний процес, що і (2.9), але в ньому нове наближення $x^{(k+1)}$ застосовується одразу ж, як змінився його *i -й* елемент. Ітераційна формула методу Гауса - Зейделя має вигляд:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}, i = \overline{1,n}.$$

Умови збіжності методу Гауса - Зейделя ті ж самі, що й у методу Якобі, тобто (2.12), але на практиці швидкість його збігу дещо вища. Тому саме цей метод застосовують найчастіше.

3.1.7. Обчислення оберненої матриці

Визначення. Оберненою до матриці *A* називається така матриця *B*, для якої виконується рівність:

$$AB = BA = E, \qquad (2.13)$$

де E - одинична матриця ($E \in R^{n \times n}$), тобто

$$E = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0\ \dots\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ \dots\ 0 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ 0\ 0\ 0\ \dots\ 1 \end{pmatrix}$$

Обернену матрицю до A прийнято позначати через A^{-1}.

З умови (3.13) виходить, що обернена матриця A^{-1} вводиться тільки для квадратних матриць A, при цьому A^{-1} також буде квадратною тієї ж розмірності.

Квадратна матриця A називається **невиродженою** або **неособливою (несингулярною)**, якщо її визначник $detA$ відмінний від нуля. Будь-яка невироджена матриця має обернену матрицю.

Якщо відома обернена матриця A^{-1}, то розв'язок системи (3.2) записується у вигляді $x = A^{-1} b$. Слід зазначити, що з практичної точки зору все ж таки ефективнішим буде розв'язання системи рівнянь, ніж обчислення оберненої матриці з подальшим множенням на вектор b.

Метод Гауса може бути застосований для обчислення оберненої матриці. Нехай дана невироджена матриця $A = (a_{ij})$ розмірності n x n. Елементи шуканої оберненої матриці A^{-1} можна позначити через (x_{ij}) ,а також ввести позначення x^j - j -й стовпець ($x^j \in R^n, j = \overline{1,n}$) матриці $X = A^{-1}$, e^j - j-й стовпець ($e^j \in R^n, j = \overline{1,n}$) матриці E, тобто:

$$x^j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \dots \\ x_{nj} \end{pmatrix},\ e^j = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ (e^j_j = 1).$$

Тоді рівність $AX = E$ можна записати у вигляді:

$$Ax^j = e^j,\ (j = \overline{1,n},), \qquad (3.14)$$

тобто стовпці x^j $(j = \overline{1,n},)$ можуть бути знайдені методом Гауса як розв'язок n систем лінійних рівнянь з однією і тією ж матрицею A , але з різними векторами правих частин e^j. Звідси випливає, що прямий хід методу Гауса при розв'язанні систем (2.14) буде загальним, тобто його можна проводити одночасно для всіх j , а потім вже визначити вектори x^j $(j=\overline{1,n},)$, виконавши n разів зворотний хід методу Гауса.

Треба нагадати, що виконання зворотного ходу методу Гауса - Жордана еквівалентне приведенню трикутної системи, отриманої після прямого ходу, до системи з діагональною одиничною матрицею. Таким чином, приводячи початкову матрицю A до одиничної матриці і виконуючи аналогічні дії з елементами матриці E, ця матриця буде перетворена в матрицю A^{-1} . Звідси випливає, що обчислення оберненої матриці ефективно проводити саме за методом Гауса - Жордана.

3.2. Розв'язання систем лінійних рівнянь великої розмірності

3.2.1. Постановка задачі

Як зазначалося у параграфі 3.1.5, класичні прямі чисельні методи розв'язання задачі (3.2) є сенс застосовувати при розмірності системи до 1 000. Але на практиці нерідко виникає необхідність розв'язувати системи і з більшою розмірностю. Такі системи вважаються **системами великої розмірністі**. Наприклад, такого роду системи виникають при проектуванні великих інтегральних схем та ін. При роз'вязанні систем великої розмірністі на практиці з застосуванням комп'ютерної техніки виникають такі основні проблеми:

1) великий об'єм оперативної пам'яті комп'ютера, необхідний при проведенні розрахунків із матрицею;
2) великий об'єм самих розрахунків;
3) матриця A системи може бути виродженою;
4) накопичення помилок обчислення.

Наприклад, якщо матриця має розмірність $n = 10^6$, то для її зберігання необхідно n х n х 8 байт, тобто порядку 10^{13} байт, або 10^4 Гігабайт оперативної памяті комп'ютера. Очевидно, що це можливо реалізувати тільки на суперкомп'ютерах. Великий об'єм самих розрахунків приводить до того, що для розв'язання задачі необхідно багато часу. Також при цьому відбувається накопичення помилок обчислення, що призводить до неправильного результату.

Для вирішення цих проблем застосовують деякі прийоми та спеціальні чисельні методи, які описані далі.

3.2.2.Види розріджених матриць

Визначення. Розріджені матриці - це матриці, кількість нульових елементів в яких є таким великим, що стає ефективним облік структури цих матриць.

Розріджені матриці дуже часто зустрічаються в інженерних задачах, наприклад, у задачах проектування великих інтегральних схем, у задачах моделювання складних об'єктів та оптимального управління ними.

Для економії комп'ютерної пам'яті при зберіганні розріджених матриць застосовують спеціальне кодування, а саме зберігають тільки ненульові елементи та їх місця розташування в матриці.

Варто розглянути приклад. Нехай є матриця розмірності 6x6.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & a_{63} & 0 & 0 & a_{66} \end{pmatrix}$$

Для її зберігання звичайним засобом потрібно 6x6x(8 байт) = 288 байт пам'яті. Але якщо зберігати тільки ненульові елементи матриці, то буде достатньо масивів:

$$Ae = (a_{11}\ a_{31}\ \ a_{22}\ \ a_{33}\ \ a_{43}\ \ a_{63}\ \ a_{14}\ \ a_{34}\ \ a_{44}\ \ a_{55}\ \ a_{36}\ \ a_{66}\ ),$$
$$Am = (\{1,1\}\{3,1\}\ \{2,2\}\ \{3,3\}\ \{4,3\}\ \{6,3\}\ \{1,4\}\ \{3,4\}\ \{4,4\}\ \{5,5\}\ \{3,6\}\ \{6,6\})$$

В одновимірному масиві *Ae* зберігаються ненульові елементи матриці *A* по стовпцям, при цьому потрібно 12x(8 байт) = 96 байт. В масиві *Am* зберігаються місця розташування ненульових елементів матриці, при цьому потрібно 12x2x(2 байта) = 48 байт. Таким чином, для зберігання матриці *A* в кодованому вигляді потрібно загалом 144 байти, тобто у два рази менше. При великій розмірності ця різниця стає дуже великою.

Описаний спосіб зберігання розріджених матриць застосовують при відсутності будь-яких закономірностей в структурі розташування нульових та ненульових елементів. Але існують матриці спеціальних видів, котрі досить часто зустрічаються на практиці.

Види розріджених матриць. Якщо матриця $A \in R^{n \times n}$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$$

тобто ненульові елементи знаходяться тільки на головній діагоналі та деяких інших діагоналях матриці, то вона називається **стрічковою** [19]. В цьому випадку зберігаються значення ненульових діагоналей у вигляді матриці розмірності *n* x *k*, де *k* - кількість цих діагоналей, та їх порядковий номер відносно головної діагоналі. Діагоналі розташовані над головною діагоналлю нумеруються додатніми значеннями, а під головною діагоналлю - від'ємними значеннями. При цьому номер головної діагоналі дорівнює нулю [19].

Якщо стрічкова матриця $A \in R^{n \times n}$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

тобто ненульові елементи знаходяться тільки на головній діагоналі та двох сусідних діагоналях матриці, то вона називається **трьохдіагональною**.

Якщо стрічкова матриця $A \in R^{n \times n}$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

тобто ненульові елементи знаходяться тільки на головній діагоналі та чотирьох сусідних діагоналях матриці, то вона називається **п'ятидіагональною**.

Трьох та п'ятидіагональні матриці виникають, наприклад, при розв'язанні крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь методом кінцевих різниць (розділ 13.2).

Якщо матриця $A \in R^{n \times n}$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

тобто ненульові елементи знаходяться тільки на головній діагоналі та вище неї, то вона називається **верхньою трикутною**. Аналогічно є також і **нижні трикутні матриці**. В цьому випадку зберігаються значення ненульових елементів у вигляді одномірного масиву по стовпцях.

Слід розглянути приклад. Нехай є матриця розмірності 4x4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \\ & & & \end{pmatrix}$$

Для її зберігання звичайним засобом потрібно 4x4x(8 байт) = 128 байт пам'яті. Але якщо сберігати тільки ненульові елементи матриці, то буде достатньо одномірного масива

$$Ae = (a_{11}\, a_{12}\ \ a_{22}\ \ a_{13}\ \ a_{23}\ a_{33}\ \ a_{14}\ \ a_{24}\ \ a_{34}\ \ a_{44})$$

і при цьому потрібно лише 10x(8 байт) = 80 байт. При великій розмірності ця різниця стає більш значущою.

Слід зазначити, що при проведенні розрахунків замість звернення до довільного елемента a_{ij} повної матриці A треба звертатися до елемента $ae_{j*(j-1)/2+i}$ вектора Ae.

3.2.3. Методи розв'язання систем лінійних рівнянь великої розмірності з розрідженими матрицями

Нехай матриця $A \in R^{n\times n}$ системи (3.2) є трьохдіагональною. Можна позначити її елементи таким чином:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1\ \gamma_1\ 0 \ldots \ldots 0 \\ \beta_2\ \alpha_2\ \gamma_2\ 0 \ldots 0 \\ 0\ \beta_3\ \alpha_3\ \gamma_3 \ldots 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0 \ldots 0\ \beta_{n-1}\ \alpha_{n-1}\ \gamma_{n-1} \\ 0 \ldots \ldots 0\ \beta_n\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Метод LU-розкладання та метод прогонки дозволяють розв'язувати систему (3.2) з трьохдіагональною матрицею, не проводячи дій з нульовими елементами матриці A. Це дає можливість навіть при великій розмірності системи економити на обчисленнях і, як наслідок цього, отримати розв'язок системи з меншою погрішністю.

LU-розкладання для трьохдіагональної матриці A, тобто $A = LU$ або

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1\ \gamma_1\ 0\ 0 \ldots 0 \\ \beta_2\ \alpha_2\ \gamma_2\ 0 \ldots 0 \\ 0\ \beta_3\ \alpha_3\ \gamma_3 \ldots 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0 \ldots 0\ \beta_{n-1}\ \alpha_{n-1}\ \gamma_{n-1} \\ 0 \ldots 0\ 0\ \beta_n\ \alpha_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_1\ 0\ 0\ \ldots 0 \\ \beta_2\ \sigma_2\ 0 \ldots 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0 \ldots \beta_{n-1}\ \sigma_{n-1}\ 0 \\ 0 \ldots 0\ \ \beta_n\ \sigma_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1\ \delta_1\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 1\ \delta_2 \ldots 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0 \ldots 0\ \sigma_1\ \delta_{n-1} \\ 0 \ldots 0\ \ 0\ 1 \end{pmatrix}$$

реалізується формулами:

$$\sigma_1 = \alpha_1, \delta_1 = \frac{\gamma_1}{\sigma_1},\ \delta_1 = \frac{\gamma_i}{\sigma_1},\ \sigma_i = \alpha_i - \beta_i \delta_{i-1},\ i = \overline{2, n}$$

Тоді розв'язання системи (2.2) виконується у два етапи: $Ly = b,\ U x = y$, які реалізуються формулами:

$$y_1 = \frac{b_1}{\sigma_1},\ y_i = \frac{b_i - \beta_i y_i - 1}{\sigma_i},\ i = \overline{2, n;}$$

$$x_n = y_n,\ x_i = y_i - \delta_i x_{i+1},\ i = \overline{n-1, 1}.$$

Є також варіант методу LU-розкладання для розв'язання системи (3.2) з п'ятидіагональною матрицею [21].

Метод прогонки по суті є модифікацією методу Гауса, в якій застосовується облік стрічкової структури матриці системи, тобто, як і у методі LU-розкладання, не виконуються дії з нульовими елементами матриці A.

Метод прогонки для розв'язання системи (3.2) з трьохдіагональною матрицею реалізується формулами:

а) прямий хід

$$v_1 = -\frac{\gamma_1}{\alpha_1},\ w_i = -\frac{\gamma_i}{\alpha_i + \beta_i w_{i-1}},\ i = \overline{2, n}\ ;$$

$$v_1 = \frac{b_1}{\alpha_1},\ v_i = \frac{b_i - \beta_i v_i - 1}{\alpha_i + \beta_i w_{i-1}},\ i = \overline{2, n}\ ;$$

б) зворотний хід

$$x_n = v_n,\ x_i = v_i + w_i x_{i+1},\ i = \overline{n-1, 1}.$$

Є також варіант методу прогонки для розв'язання системи (2.2) з п'ятидіагональною матрицею [21].

3.3.Висновки

1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь є базовою процедурою в математичних пакетах чисельного аналізу, оскільки в багатьох чисельних методах вона використовується як допоміжна. Тому питанню оптимізації базової процедури приділяється особлива увага.

2. Якщо розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь є проміжною задачею при розв'язанні більш складної задачі, то найчастіше для цього застосовують метод LU-розкладання матриць.
3. Обчислення оберненої матриці ефективно проводити за методом Г ауса - Жордана.
4. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь є базовою процедурою в математичних пакетах чисельного аналізу, оскільки в багатьох чисельних методах вона використовується як допоміжна. Тому питанню оптимізації базової процедури приділяється особлива увага.
5. У задачах розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності матриця системи є, як правило, розрідженою.
6. Розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь методом кінцевих різниць приводить до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь з трьохдіагональною або п'ятидіагональною матрицею великої розмірності.
7. Основними чисельними методами розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь із трьохдіагональною або п'ятидіагональною матрицею є методи LU-розкладання та метод прогонки.

3.4. Контрольні запитання

1. Сформулюйте постановку задачі розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Назвіть групи методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, вкажіть їх принципові відмінності.
3. У чому полягає ідея методу Гауса?
4. У чому полягає суть методу виключення Гауса з вибором головного елемента? В яких випадках його застосовують на практиці?
5. Що називається LU-розкладанням матриці?
6. Як застосовується LU-розкладання матриць для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь?
7. Як можна використати LU-розкладання матриці для обчислення її

оберненої матриці?

8. Опишіть схему обчислення оберненої матриці методом Гауса - Жордана.

9. При яких умовах збігається метод простої ітерації? Наведіть оцінки швидкості збіжності цього методу.

10. Який порядок арифметичних обчислень потрібен для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими?

1. Сформулюйте постановку задачі розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

2. Назвіть групи методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, вкажіть їх принципові відмінності.

3. Які матриці називаються розрідженими? Назвіть види розріджених матриць.

4. У чому полягає суть методу прогону? В яких випадках його застосовують на практиці?

5. Що називається LU-розкладанням матриці?

6. Коли застосовується LU-розкладання матриць для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності?

3.5. Завдання для самостійного опрацювання

1. Знайдіть коефіцієнти параболи $y = ax^2 + bx + c$, яка проходить через точки (1; 8.6), (3; 30.8), (5; 65).

2. Знайдіть обернену матрицю для матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 1.8 & -3.8 & 0.7 & -3.7 \\ 0.7 & 2.1 & -2.6 & -2.8 \\ 7.3 & 8.1 & 1.7 & -4.9 \\ 1.9 & -4.3 & -4.9 & -4.7 \end{pmatrix}$$

3. Знайдіть точку перетину двох функцій:

$y=1-0.3x$ і $x=3-2.2y$.

РОЗДІЛ 4
ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

4.1. Постановка задачі

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь – це лише окремий випадок систем рівнянь. На практиці розв'язування задач моделювання приводить переважно до систем нелінійних рівнянь. Системи n лінійних рівнянь з n невідомими x_1, x_2, ..., x_n у загальному випадку прийнято записувати в такий спосіб:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

де $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – будь-які функції незалежних змінних, у тому числі й нелінійні щодо невідомих.

Якщо ввести позначення: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор стовпець розмірності n з елементами x_i $(x \in R^n)$, $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ – вектор функція розмірності n , елементами якої є функції

$f_i(x)=f_i(x_1,\ x_2,\ \dots\ x_n)$, $i=1,n$ $(F\colon R^n \rightarrow R^n)$, то систему (4.1) можна записати у векторному вигляді:

$$F(x) = 0. \tag{4.2}$$

Розв'язати систему (4.2) - означає знайти таке x^* є R^n, для якого $F(x^*) = 0$, тобто $f_i(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*) \equiv 0 \ \ \forall i = \overline{1,n}$.

Більшість математичних моделей різних процесів і явищ записуються в загальному випадку у вигляді (4.2), тому дана задача має величезне практичне значення.

Система нелінійних рівнянь може не мати розв'язків, мати єдиний розв'язок, скінченну чи нескінченну кількість розв'язків. Питання щодо кількості розв'язків має ухвалюватися для кожної конкретної задачі окремо.

На відміну від систем лінійних рівнянь, для систем нелінійних рівнянь є невідомими прямі методи розв'язування. Лише в окремих випадках систему можна розв'язати безпосередньо. Наприклад, для системи з двох рівнянь іноді вдається подати одне невідоме через інше й у такий спосіб звести задачу до розв'язання одного нелінійного рівняння щодо одного невідомого. Тому ітераційні методи для нелінійних систем набувають особливої актуальності.

Розглянемо кілька найпростіших ітераційних методів розв'язування систем нелінійних рівнянь, а саме, метод Ньютона, простої ітерації та метод Зейделя.

4.2. Метод Ньютона

Математичним підґрунтям методу є лінеаризація функцій f_1, f_2, …, f_n шляхом розкладання в ряд Тейлора в околі точки початкового наближення до розв'язку системи рівнянь й нехтування всіма членами ряду, окрім лінійних щодо приростів змінних.

Для однієї змінної ряд Тейлора в околі певної точки $x = x_0$ виглядає як :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}(x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 f''(x_0) + ... + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0). \tag{4.3}$$

Для функцій f_1, f_2, …, f_n системи рівнянь (4.1) візьмемо лише лінійну частину (до другої похідної) розкладання в ряд Тейлора в околі точки $x^{(0)} = \{ x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..,. , x_n^{(0)}\}$:

$$f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = f_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) + (x_1 - x_1^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_1} f_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) +$$
$$+ (x_2 - x_2^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_2} f_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) + ... + (x_n - x_n^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_n} f_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}),$$

де $i = 1, 2, ..., n$.

Уведемо позначення для змінних:

$\Delta x_i^{(0)} = (x_i - x_i^{(0)})$ – приріст і-тої змінної,

f_i – значення *i*-тої функції,

F_{ij} ∂/∂ $x_o f_i$($x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$,..,. , x_n $^{(0)}$} – значення першої частинної похідної функції f_i за змінною xj .

Після перетворення дістанемо систему лінійних рівнянь порядку *n* щодо приросту змінних Δxj :

$$\begin{aligned} &F'_{11}\,\Delta x_1 + F'_{12}\,\Delta x_2 + ... + F'_{1n}\,\Delta x_n = -f_1; \\ &F'_{21}\,\Delta x_1 + F'_{22}\,\Delta x_2 + ... + F'_{2n}\,\Delta x_n = -f_2; \\ &\quad .... \\ &F'_{n1}\,\Delta x_1 + F'_{n2}\,\Delta x_2 + ... + F'_{nn}\,\Delta x_n = -f_n; \end{aligned} \tag{4.4}$$

− (4.4) або у матричній формі

$$\begin{bmatrix} F'_{11} & F'_{12} & ... & F'_{1n} \\ F'_{21} & F'_{22} & ... & F'_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ F'_{n1} & F'_{n2} & ... & F'_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ ... \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ ... \\ -f_n \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

У скороченому вигляді можна записати (F')(Δx) = – (f), де матриця значень частинних похідних (F') називається матрицею Якобі, чи якобіаном системи рівнянь.

У скороченому вигляді можна записати (F')(Δx) = – (f), де матриця значень частинних похідних (F') називається матрицею Якобі, чи якобіаном системи рівнянь.

Розв’язок цієї системи (за умови det(F') ≠ 0) надає вектор відхилень до початкового наближення Δx= – (F') –1 ·(f). Додавання його до вектора початкового наближення надає нові, уточнені значення змінних:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)}. \tag{4.6}$$

Продовжуючи ітераційний процес, дістанемо нові наближення розв’язків системи лінійних рівнянь за скороченою формулою

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)} \qquad (4.7)$$

або у загальному вигляді

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - F^{-1}(x^{(k)}) \cdot f(x^{(k)}); \qquad (4.8)$$

де $F^{-1}(x^{(k)})$ – обернена матриця Якобі F' для наближення $x^{(k)} = \{ x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \}$,

k = 0, 1, 2, …

Отже, метод Ньютона будує ітераційну послідовність $\{x^{(k)}\}$, $(x^{(k)} \epsilon R^n)$, $k = 0,1,2,...,$ наближень розв'язку x^* (початкове наближення x^0 задається) за такою ітераційною формулою:

$$x^{(k+1)}=x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}) \quad , \qquad (4.9)$$

де $F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ – матриця Якобі, тобто $F'(x^{(k)})$ – матриця розмірності n x n з елементами $F'(x^k)_{ij} = \frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x_j}$.

Процес (4.7, 4.9) триває доти, доки не виконається умова $\|F(x^{(k)})\| < \epsilon$, де ϵ - задана точність розв'язку задачі (4.2).

Ідея метода Ньютона полягає в тому, що на k -й ітерації ($x^{(k)}$ - поточне наближення розв'язку) наступне наближення розв'язку $x^{(k+1)}$ знаходиться, як розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$F_k(x) = 0, \qquad (4.10)$$

де $F_k(x) \equiv F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x - x^{(k)})$ (перші два члени розкладання в ряд Тейлора функції $F(x)$ в околі точки $x^{(k)}$ [6]), тобто система (4.10) є лінеаризацією (лінійним наближенням) системи (4.2).

Оскільки система (4.10) лінійна відносно x, то її розв'язок може бути знайдений аналітично:

$$F_k(x) \equiv F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0$$

або

$$F'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = -F(x^{(k)}).$$

Тому (через обернену матрицю)

$$(x - x^{(k)}) = -[F'(x^{(k)})]^{-1} * F(x^{(k)}),$$

звідки і отримуємо розв'язок системи (4.4)

$$x = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}).$$

Якщо послідовність $\{x^{(k)}\}$, $k = 0,1,2,...$, побудована згідно з (4.9), збігається, то за достатньо загальних умов [1; 3; 4, 5; 18] швидкість її збіжності буде квадратичною, тобто

$$\| x^{(k+1)} - x^* \| \leq M * \| x^{(k)} - x^* \|^2$$

починаючи з деякого k, де M - деяка додатна константа.

Основними недоліками метода Ньютона є:

- збіжність тільки для достатньо близьких до розв'язку початкових наближень $x^{(0)}$;
- висока трудомісткість методу, оскільки на кожній ітерації необхідно обчислювати матриці $F'(x^{(k)})$ і $[F'(x^{(k)})]^{-1}$.

Основною перевагою методу Ньютона є висока швидкість збіжності.

Слід зазначити, що в методі Ньютона формулу (4.9) можна записати у вигляді:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h^{(k)},$$

де $h^{(k)} = -[F'(x^{(k)})] \sim^{1} F(x^{(k)})$.

Проте при практичній реалізації методу вектор h^k ефективніше обчислювати як розв'язок системи лінійних рівнянь виду $F'(x^{(k)}) * h = -F(x^{(k)})$.

Алгоритм розв'язування системи нелінійних рівнянь за методом Ньютона виглядає в такий спосіб:

1. обираємо початкове наближення $x^{(0)} = \{ x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..,. , x_n^{(0)}\}$;
2. обчислюємо матрицю Якобі (F') – значення частинних похідних F'_{ji} для обраного наближення $x^{(k)}$ (k – номер кроку ітерації);
3. розв'язуємо систему лінійних рівнянь (4.6) щодо приростів змінних Δx (k) = – (F') –1 ·(x (k)) ·f(x (k));
4. до вектору наближення x (k) додаємо вектор приростів змінних Δx (k)

(8.11) та дістаємо нове наближення x (k+1)) = x (k) + Δx (k) ;

5. перевіряємо умову завершення процесу розв'язування системи рівнянь (8.6): якщо умови не досягнуто, то значення k збільшуємо на одиницю і повторюємо процедуру з п. 2, інакше процес ітерації зупиняємо.

Частинні похідні, потрібні для розрахунку матриці Якобі, можна обчислити аналітично або ж, якщо це неможливо чи то важко, діставати за формулами наближеного диференціювання.

Умови збіжності методу Ньютона для систем нелінійних рівнянь досліджували відомі вчені: Канторович, Островський, Віллерс, Стенін. Узагальнюючи їхні дослідження, можна вважати за достатні умови збіжності розв'язків систем нелінійних рівнянь методу Ньютона такі:

1. Матриця Якобі для початкового наближення $F'(x^{(0)})$ має мати обернену матрицю F^{-1} з нормою, меншою за певну величину A, тобто

$$\| F^{-1}(x^{(0)})\| \le A;$$

2. Норма добутку оберненої матриці Якобі на вектор заданих функцій f(x) повинна мати значення, менше за певну величину B:

$$\| F^{-1}(x^{(0)}) * f(x^{(0)})\| \le B;$$

3. Значення матриці Якобі для частинних похідних другого порядка мають задовольняти умові:

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f_i(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k} \right| \le C,$$

де i, j = 1, 2,…, n; x^+ – певні значення наближень розв'язків системи рівнянь в околі точки $x^{(0)}$;

4. Сталі величини A, B та C мають задовольняти умові

$$2*n*A*B*C \le 1.$$

Приклад 4.1. Розв'яжемо за методом Ньютона систему нелінійних рівнянь з похибкою 0.0001:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &\equiv 2x_1^2 - x_1x_2 - 5x_1 + 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) &\equiv x_1 + 3\lg x_1 - x_2^2 = 0 \end{aligned} \qquad (4.10)$$

Виконаємо перетворення функцій – виразимо залежність y від x. Побудуємо графіки перетворених функцій (рис.4.1.)

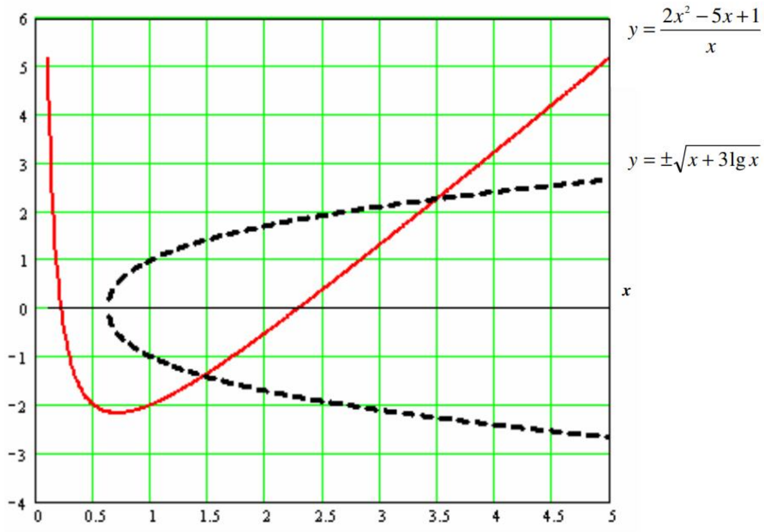


Рис.4.1. Графічне зображення перетворених функцій

Визначимо вектор початкового наближення x $^{(0)}$ – точку перетинання функцій графіка (див. рис.4.1) з додатними значеннями $x_1^{(0)}$ =3.5, $x_2^{(0)}$ =.2.2 Підставимо ці значення у функції f_1 та f_2

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1^2 - x_1x_2 - 5x_1 + 1 \\ x_1 + 3\lg x_1 - x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.300000 \\ 0.292204 \end{bmatrix}.$$

Складемо матрицю Якобі

$$\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} 4x_1 - x_2 - 5 & -x_1 \\ 1 + \dfrac{3 \cdot 0.4343}{x_1} & -2x_2 \end{bmatrix}.$$

Підставимо значення початкового наближення в цю матрицю і обчислимо її визначник:

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 6.8 & -3.5 \\ 1.372 & -4.4 \end{bmatrix}; \qquad \det(\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(0)})) = -25.12 \neq 0.$$

Отже, матриця F'(x (0)) – неособлива. Обчислимо її обернену матрицю

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0.1751 & -0.1393 \\ 0.0546 & -0.2707 \end{bmatrix}.$$

За формулою (4.8) обчислимо перше наближення

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}^{(0)}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 3.5 \\ 2.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1751 & -0.1393 \\ 0.0546 & -0.2707 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.300000 \\ 0.292204 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3488164 \\ 0.2627187 \end{bmatrix}.$$

Аналогічно обчислюють наступні наближення. Результати обчислень наведено в таблиці 4. 1.

Таблиця 4.1.

Результати послідовного обчислення розв'язків за методом Ньютона

k – номер кроку ітерації	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$f_1(x^{(k)})$	$f_2(x^{(k)})$
0	3,5	2,2	0,3	0,292204
1	3,488164	2,262718	0,001022	-0,003941
2	3,487443	2,26629	$2,5404*10^{-7}$	$-1,211*10^{-6}$
3	3,4874428	2,2616286	$1,7763*10^{-14}$	$8,899*10^{-13}$
4	3,4874428	2,2616286	0	0

Зупинімось на наближенні $x^{(3)}$, за якого значення функцій системи рівнянь менші є за 10^{-12}, тобто розв'язок системи рівнянь є:

$$x_1 = 3,4874428; \; x_2 = 2,2616286.$$

Обчислимо похибки вектора наближень рівнянь після 3-го кроку ітерації за формулою:

$$\frac{\left\| \mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(2)} \right\|}{\left\| \mathbf{x}^{(2)} \right\|} = \frac{0.0000004}{4.156588} = 9.46602 \cdot 10^{-8} < 0.0001.$$

Перевіримо виконування наведених умов для системи нелінійних рівнянь прикладу:

1. Матриця Якобі цієї системи

$$\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} 4x_1 - x_2 - 5 & -x_1 \\ 1 + \dfrac{3 \cdot 0.4343}{x_1} & -2x_2 \end{bmatrix}$$

має обернену матрицю для початкового наближення $x^{(0)}$:

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0.1751 & -0.1393 \\ 0.0546 & -0.2707 \end{bmatrix}.$$

Норма цієї матриці $\| F^{-1}(x^{(0)}) \| = 0,325366 < 0,33$, тобто величина $A = 0,33$;

2. Обчислимо добуток оберненої матриці Якобі на вектор заданих функцій f(x)

для початкового наближення x $^{(0)}$:

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}^{(0)})\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0.1751 & -0.1393 \\ 0.0546 & -0.2707 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0.300000 \\ 0.292204 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.011836 \\ -0.062718 \end{bmatrix},$$

Норма вектору добутку $\|F^{-1}(x^{(0)})*f(x^{(0)})\| = 0{,}063826 < 0{,}1$, тобто величина B = 0,1;

3 Обчислимо значення матриці Якобі для частинних похідних другого порядку для початкового наближення x $^{(0)}$:

$$\mathbf{F}'' = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -\dfrac{1.3029}{x_1^2} & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}''(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -0.10636 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. З матриці F"(x $^{(0)}$) обчислимо матрицю значень $\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 f_i(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k}\right|$, де i, j = 1, 2; x^+ – значення наближень розв’язків системи рівнянь в точці x $^{(0)}$:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0.10636 & 2 \end{bmatrix}$$

Усі елементи цієї матриці є менше чи дорівнюють 5, тобто величина C= 5;

5. Підставимо значення величин A, B, C та n = 2 й перевіримо умову:

$$2 \cdot n \cdot A \cdot B \cdot C = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}33 \cdot 0{,}1 \cdot 5 = 0{,}66 \le 1.$$

Вочевидь, що система нелінійних рівнянь прикладу задовольняє умові збіжності метода Ньютона.

4.3. Метод простої ітерації

При розв'язуванні системи нелінійних рівнянь (4.5) методом простої ітерації її потрібно спочатку записати у вигляді $x = G(x)$, де $G(x)$ - векторна функція розмірності n від $x \in R^n$. Потім задаються початкове наближення $x^{(0)}$ і точність $\epsilon > 0$. Метод будує ітераційну послідовність $\{x^{(\kappa)}\}$, $\kappa = 0,1,2,...$, наближень розв'язку x^* за такою ітераційною формулою

$$x^{(\kappa+1)} = G(x^{(\kappa)}). \tag{4.11}$$

Процес (4.11) триває доти, доки не виконається умова $\| x^{(\kappa+1)} - G(x^{(\kappa)}) \| \le \varepsilon$.

Цей критерій закінчення обчислень виходить з рівності $F(x) = x - G(x)$.

Метод простої ітерації (4.11) збігається, якщо $\| G'(x) \| \le q < 1$ для всіх x, що належать деякому околу $У(x^*)$ розв'язку x^* і x^0 є $У(x\ )$. При цьому швидкість збіжності уде лінійною, тобто $\| x^{(к+1)} - x^*\| \leq q\| x^{(к)} - x^*\|$ починаючи з деякого k [1; 3; 4; 5; 18].

Для реалізації цього методу стосовно заданої нелінійної системи рівнянь треба шляхом алгебраїчних перетворень виокремити з кожного рівняння по одній змінній і в такий спосіб привести систему (4.1) до вигляду

$$\begin{aligned} &x_1=G_1(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ &x_2=G_2(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_n=G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n); \end{aligned} \qquad (4.12)$$

Потім обрати вектор початкового наближення $x^{(0)}$:

$x_0 = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \ldots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$ і підставляти його у перетворену систему рівнянь (4.12).

З першого рівняння обчислити нове наближення до першої змінної, з другого – до другої змінної тощо. Обчислені уточнені значення змінних знову підставляти у рівняння (4.12). Отже, на (k+1)-му кроці ітераційної процедури формула методу ітерацій для розв’язання системи нелінійних рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned} &x_1^{(k+1)}=G_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}); \\ &x_2^{(k+1)}=G_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_n^{(k+1)}=G_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}); \end{aligned} \qquad (4.13)$$

Ітераційний процес вважається за завершений, якщо виконується умова ,

$$\frac{\left\| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \right\|}{\left\| \mathbf{x}^{(k)} \right\|} \leq \varepsilon, \qquad (4.14)$$

де ε – задана похибка розв’язку системи рівнянь; $\| x^{(к+1)} - x^{(k)}\|$, $\| x^{(k)}\|$ – норми векторів різниці останнього та передостаннього наближень відповідно.

Основними недоліками методу простої ітерації є:

- складність переходу від запису системи F$(x) = 0$ до виду $x = G(x)$, зважаючи на нелінійність функцій $f_i(x_1, x_2,...,x_n)$, $i = 1,n$;
- збіжність тільки для достатньо близьких до розв'язку початкових наближень $x^{(0)}$;
- невисока швидкість збіжності.

Основною перевагою методу простої ітерації є невисока трудомісткість методу.

Приклад 4.2. Розв'яжемо методом простих ітерацій систему нелінійних рівнянь (4.10) з похибкою 0.0001.

Перетворимо цю систему до вигляду (4.12), за якого можна використовувати метод простих ітерацій:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{x_1(x_2+5)-1}{2}} \equiv G_1(x_1, x_2); \\ x_2 &= \sqrt{x_1 + 3\lg x_1} \equiv G_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Оберемо вектор початкового наближення x $^{(0)}$ – точку перетинання функцій графіка (див. рис. 4.1) з додатними значеннями $x_1^{(0)}$ =5,3; $x_2^{(0)}$ = 2,2. Підставимо ці значення у функції G_1 та G_2 та обчислимо перше наближення до розв'язків системи:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \sqrt{\frac{x_1^{(0)}(x_2^{(0)}+5)-1}{2}} = \sqrt{\frac{3.5(2.2+5)-1}{2}} = 3.478505; \\ x_2^{(1)} &= \sqrt{x_1^{(0)} + 3\lg x_1^{(0)}} = \sqrt{3.5 + 3\lg 3.5} = 2.265436. \end{aligned}$$

Подальші наближення обчислимо за поступового використовування формули розв'язування системи на (k+1)-му кроці ітераційної процедури (4.13):

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \sqrt{\frac{x_1^{(k)}(x_2^{(k)}+5)-1}{2}}; \\ x_2^{(k+1)} &= \sqrt{x_1^{(k)} + 3\lg x_1^{(k)}}. \end{aligned}$$

Відповідні значення поступових наближень розв'язків системи (4.10) наведено в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Значення послідовних наближень розв'язку методом простих ітерацій

k – номер кроку ітерації	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	3,5	2,2
1	3,478505	2,265436
2	3,483738	2,258912
3	3,484834	2,260503
4	3,485804	2,260836
5	3,486391	2,261131
6	3,486771	2,261309
7	3,487013	2,261424

Обчислимо похибки вектора наближень рівнянь за формулою (4.14): після 3-го кроку ітерації .

$$\frac{\left\| \mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(2)} \right\|}{\left\| \mathbf{x}^{(2)} \right\|} = \frac{0.0019325}{4.1520012} = 0.000465 < 0.001;$$

після 7-го кроку ітерації

$$\frac{\left\| \mathbf{x}^{(7)} - \mathbf{x}^{(6)} \right\|}{\left\| \mathbf{x}^{(6)} \right\|} = \frac{0.0002682}{4.1558503} = 0.0000645 < 0.0001.$$

Отже, наближення, обчислені на 3-му кроці ітерації, можна вважати за розв'язки системи (4.12) з похибкою 0,001; наближення, здобуті на 7-му кроці ітерації, – за розв'язки системи з похибкою 0.0001, тобто

$$x_1 = 3,487013; \; x_2 = 2,261424.$$

Процес ітерації для системи нелінійних рівнянь (4.12) збігається до єдиного її розв'язку, якщо кожна норма матриці G'(x) в заданому околі є менша за одиницю, тобто для збіжності розв'язків системи достатньою є умова

$$\|G'(x)\| < 1, \tag{4.16}$$

де $G'(x)$ – матриця частинних похідних, яку називають матрицею Якобі:

$$\mathbf{G}'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1} & \frac{\partial G_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Наприклад, перевіримо збіжність системи нелінійних рівнянь (4.15), перетворених з системи (4.10), для методу ітерацій. Обчислимо матрицю частинних похідних

$$\mathbf{G}'(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{x_2+5}{4\sqrt{\frac{x_1(x_2+5)-1}{2}}} & \frac{x_1}{4\sqrt{\frac{x_1(x_2+5)-1}{2}}}\\ \frac{1+\frac{3\cdot 0,4343}{x_1}}{2\sqrt{x_1+3\lg x_1}} & 0\end{bmatrix}.$$

В околі точки (x1 = 3,5 ± 0.1; x2 = 2,2 ± 0.1) значення частинних похідних задовольняють умовам

$$\left|\frac{\partial G_1}{\partial x_1}\right|\le 0.54;\quad \left|\frac{\partial G_1}{\partial x_2}\right|\le 0.27;\quad \left|\frac{\partial G_2}{\partial x_1}\right|\le 0.42;\quad \left|\frac{\partial G_2}{\partial x_2}\right|=0.$$

Підставимо ці значення в матрицю G'(x) та обчислимо її норми:

$\|G'(x)\|_m = 96,0$; $\|G'(x)\|_l = 81,0$; $\|G'(x)\|_E = 0,735$.

Вочевидь, що значення усіх норм матриці G'(x) є менші за одиницю, тобто система нелінійних рівнянь (4.10) задовольняє у умові збіжності методу простих ітерацій ($\|G'(x)\| < 1$).

У результаті розв'язання системи нелінійних рівнянь двома методами з однаковою точністю отримані однакові результати. Різниця тільки в тому, що в методі Ньютона розв'язок отримано за 4 ітерації, а в методі простої ітерації - за 7 ітерацій.

4.4. Метод Зейделя

Метод Зейделя для систем нелінійних рівнянь, як і для системи лінійних рівнянь, полягає у використовуванні уточнених значень змінних уже на поточному ітераційному кроці. Так, для уточнення на (k+1)-му кроці значення першої змінної (x_1) використовуємо усі значення попереднього k-го кроку, для другої змінної – значення x_1 (k+1)-го кроку, а для решти змінних – значення попереднього k-го кроку:

$$\begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = G_1(x_1^{(k)}, \quad x_2^{(k)}, \quad x_3^{(k)}, \ ..., \ x_n^{(k)}); \\ x_2^{(k+1)} = G_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \quad x_3^{(k)}, \ ..., \ x_n^{(k)}); \\ x_3^{(k+1)} = G_3(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k)}, \ ..., \ x_n^{(k)}); \\ . \\ x_n^{(k+1)} = G_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)}, ..., x_n^{(k)}). \end{array} \tag{4.17}$$

де k – номер кроку ітерації.

Умова завершення процесу розв’язання системи нелінійних рівнянь за методом Зейделя збігається з умовою (4.14) для методу простих ітерацій.

Приклад 4.2. Розв’яжемо методом Зейделя систему нелінійних рівнянь (4.10) з похибкою 0.0001.

Використовуватимемо цю систему, як і для методу ітерацій, у перетвореному вигляді

Перетворимо цю систему до вигляду (4.17), за якого можна використовувати метод Зейделя:

$$x_1 = \sqrt{\frac{x_1(x_2+5)-1}{2}} \equiv G_1(x_1, x_2);$$
$$x_2 = \sqrt{x_1 + 3\lg x_1} \equiv G_2(x_1, x_2).$$

Оберемо вектор початкового наближення x $^{(0)}$ – точку перетинання функцій графіка (див. рис. 4.1) з додатними значеннями $x_1^{(0)}$ =5,3; $x_2^{(0)}$ = 2,2. Підставимо ці значення у функції G_1 та G_2 та обчислимо перше наближення до розв’язків системи:

$$x_1^{(1)} = \sqrt{\frac{x_1^{(0)}(x_2^{(0)}+5)-1}{2}} = \sqrt{\frac{3.5(2.2+5)-1}{2}} = 3.478505;$$
$$x_2^{(1)} = \sqrt{x_1^{(1)} + 3\lg x_1^{(1)}} = \sqrt{3.478505 + 3\lg 3.478505} = 2.258912.$$

Подальші наближення обчислимо за поступового використовування формули (4.17) розв’язання системи на (k+1)-му кроці ітераційної процедури:

$$x_1^{(k+1)} = \sqrt{\frac{x_1^{(k)}(x_2^{(k)}+5)-1}{2}}$$
$$x_2^{(k+1)} = \sqrt{x_1^{(k+1)} + 3\lg x_1^{(k+1)}}$$

Відповідні значення поступових наближень розв’язків системи методом

Зейделя наведено в табл. 8.3.

Таблиця 8.3

Значення послідовних наближень розв'язку системи рівнянь методом Зейделя

k – номер кроку ітерації	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	3,5	2,2
1	3,478505	2,258912
2	3,482109	2,260008
3	3,484260	2,260662
4	3,485544	2,261052
5	3,486310	2,261284
6	3,486767	2,261423
7	3,487039	2,261506

Обчислимо похибки вектора наближень рівнянь за формулою (4.14): після 2-го кроку ітерації

$$\frac{\left\| \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} \right\|}{\left\| \mathbf{x}^{(1)} \right\|} = \frac{0.0037664}{4.1476118} = 0.000908 < 0.001;$$

після 9-го кроку ітерації

$$\frac{\left\| \mathbf{x}^{(9)} - \mathbf{x}^{(8)} \right\|}{\left\| \mathbf{x}^{(8)} \right\|} = \frac{0.0001014}{4.156346} = 0.0000244 < 0.0001.$$

Отже, наближення, обчислені на 2-му кроці ітерації, можна вважати за розв'язки системи (4.10) з похибкою 0.001; наближення, обчислені на 9-му кроці ітерації, – за розв'язки системи з похибкою 0.0001, тобто

$x1 = 3{,}487299$; $x2 = 2{,}261585$.

Зауважимо, що умови збіжності розв'язків системи нелінійних рівнянь для методу Зейделя є такі самі, як і для методу простих ітерацій ($\|G'(x)\| < 1$).

4.5. Висновки

1. Більшість математичних моделей різних процесів і явищ записуються в загальному випадку у вигляді (4.1).
2. Основними методами розв'язання систем нелінійних рівнянь є метод Ньютона, метод простої ітерації та метод Зейделя.

4.6. Контрольні запитання

1. Сформулюйте постановку задачі розв'язання системи нелінійних рівнянь.
2. У чому полягає метод Ньютона для розв'язання систем нелінійних рівнянь? Яка ідея методу? Вкажіть основні характеристики цього методу.
3. У чому полягає метод простої ітерації для розв'язання систем нелінійних рівнянь? Вкажіть основні характеристики цього методу.
4. У чому полягає метод Зейделя для розв'язання систем нелінійних рівнянь?

4.7. Завдання для самостійного опрацювання

1. Розв'яжіть систему нелінійних рівнянь

$$x_1 + 6x_1^2 - 2x_2x_3 - 0{,}5 = 0,$$

$$x_1 - x_2 + 3x_1x_3 + 4{,}9 = 0,$$

$$x_3^2 + 2x_2 + 2x_1x_2 - 8{,}03 = 0$$

методами: Ньютона, Зейделя та простої ітерації. Прийняти початкове наближення $x^0 = (0; 0; 0)$.

Порівняйте трудомісткість і швидкість збіжності методів.

РОЗДІЛ 5
ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ

5.1. Постановка математичної задачі оптимізації

В достатньо загальному вигляді математичну задачу оптимізації можна сформулювати так: мінімізувати (максимізувати) цільову функцію з урахуванням обмежень на керуючі змінні. Тобто для заданої функції $F(x)$ треба знайти x *, яке є мінімумом (чи максимумом) цієї функції на інтервалі $[a, b]$ із заданою точністю ε, тобто знайти

$$x^* = \min \{F(x)\}, \quad x^* \in [a, b]$$

чи

$$x^* = \max \{F(x)\}, \quad x^* \in [a,b]. \tag{5.1}$$

Функція $F(x)$ може мати кілька екстремальних (мінімальних і максимальних) значень.

Одновимірна оптимізація (пошук екстремумів функцій однієї змінної) є найпростішою і поширеною математичною задачею оптимізації, в якій цільова функція залежить від однієї змінної. Окрім того, до неї зводиться набагато більш складна задача - пошук екстремуму функції багатьох змінних.

5.2. Метод рівномірного пошуку екстремуму

Метод рівномірного пошуку мінімального значення функції заснований на тому, що змінній x присвоюється значення $x + x$ із кроком Δx = const і обчислюються значення $F(x)$. Якщо $F(x_{n+1}) < F(x_n)$, змінній x надається новий приріст Δx. Як тільки-но $F(x_{n+1})$ стане більше за $F(x_n)$, пошук припиняється (на рис. 5.1 - $F(x_4) > F(x3)$, тобто x^* є$[x_3, x_4]$).

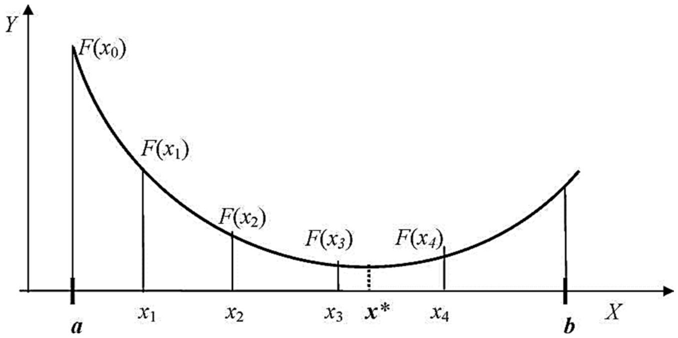


Рисунок 5.1 - Оптимізація методом рівномірного пошуку

При малій заданій похибці цей метод є неекономічний за витратами машинного часу, тому його застосовують тільки з відносно великим кроком Δx для попереднього обрання проміжку пошуку екстремуму. Схему алгоритму методу рівномірного пошуку наведено на рис. 5.2.

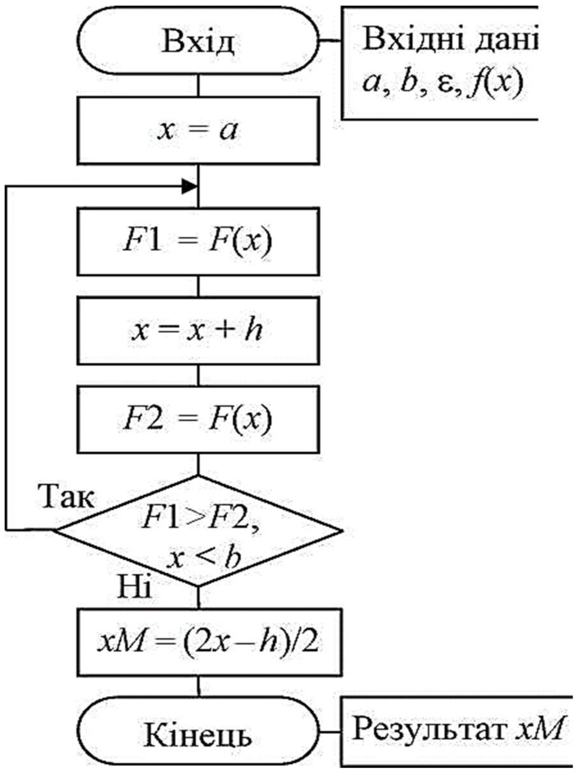


Рис. 5.2 - Блок-схема методу рівномірного пошуку екстремуму

Текст програми відповідно до цієї блок-схеми разом з програмним кодом для інших методів подано нижче.

5.3. Метод бісекції

Метод бісекції, відомий також під назвами *метод ділення навпіл* чи *метод дихотомії,* - найпростіший, надійний, але порівняно повільний метод. Суть методу в тому, що інтервал ділиться навпіл, обраховуються значення функції зліва та справа від точки поділу на відстані похибки є і в залежності від того, яке із значень функції більше змінюється границя інтервалу. Така процедура дозволяє виділити наполовину менший інтервал. Її повторюють доти, доки довжина інтервалу не стане меншою від заданої точності.

Цей метод є *методом прямого пошуку.* У ньому тільки обчислені значення цільової функції.

Запишемо докладний словесний алгоритм методу:

1) На кожному кроці процесу пошуку поділити відрізок *[a, b]* навпіл, тобто обчислити координату середини відрізка [*a, b*] за формулою

$$x = (a + b)/2.$$

2) Обчислити значення функції *F(x)* в околі обчисленої точки $x \pm є$ (рис. 5.3):

$$F1 = F(x - є),$$

$$F2 = F(x + є).$$

3) Порівняти $F1$ та $F2$ і відкинути одну з половинок відрізка *[a, b]* (рис. 5.3):

а) *при пошуку мінімуму методом бісекції:* якщо $F1 < F2$, відкинути відрізок *[x, b],* тоді $b = x$ (рис. 5.3,а), інакше - відкинути відрізок *[a, x]*, тоді $a = x$ (рис. 5.3,б);

б) *при пошуку максимуму:* якщо $F1 < F2$, відкинути відрізок [*a*, *x*], тоді $a = x$, інакше - відкинути відрізок [*x*, *b*], тоді $b = x$.

4) Ділення відрізка [*a*, *b*] триває, допоки його довжина не стане меншою за задану точність є, тобто $b - a\backslash < є$.

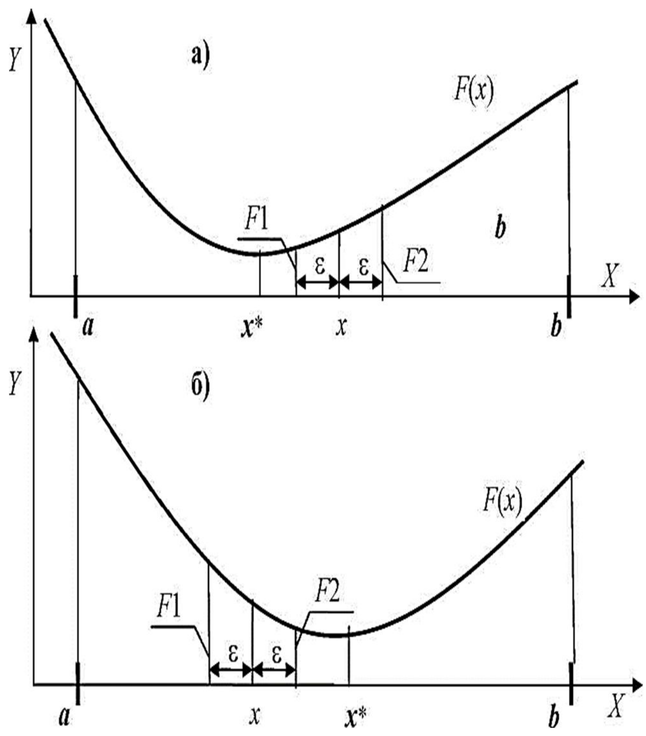


Рис. 5.3. Пошук екстремуму функції *F(X)* методом бісекції (дихотомії)

Схему алгоритму *методу бісекції* подано на рис. 5.4,

У блоці виведення результатів *x* - координата точки, у якій функція *F(x)* має мінімум (чи максимум), *FM* - значення функції *F*^) у цій точці.

Текст програми відповідно до цієї блок-схеми подано після далі, разом з програмним кодом для інших методів.

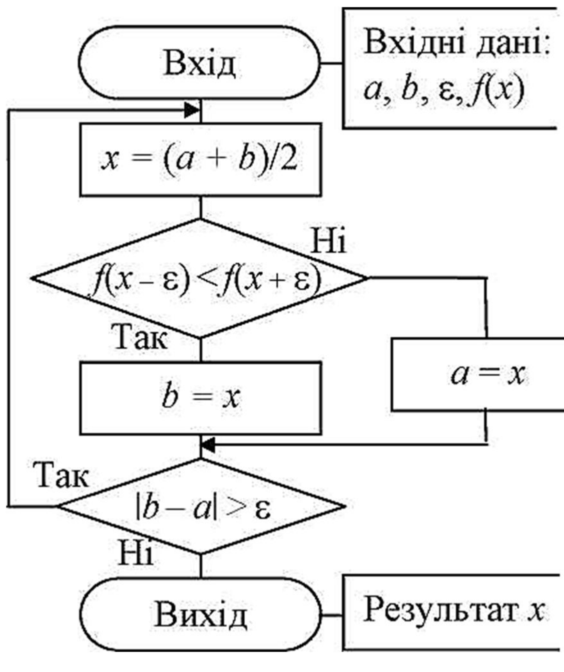


Рисунок 5.4 - Блок-схема функції пошуку екстремуму методом ділення навпіл

5.4. Метод "золотого перетину"

Розглянемо найбільш поширений метод одновимірної оптимізації - *метод "золотого перетину"*.

Точка золотого перетину x_1 поділяє відрізок *[a, b]* на дві частини так, що відношення більшої частини відрізка до цілого відрізка дорівнює відношенню меншої частини до більшого, тобто дорівнює так званому "золотому відношенню" (рис. 5.5):

$$\frac{b - x_1}{b - a} = \frac{x_1 - a}{b - x_1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0{,}618 \qquad (5.2)$$

На рис. 5.5 проілюстровано "золоте відношення" відрізків, де відрізки, позначені дугами догори, відповідають першому дробу рівняння (5.2), а відрізки, позначені дугами донизу, відповідають другому дробу рівняння. Точка x_2 є правою симетричною точкою золотого перетину на відрізку [a, b], якщо для неї виконується умова:

$$\frac{x_2 - a}{b - a} = \frac{b - x_2}{x_2 - a}$$

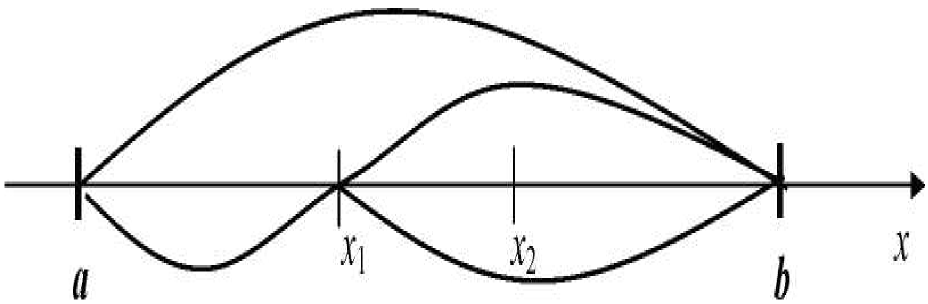


Рисунок 5.5 - Відношення відрізків за методом "золотого перетину"

***Алгоритм пошуку екстремуму методом "золотого перетину"* (рис. 5.6):**

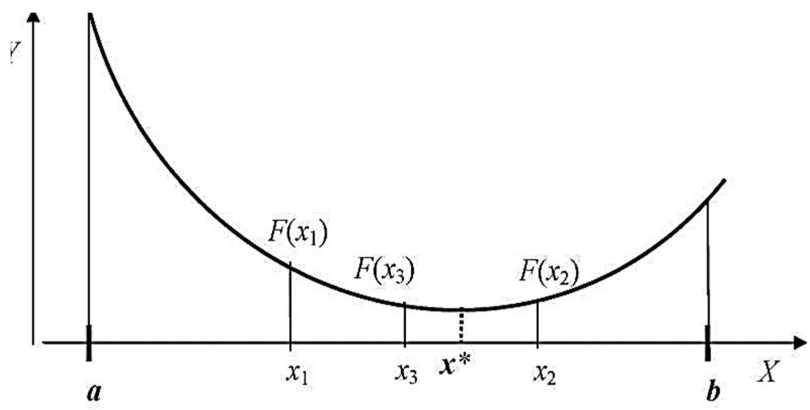


Рис. 5.6. Оптимізація методом «золотого перетину»

1) Обчислюємо значення симетричних точок золотого перетину

$$x_1 = a + (1 - \text{т})\,(b - a), \qquad x_2 = a + \text{т}\,(b - a),$$

де т = 0,618 коефіцієнт “золотого відношення”.

2) Обчислюємо значення функції в точках золотого перетину

$$F1 = F(x_1), \qquad F2 = F(x_2).$$

3) Порівнюємо $F1$ і $F2$ і відкидаємо одну з половинок відрізка $[a,$ b].

а) При пошуку мінімуму: якщо $F1 < F2$, то відкидаємо відрізок $[x_2, b]$, тоді $b = x_2$, інакше відкидаємо відрізок $[a, x_1]$, тоді $a = x_1$ (див. рис. 5.6).

б) При пошуку максимуму: якщо $F1 < F2$, то відкидаємо відрізок $[a, x_1]$, тоді $a = x_1$. Інакше відкидаємо відрізок $[x_2, b]$, тоді $b = x_2$.

4) Для знайденого у п. 3 зменшеного відрізка обчислюємо симетричну точку золотого перетину (наприклад, $x_3 = x_1 + (1 - \text{т})\,(b - x_1)$ - ліву точку золотого перетину відрізка $[x_1, b]$) і обчислюємо значення функції $F(x_3)$. Якщо ввести позначення $F1 = F2$, $F2 = F(x_3)$, то повернувшись до п. 3, можна продовжувати пошук екстремуму.

5) Ділення відрізка $[a, b]$ триває, допоки його довжина не стане меншою за задану точність є, тобто $|b - a| < \varepsilon$.

Блок-схему алгоритму подано на рис. 5.7. На блок-схемі результат X_M - це координата точки, у якій функція $F(x)$ має мінімум (чи максимум); X_L та X_r - значення лівої та правої точок золотого перетину; $f(X_L)$ та $f(X_r)$ - значення функції $F(x)$ в точках золотого перетину.

Метод “золотого перетину” гарантує знаходження мінімуму у самих несприятливих умовах і вимагає удвічі менше обчислень значень функції $F(x)$ порівняно з методом бісекції, однак він має більш повільну збіжність, оскільки на кожному кроці довжина відрізка для пошуку мінімуму зменшується тільки в 1.7 рази.

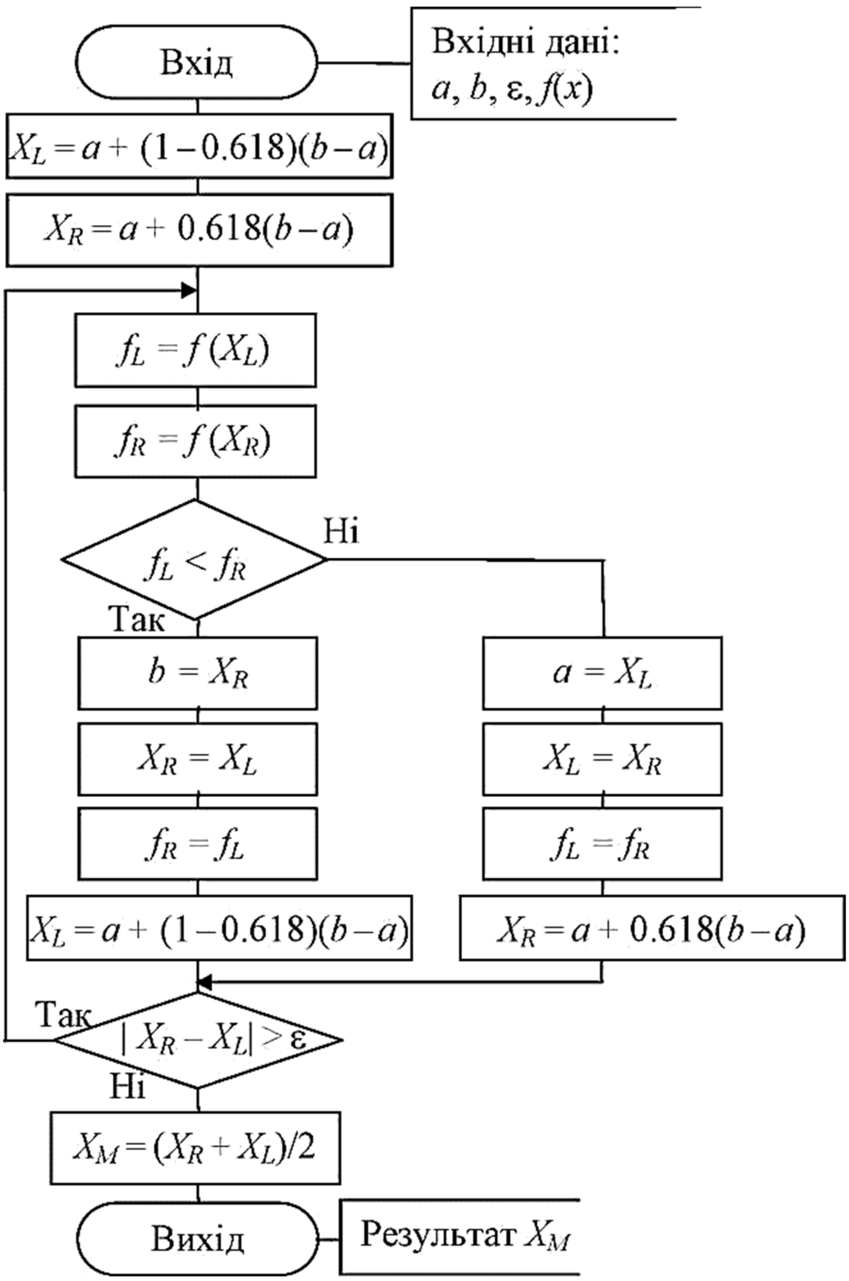


Рисунок 5.7 - Схема алгоритму методу “золотого перетину”

5.5. Реалізація програми одновимірної оптимізації у С++

Приклад 5.1.. Знайти мінімальне значення функції $f(x) = x^3 + x^2 - 6x - 4$ на проміжку [-1, 3] з кроком 0.05 методами рівномірного пошуку (кроковий), бісекції (дихотомії) та ’’золотого перетину”.

У цій програмі для порівняння роботи методів наведемо програмний код для усіх трьох розглянутих методів розв’язування задачі оптимізації.

Текст програми

```
#include "math.h" //Підключення бібліотеки математичних функцій С+ +
float F(float x) // Функція для пошуку мінімуму
{ return pow(x, 3) + pow(x, 2) - 6*x - 4;}
//------------- Функція методу рівномірного пошуку---------------------------------
double ravnomern(double a, double b, double h)
{ double F1, F2, x = a;
  do
    { F1 = F(x);
      x = x + h;
      F2 = F(x); }
    while (F1 > F2 && x <= b);
double xM = (2*x - h)/2;
return xM;
}
//-----------------Кнопка «Рівномірний пошук» ------------------------------
void fastcall TForm1::Button1Click(TObject *Sender)
{ float a, b, h, x, xM;
  a = StrToFloat(Edit1->Text);
  b = StrToFloat(Edit2->Text);
  h = StrToFloat(Edit3->Text);
  do // Побудова графіка функції F(x)
  { Series1->AddXY(x, F(x), "", clRed); x = x + h; } while (x <= b+h);
// Звертання до функції методу рівномірного пошуку
  xM = ravnomern(a, b, h);
//Виведення результатів
  Edit4->Text = FloatToStr(xM);
  Edit5->Text = FloatToStr(F(xM));
}
//-----------------Функція методу бісекції-------------------------------------------
double bis(double a, double b, double eps)
{ double x = a;
  do
    { x = (a+b)/2;
      if(F(x-eps)<F(x+eps)) b=x; else a=x; }
while (fabs(b-a) > eps);
double xM = (a+b)/2; return xM; }
//-----------------Кнопка «Метод бісекції» -----------------------------------------
void fastcall TForm1::Button2Click(TObject *Sender)
{ float a, b, eps, xM;
  a = StrToFloat(Edit1->Text);
 b = StrToFloat(Edit2->Text);
 eps = StrToFloat(Edit3->Text);
 xM = bis(a, b, eps);
 Edit6->Text = FloatToStr(xM);
```

```
 Edit7->Text = FloatToStr(F(xM));
}
//-------------------- Функція методу « золотого перетину»
double zolotoy(double a, double b, double eps)
{ double XL, XR, fL, fR;
 XL = a + (1 - 0.618)*(b-a);
 XR = a + 0.618*(b-a);
 fL = F(XL); fR = F(XR);
 do
   { if(fL < fR)
        { b=XR; XR=XL; fR=fL; XL=a+(1-0.618)*(b-a); fL = F(XL); } else { a=XL;
   XL=XR; fL=fR; XR = a + 0.618*(b-a); fR=F(XR); } } while (fabs(b-a)>eps);
 double xM = (a+b)/2;
 return xM;
 }
//-------------------- Кнопка «Метод золотого перетину» ---------------------------
void___fastcall TForm1::Button3Click(TObject *Sender)
{ float a, b, eps, xM;
 a = StrToFloat(Edit1->Text); b = StrToFloat(Edit2->Text);
 eps = StrToFloat(Edit3->Text);
 xM = zolotoy(a, b, eps);
 Edit8->Text = FloatToStr(xM);
 Edit9->Text = FloatToStr(F(xM));
}
```

Форма проекту з результатами:

5.6. Розв'язування задач оптимізації з обмеженнями (випадок задачі лінійного програмування)

5.6.1.Постановка задачі

Знайти мінімум лінійної цільової функції

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

при виконанні наступних обмежень:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots a_{1n} \cdot x_n \geq b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots a_{2n} \cdot x_n \geq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots a_{mn} \cdot x_n \geq b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j=1,\ldots,n$$

де C_j - коефіцієнти цільової функції $(j = 1, 2, \ldots ,n)$, a_{ij} - коефіцієнти системи обмежень $(i = 1, 2, \ldots,m)$, bi – значення вектору обмежень. Умова $x_i > 0$ свідчить про те, що значення вектору розв'язку задачі лінійного програмування не можуть бути від'ємними.

5.6.2. Розв'язання оптимізаційних задач в електронній таблиці Excel

Приклад 5.2. Методику розв'язку оптимізаційних задач симплексним методом в електронному процесорі Excel наведемо, розглядаючи класичну задачу оптимізації використання ресурсів.

Потрібно визначити оптимальне поєднання посівів трьох культур: капусти, томатів та багаторічних трав при умові, що господарство має 850 га ріллі, 50тис.люд.-днів трудових ресурсів та 15тон органічних добрив. Витрати цих ресурсів, а також вихід вартості валової продукції в розрахунку на 1 га посіву культур наведено в таблиці

Показники	Культури			наявність ресурсу
	капуста	томати	багаторічні трави	
Витрати праці, люд.-дні	50	30	15	5000
Витрати добрив, т	20	15	10	15000
Вартість валової продукції, грош.од.	1000	800	200	

Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо за x_1- посівну площу капусти, x_2- посівну площу томатів, x_3- посівну площу багаторічних трав.

Цільова функція задачі – максимум вартості валової продукції, грошові одиниці:

$Z=1000*x_1+800*x_2+200*x_3 \rightarrow max.$

Система обмежень:

1. по використанню ріллі, га: $x_1+x_2+x_3 \leq 850$;
2. по використанню трудових ресурсів, люд.-дні: $50*x_1+30*x_2+15*x_3 \leq 5000$;
3. по використанню добрив, т: $20*x_1+15*x_2+10*x_3 \leq 15000$

Умова невід'ємності змінних: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Матриця задачі буде мати вигляд:

№ з/п	Обмеження	Капуста, x_1	Томати, x_2	Багаторічні трави, x_3	Тип обм.	Наявність ресурсу
1	Використання ріллі, га	1	1	1	≤	850
2	Витрати праці, люд.-дні	50	30	15	≤	50000
3	Витрати добрив, т	20	15	10	≤	15000
	Вартість валової продукції, грош.од.	1000	800	200	→	max

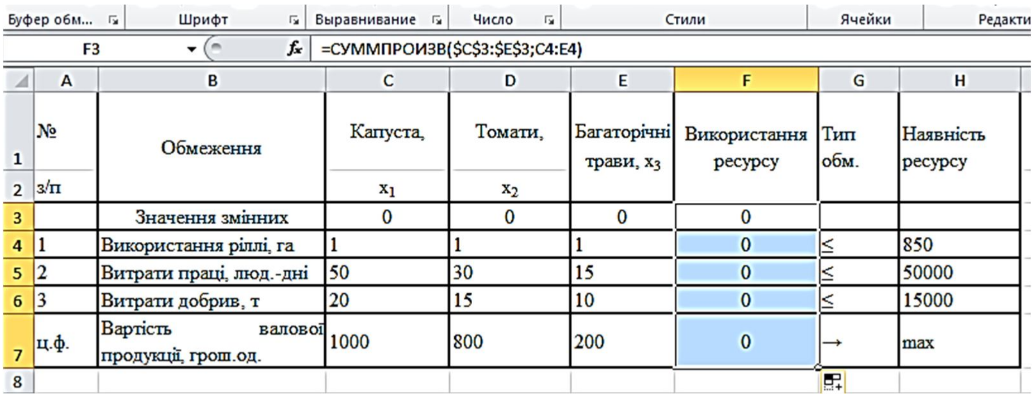
Алгоритм розв'язку задачі

1. Для наведеної задачі підготовимо форму для вводу умов (рис.5.8.).

Рис. 5.8. Форма для вводу даних

2. У нашій задачі оптимальні значення вектора $X=(X_1, X_2, X_3)$ після розв'язку задачі будуть розміщені в клітинках C3:E3, оптимальне значення цільової функції – в клітині F7.

3. Введемо дані задачі у підготовлену форму, отримаємо результат, зображений на рис. 5.9.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	№	Обмеження	Капуста,	Томати,	Багаторічні трави, x_3	Використання ресурсу	Тип обм.	Наявність ресурсу
2	з/п		x_1	x_2				
3		Значення змінних	0	0	0	0		
4	1	Використання ріллі, га	1	1	1	0	≤	850
5	2	Витрати праці, люд.-дні	50	30	15	0	≤	50000
6	3	Витрати добрив, т	20	15	10	0	≤	15000
7	ц.ф.	Вартість валової продукції, грош.од.	1000	800	200	0	→	max
8								

Рис. 5.9. Вигляд форми після введення даних

4. Введемо залежність для першого обмеження:

- Робимо активною клітину F4.
- Курсор на Мастер функций.
- На екрані з’являється діалогове вікно Мастер функций.
- З вікна Категория курсором вибираємо категорію Математические.
- У вікні Функции обираємо СУММПРОИЗВ.
- У масив 1 ввести C3:E3.
- У масив 2 ввести C4:E4. (рис 5.10)

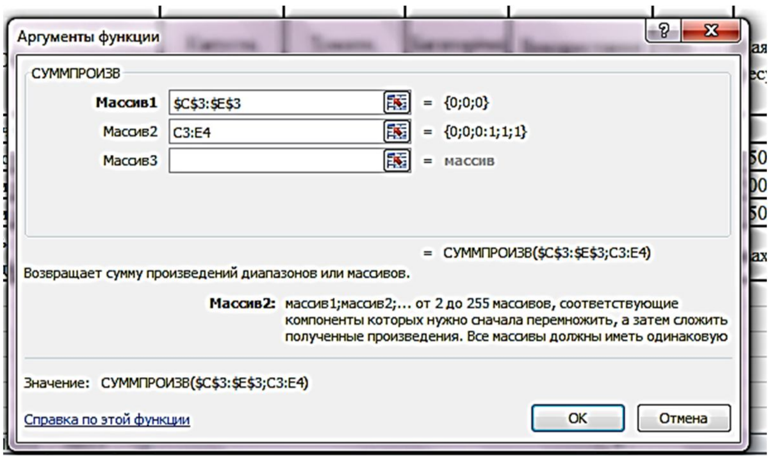


Рис. 5.10. Діалогове вікно функції «СУММПРОИЗВ»

Зауваження: Адреси клітин в усі діалогові вікна зручно вводити не з клавіатури, а рухаючись мишкою по клітинах, адреси яких слід ввести.

Установку першого обмеження завершено.

5. Введемо залежності для лівих частин обмежень: або аналогічно попередньому кроці вводимо функції для лівих частин, або з клітини F7 копіюємо формулу в F4,F5, F6, коригуючи адреси клітинок. На цьому завершено введення залежностей.

2. Запуск сервісної програми «ПОИСК РЕШЕНИЯ»

Запуск сервісної програми «ПОИСК РЕШЕНИЯ» відбувається зі закладки «Данные» електронної таблиці Excel.

Якщо такої сервісної програми на закладці данні немає, то її слід завантажити. Завантаження надбудови відбувається за наступним алгоритмом:

Файл→ПараметриНадстройки →Перейти на надбудови Excel.

У вікні, що відкрилося (рис. 5.11) позначити прапорцем надбудову «Поиск решений».

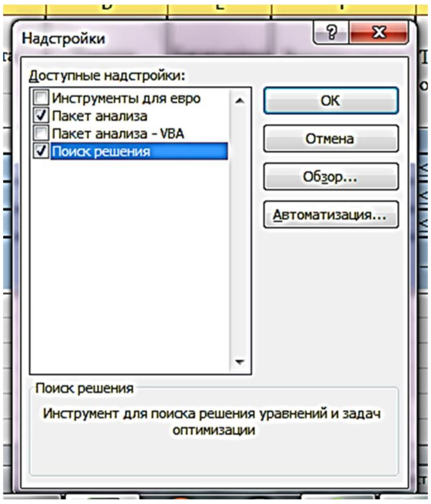


Рис. 5.11. Надбудови Excel.

Після завантаження надбудови «Поиск решения» з’явиться діалогове вікно -Поиск решения- (рис. 5.12).

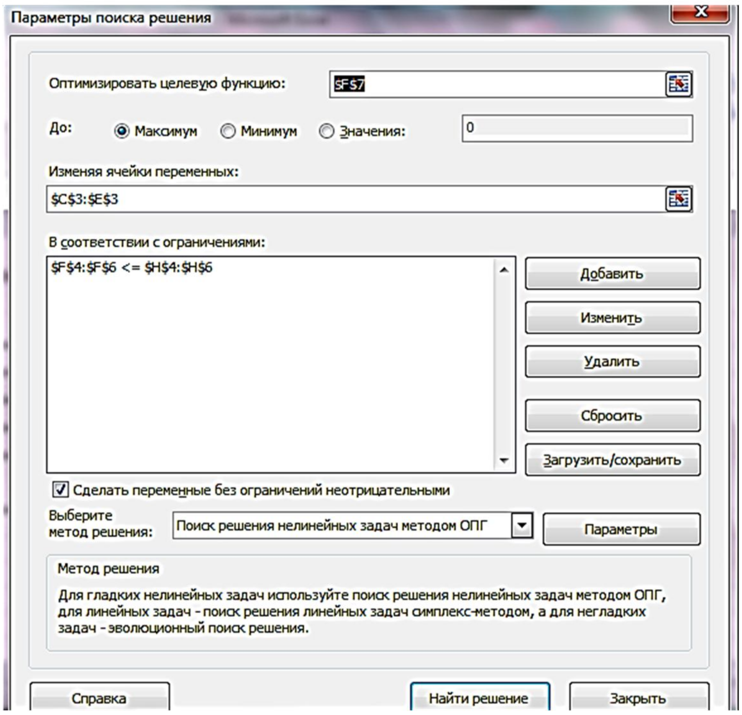


Рис.5.12. Діалогове вікно надбудови «Поиск решения»

У діалоговому вікні Поиск решения є три основних параметра:

- Установить целевую функцию;
- зменяя ячейки;
- Ограничения.

Насамперед необхідно заповнити поле -Установить целевую функцию – тобто вказати адресу клітини, в якій введена формула для обчислення цільової функція, або відкрити надбудову «ПОИСК РЕШЕНИЯ» з цієї клітини .

У всіх задачах для засобу «Поиск решения» оптимізується результат в одній з клітин робочого листа. Цільова функція зв'язана з іншими клітинами цього листа за допомогою формул. Засіб «Поиск решения» дає можливість обрати пошук найменшого чи найбільшого значення для цільової функції, або встановити конкретне значення.

Другий важливий параметр засобу Поиск решения – Изменяя ячейки.

– Изменяемые ячейки- – це клітини, значення в яких будуть змінюватися, для того щоб оптимізувати результат у цільовій клітині.

Для розв'язку задачі можна вказати до 200 таких клітин, але до них є дві основних умови: вони не мають містити формули і зміна їх значень повинна впливати на зміну значення цільової функції, тому цільова клітина залежна від Изменяемых ячеек.

Третій параметр, що необхідно встановити – Ограничения

6. Призначення цільової функції.

– Навести курсор у поле Установить целевую функцию. _ Ввести адресу клітини F5.
– Ввести напрямок цільової функції (максимального значення).
– Ввести адреси змінних:
– Навести курсор у поле -Изменяя ячейки-_ Ввести адреси С3:Е3.

7. Вводимо обмеження:

Курсор у поле Добавить, з'являється діалогове вікно Добавление ограничений (рис. 5.13.)

– У полі -Ссылка на ячейку- ввести адресу F7.
– Ввести знак обмеження.
– Обсяг обмеження вводимо в полі – Ограничения- .
– Добавить. Аналогічно ввести решту обмежень.
– Після останнього обмеження ввести ОК.

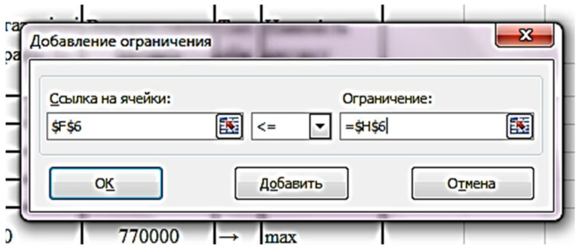


Рис. 5.13. Формування обмежень

На екрані з'являється діалогове вікно Поиск решения з введеними умовами (рис.5.14)

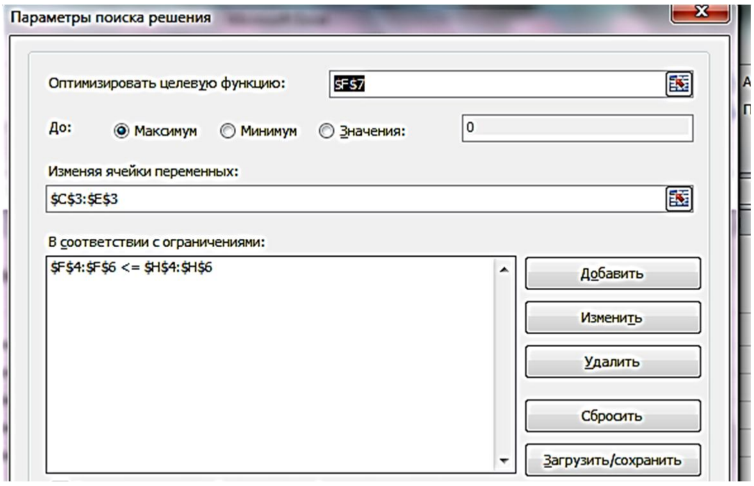


Рис. 5.14.Сформовані та введені всі умови для розв'язку задачі

8. Визначаємо прапорцем «Сделать переменные без ограничений неотрицательными» (рис. 5.15).

9. Обираємо метод розв'язання задачі (Рис.5.16)

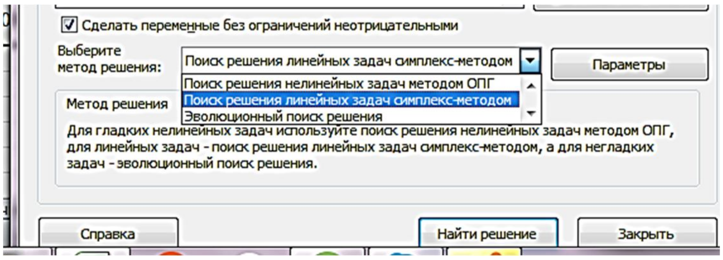


Рис.5.15.Параметри для ЗЛП

10. Натиснути на екранну кнопку «Найти решение».
11. ОК - На екрані з'явиться вікно -Поиска решения-._ Выполнить. На екрані з'явиться діалогове вікно Результаты поиска решений – рис. 5.16.

F10

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	№	Обмеження	Капуста,	Томати,	Багаторічні трави, x_3	Використання ресурсу	Тип обм.	Наявність ресурсу
2	з/п		x_1	x_2				
3		Значення змінних	450	400	0			
4	1	Використання ріллі, га	1	1	1	850	≤	850
5	2	Витрати праці, люд.-дні	50	30	15	34500	≤	50000
6	3	Витрати добрив, т	20	15	10	15000	≤	15000
7	ц.ф.	Вартість валової продукції, грош.од.	1000	800	200	770000	→	max

Рис. 5.16. Оптимальний розв'язок знайдено

Розв'язавши задачу ми отримали такий результат:

$$X_1 = 450,\ X_2 = 400\ ,\ X_3 = 10,\ F = 770000.$$

Отриманий оптимальний розв’язок означає, що максимальну виручку від вирощування культур – 770000 грош.од. фермер зможе отримати при вирощуванні капусти на площі 450гектар, томатів – 400 гектар, а багаторічні трави вирощувати невигідно. При цьому рілля та добрива використовуються повністю, а трудові ресурси є в залишку.

5.7. Транспортна задача лінійного програмування

5.7.1. Постановка задачі

Транспортна задача - це одна з типових задач оптимізації, де цільова функція та функції обмежень лінійні. Транспортна задача є типовою задачею лінійного програмування, тобто, її розв'язок можна отримати звичайним симплексним методом. Однак, у деяких випадках застосування стандартних алгоритмів є нераціональним. Специфічна структура транспортної задачі дає змогу отримати альтернативний метод пошуку оптимального плану за простішою процедурою ніж процедура симплексного методу. Транспортна задача належить до типу розподільчих задач лінійного програмування. Економічний зміст таких задач описує різновид проблематики, яка може не бути пов'язаною із перевезенням вантажів, як, наприклад, задачі оптимального розміщення виробництва, складів, оптимального призначення тощо.

Класична транспортна задача лінійного програмування формулюється так: деякий однорідний продукт, що знаходиться у m постачальників A_i в обсягах $a_1, a_2, ..., a_m$ одиниць відповідно необхідно перевезти n споживачам B_j в обсягах $b_1, b_2, ..., b_n$ одиниць. При цьому виконується умова, що загальний наявний обсяг продукції у постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів. Відомі вартості c_{ij} перевезень одиниці продукції від кожного A_i-го постачальника до кожного B_j-го споживача, що подані як елементи матриці виду:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Необхідно визначити план перевезень, згідно якого вся продукція була б вивезена від постачальників, повністю задоволені потреби споживачів і загальна вартість всіх перевезень була б мінімальною. У такій постановці задачі ефективність плану перевезень визначається його вартістю і така задача має назву транспортної задачі за критерієм вартості перевезень.

У скороченій формі запису математична модель транспортної задачі за критерієм вартості перевезень має такий вигляд:

$$\min F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{5.3}$$

за обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}); \tag{5.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}); \tag{5.5}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad (i = \overline{1, m}; \quad i = \overline{1, n}). \dots\dots \qquad \dots\dots\dots (5.6)$$

У розглянутій задачі має виконуватися умова:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots (5.7)$$

Транспортну задачу називають збалансованою, або закритою, якщо виконується умова (5.7). Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають незбалансованою, або відкритою.

Домовимося планом транспортної задачі називати будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (5.3)-(5.6), який позначають матрицею $X = x_{ij}$ $(i = \overline{1, m}; \; j = \overline{1, n})$. Значення невідомих величин x_{ij} – обсяги продукції, що мають бути перевезені від i-х постачальників до j-х споживачів, називатимемо перевезеннями.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = x_{ij}^*$ $(i = \overline{1, m}; \quad i = \overline{1, n})$, яка задовольняє умові задачі, і для якої цільова функція (5.3) набирає найменшого значення.

Умова існування розв'язку транспортної задачі: необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є її збалансованість:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Якщо при перевірці збалансованості (5.7) виявилося, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Це здійснюється введенням фіктивного (умовного) постачальника A_{m+1} у разі перевищення загального попиту над запасами із обсягом ресурсу $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = a_{m+1}$.

Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів, то до закритого типу задача зводиться введенням фіктивного (умовного) споживача B_{n+1} з потребою $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1}$.

Вартість перевезення одиниці продукції від фіктивного постачальника A_{m+1} (або фіктивного споживача B_{n+1}) до кожного зі споживачів (виробників) має дорівнювати нулю або бути набагато більшою за реальні витрати c_{ij} $(i = \overline{1, m}; \quad i = \overline{1, n})$. Як правило, у такому разі використовують нульові значення вартостей перевезень, що дає змогу спростити обчислення.

Таким чином, транспортна задача - це визначення мінімальних сумарних витрат на перевезення вантажів при виконанні умов повного задоволення попиту

5.7.2.Приклад розв’язання транспортної задачі в табличному процесорі Excel

Приклад 5.3. У господарстві весняно-польові роботи проводяться в середньому з 25 березня до 28 квітня. В цей період потрібно виконувати роботи в певному обсязі. Для виконання заданого обсягу робіт господарство має машинно-тракторний парк. Собівартість 1 ум. ет. га (грн.) (табл. 5.1). Побудувати економіко-метематичну модель та розв’язати її методом потенціалів.

Заплановані обсяги робіт: закриття вологи- 4400; предпосівна культивація – 4400; сівба зернових – 2800; сівба пропасних – 1000; закоткування – 2100 умовних еталонних гектари. Потужність машинно-тракторного парку: Т-150 – 3800; ДТ-75 – 3500; Т-40 – 900; МТЗ-82 - 6500 умовних еталонних гектари.

Таблиця 5.1

Собівартість 1 умовного еталонного гектара (грн.)

Види робіт	Т-150	ДТ-75	Т-38	МТЗ-82
Закриття вологи	3,3	3,2	-	4,4
Передпосівна культивація	2,6	2,8	2,4	-
Сівба зернових	7,2	5,6	4,4	5,0
Сівба пропасних	6,0	5,6	-	4,6
Закоткування	-	1,5	1,6	2,0

Складемо економіко-математичну модель задачі. Позначимо x_{ij} – об’єм виконання і роботи j маркою трактора, умовні га.

Система обмежень задачі:

І. По виконання плану робіт, ум. га:

1. закриття вологи - $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 4400$
2. передпосівна культивація - $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 4400$
3. сівба зернових - $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 2800$
4. сівба пропашних - $x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1000$
5. закоткування - $x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 2100$

ІІ. По потужності тракторів, ум. га

1. Т-150 - $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 3800$
2. ДТ-75 - $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 3500$
3. Т-38 - $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 900$

4. МТЗ-82 - $x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 6500$

Цільова функція – мінімум витрат на виконання робіт:

$Z_{min} = 3{,}3x_{11} + 3{,}2x_{12} + 0x_{13} + 4{,}4x_{14} + 2{,}6x_{21} + 2{,}8x_{22} + 2{,}4x_{23} + 0x_{24} + 7{,}2x_{31} + 5{,}6x_{32} + 4{,}4x_{33} + 5{,}0x_{34} + 6{,}0x_{41} + 5{,}6x_{42} + 0x_{43} + 4{,}6x_{44} + 0x_{51} + 1{,}5x_{52} + 1{,}6x_{53} + 2{,}0x_{54}.$

Перевіримо тип задачі – закритий чи відкритий:

4400 + 4400 + 2800 + 1000 + 2100 = 14700

3800 + 3500 + 900 + 6500 = 14700

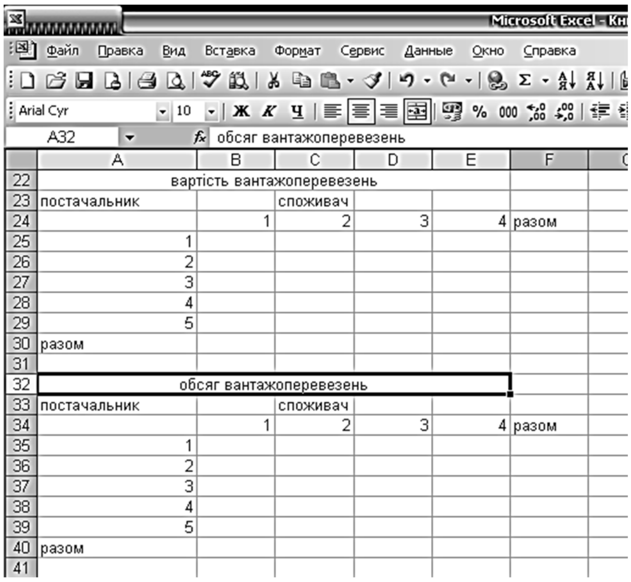
Розв'язання задачі в електронних таблицях Excel при мінімізації витрат на перевезення. При плануванні значних обсягів перевезень вантажів завжди з'являється задача оптимальної (за певним критерієм) оцінки їх організації. Розглянемо транспортну задачу за критерієм вартості перевезення. Відомі наявності вантажу у постачальників і потреби споживачів. Розташуємо вихідні дані в електронних таблицях, як показано на рис. 5.17.

	A	B	C	D	E	F
1	постачальник	вантаж		споживач	вантаж	
2	1 Закриття вологи	4400		Т-150	3800	
3	2 Передпосівна культивація	4400		ДТ-75	3500	
4	3. Сівба зернових	2800		Т-40	900	
5	4 Сівба пропасних	1000		МТЗ-82	6500	
6	5. Закоткування	2100		Всього	14700	
7	Всього	14700				
8						
9	Задано тарифи на перевезення 1 т вантажу (грн./т) від кожного постачальника кожному споживачеві					
10						
11	Види робіт	Т-150	ДТ-75	Т-38	МТЗ-82	
12	Закриття вологи	3,3	3,2	-	4,4	
13	Передпосівна культивація	2,6	2,8	2,4	-	
14	Сівба зернових	7,2	5,6	4,4	5	
15	Сівба пропасних	6	5,6	-	4,6	
16	Закоткування	-	1,5	1,6	2	
17						

Рис. 5.17. Розташування вихідних даних в електронній таблиці

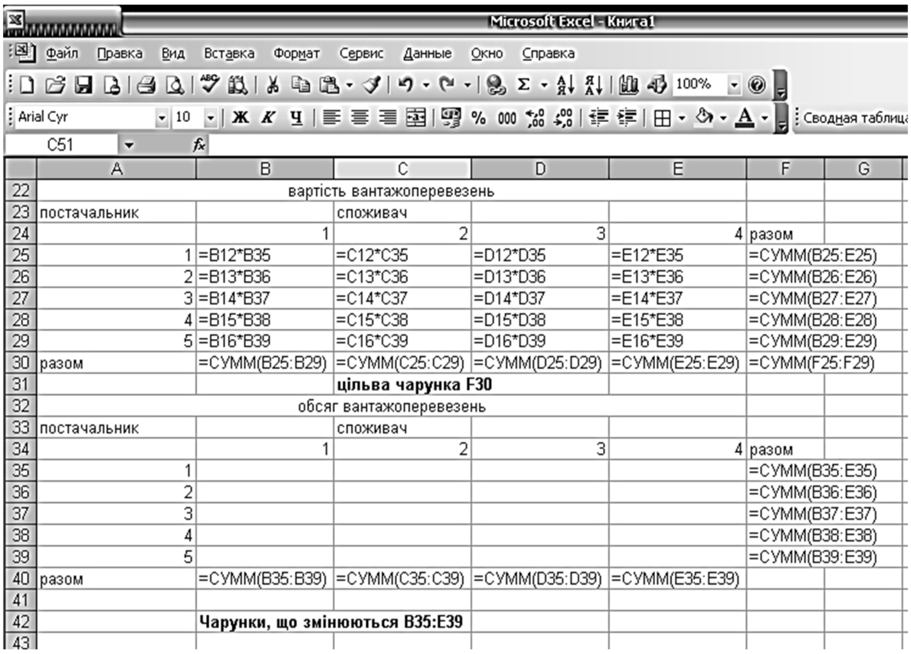
Для розв'язання задачі необхідно:

- побудувати таблиці для розрахунків, як показано на рис. 5.18;
- у чарунку В25 ввести формулу =B12*B35 (вартість перевезення вантажу від першого постачальника до першого споживача) і продублювати цю формулу, як показано на рис. 5.19;



	A	B	C	D	E	F
22	вартість вантажоперевезень					
23	постачальник		споживач			
24		1	2	3	4	разом
25	1					
26	2					
27	3					
28	4					
29	5					
30	разом					
31						
32	обсяг вантажоперевезень					
33	постачальник		споживач			
34		1	2	3	4	разом
35	1					
36	2					
37	3					
38	4					
39	5					
40	разом					
41						

Рис. 5.18. Побудова таблиць для розрахунків



	A	B	C	D	E	F	G
22	вартість вантажоперевезень						
23	постачальник		споживач				
24		1	2	3	4	разом	
25	1	=B12*B35	=C12*C35	=D12*D35	=E12*E35	=СУММ(B25:E25)	
26	2	=B13*B36	=C13*C36	=D13*D36	=E13*E36	=СУММ(B26:E26)	
27	3	=B14*B37	=C14*C37	=D14*D37	=E14*E37	=СУММ(B27:E27)	
28	4	=B15*B38	=C15*C38	=D15*D38	=E15*E38	=СУММ(B28:E28)	
29	5	=B16*B39	=C16*C39	=D16*D39	=E16*E39	=СУММ(B29:E29)	
30	разом	=СУММ(B25:B29)	=СУММ(C25:C29)	=СУММ(D25:D29)	=СУММ(E25:E29)	=СУММ(F25:F29)	
31			**цільва чарунка F30**				
32	обсяг вантажоперевезень						
33	постачальник		споживач				
34		1	2	3	4	разом	
35	1					=СУММ(B35:E35)	
36	2					=СУММ(B36:E36)	
37	3					=СУММ(B37:E37)	
38	4					=СУММ(B38:E38)	
39	5					=СУММ(B39:E39)	
40	разом	=СУММ(B35:B39)	=СУММ(C35:C39)	=СУММ(D35:D39)	=СУММ(E35:E39)		
41							
42		**Чарунки, що змінюються B35:E39**					
43							

Рис. 5.19. Введення формул

- загальні витрати, тобто вартість перевезень всього вантажу, обчислити чарунці F30 як загальну суму витрат усіх постачальників (цільова функція повинна мати мінімальне значення);

- вибрати команду **Сервис – Поиск решения**;

- у вікні **Поиск решения** заповнити поля, як показано на рис. 5.20, встановивши обмеження - обсяг вантажу, який перевезений споживачеві, і який повинен дорівнювати його потребам; обсяг вантажу, який перевезений постачальником, і який повинен дорівнювати його можливостям;

- натиснути кнопку **Параметри** та встановити їх значення: модель э лінійною; значення змінних є невід'ємними і натиснути клавішу ОК;

- у вікні **Поиск решения** натиснути кнопку **Выполнить;**

Слід відмітити, що при заповненні таблиць, в чарунках при записуванні формул, після натискування <Enter> будуть записуватися числові значення.

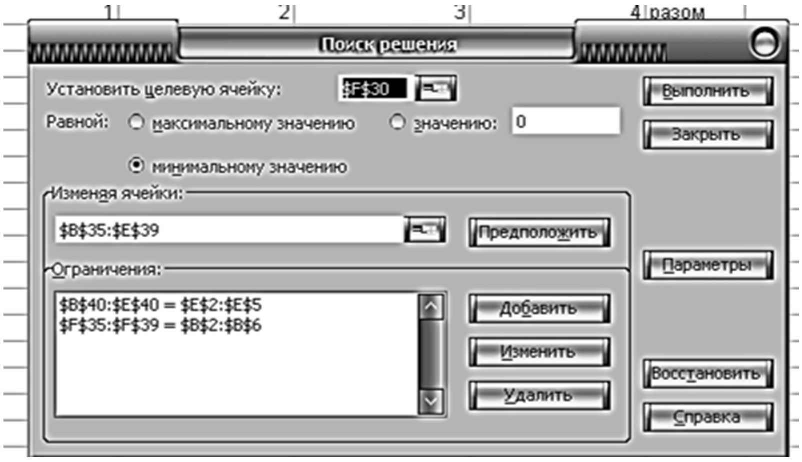
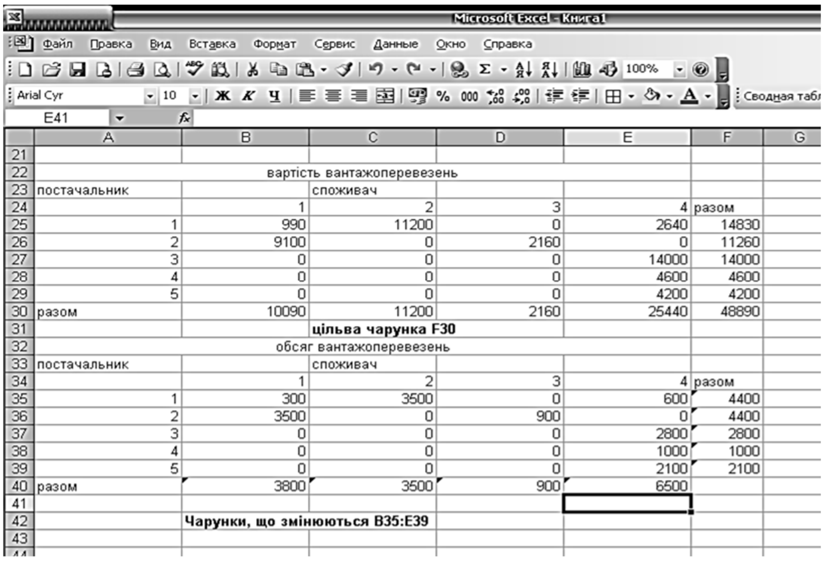


Рис. 5.20. Заповнення вікна "Поиск решений"

План вантажоперевезень, який одержано за допомогою надбудови Excel **Поиск решения** (рис. 5.21), забезпечить мінімальні витрати на виконання робіт в розмірі 48890 грн.



	A	B	C	D	E	F
21						
22		вартість вантажоперевезень				
23	постачальник		споживач			
24		1	2	3	4	разом
25	1	990	11200	0	2640	14830
26	2	9100	0	2160	0	11260
27	3	0	0	0	14000	14000
28	4	0	0	0	4600	4600
29	5	0	0	0	4200	4200
30	разом	10090	11200	2160	25440	48890
31			цільва чарунка F30			
32		обсяг вантажоперевезень				
33	постачальник		споживач			
34		1	2	3	4	разом
35	1	300	3500	0	600	4400
36	2	3500	0	900	0	4400
37	3	0	0	0	2800	2800
38	4	0	0	0	1000	1000
39	5	0	0	0	2100	2100
40	разом	3800	3500	900	6500	
41						
42		Чарунки, що змінюються B35:E39				
43						

Рис. 5.21. Таблиця, що містить оптимальний розв'язок задачі

Випишемо розв'язок задачі

$$X= \begin{vmatrix} 300 & 3500 & 0 & 600 \\ 3500 & 0 & 900 & 0 \\ & & & 2800 \\ & & & 1000 \\ & & & 2100 \end{vmatrix}$$

Вартість виконання робіт становить 48890.

5.8. Висновки

1. В достатньо загальному вигляді математичну задачу оптимізації можна сформулювати так: мінімізувати (максимізувати) цільову функцію з урахуванням обмежень на керуючі змінні.
2. Оптимізаційні задачі з обмеженнями лінійного програмування можуть бути розв'язаними в електронних таблицях Excel надбудова «Поиск решений»

5.9. Завдання для самостійного опрацювання

1. При виготовленні тари для бандеролей та посилок використовують три види ресурсів, запаси яких обмеженні. Норми витрат ресурсів на кожний виріб, ціна одиниці виробу та обмеження на запаси ресурсів подано нижче (a=0,1 $n+2$, де n - номер варіанту):

Ресурси	Норми витрат на 1 од. виробу		Запаси ресурсу
	Бандеролі	Посилки	
Картон	2+a	8-a	360
Трудові витрати	6—a	4	192
Електроенергія	2	3+a	180
Прибуток за 1 од. виробу	12	16	

Скласти план випуску виробів (кількість бандеролей та посилок), що забезпечує максимальний прибуток за вартістю. Завдання виконати графічно, в Excel.

2. Оптимізація з обмеженнями (Транспортна задача).

Розв'язати в Excel задачу перевезення вантажу з вузлів зв'язку на пункти сортування. У відділеннях зв'язку *ВЗ1, ВЗ* $_2$, *ВЗ*$_3$, *ВЗ*$_4$, *ВЗ*$_5$, *ВЗ*$_6$ накопичено вантажі відповідно в об'ємах: 20 +10n, 30, 30 + 10$ц$, 40, 25, 15 (центнерів), де n -

номер індивідуального варіанта. Пункти сортування *ПС1, ПС*$_2$*, ПС*$_3$ можуть прийняти вантажі у об’ємах, що становлять відповідно: 60+10*n*, 50+10*П* і 50 (центнерів). Відомі вартості перевезень одного центнера вантажу з кожного відділення зв'язку в кожний пункт сортування (матриця вартостей):

	ПС1	***ПС2***	***ПС3***
ВЗ1	10	8	5
ВЗ2	5	6	6
ВЗ3	4	8	7
ВЗ4	11	4	5
ВЗ5	2	6	10
ВЗ6	4	3	8

Визначити за допомогою Excel такий план перевезень, щоб його сумарна вартість була мінімальна, й при цьому вантаж був би вивезений із всіх відділень, а кожний пункт сортування одержав необхідну кількість вантажу.

3. Визначити проміжки унімодальності (для мінімумів та максимумів) функції

$$f(x) = x^3 - X - 4.4ax + 4a$$

на заданому проміжку [-4, 4]

4. Обчислити координати усіх точок екстремумів (локальних мінімумів та максимумів) мовою С++ методами Рівномірного пошуку, бісекції та «золотого перетину». Порівняти результати.

РОЗДІЛ 6
МЕТОДИ ОБРОБКИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ. АПРОКСИМАЦІЯ, ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТА ЕКСТРАПОЛЯЦІЯ

Задача наближення функцій виникає при розв'язанні багатьох практичних і теоретичних задач, а інколи і як самостійна. Так, наближення функцій є важливим допоміжним апаратом при розв'язанні інших задач чисельного аналізу: чисельного інтегрування і диференціювання, розв'язання диференціальних рівнянь, розв'язання систем нелінійних рівнянь, задач оптимізації та ін.

6.1. Постановка задачі. Поняття апроксимації та інтерполяції

Слід розглянути декілька постановок задачі наближення функцій.

Постановка 1. Проста задача, що приводить до наближення функцій, полягає в наступному. Нехай є деяка функція $f(x)$, $f: R^1 \to R^1$, про яку відомо, що в n точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вона приймає, відповідно, значення $y_1, y_2, \ldots, y_n$, тобто $y_i = f(x_i)$, $i=\overline{1,n}$ Потрібно відновити її значення при інших значеннях $x \in (x_1, x_n)$.

Функція $y = f(x)$ може бути як невідомою, тобто її значення тільки вимірюються (так званий "чорний ящик"), так і просто дуже складною для обчислень. Наприклад, вона може використовуватися в яких-небудь фізико-технічних або суто математичних розрахунках, де її доводиться багато разів обчислювати. Слід зазначити, що якщо функція $y = f(x)$ невідома, то набір точок (x_i, y_i) , $i = \overline{1,n}$, називають **табличним заданими функціями**, оскільки ці значення подають у вигляді таблиці.

У цих випадках функцію $f(x)$ стараються замінити на простішу функцію $g(x;a)$, близьку до $f(x)$, тобто:

$$f(x) \approx g(x;a), \tag{6.1}$$

де $a \in R^k$, $a = (a_1,a_2, \ldots,a_k)^T$ –деякі параметри функції g, вид якої відомий. Процес наближення однієї функції іншою ще називають **апроксимацією**, а функцію g при цьому називають **апроксимуючою** для f .

Варто зазначити, що параметри $a \in R^k$ є інструментом для наближення функції g до функції f .

Якщо параметри $a_1, a_2, \ldots,a_n$ визначаються з умови збігу значень функції $f(x)$ і апроксимуючої функції в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$, тобто:

$$g(x_i;a) = f(x_i),\ \forall\ i = \overline{1,n},$$

то такий спосіб наближення називають **інтерполяцією** або **інтерполюванням**.

Слід зазначити, що точки x_i, $i = \overline{1,n}$ називають **вузлами інтерполяції** або ще **полюсами**, тобто "інтерполяція" - це відновлення функції між полюсами.

Постановка 2. У задачах планування експериментів виникає така проблема. Відомо вид гарного наближення функції, наприклад функція $f(x)$ добре наближається поліномом 2-го ступеня. В той же час вимірювані значення функції y_i мають великі помилки. Потрібно отримати найкраще в певному значенні наближення при мінімальній кількості вимірювань. Така задача виникає при плануванні експериментів в біології, хімії, фізиці, географії, військовій справі та ін.

Постановка 3. Задача наближення функцій розв'язується і при складанні стандартних процедур обчислення елементарних і спеціальних функцій, наприклад $cos(x)$, $sin(x)$ й ін. Так:

$$\begin{gathered} e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \\ sin(x) \approx x + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \end{gathered} \tag{6.1}$$

де n підбирається так, щоб забезпечити достатню точність обчислень.

6.2. Метод найменших квадратів для апроксимації функцій

Найбільш відомим і ефективним із методів розв'язання задачі апроксимації функцій (6.1) є **метод найменших квадратів (МНК).** МНК призначений безпосередньо для знаходження параметрів a апроксимуючої функції $g(x;a)$, вид якої вже обраний. Суть метода полягає в такому.

Вводиться функція від a виду:

$$\Phi(a) \equiv \sum_{i=1}^{n}[(y_i - g(x_i;a)]^2 , \qquad (6.2)$$

яку можна розглядати як міру відхилення функції $g(x;a)$ (по аргументу x) від функції $f(x)$ по сукупності точок $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Тоді параметри a функції $g(x;a)$ можна визначити з умови найменшого відхилення $g(x;a)$ від $f(x)$, тобто параметри a знаходяться як точка, в якій функція $\Phi(a)$ досягає по $a \in R^k$ мінімального значення (точка мінімуму). Нехай a^* - шукані параметри. При цьому величини

$$r_i \equiv y_i - g(x_i;\, a^*), \quad i=\overline{1,n}$$

називаються **залишковими відхиленнями** (або **залишками)**і використовуються для аналізу отриманого розв'язку.

Вид графіка залишків дозволяє оцінити, наскільки правильно спочатку був вибраний вид апроксимуючої функції $g(x;a)$. Якщо в графіку залишків спостерігається деяка функціональна закономірність (наприклад, парабола), то це означає, що цю закономірність потрібно перенести в апроксимуючу функцію. Нормальною є ситуація, коли графік залишків має вид ламаної синусоїди, іншими словами, має випадковий характер.

Слід зазначити, що метод найменших квадратів зазвичай застосовують для розв'язання задачі наближення функцій у постановці 2.

Приклад 6.1. Використовуючи метод найменших квадратів, підібрати найкращу апроксимацію поліномом (визначити його степінь) для функції, заданої таблицею:

x	- 1,5	- 1	- 0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
У	9,8	6,4	5,2	1,7	2,9	5,6	7,2	16,5	27,5

Розв'язання в електронному процесорі Excel.

Побудуємо точкову діаграму та добавимо лінію тренду, яка будується за методом найменших квадратів. Визначимо для тренду вид апроксимуючого поліному та коефіцієнт детермінації. Коефіцієнт детермінації показує ступінь відповідності апроксимуючого поліному таблично заданій функції. На рисунках 6.1, 6.2, 6.3 показано апроксимацію функції поліномами першого, другого та третього ступені. За значенням коефіцієнта детермінації можна зробити висновок, яка апроксимація яким поліномом є найкращою (таблиця 6.1).

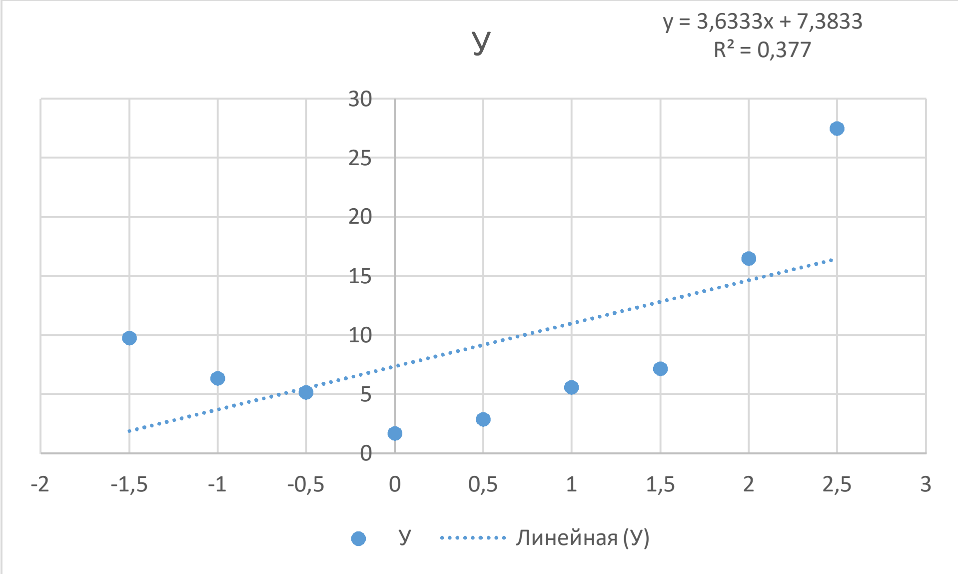


Рис. 6.1. Апроксимація функції лінійним поліномом

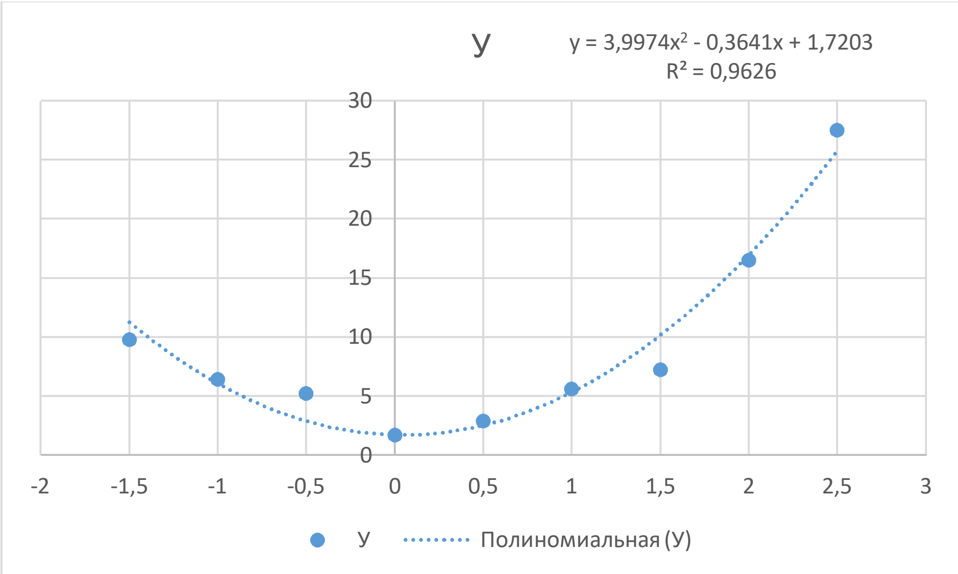


Рис. 6.1. Апроксимація функції поліномом другого ступеня

Таблиця 6.1.

№	Апроксимуючий поліном	Вид поліному	Коефіцієнт детермінації
1	Лінійний	$y=3,6333*x+7,3833$	$R^2=0,377$
2	Квадратичний	$y=3,9974x^2-0,3641x+1,7203$	$R^2=0,9626$
3	Кубічний	$y = 0,7811x^3 + 2,8257x^2 - 2,0826x + 2,7749$	$R^2=0,9884$

Таким чином, найкращім апроксимуючим поліномом є поліном третього ступеня, а саме: $y = 0,7811x^3 + 2,8257x^2 - 2,0826x + 2,7749$

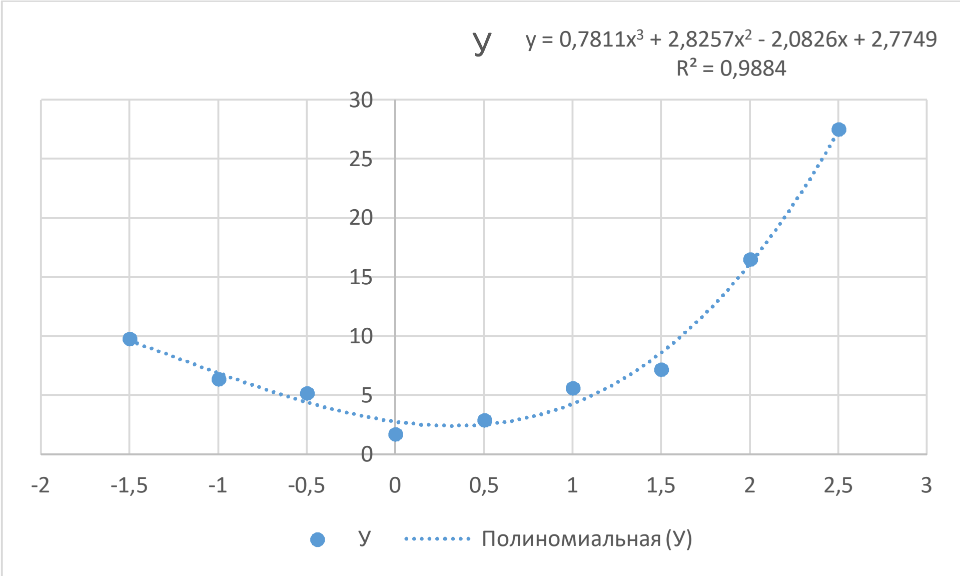


Рис. 6.3. Апроксимація функції кубічним поліномом

У випадках, коли функція *g(x;a)* є лінійною по параметрам *a*, точку мінімуму функції *Ф(a)* можна знайти аналітично з необхідної умови мінімуму 1-го порядку *Ф'(a) = 0* [1; 5], тобто:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_j} = 0,\ \forall j = \overline{1,k} \tag{6.3}$$

Слід розглянути загальний випадок, коли функція *g(x;a)* лінійна по параметрам, тобто має вигляд:

$$g(a;x) = \sum_{m=1}^{k} a_m \psi_m(x) \tag{6.4}$$

де $\psi_m(x)$, $m = \overline{1,k}$,- деякі відомі функції від *x*. Тоді з (6.2) - (6.4) отримуємо $\forall j=\overline{1,k}$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_j} = -2\sum_{i=1}^{n}[y_i - g(x_i;a)]\psi_j(x_i) = -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \sum_{m=1}^{k} a_m\psi_m(x_i)\right]\psi_j(x_i) = 0.$$

Звідки для $\forall j=\overline{1,k}$

$$\sum_{m=1}^{k} a_m\left[\sum_{i=1}^{n}\psi_m(x_i)\psi_j(x_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} y_i\psi_j(x_i). \tag{6.5}$$

Таким чином, параметри *a* можуть бути знайдені як розв'язок системи лінійних рівнянь (6.5), яку можна записати в матричному вигляді:

$$Ca = b, \tag{6.6}$$

де

$$c_{jm} = \sum_{i=1}^{n} \psi_m(x_i)\psi_j(x_i), \; j = \overline{1,k}, \; m = \overline{1,k};$$

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} y_i \psi_j(x_i), \; j = \overline{1,k}.$$

З (6.6) за умови, що матриця C має обернену, можна отримати й аналітичний вираз для a, а саме $a = C^{-1} b$.

Варто розглянути ще випадок, коли апроксимуюча функція $g(x;a)$ є поліномом заданого (k -1)-го степеню. Тоді вона в загальному випадку може бути записана у вигляді:

$$g(x;\, a) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \bullet\bullet\bullet + b_{k-1} x^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i$$

де a є R^k, $a_i = b_o$, $a_2 = b$, ..., $a_k = b_{k-1}$, b_j, $j = \overline{0, k-1}$, - коефіцієнти полінома.

При цьому функція $g(x;a)$ є лінійною по параметрам a і має вигляд (6.4), де $\psi_1(x) = 1$, $\psi_2(x) = x$, ..., $\psi_k(x) = x^{k-1}$, тобто $\psi_m(x) = x^{m-1}$, $m = \overline{1,k}$.

Тоді параметри a можна знайти, розв'язавши систему лінійних рівнянь (6.6), з елементами

$$c_{jm} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{m-1} x_i^{j-1} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+j-2}, \; j = \overline{1,k}, \; m = \overline{1,k};$$

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} y_j x_i^{j-1}, \; j = \overline{1,k}.$$

Інтерполяція поліномами має такі переваги, як простота обчислень їхніх значень, диференціювання та інтегрування. Алгоритм для цієї задачі показано на рисунку 6.4.

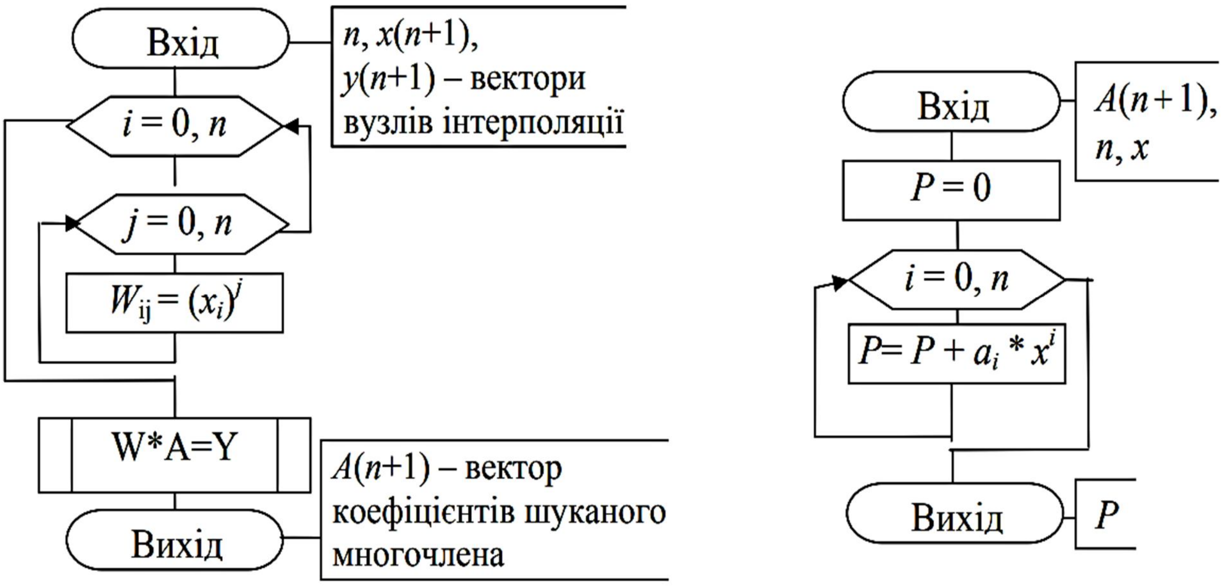


Рис. 6.4. Алгоритм інтерполяції поліномами

6.2. Інтерполяція лінійна та квадратична

У випадках, коли вид функції *g(x;a)* наперед невідомий, а значення y_i, $i=\overline{1,n}$
містять малу погрішність, задачу наближення таблично заданої функції *f(x)* часто розв'язують як задачу інтерполяції.

Кусочно-лінійна інтерполяція

Такий вид інтерполяції полягає в тому, що на кожному окремому інтервалі (x_i,x_{i+1}) функція *f(x)* наближається лінійною функцією $g_i(x;a_i,b_i) = a_i x+b_i$, $i=\overline{1,n-1}$ (рис. 6.5).

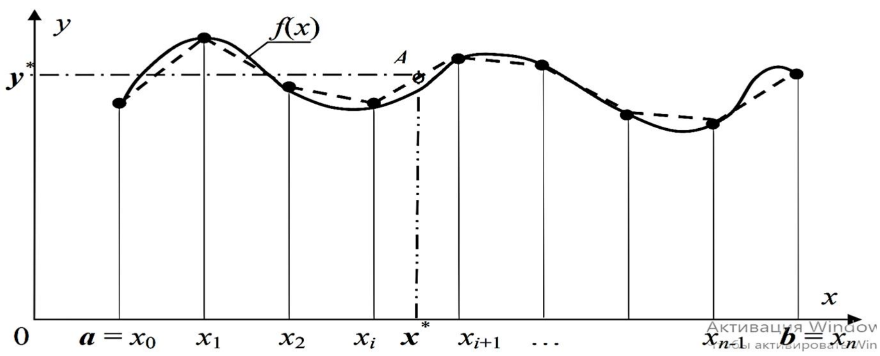


Рис. 6.5. **Графічна інтерпретація кусочно-лінійної інтерполяції**

Оскільки значення функцій *f(x)* і $g_j(x;a_i,b_i)$ в точках x_i і x_i+1 повинні співпадати, то: $g_i(x_i;a_i,b_i)=a_i x_i+b_i=y_i$,

$$g_i(x_{i+1};a_i,b_i) = a_i x_{+1i} + b_i + y_{i+1}.$$

Тоді, розв'язуючи отриману систему рівнянь відносна a_i , b_i , отримуємо:

$$a_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$b_i = y_i - a_i x_i$$

Звідси випливає, що параметри a_i , b_i функції $g_i(x)$ повністю визначаються значеннями координат точок (x_i,y_i), (x_{i+1},y_{i+1}). (Неважко перевірити, що лінійна функція, яка проходить через 2 точки (x_i ,y_i), (x_{i+1} , y_{i+1}), також може бути записана в зручнішому вигляді:

$$g_i(x) = \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} \times y_i + \frac{(x - x_i)}{x_{i+1} - x_I} \times y_{i+1}$$

Таким чином, у ході використання кусочно-лінійної інтерполяції для таблично заданої функції, для обчислення наближеного значення функції $f(x)$ у деякій точці $\bar{x} \in (x_1,x_n)$ діють таким чином. Спочатку знаходять інтервал (x_i ,x_{i+1}), якому точка $\bar{x}$ належить, а потім обчислюють наближене значення функції $f(x)$ у точці $\bar{x}$ як $g_i(x)$, де функція $g_i (X)$ визначена в (6.9).

Варто зазначити, що інтерполююча функція $g(x)$ для функції $f(x)$ буде наче "зшитою" з лінійних функцій $g_i(X)$, кожна з яких розглядається на своєму "кусочку" (x_i,x_{i+1}), звідси і назва даного виду інтерполяції - кусочно-лінійна.

При цьому функція $g(x)$ по суті є наближеним розв'язком задачі наближення функції $f(x)$, тобто істинного розв'язку. Тому виникає питання про точність розв'язку цієї задачі, тобто про погрішність отриманого розв'язку. Слід розглянути випадок, коли значення y_i, $i = \overline{1,n}$ відомі точно, тобто $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{1,n}$.

Програма лінійної інтерполяції на мові C++ у випадку введення набору значень x, y з клавіатури показана на рис.6.5. Форма проекту з результатами на рисунку 6.6.

Оцінка погрішності. Нехай функція $f(x)$ двічі неперервно-диференційована на відрізку (x_1 ,x_n). тоді для всіх $x \in (x_1,x_n)$:

$$|f(x) - g(x)| \leq M_2 h^2 ,$$

де $M_2 = \max\limits_{\xi \in (x_1,x_n)} |f''(\xi)|, h = \max\limits_{i=1,n-1} |x_{i+1} - x_i|$

Таким чином, погрішність кусочно-лінійної інтерполяції має порядок O(h)

Кусочно-лінійна інтерполяція застосовується тоді, коли не вимагається великої точності наближення. Наприклад, при побудові графіків по точках тощо.

Текст програми

```
//---- Функція лінійної  інтерполяції ---------------------------
double lin_interp (double *x, double *y, int n, double xp)
{ int i, j;  double p, yr;
  if(x[0] == xp) yr = y[0];
  for(i=0; i<n-1; i++)
   { if((x[i] < xp) && (xp <= x[i+1]))
       yr = y[i] + (y[i+1] – y[i]) * (xp – x[i]) / (x[i+1] – x[i]) ;   }
return yr;
}
//---------Кнопка “Обчислити”-----------------------------------
void __fastcall TForm1::Button1Click(TObject *Sender)
{ Memo3->Clear();    Series1->Clear();    Series2->Clear();
  double x[20], y[20];   int i, n, n1;
  n = Memo1->Lines->Count;      n1 = Memo2->Lines->Count;
  if(n != n1) { ShowMessage("Перевірте кількість введених даних!"); exit; }
     for(i=0; i<n; i++)

    { x[i] = StrToFloat(Memo1->Lines->Strings[i]);   //  Введення масиву X
      y[i] = StrToFloat(Memo2->Lines->Strings[i]);   //  Введення масиву Y
      Series1->AddXY(x[i], y[i], "", clRed);
    }
    double  xbeg, xend, h, xt, yt, yp;
    if(Edit1->Text == "" )
      {  ShowMessage("Введіть кількість контрольних точок!"); exit;}
    int kt = StrToInt(Edit1->Text);
    xbeg = x[0];
    xend = x[n-1];
    h = (double) (xend – xbeg) / (kt – 1);
    if(xbeg > xend  ||  h <= 0)
      {  ShowMessage("Неправильно Введені дані"); exit;  }
    xt = xbeg;
    do
      {  yp = lin_interp(x,y,n,xt);
            Memo3->Lines->Add("x=" + FloatToStrF(xt, ffFixed, 5, 1) +
                              + "   yp=" + FloatToStrF(yp, ffFixed, 6, 3));
            Series2->AddXY(xt, yp, "", clWhite);
            xt += h; }
           while (xt<=xend);
     }
     //--------- Кнопка “Очистити”-----------------------------------
     void __fastcall TForm1::Button2Click(TObject *Sender)
     {  Edit1->Clear();        Series1->Clear();   Series2->Clear();
        Memo1->Clear();      Memo2->Clear();   Memo3->Clear();
     }
     //--------- Кнопка “Вихід” ------------------------------------------
     void __fastcall TForm1::Button3Click(TObject *Sender)
     {  Close();     }
     //-------------------------------------------------------------------------
```


Рис.6.5. Текст програми лінійної інтерполяції на мові С++

Форма проекту з результатами:

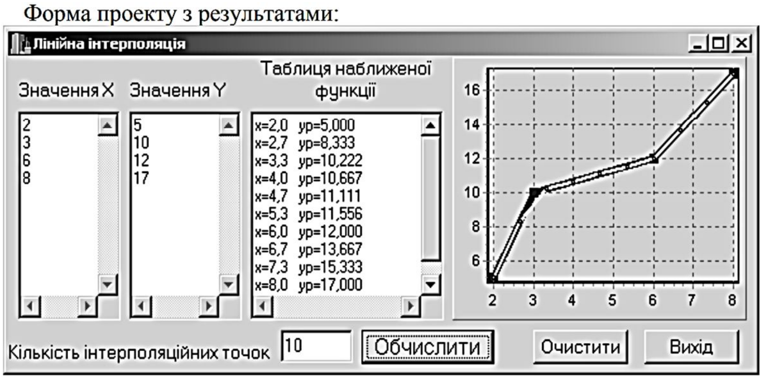


Рис.6.6. Форма проекту з результатами роботи програми

Кусочно-квадратична інтерполяція

Подібно до кусочно-лінійної інтерполяції можна використовувати для наближення на кожному окремому інтервалі (x_i,x_{i+1}) і поліноми вищого порядку, наприклад квадратичну функцію $g(x;a,b,c) = ax^2 + bx + c$. У цьому випадку для знаходження коефіцієнтів a, b, c слід використовувати додаткову точку x_i+2 (три невідомих, тому необхідно і три рівняння для їх визначення) (рис. 6.7).

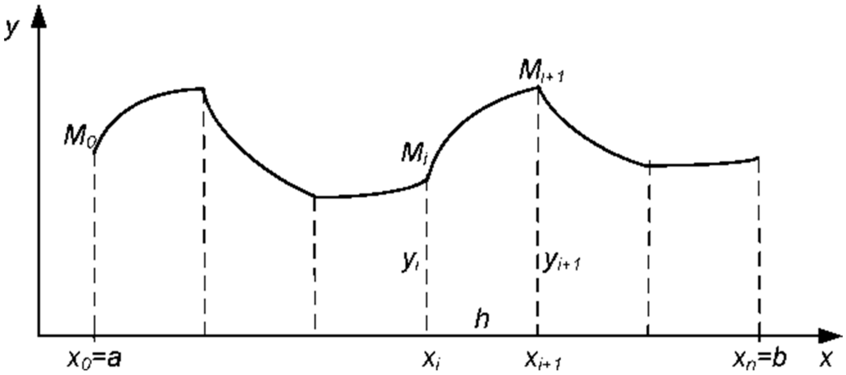


Рис. 6.7. Графічна інтерпретація кусочно-квадратичної інтерполяції

Неважко перевірити, що квадратична функція, що проходить через 3 точки (x_i ,y_i), (x_{i+1},y_{i+1}), (x_{i+2},y_{i+2}), може бути записана у вигляді:

$$g_i(x) = \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})} \times y_i + \frac{(x-x_i)(x-x_{i+2})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})} \times y_{i+1} + \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})} \times y_{i+2} \quad (6.10)$$

Оцінка погрішності. Нехай функція $f(x)$ тричі неперервно-диференційована на відрізку (x_1 ,x_n). Тоді для всіх $x \in (x_1,x_n)$:

$$|f(x) - g(x)| \le M_3 h^3 ,$$

де $M_3 = \max\limits_{\xi\in(x_1,x_n)} |f^{(3)}(\xi)|, h = \max\limits_{i=1,n-1} |x_{i+1} - x_i|$

Таким чином, погрішність кусочно-квадратичної інтерполяції має порядок *$O(h^3)$.*

6.3. Інтерполяційний поліном Лагранжа

Якщо відомі значення *yj* функції *$f(x)$* в *n* точках *xj, $i = 1,n$,* то поліномом мінімального степеня, що інтерполює функцію *$f(x)$*,матиме степінь *n -1.* Якщо він записаний у вигляді:

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \right] y_i, \tag{6.11}$$

то його називають інтерполяційним багаточленом Лагранжа.

Неважко перевірити, що $l_{n-1}(x_i) = f(x_i)$ для всіх $i = \overline{1,n}.$

Погрішність наближення інтерпольованої функції багаточленом Лагранжа сильно залежить від розкиду точок x_i, тобто чим менше інтервал (x_1,x_n), тим точніше $L_{n-1}(x)$ наближає значення функції $f(x)$ в точках x є (x_1,x_n).

Оцінка погрішності. Нехай функція *$f(x)$* *n* разів неперервно-диференційована на відрізку (x_i,x_n). Тоді [16; 19] для всіх x *є* (x_i,x_n):

$$|f(x) - L_{n-1}(x)| \leq \frac{M_n h^n}{n!},$$

де $M_n = \max\limits_{\xi\in(x_1,x_n)} |f^{(n)}(\xi)|, h = \max\limits_{i=1,n-1} |x_{i+1} - x_i|$

Таким чином, погрішність інтерполяції за допомогою багаточлена Лагранжа має порядок *$O(h^n)$.*

Однак між вузлами інтерполяції x_i поліном Лагранжа, як правило, нестійкий до погрішностей обчислень, причому нестійкість зростає зі збільшенням *n*. Крім того, навіть невеликі погрішності значень y_i можуть сильно змінити поведінку полінома між вузлами. Зазначені ефекти нестійкості виявляються вже при *n > 15*, а в практичних задачах, коли *n* близьке до 100, нестійкість полінома Лагранжа дуже велика.

Для обчислення полінома (многочлена) Лагранжа не треба попереднього визначення коефіцієнтів полінома шляхом розв'язування системи рівнянь, проте для кожного значення x* поліном доводиться перераховувати знову. Тобто практичне застосування полінома Лагранжа виправдано лише у випадку, якщо інтерполяційна функція обчислюється у порівняно невеликій кількості значень x.

Приклад 6.1. Ввести з клавіатури парні набори значень x_i та y_i для функції *y =f(x)* й обчислити для цієї функції інтерполяційний многочлен Лагранжа. Обчислити наближені значення на цьому проміжку у заданій кількості точок. Схема алгоритму інтерполяції цієї задачі поліномом Лагранжа наведена ра рисунку 6.8.

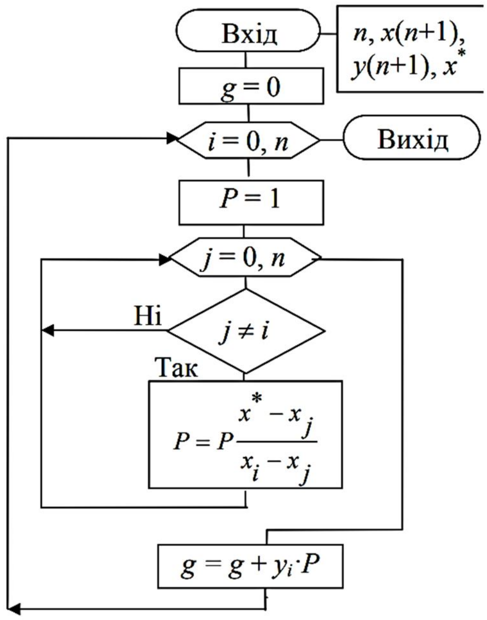


Рис.6.7. Алгоритм інтерполяції поліномом Лагранжа у вигляді блок-схеми

Приклад реалізації задачі інтерполяції поліномом Лагранжа у C++ наведено на рисунку 6.8.

Текст програми

```
//--------------- Функція полінома Лагранжа----------------------
double lagrang(double *x, double *y, int n, double xp)
{ int i, j;   double p, yr;
  yr = 0;
  for(i=0; i<n; i++)
   {
    p = 1;
    for (j=0; j<n; j++)
      if(i != j) p *= (xp – x[j]) / (x[i] – x[j]) ;
    yr += y[i] * p;
   }
 return yr;
}

//--------------- Кнопка “Обчислити”----------------------
void __fastcall TForm1::Button1Click(TObject *Sender)
{ double x[20], y[20];   int i, n, n1;
  Series1->Clear();      Series2->Clear();  Memo3->Clear();
  n=Memo1->Lines->Count;
  n1=Memo2->Lines->Count;
  if(n != n1)
   { ShowMessage("Перевірте кількість введених даних!");  exit; }
    for(i=0; i<n; i++)
     {  x[i] = StrToFloat(Memo1->Lines->Strings[i]); //  Введення масиву X
       y[i] = StrToFloat(Memo2->Lines->Strings[i]); //  Введення масиву Y
       Series1->AddXY(x[i], y[i], "", clRed);
     }
   double xbeg, xend, h, xt, yt, yp;
   if(Edit1->Text == "" )
     { ShowMessage("Введіть кількість контрольних точок!"); exit; }
   int  kt = StrToInt(Edit1->Text);
   xbeg = x[0];
   xend = x[n-1];
   h = (double) (xend – xbeg) / (kt – 1);
   if(xbeg>xend || h<=0) { ShowMessage("Неправильно введені дані"); exit; }
   xt = xbeg;
   do
     {  yp = lagrang(x, y, n, xt);
        Memo3->Lines->Add("x=" + FloatToStrF(xt, ffFixed, 5, 1) +
                             +"   yp=" + FloatToStrF(yp, ffFixed, 6, 3));
        Series2->AddXY(xt, yp, "", clGreen);
        xt += h;
    }  while (xt <= xend);
}
```

Рис.6.8. Текст програми апроксимації поліномом Лагаржа на мові С++

```
//------------------- Кнопка "Очистити" --------------------------
void __fastcall TForm1::Button2Click(TObject *Sender)
{
  Edit1->Clear();     Series1->Clear();   Series2->Clear();
 Memo1->Clear();  Memo2->Clear();   Memo3->Clear();
}

//-------------------- Кнопка "Вихід"-------------------------------
void __fastcall TForm1::Button3Click(TObject *Sender)
{
Close();
 }
```

Рис.6.8. Текст програми (продовження) апроксимації поліномом Лагаржа на мові С++

Форма проекту з результатами:

Рис. 6.9. Форма проекту з результатами

6.4. Інтерполяційний поліном Ньютона

На відміну від (6.11), поліном мінімального степеня, що інтерполює функцію *f(x)* в *n* точках x_i, $i = \overline{1,n}$, може бути записаний в іншому вигляді. Вводяться такі позначення:

розділені різниці 1-го порядку:

$$f(x_1;x_2) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \dots, f(x_{n-1};x_n) + \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}};$$

розділені різниці 2-го порядку:

$$f(x_1;x_2;x_3) = \frac{f(x_2;x_3) - f(x_1;x_2)}{x_3 - x_1}, \ldots,$$

$$f(x_{n-2};x_{n-1};x_n) = \frac{f(x_{n-1};x_n) - f(x_{n-2};x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}}$$

розділена різниця (n-1)-го порядку:

$$f(x_1;x_2;\ldots;x_n) = \frac{f(x_2;x_2;\ldots x_n) - f(x_1;x_2;\ldots x_{n-1})}{x_n - x_1}$$

Тоді розглядається поліном (*n -1*)-го степеня виду

$$\begin{aligned} &H_{n-1}(x)=f(x_1)+(x-x_1)f(x_1;x_2)+ \\ &+(x-x_1)(x-x_2)f(x_1;x_2;x_3)+\ldots+ \\ &+(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})f(x_1;x_2;\ldots;x_n). \end{aligned} \qquad (6.12)$$

Неважко перевірити, що $H_{n-1}(x_i) = f(x_i)\ \forall i = \overline{1,n}$, тобто поліном $H_{n-1}(x)$ є інтерполяційним для функції $f(x)$. Його називають **інтерполяційним поліномом Ньютона**.

Інтерполяційний поліном Ньютона виявляється дуже корисним при розв'язанні інших задач чисельного аналізу, що буде показано далі.

6.5. Сплайн-інтерполяція

Інтерполяція за допомогою поліномів Лагранжа або Ньютона з використанням великої кількості вузлів часто призводить до поганого наближення, що пояснюється накопиченням великої погрішності в процесі обчислень. З іншого боку, кусочно-лінійна і кусочно-квадратична інтерполяція не дозволяють добитися гарного наближення зважаючи на їх теоретичну неточність. Одним із способів добитися гарного наближення в практичних задачах є інтерполяція за допомогою сплайн- функцій.

Визначення. Сплайном (з англ. *spline* - рейка, лінійка) називається кусочно-поліноміальна функція, визначена на відрізку (x_1,x_n) і яка має на цьому відрізку не менше двох неперервних похідних. Сплайн буде позначено через $S(x)$. Інтерполяція за допомогою сплайнів називається **сплайн-інтерполяцією**.

Розглянемо **кубічну сплайн-інтерполяцію** [21], яка найчастіше застосовується на практиці, тобто на кожному інтервалі (x_i, x_{i+1}), $i = \overline{1, n-1}$ функція $S(x)$ задається поліномом третьої степені:

$$S_i(x) = y_i + c_{1i}(x - x_i) + C_{2i}(x - x_i)^2 + C_{3i}(x - x_i)^3. \quad (6.13)$$

Очевидно, $S(x_i) = S_i(x_i) = y_i$, $i = \overline{1, n-1}$.

Слід зазначити, що у випадку застосування кубічного сплайна він повинен мати дві неперервні похідні на відрізку (x_i, x_n).

Для того щоб побудувати кубічний сплайн $S(x)$, необхідно знайти всі коефіцієнти c_{1i}, c_{2i}, c_{3i} $(i = \overline{1, n-1})$ поліномів $S_i(x)$, $i = \overline{1, n-1}$. Кількість цих невідомих коефіцієнтів $3\ (n-1)$.

Коефіцієнти c_{1i}, c_{2i}, c_{3i} $(i = \overline{1, n-1})$ підбираються так, щоб на межах інтервалів (x_i, x_{i+1}) забезпечити неперервність, як функції $S(x)$, так і її першої $S'(x)$ і другої $S''(x)$ похідних. Варто зазначити, що згідно з (6.13) для всіх , $i = \overline{1, n-1}$

$$S_i'(x) = c_{1i} + 2c_{2i}(x - x_i) + 3c_{3i}(x - x_i)^2,$$

$$S_i''(x) = 2c_{2i} + 6c_{3i}(X - x_i).$$

Таким чином, повинні виконуватися умови:

$$\begin{gathered} S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1},\ \mathrm{i} = \overline{1, n-2};\ S_{n-1}(x_n) = y_n; \\ S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}) = c_{1,i+1},\ \mathrm{i} = \overline{1, n-2} \\ S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}) = c_{2,i+1},\ \mathrm{i} = \overline{1, n-2} \end{gathered} \quad (6.14)$$

Можна переписати (6.14) в більш наочному вигляді:

$$\begin{cases} y_i + c_{1i}(x_{i+1} - x_i) + c_{2i}(x_{i+1} - x_i)^2 + c_{3i}(x_{i+1} - x_i)^3 = y_{i+1}, \mathrm{i}\ =\ \overline{1, n-1} \\ c_{1i} + 2c_{2i}(x_{i+1} - x_i) + 3c_{3i}(x_{i+1} - x_i)^2 = c_{1,i+1}, \mathrm{i}\ =\ \overline{1, n-2} \\ 2c_{2i} + 6c_{3i}(x_{i+1} - x_i) = 2c_{2,i+1}, \mathrm{i}\ =\ \overline{1, n-2} \end{cases}$$

(6.15)

Як видно, система (6.15) визначає $3(n-1) - 2$ лінійних рівняння для пошуку $3(n-1)$ невідомих c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, $(i = \overline{1, n-1})$. Тому необхідно довизначити ще два рівняння. Для цього задають так звані **граничні умови** - значення першої або другої похідної функції $f(x)$ на межах інтервалу (x_1, x_n) (x_1, x_n). Якщо значення однієї з похідних на межах відомі, то задавши їх, можна отримати дуже точну інтерполяційну схему. Якщо ж ці значення невідомі, то можна задати другу похідну на межах рівною нулю і отримати також достатньо гарні результати. Необхідно розглянути простий випадок, коли:

$$f''(x_1) = 0,\ f''(x_n) = 0,$$

тобто

$$\begin{cases} S''_1(x_1) = 2c_{21} = 0 \\ S''_{n-1}(x_n) = 2c_{2,n-1} + 6c_{3,n-1}(x_n - x_{n-1}) = 0 \end{cases} \quad (6.16)$$

Таким чином, для обчислення коефіцієнтів c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, $i = \overline{1, n-1}$, необхідно розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (6.15), (6.16).

Оцінка погрішності. Нехай функція $f(x)$ 4 рази неперервно-диференційована на відрізку (x_1,x_n). Тоді [16; 19] для всіх $x \in (x_1,x_n)$:

$$|f(x) - S(x)| \le \frac{M_4 h^4}{8},$$

$$де\ M_4 = \max_{\xi \in (x_1, x_n)} |f^{(4)}(\xi)|, h = \max_{i=1,n-1} |x_{i+1} - x_i|$$

Таким чином, погрішність інтерполяції за допомогою кубічного сплайна має порядок $O(h^4)$. Перевагою кубічних сплайнів перед іншими наведеними способами інтерполяції є: по-перше, їх стійкість до процесу обчислень, і, по-друге, достатньо висока точність.

При використовуванні сплайн-інтерполяції для таблично заданої функції діють таким чином. Спочатку один раз визначають всі коефіцієнти c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, $i = \overline{1, n-1}$, а потім вже для обчислення наближеного значення функції $f(x)$ у деякій точці $\overline{x} \in (x_i,x_n)$ спочатку знаходять інтервал (x_i,x_{i+1}), якому точка $\overline{x}$ належить, а потім обчислюють наближене значення функції $f(x)$ в точці $\overline{x}$ як $S_i(x)$, де функція визначена в (6.13).

6.7. Поняття екстраполяції функцій

На відміну від задачі інтерполяції (з англ. *inter* - між), тобто відновлення функції між полюсами, задача екстраполяції (з англ. *extra* - додатково) полягає в відновленні функції за межами полюсів. Тобто, якщо для деякої функції $f(x)$, $f:R^1 \to R^1$ відомо, що в n точках $xi, x_2, \dots, x_n$ вона приймає, відповідно, значення $y_1, y_2, \dots, y_n$, тобто $У\, i = f(x/)$, $i = \overline{1, n}$, то потрібно відновити її значення при $x > x_n$ або $x < x_1$.

Така задача виникає, наприклад, при прогнозуванні в часі значень деякого показника (економічного або фізичного) на основі відомих його значень у вже минулих моментах часу. В цьому випадку x - це час, y - значення показника. Відомий набір значень $y_1, y_2, \dots, y_n$ називається **часовим рядом**. Прикладами часових рядів є: курси деяких акцій, поквартальний обсяг виробництва, річний ВВП країни, добовий обсяг продажів, погодинний обсяг водоспоживання міста, середньорічна температура на планеті Земля та ін.

У процесі розв'язання задачі екстраполяції застосовують методи апроксимації (див. розділ 6.2), оскільки значення y_l , як правило, містять в собі значні випадкові шуми і тому методи інтерполяції дають велику похибку наближення. Для прогнозування часових рядів, окрім апроксимації (прямі методи), застосовують і спеціальні статистичні методи (адаптивні або стохастичні) [24].

6.8. Висновки

1. Наближення функцій є важливим допоміжним апаратом при розв'язанні інших задач чисельного аналізу.
2. Найбільш відомим і ефективним методом розв'язання задачі апроксимації функцій є метод найменших квадратів.
3. Одним із способів добитися гарного наближення в практичних задачах є інтерполяція за допомогою сплайн-функцій.

6.9. Контрольні запитання

1. Сформулюйте постановку задачі наближення функцій. Які постановки задачі наближення функцій ви ще знаєте?

2. Чим відрізняються задачі апроксимації, інтерполяції та екстраполяції функцій?

3. У чому полягає метод найменших квадратів для апроксимації функцій?

4. У чому полягає лінійна інтерполяція функцій? Коли її слід застосовувати?

5. У чому полягає квадратична інтерполяція функцій? Коли її слід застосовувати?

6. Що називається інтерполяційним поліномом Лагранжа? Коли його слід застосовувати?

7. Що називають сплайном?

8. У чому полягає лінійна сплайн-інтерполяція функції? Коли її слід застосовувати?

6.10. Завдання для самостійного опрацювання

9. Використовуючи метод найменших квадратів, підберіть найкращу апроксимацію для функції, заданої таблично

x	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6
У	6,6	6,7	6,2	5,8	4,3	3,4

серед функцій виду:

1) $y = a_0 + a_1x^2$;

2) $У = a_0 + a_1x + a_2x^2$;

3) $У = a_o + a_1 \sin(a_2x)$.

Побудуйте графіки апроксимуючих функцій і графіки залишків.

10. Побудуйте кусочно-лінійну та кусочно-квадратичну інтерполяцію для функції, заданої таблицею в завданні 8.

РОЗДІЛ 7
ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

7.1 Постановка задачі

Задача чисельного диференціювання полягає в знаходженні значень похідних функції $y = f(x)$ в заданих точках у випадках, коли аналітичний вид функції $f(x)$ невідомий (задана неявно), дуже складний або функція $f(x)$ задана таблицею. Привабливість чисельного підходу пояснюється наявністю простих формул, за допомогою яких похідні в заданих точках можна приблизно обчислити за кількома значеннями функції $f(x)$ в цих та близьких до них точках.

7.2. Формули чисельного диференціювання

Формули чисельного диференціювання застосовуються в тих випадках, коли $y = f(x)$ може бути задана таблицею своїх значень $y_i = f(x_i)$ у рівновіддалених вузлах $x_i = x_o + i \times h$ $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Варто зазначити, що нумерація точок x_i для зручності запису проводиться відносно точки x_o, в якій обчислюється похідна. Вибравши яку-небудь множину $(n + 1)$-го вузлів, функцію $y = f(x)$ наближають інтерполяційним багаточленом $P_n(x)$. Тоді похідна від цього багаточлена $P'_n(x)$ в точці x_o застосовується для наближеного подання шуканої похідної
$y'(x_o) = f'(x_o)$, а саме $f'(x_o) \approx P'_n(x_o)$.

Найбільш зручним інтерполяційним багаточленом для чисельного диференціювання є поліном Ньютона (див. розділ 7.5). На його основі отримані формули різного порядку точності залежно від кількості задіяних точок x_i [1; 19].

Слід навести кілька найпростіших формул для похідної першого порядку:

формула диференціювання вперед

(7.1)

$$f'(x_0) \approx \frac{f\,(x_0 + h) - f\,(x_0)}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

формула диференціювання назад

$$f'(x_0) \approx \frac{f\,(x_0) - f\,(x_0 - h)}{h} = \frac{y_0 - y_{-1}}{h} \qquad (7.2)$$

симетрична формула диференціювання

$$f'(x_0) \approx \frac{f\,(x_0 + h) - f\,(x_0 - h)}{2h} = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} \qquad (7.3)$$

Варто зазначити, що запис формул через функцію *f(x)* відповідає постановці задачі диференціювання, коли її аналітичний вигляд невідомий або дуже складний. Це означає, що значення функції *f(x)* можна розрахувати в потрібних точках x_i з кроком h. При цьому h називають кроком чисельного диференціювання та підбирають залежно від поведінки функції *f(x)* в околі точки x_o .

Запис формул через y_i відповідає постановці задачі диференціювання, коли функція *f(x)* задана таблицею. При цьому для крайніх точок x_i можна застосовувати формули диференціювання вперед та назад (відповідно до того, з якого вони боку), а для внутрішніх точок краще застосовувати симетричну формулу диференціювання.

Погрішність формул (7.1) та (7.2) порядку $O(h)$, формули (7.3) - $O(h^2)$ [3].

Для похідних 1-го порядку (додатково до формул (7.1) - (7.3)) можна застосовувати **симетричну формулу диференціювання**

$$f'(x_0) \approx \frac{-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2}}{12h} \qquad (7.4)$$

Погрішність формули (7.4) - $O(h^4)$ [3; 16; 19].

Варто навести кілька найпростіших формул для похідної другого порядку:

симетричні формули диференціювання:

(7.5)

$$f''(x_0) \approx \frac{f\,(x_0+h) - 2f\,(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} = \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{-y_2 + 16y_1 - 30y_0 + 16y_{-1} - y_{-2}}{12h^2} \qquad (7.6)$$

Погрішність формули (7.5) порядку *O(h)*, формули (7.6) - $O(h^3)$ [3].

Треба зазначити, що крок чисельного диференціювання h не можна брати дуже малим, бо тоді, внаслідок похибок округлення на комп'ютері, похибка розрахунку похідної з застосуванням формул чисельного диференціювання може бути дуже великою. Значення h також краще брати залежно від величини x_o, наприклад $h = h_R \times |x_o|$, де h_R знаходиться у межах від 10^{-6} до 10^{-2}та підбирають залежно від поведінки функції $f(x)$ в околі точки x_0.

Нехай функцію f задано таблично в рівновіддалених точках x_i відрізка [a; b]: $y_i = f(x_i)$ (i = 0, 1, …, n). Щоб знайти наближення похідної $f'(x_0)$, скористаємося горизонтальною таблицею скінчених різниць $\Delta^n y_i$, побудованою за вузлами x_i. Тоді

$$f'(x_0) \approx L'_n(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^n y_0 \right), \qquad (1)$$

де $h = x_{i+1} - x_i$ (i = 0, 1, … , n – 1). Найпростіші формули (n = 1 та n = 2 у (1) відповідно)

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\Delta y_0 = \frac{1}{h}(f(x_1) - f(x_0)); \qquad f'(x_0) \approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0). \qquad (2)$$

Саме ці формули (1), (2) звичайно і називають *однобічними формулами чисельного диференціювання.*

Оцінимо похибки формул (1), (2). Абсолютна похибка чисельного диференціювання (залишковий член чисельного диференціювання)

$$|R'_n(x, f)| \le \frac{h^n}{n+1}\left(\max_{[y_1, y_2]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|\right) \approx \left|\frac{\Delta^{n+1} y_0}{h(n+1)}\right|. \qquad (3)$$

Слід зазначити, що зменшення похибки (3) шляхом зменшення h з огляду на нестійкість чисельного диференціювання призводить до збільшення обчислювальної похибки [2].

Приклад 1. У точках 1) x = 1 та 2) x = 1,1 знайти похідну від функції $\frac{1}{x}$, заданої таблицею на відрізку [1; 1,7] з кроком h = 0,1 , скориставшись однобічними формулами чисельного диференціювання з $n \le 5$.

Розв'язання. Побудуємо спочатку горизонтальну таблицю скінчених різниць.

Проведемо розрахунки е електронній таблиці Excel. Надамо чарункам електронної таблиці таких значень:

	A	B	C	D	E	F	G
1		0	1	2	3	4	5
2	0	0	= B3 – B2	→	→	→	→
3	1	0,1974	↓	↓	↓	↓	
4	2	0,3805	↓	↓	↓		
5	3	0,5404	↓	↓			
6	4	0,6747	↓				
7	5	0,7854					

У рядку 1 указані порядки скінчених різниць у відповідному стовпці. У стовпці B тут різниці порядку 0, тобто значення функції f у вузлі інтерполяції, номер якого вказаний у стовпці А. Правила копіювання Excel дозволяють отримати у відповідних чарунках саме ті формули, які повинні там бути згідно з означенням 2: так у чарунці E4 міститься $\Delta^3 y_2$.

Тут у стовпці А номери i вузлів інтерполяції $x_i = x_0 + h \cdot i$, де $x_0 = 1$, $h = 0,1$, у стовпці B відповідні значення функції $y_i = 1/x_i$, які за означенням є скінченими різницями порядку 0. У чарунку C2 введена формула = B3 – B2, що обраховує значення скінченої різниці Δy_0, а потім ця формула копіюється на всю трикутну таблицю. В результаті скінчена різниця $\Delta^j y_i$ знаходиться у чарунці, що відповідає номеру i у стовпці А і номеру j у рядку 1.

1) Точка 1 розміщена на початку таблиці, тому похідну обчислюватимемо за формулою (1): у цьому разі $x_0 = 1$, $h = 0,1$, скінчені різниці $\Delta^j y_0$ знаходяться у відповідних чарунках рядка 2. (Зауважимо, що зважаючи на (1), використання ще і шостого доданку $-1/6 \cdot \Delta^6 y_0 = -1/6 \cdot 0,000125$ вплинуло би хіба що на п'яту значущу цифру).

Побудуємо таблицю для підрахунку $f'(x_0)$ згідно з (1). Надамо чарункам електронної таблиці таких значень:

	A	B	C	D	E	F
11	n	1	2	3	4	5
12	(–1)^(n+1)/n	= (–1)^C11/B11	→	→	→	→
13	$u_n(x)$	= C2*B12	→	→	→	→
14	$f'(x_0)$	= 10*B13	= B14 + 10*C13	→	→	→

Тут у рядку 12 знаходимо $(-1)^{n+1}/n$ замість $(-1)^{n-1}/n$ у формулі (2). Це не впливає на результат, проте зручніше для підрахунків у цій таблиці. У рядку 13 дістаємо значення доданків з формули (1). У рядку 14 отримуються наближені значення $f'(x_0)$, причому кількість використаних доданків дорівнює числу у рядку 11 того ж стовпця. В результаті отримаємо таку таблицю:

	A	B	C	D	E	F
11	n	1	2	3	4	5
12	(-1)^(n+1)/n	1	-0,5	0,333333	-0,25	0,2
13	un(x0)	-0,090909	-0,00758	-0,00117	-0,00025	-6,7E-05
14	f ' (x0)	-0,909091	-0,98485	-0,9965	-0,999001	-0,99967

Отже, при використанні п'яти доданків у (1) $f'(1) \approx -0,99967$.

Зауважимо, що не важко підрахувати точне значення похідної $f'(1) = -1$. По останньому рядку можна простежити, як значення, отримане за формулою (1), наближається до точного із зростанням числа доданків.

2) Оскільки $x = 1{,}1$ – вузол інтерполяції, $x = x_1$, то відповідні скінчені різниці $\Delta^j y_1$ знаходяться у відповідних чарунках рядка 3; як і раніше, $h = 0{,}1$. Таблиця для підрахунків майже ідентична:

	A	B	C	D	E	F
16	n	1	2	3	4	5
17	(–1)^(n+1)/n	= (–1)^C16/B16	→	→	→	→
18	$u_n(x)$	= C3*B17	→	→	→	→
19	$f'(x_0)$	= 10*B18	= B19 + 10*C18	→	→	→

В результаті отримаємо таку таблицю:

	A	B	C	D	E	F
16	n	1	2	3	4	5
17	(-1)^n/n	1	-0,5	0,333333	-0,25	0,2
18	un(x)	-0,07576	-0,005828	-0,00083	-0,00017	-4,2E-05
19	f ' (x)	-0,75758	-0,815851	-0,82418	-0,82584	-0,82626

Отже, при використанні п’яти доданків у (1) $f'(1{,}1) \approx -0{,}82646$.

Приклад 2. У точках 1) $x = 1$ та 2) $x = 1{,}1$ оцінити отримані в задачі 1 значення похідної від функції $\frac{1}{x}$, скориставшись формулою (3).

Розв’язання. Оскільки в задачі 1 $n = 5$, то згідно з (3) $|R'_5(x_0, f)| \le \left|\frac{\Delta^6 y_0}{6h}\right|$ та $|R'_5(x_1, f)| \le \left|\frac{\Delta^6 y_1}{6h}\right| \approx \left|\frac{\Delta^6 y_0}{6h}\right|$. Значення $\Delta^6 y_0$ дістаємо з таблиці скінчених різниць задачі 1: $\Delta^6 y_0 = 0{,}000125$, звідки $\left|\frac{\Delta^6 y_0}{6h}\right| \approx 0{,}000208$. Отже, похибка чисельного диференціювання $|R'_5(x_1, f)| \le 0{,}000208$.

Формули чисельного диференціювання на основі інтерполяційного полінома Лагранжа.

Іноді у формулах чисельного диференціювання зручніше застосовувати не скінчені різниці функції, а її значення. Для отримання таких формул використовують поліном Лагранжа. Розглянемо випадок, коли функція задана таблично в рівновіддалених точках n x , x ,..., x 0 1 , тобто відомі xi = x0 + ih (i = 0,1,...,n) і значення f (x),i = 0,1...,n. Для заданої системи вузлів xi будуємо інтерполяційний многочлен Лагранжа.

Формули диференціювання для практичних обчислень.

Співвідношення, які на практиці застосовуються для апроксимації похідних перших трьох порядків від функцій, заданих таблично:

Таблиця 7.1.

Формули перших похідних.

Тип формули	Формула
Несиметричні обернені або формули диференціювання назад	$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$
	$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$
Несиметричні прямі або формули диференціювання вперед	$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$
	$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$
Симетричні	$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{h}$
	$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1})}{12h}$

Таблиця 7.2.

Формули для других похідних.

Тип формули	Формула
Несиметричні прямі	$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$
	$f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2}$
Несиметричні обернені	$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{h^2}$

	$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$
Симетричні	$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$$
	$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{h^2}$$

Таблиця 7.3.

Формули для третіх похідних.

Тип формули	Формула
Несиметричні обернені	$$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_i)}{h^3}$$
	$$f'''(x_i) = \frac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2h^3}$$
Несиметричні прямі	$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^2}$$
	$$f'''(x_i) = \frac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) + 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^2}$$
Симетричні	$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3}$$
	$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_i) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{8h^3}$$

7.3. Висновки

1. Чисельне диференціювання функції в заданій точці здійснюється за простими формулами, в яких присутні значення функції в цій точці та кількох близьких до неї точках.

2. Формули чисельного диференціювання відрізняються точністю та способом застосування.

3. Крок чисельного диференціювання не можна брати дуже малим у зв'язку з похибкою округлення та розрахунків на комп'ютері.

4. При табличному задаванні функції значення похідних розраховуються тільки в вузлових точках.

7.4Контрольні запитання та завдання

1. Сформулюйте постановку задачі диференціювання функцій.
2. У яких випадках виникає задача чисельного диференціювання?
3. Що називається інтерполяційним багаточленом Ньютона? Як його застосовують при виведенні формул чисельного диференціювання функцій?
4. На якому принципі заснований чисельний розрахунок похідних функції в точці?
5. Який інтерполяційний багаточлен є найбільш зручним для чисельного диференціювання?
6. У яких випадках краще застосовувати формули диференціювання вперед, назад та симетричні формули?

7.5. Завдання для самостійного опрацювання

1. Знайдіть чисельно першу та другу похідну в точці $x = 3$ функції, заданої таблицею

x	2	2,5	3	3,5	4	4,5
У	5,5	4,5	3	2	4,5	7

РОЗДІЛ 8
ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ

8.1. Постановка задачі

Задача чисельного інтегрування полягає в обчисленні визначеного інтегралу:

$$\int_a^b f(x)dx \tag{8.1}$$

Якщо функція f(x) неперервна на відрізку [a; b] і відома її первісна F, то справедлива формула Ньютона – Лейбниця $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Проте цією формулою неможливо скористатися, якщо первісну F не можна виразити у відомих (традиційно в елементарних) функціях, або якщо функцію f задано таблично або графічно. У цих випадках необхідно будувати методи для наближеного обчислення визначених інтегралів. Найчастіше застосовують квадратурні формули.

У всіх перерахованих випадках для обчислення інтеграла використовують чисельні методи. Традиційний підхід полягає в тому, що функцію f (x) на відрізку [a,b] замінюють інтерполяційною функцією φ(x), наприклад, поліномом Лагранжа або Ньютона, а потім приймають:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + R(x)$$

де R(x) – деяка похибка формули інтегрування.

У цьому випадку функція φ(x) має бути такою, щоб інтеграл можна було обчислити безпосередньо. Якщо функція f (x) задано аналітично, то наближено обчислити визначений інтеграл можна заміною інтеграла скінченою сумою. При цьому відрізок інтегрування [a,b] розбивається на n однакових частин з кроком *h=(b-a)/n.*

У вузлах $x_i = a + i*h,\ i = 0,1,...,n$ знаходяться значення підінтегральної функції $f(x), i = 0,1,...,n$ і шукана площа (значення інтеграла) обчислюється як:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

Означення. Квадратурні формули – це формули вигляду

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)\ .$$

Суму в правій частині формули називають квадратурною сумою, числа x_k і A_k називають відповідно вузлами і коефіцієнтами квадратурної формули.

Графічна інтерпретація чисельного визначення інтеграла показана на рисунку 8.1.

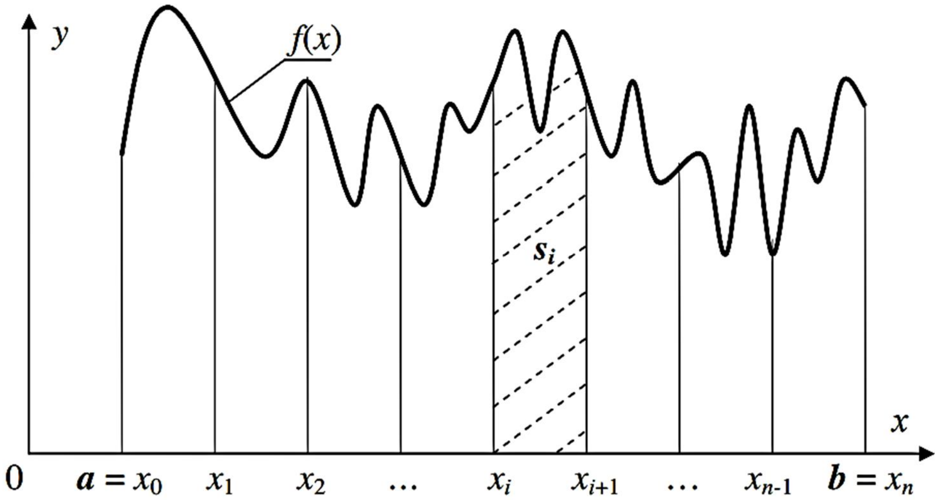


Рис.8.1. криволінійні трапеції для інтегрування

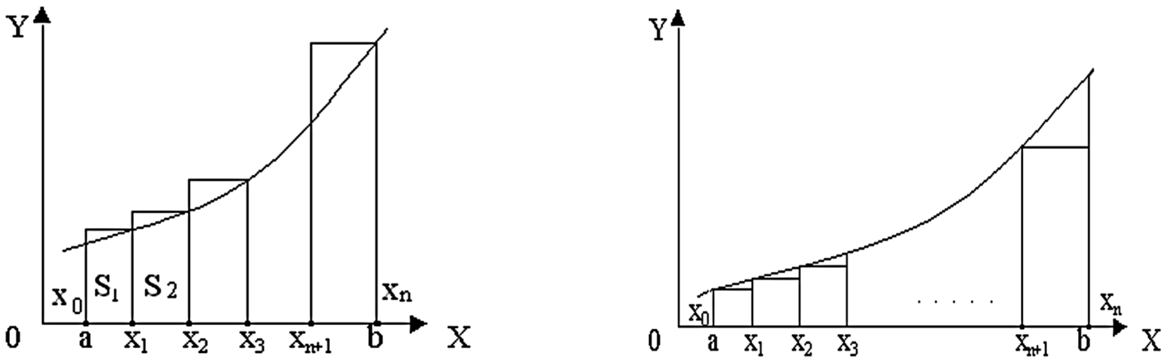
Більш складні квадратурні формули отримують за допомогою апарату інтерполювання.

Методи чисельного обчислення інтеграла засновані на тому, що в якості наближеного значення інтеграла (8.1) береться значення інтеграла від інтерполюючої для f(x) функції, побудованої по точках розбиття відрізка [a,b].

Слід навести найбільш відомі та достатньо ефективні методи розв'язання задачі чисельного інтегрування функцій: метод трапецій і метод Сімпсона.

8.2. Формула прямокутників

Замінимо елементарні (криволінійні) трапеції в діапазоні [a;b] прямокутниками, і обчислимо загальну площу фігури, як суму площ окремих прямокутників. (рис.8.2- а та b)



a)   b)

Рис.8.2. Графічна інтерпретація методу прямокутників: a) лівих прямокутників; b)правих прямокутників

Для випадку а) знайдену площу назвемо площею лівих , а для в) – правих прямокутників.

Для а) маємо:

$$S^{+}=f(x_1)(x_1-x_0)+f(x_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_n)(x_n-x_{n-1})=\frac{b-a}{N}\sum_{k=1}^{N}f(x_k)$$

Для b) маємо :

$$S^{-}=f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})=\frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f(x_k)$$

Істинне значення інтегралу обчислимо, як середнє арифметичне значення площ лівих і правих прямокутників: $I=(S^{+}+S^{-})/2$

$$I=\frac{b-a}{2N}\left[\sum_{k=0}^{N-1}f(x_k)+\sum_{k=1}^{N}f(x_k)\right]=\frac{b-a}{2N}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{N-1}f(x_k)\right]$$

Отримана формула називається формулою лівих і правих прямокутників, або формулою середніх прямокутників.

Значення похибки інтегрування методом прямокутників можна оцінити за формулою

$$R(x) = \frac{h^2(b-a)}{12} M_2, \qquad (8.2)$$

де $M_2 = \max|f''(\xi)|, \xi \in [a, b]$.

Щоб похибка не перевищувала задане значення ε, крок інтегрування слід обирати з умови:

$$h \le \sqrt{\frac{12 \cdot \varepsilon}{(b-a)M_2}}\,. \qquad (8.3)$$

Програмування методу прямокутника обчислення інтегралу.

Вищеописаний метод обчислювання інтегралів можна використовувати для обчислень як за допомогою калькулятора, так і комп’ютера. У математичному пакеті Mathcad обчислення визначених та невизначених інтегралів виконується у графічному режимі з використанням спеціальної бібліотеки підпрограм. Блок-схему алгоритму методу прямокутників наведено на рис. 8.3 і поряд з нею – функцію цього методу мовою С++

```
// Функція методу прямокутників
float integral_pram(float a, float b, int n)
{ float h, S, x;
                int i;
  h = (b – a) / n;
  S=0;
 for (i = 0; i<= n –1; i++)
  { x = a + i * h;
    S = S + f (x);
  }
 S = h* S;
 return S;
}
```

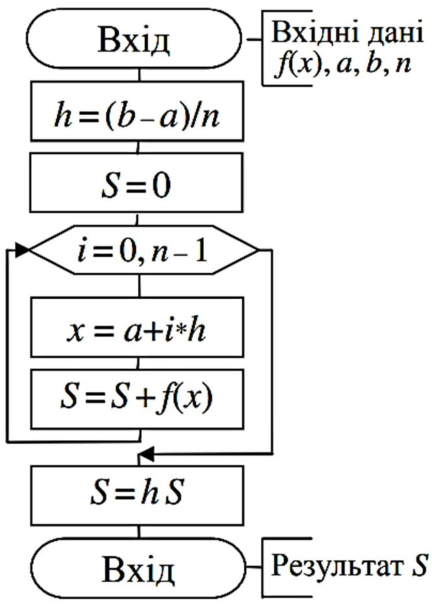


Рис.8.3. Блок-схема алгоритму методу прямокутників та функція цього методу мовою С++

Приклад 8.1. Обчислити інтеграл за формулою лівих та правих прямокутників.

$$I = \int_{1,5}^{2,3} \frac{\sqrt{0,3x+12}}{1,6x\sqrt{x^{2+0,5}}}dx$$

Для обчислення за формулами лівих і правих прямокутників (при n =10) ділимо відрізок інтегрування на 10 частин з кроком *h=(b-a)/n=(2,3-1,5)/10=0,08*

Складаємо таблицю значень підінтегральної функції в точках поділу відрізку:

i	X_i	Y_i
0	1,5	0,3165
1	1,58	0,3037
2	1,66	0,2922
3	1,74	0,2815
4	1,82	0,2716
5	1,90	0,2626
6	1,98	0,2541
7	2,06	0,2463
8	2,14	0,2390
9	2,22	0,2322
10	2,3	0,2259

Шуканий визначений інтеграл – це сума площ лівих прямокутників. Площа одного прямокутника дорівнює $h*y_i$. Отже,

$$I = \int_{1,5}^{2,3} f(x)dx = \sum_{i=0}^{9} hy_i = h\sum_{i=0}^{9} y_i$$

За значеннями таблиці:

- Для лівих прямокутників

$$\sum_{i=0}^{9} y_i = 2,6997 \quad \Rightarrow \quad S^+ = 0,08*2,6997 = 0,2158;$$

Для правих прямокутників

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 2,6091 \quad \Rightarrow \quad S^- = 0,08*2,6091 = 0,2087$$

За кінцевий остаточний результат беруть середнє значення цих інтегралів: $I=(I_1+I_2)/2=(0,2158+0,2087)=0,212$.

Прклад 8.2. Розглянемо приклад на середні прямокутники:

Обчислити: $I = \int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{\sin(0,6x + 0,3)}{1,7 + \cos(x^2 + 1,2)} dx$

Для розв’язку використовують формулу середніх прямокутників:

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

N=10, h=*1,2-0,4)/10=0,08

i	x_i	x_i+h/2	f(x_i+h/2)
0	0,4	0,44	0,28491
1	0,48	0,52	0,31913
2	0,56	0,60	0,35838
3	0,64	0,68	0,40430
4	0,72	0,76	0,45898
5	0,80	0,84	0,52511
6	0,88	0,92	0,60590
7	0,96	1,0	0,70475
8	1,04	1,08	0,82403
9	1,12	1,16	0,96205

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = 5,44754$$

$$I = h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = 0,08 * 5,44754 = 0,4358$$

8.3. Формула трапецій

Метод трапецій заснований на кусочно-лінійній інтерполяції функції f(x), побудованій по точках $M_j = (x_j, f(x_j)), j = 0,n$ (рис. 8.4).

У підґрунтя формули трапецій покладено заміну кривої підінтегральної функції на ламану. Розіб’ємо проміжок [a, b] на n рівних частин, кожну довжиною h = (b − a) / n, та сполучимо прямими лініями значення функцій на кінцях відрізків. На рис. 8.4 – ці лінії позначено напівжирними штриховими лініями. Площу криволінійної трапеції наближено замінюємо на суму площин *n* трапецій.

Площу однієї такої трапеції (на рис. 8.4 − тонкі штрихові лінії) можна обчислити за формулою:

$$s_i = \frac{1}{2} h\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right), \tag{8.4}$$

а загальна площа S всіх n трапецій і відповідно наближене значення інтегралу дорівнює

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

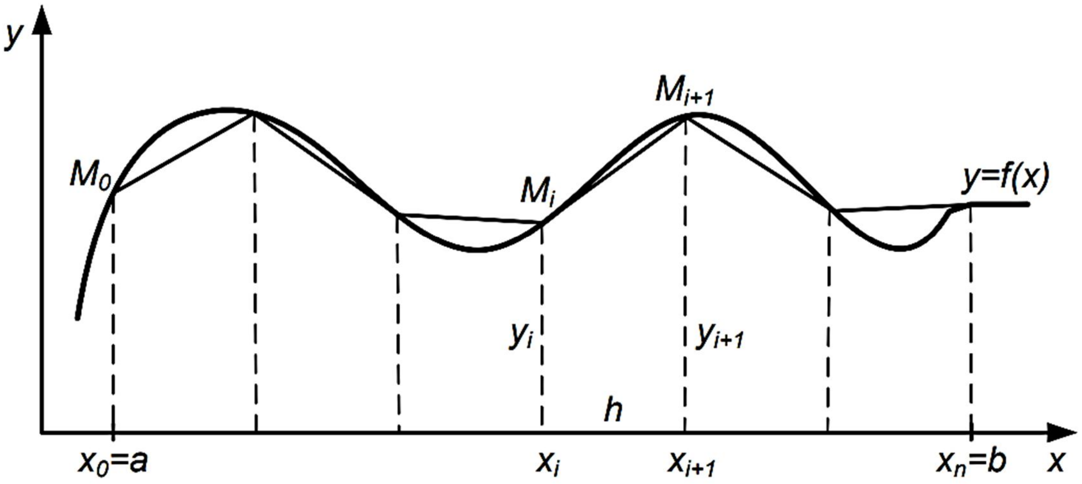


Рис.8.4. Інтерпретація інтегрування методом трапецій

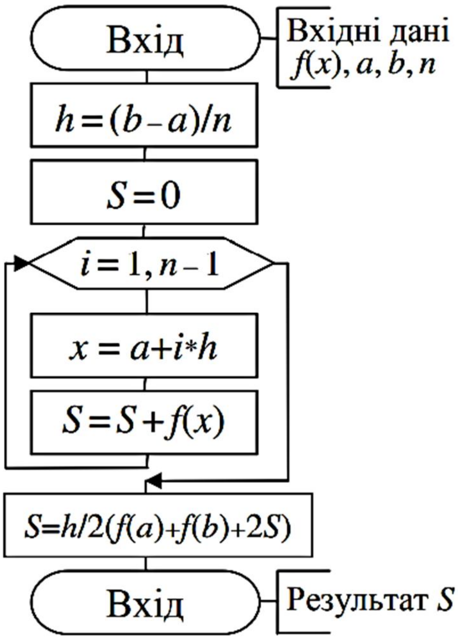
Якщо підставити граничні значення проміжку обчислення інтеграла, то формула набуде остаточного вигляду:

$$S = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) \tag{8.5}$$

Блок-схему алгоритму методу прямокутників наведено на рис. 8.5 і поряд з нею – функцію цього методу мовою C++

Значення похибки інтегрування методом трапецій збігається з оцінкою похибки методом прямокутників (8.3) [3, 4, 5].

Варто зазначити, що число розбиття n відрізка *[a,b]* є параметром формули трапецій (8.5), тобто чим більше *n* , тим менше *h*, а значить, менше погрішність. З оцінки (8.3) виходить, що якщо функція *f(x)* лінійна, то формула (8.5) для обчислення інтеграла (8.1) є теоретично точною.




```
// Функція методу трапецій
float integral_trap (float a, float b, int n)
{ float h, S, x;
  int i;
  h = (b – a) / n;
  S = 0;
  for (i = 1; i<= n –1; i+ +)
   { x = a + i * h;
     S = S + f(x);
   }
  S = h/2* (f(a) + f(b) + 2*S);
  return S;
}
```

Рис.8.5. Блок-схема та програма на мові С++ методу трапецій чисельного знаходження визначеного інтегралу

Приклад 8.3. Обчислення визначених інтегралів за формулами трапецій.

$$I = \int_{0,7}^{1,3} \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 0,3}} dx$$

Візьмемо n=20. *h=(b-a)/20=(1,3-0,7)/20=0,03.* Площа трапеції дорівнює півсумі основ помноженій на h. В нашому випадку основами є y_i. Тоді:

$$I \approx h\left(\frac{y_0 + y_{20}}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{19} \right)$$

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	0,7	0,88386	11	1,03	0,64259
1	0,73	0,85572	12	1,06	0,62657
2	0,76	0,82898	13	0,09	0,6114
3	0,79	0.80366	14	1,12	0,59669
4	0,82	0,77973	15	1,15	0,58272
5	0,85	0,757	16	1,18	0,56935
6	0,88	0,73546	17	1,21	0,55658
7	0,91	0,71501	18	1,24	0,54431
8	0,94	0,69551	19	1,27	0,53253
9	0,97	0,677	20	1,3	0,52129
10	1,0	0,65937			

$y_0+y_{20}=1,405154$ $\qquad\qquad$ $\sum_{1}^{19} y_i = 12,77022$;

$$I=0,03*(1,40515/2+12,77022)=0,40418.$$

8.4. **Формула Сімпсона**

Відрізок $[a,b]$ розбивається на n частин з кроком $h=(b-a)/n$, при цьому точки розбиття x_i визначаються за формулою $x_i = a + i \times h,\ i = 0,n$, тобто $x_o = a$, $x_n=b$.

Метод Сімпсона заснований на кусочно-квадратичній інтерполяції функції $f(x)$, побудованій по точках $(x_i, f(x_i))$, $i = 0,n$ (рис. 8.6).

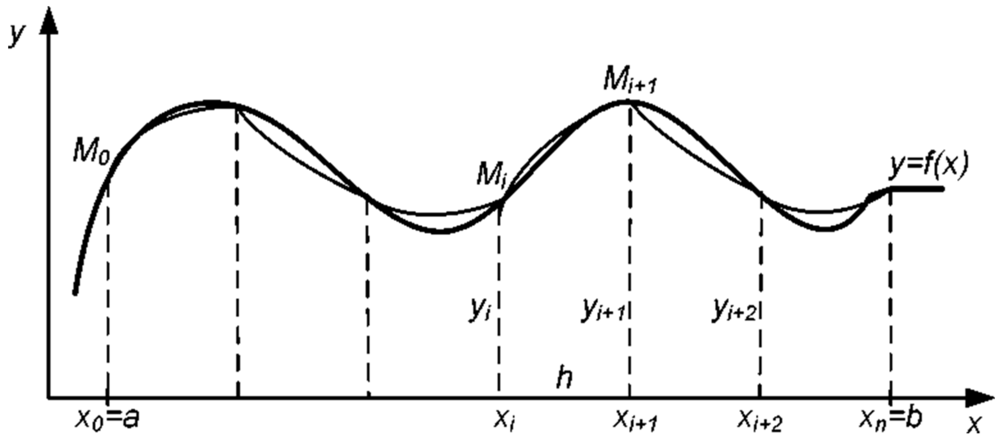


Рис. 8.6. Графічна інтерпретація методу Сімпсона

Оскільки на кожному інтервалі (x_i, x_{i+1}) функція $f(x)$ інтерполюється параболою (тобто функцією виду $g_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$), то площу S_i криволінійної трапеції $x_iM_iM_{i+1}x_{i+1}$ нескладно обчислити аналітично

$$S_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i(x)dx .$$

Тоді наближене значення інтеграла (8.1) буде дорівнювати

$$S_n = \sum_{i=0}^{nn-1} S_i .$$

Формула Сімпсона в загальному випадку має вигляд [8]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[\begin{array}{l} f(x_0)+f(x_n)+2\left(f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{n-2})\right)+ \\ +4\left(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{n-1})\right) \end{array}\right].$$

або коротше

$$S=\frac{h}{3}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}f(x_{2k})+4\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}f(x_{2k+1})\right]_{f(x_0)} \qquad (8.4)$$

Як видно з формули (8.4), n має бути обов'язково парним. Алгоритм методу Сімпсона у вигляді блок-схеми та програма на мові С++ показані на рисунку 8.7.

```
// Функція методу Сімпсона
float integral_simps (float a, float b, int n)
{ float h, S, S1, S2, x;
  int i;
  h = (b – a) / n;
  S = 0;
  S1 = 0;
  S2 = 0;
  for (i = 1; i<= n –1; i+ +)
   { x = a + i * h;
     if  (i % 2 == 0)  S2 = S2 + f(x);
     else  S1 = S1 + f(x);
   }
   S = h/3* (f(a) + f(b) + 4*S1+2*S2);
   return S;
}
```

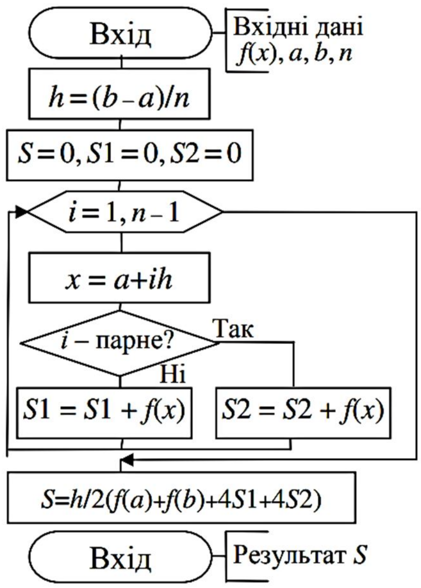


Рис. 8.7. Блок-схема алгоритму методу Сімпсона та програма на мові С++

Оцінка погрішності формули Сімпсона [8]:

$$|I-S_n| \le \frac{b-a}{180}M_4h^4, \qquad (8.4)$$

де $M_4=\max\limits_{q\in(a,b)}\left|f^{(4)}(q)\right|$.

З оцінки (8.5) виходить що, якщо функція *f(x)* є багаточленом 3-го ступеня, то формула (8.4) для обчислення інтегралу (8.1) є теоретично точною.

Якщо функцію f(x) задано на великому проміжку [a; b], то точність розглянутих квадратурних формул стає неприйнятною. Тому для обчислення

$\int_a^b f(x)dx$ застосовують відповідну узагальнену квадратурну формулу. Це означає, що відрізок [a; b] ділять на рівні відрізки і на кожному з них застосовують дану квадратурну формулу. Наприклад, узагальнена формула трапецій виглядає так:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(\ \mathrm{f(a)} + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + \mathrm{f(b)}).$$

А узагальнена формула Сімпсона має вигляд

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(\ \mathrm{f(a)} + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1})\ + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})\ + \mathrm{f(b)}).$$

З оцінки (8.5) виходить що, якщо функція *f(x) є* багаточленом 3-ї степені, то формула (8.4) для обчислення інтеграла (8.1) є теоретично точною.

Приклад 8.3. Обчислити значення визначеного інтеграла за формулою Сімпсона для n=8, оцінити похибку результату, склавши таблицю скінчених різниць.

$$I = \int_{1,2}^{1,6} \frac{\sin(2x-2,1)}{x^2+1} dx$$

Знаходимо *h=(b-a)/n=(1,6-1,2)/8=0,05*

Обчислення значень функцій, а також додавання значень функції, які мають однакові коефіцієнти у формулі, робимо в такій таблиці:

i	x_i	$2x_i$-2,1	Sin($2x_i$-2,1)	x_i^2+1	$y_0 y_8$	$y_1 y_3 y_5 y_7$	$y_2 y_4 y_6$
0	1,20	0,3	0,29552	2,44	0,1211		
1	1,25	0,4	0,28942	2,5625		0,1520	
2	1,30	0,5	0,4794	2,69			0,1782
3	1,35	0,6	0,5646	2,8225		0,2000	
4	1,40	0,7	0.6442	2,96			0,2176
5	1,45	0,8	0,7174	3,1024		0,2312	
6	1,50	0,9	0,7833	3,25			0,2410
7	1,55	1,0	0,8415	3,4025		0,2473	
8	1,60	1,1	0,8912	3,56	0,2503		

Сума				0,3713	0,8305	0,6368

Отже, I≈(0,05)/3*(0,3714+4*0,8305+2*0б6368)=0,05/3*4,9670≈(0,88278

Для оцінки точності одержаного результату складемо таблицю скінчених різниць функції до четвертого порядку.

i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 yi$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,1211	0,0309	-0,0047	0,0003	-0,0001
1	0,1520	0,0262	-0,0044	0,0002	0,0000
2	0,1782	0,0218	-0,0042	0,0002	0,0000
3	0,2000	0,0176	-0,0040	0,0002	0,0001
4	0,2176	0,0136	-0,0038	0,0003	-0,0001
5	0,2312	0,0098	-0,0035	0,0002	
6	0,2410	0,0063	-0,0033		
7	0,2473	0,0030			
8	0,2503				

Оскільки $\max\left|\Delta^4 y_i\right| = 0{,}0001$, то залишковий член формули:

$$R_{залишковий} < \frac{(b-a)\cdot \max\left|\Delta^4 y_i\right|}{180} \approx \frac{0{,}4\cdot 0{,}0001}{180} \approx 0{,}0000003$$

Оскільки обчислення проводились з чотирма значущими цифрами, то величина залишкового члена на похибку не впливає.

Похибку обчислень оцінено із співвідношенням:

$$\Delta I=(b-a)\Delta y \le 0{,}4*0{,}0001<0{,}00005.$$

Отже, одержані чотири десяткові знаки вірні.

Слід зазначити, що якщо необхідно чисельно обчислити значення інтеграла (8.1) із заданою точністю, то для цього потрібно якимось чином визначити відповідне значення *n*. Можна було б скористатися оцінками (8.3) або (8.5), але для цього потрібно оцінити максимальне значення модуля 2-ї (для формули трапецій) або 4-ї (для формули Сімпсона) похідної на відрізку [*a*, b], що може виявитися достатньо важким або зовсім неможливим. Тому можна скористатися таким алгоритмом:

1. Задається початкове значення *n* і обчислюється значення інтеграла *S1* для заданого *n*.
2. Збільшується значення *n* вдвічі й обчислюється значення інтеграла *S2* для цього *n*.
3. Знаходиться значення |*S2* - *S1*| і порівнюється його з заданою точністю обчислення *Є*.
4. Кроки 2 - 3 повторюються доти, доки не виконається умова |*S2*-*S1*\ < *є*.

8.5. Похибки чисельного інтегрування, метод кратного перерахунку.

Розглянемо квадратурну формулу $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$.

Означення 1. Різницю $R_n(f)$ між визначеним інтегралом і квадратурною сумою $R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ називають залишковим членом або похибкою квадратурної формули.

Точність квадратурної формули звичайно характеризують порядком її залишкового члена R(f) стосовно степеня відстані між вузлами інтегрування h, тобто стосовно кроку інтегрування.

Означення 2. Залишковий член R(f) квадратурної формули має порядок k (де k – натуральне число) відносно кроку інтегрування h, якщо існують такі сталі C, c > 0, що $ch^k \le |R(f)| \le Ch^k$ для всіх достатньо малих h.

Записують це так: $R(f) = O(h^k)$. Якщо крок h достатньо малий, то квадратурна формула тим точніша, чим більшим є порядок її залишкового члена.

Для будь – якої квадратурної формули і довільного натурального n можна побудувати на відрізку [a; b] відповідну узагальнену квадратурну формулу, поділивши [a; b] на n рівних відрізків і на кожному з них застосувавши дану квадратурну формулу. Залишковий член узагальненої квадратурної формули трапецій має другий порядок: $R_y(f) = O(h^2)$, а узагальненої квадратурної формули Сімпсона четвертий: $R_y(f) = O(h^4)$.

Застосуємо тут апостеріорні (тобто отримані після і в результаті розрахунків) методи оцінки точності квадратурних формул. Нехай залишковий член деякої узагальненої квадратурної формули має порядок p відносно кроку інтегрування h: $R(f) = O(h^p)$. Поділимо відрізок [a; b] на n рівних відрізків і на 2n рівних відрізків, нехай I_n та I_{2n} – наближені значення інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ за відповідними узагальненими квадратурними формулами, а $R_n(f)$ і $R_{2n}(f)$ – відповідні залишкові члени. Апостеріорний метод подвійного перерахунку ґрунтується на двох формулах.

1. $R_{2n}(f) \approx \frac{I_{2n} - I_n}{2^p - 1}$ (правило Рунге)

2. $\int_a^b f(x)dx \approx I_{n,2n} = I_{2n} + \frac{I_{2n} - I_n}{2^p - 1}$ (формула екстраполяції за Річардсоном).

Тут похибка $R_{2n}(f) = O(h^{p+1})$, $\int_a^b f(x)dx = I_{n,2n} + O(h^{p+1})$. Процес можна продовжити: поділити відрізок [a; b] ще на 4n рівних відрізків і дістати за правилом Рунге та формулою екстраполяції за Річардсоном $I_{2n,4n}$ і $R_{4n}(f)$, які є вже наближеннями порядку p + 2 і так далі, отримуючи наближення порядку p + 3, p + 4, … . Це складає апостеріорний метод кратного перерахунку, який є узагальненням методу подвійного перерахунку.

8.6. Вибір кроку інтегрування

Завдання полягає у визначенні кроку h , що забезпечує задану точність ε обчислення інтеграла за обраною формулою.

Існують два основні способи задавання допустимого значення кроку. Розглянемо декі з них.

1. За залишковим членом. Використовуючи формулу відповідного залишкового члена R(x) вибирають *h* таким, щоб виконувалася нерівність $|R(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Потім з отриманим кроком обчислюють інтеграл за квадратурною формулою.

Обчислення треба робити з таким числом цифр, щоб похибка заокруглення не перевищувала ε .

2. Послідовним подвоєнням числа кроків. Обчислюють інтеграл за обраною квадратурною формулою двічі: спочатку з деяким кроком h , потім з кроком *h/2* , тобто подвоюють кількість *n.* Якщо $|J_h - J_{h/2}| < \varepsilon$, то приймають $J_h \approx J_{h/2}$.

Якщо виявляється, що ця умова не виконується, то розрахунок повторюють з кроком h/4 . Як початковий крок іноді доцільно брати число, близьке до $\sqrt[k]{\varepsilon}$.

8.7. Висновки

1. Точність обчислення визначеного інтеграла залежить від числа розбиття відрізка інтегрування.
2. Метод Сімпсона є більш ефективним для розрахунків визначеного інтеграла.

8.8. Контрольні запитання

1. Сформулюйте постановку задачі чисельного інтегрування функції.
2. У чому полягає ідея методу трапецій?
3. У чому полягає ідея методу Сімпсона?
4. Який з відомих вам методів чисельного інтегрування має більшу точність?
5. Вкажіть алгоритм, за яким можна розрахувати значення визначеного інтеграла з заданою точністю.

8.9. Завдання для самостійного опрацювання

1. Обчисліть визначений інтеграл функції $f(x) =(5-x)/(x^2+2)$ на відрізку [- *2, 3*] за формулами прямокутників, трапецій і Сімпсона. Порівняйте результати.

РОЗДІЛ 9
ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

9.1. Розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь

9.1.1. Постановка задачі Коші

Задача Коші для звичайних диференціальних рівнянь використовується як математична модель при розв'язанні багатьох задач природознавства. Наприклад, задачі динаміки системи взаємодіючих тіл (у моделі руху матеріальних точок), задачі хімічної кінетики, електричних ланцюгів. Ряд важливих рівнянь у частинних похідних у випадках, що допускають розділення змінних, приводить до задач для звичайних диференціальних рівнянь. Це, як правило, крайові задачі (задачі про власні коливання пружних балок і пластин, визначення спектра власних значень енергії частинки у сферично-симетричних полях і багато інших).

Задача Коші для диференціального рівняння *n* -го порядку

$$y^{(n)} = f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)}) \tag{9.1}$$

полягає у відшуканні функції $y = y(x)$, що задовольняє це рівняння і початкові умови:

$$y(x_0) = y_0,\ y`(x_0) = y`_0,\dots,y^{(n-1)}{}_{(x0)} = y_0{}^{(n-1)} \tag{9.2}$$

де x_0, y_0, $y`_0$,$y``$,...,$y^{(-1)}$ - задані числа.

Наприклад, можна розглянути 2-й закон Ньютона: в інерціальній системі відліку прискорення, яке отримує матеріальна точка з постійною масою, прямо пропорційно рівнодіючій всіх доданих до неї сил і обернено пропорційно її масі. Цей закон може бути записаний у вигляді формули:

$$a = \frac{F}{m}$$

де a - прискорення матеріальної точки;

F - рівнодіюча всіх сил;

m - маса матеріальної точки.

Якщо припустити, що напрям сили не змінюється і позначити через y координату точки на прямій вздовж руху, то $a = y``$ формула 2-го закону Ньютона приймає вигляд $a'' = \frac{F}{m}$, тобто є окремим випадком m

формули (9.1). Якщо відомі положення точки та її швидкість у початковий момент часу (9.2) і рівнодіюча сила F, то розв'язавши задачу Коші можна визначти її положення і швидкість у будь-який наступний момент часу.

Задача Коші для системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dy1}{dx} = f1(x, y_1, y_2, \dots, y_m), \\ \dfrac{dy2}{dx} = f2(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \qquad\qquad \dots \\ \dfrac{dym}{dx} = fm(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases} \tag{9.3}$$

полягає у відшуканні функцій $y_i = y_i(x)$, $y_2 = y_2(X)$, .., $y_m = y_m(x)$, що задовольняють цю систему і початкові умови:

$$y_j(x_0) = y_{j0},\ j = i,m, \tag{9.4}$$

де x_0, y_{jo}, $j = i,m$, - задані числа.

Систему, що містить похідні вищих порядків і розв'язану відносно старших похідних шуканих функцій, шляхом введення нових невідомих функцій можна привести до вигляду (9.3). Зокрема, диференціальне рівняння *n* - го порядку (9.1) приводиться до вигляду (9.3) за допомогою такої заміни:

$$y_1 = y,\ y_2 = y`,\ y_3 = y``,\ \ldots,\ y_n = y^{(n-1)},$$

що дає систему

$$\begin{cases} \frac{dy1}{dx} = y_2, \\ \frac{dy1}{dx} = y_3, \\ \ldots \\ \frac{dyn}{dx} = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{9.5}$$

Таким чином, задача (9.1), (9.2) є окремим випадком задачі (9.3), (9.4), тому чисельні методи розв'язання задачі Коші розроблені для більш загальної задачі (9.3), (9.4).

Варто зазначити, що в більшості практичних задач змінна *x* - це час, тобто в (9.3), (9.4) замість *x* можна застосовувати і позначення *t*.

Для задачі (9.3), (9.4) вводяться позначення:

$$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \ldots \\ y_m(x) \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \ldots \\ y_{m0} \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} y`_1(x) \\ y`_2(x) \\ \ldots \\ y`_m(x) \end{pmatrix}, F(x,y) = \begin{pmatrix} f1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ f2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ \ldots \\ fm(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \end{pmatrix}$$

де *y*- шуканий розв'язок;

y_0 - вектор початкових умов;

$F(x,y)$ - вектор правих частин системи (9.3).

Тоді задача Коші для системи диференціальних рівнянь у векторній формі має вигляд:

$$y' = f(x,y),\ y(x_0) - y_o. \tag{9.6}$$

Надалі для простоти викладення буде розглянуто задачу Коші для одного звичайного диференціального рівняння виду:

$$y' = f(x,y), \tag{9.7}$$

де y - скалярна змінна.

При цьому **задача Коші** полягає в такому: знайти функцію $y = y(x)$ на заданому відрізку $[a,b]$, що задовольняє рівнянню (9.7) і початковій умові:

$$y(a) = y_o, \tag{9.8}$$

де y_0 задане.

Чисельні методи, що будуть розглянуті далі для задачі (9.7), (9.8), мають місце і для загальної задачі (9.6).

Чисельні методи розв'язання задачі (9.7), (9.8) знаходять розв'язок (тобто функцію $y(x)$ на відрізку $[a,b]$) у табличному вигляді, а саме у вигляді набору точок (x_i,y_i), $i=0,n$, де $x_o = a$, $x_j = x_o + i\ h$, $i = 1,n$, $h = \frac{b-a}{n}$, n - задане число розбиття відрізка $[a,b]$, y_j, $i = 1,n$ - знайдені наближені значення функції $y(x)$ в точках x_{-t} (слід нагадати, що y_0 задане спочатку).

Варто розглянути декілька методів розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння (9.7) на відрізку $[a,b]$.

9.1.2. Метод Ейлера та його модифікації

Ідея методу Ейлера заснована на тому, що шукана інтегральна крива $y = y(x)$, яка проходить через точку $м_o(x_0,y_0)$, відновлюється у вигляді кусочно-лінійної ламаної $м_oм_1м_2...м_n$ з вершинами $mi(xjy)$ ($i = o,n$) (рис. 9.1). Кожен відрізок M_iM_{i+1} цієї ламаної має напрям, що співпадає з напрямом тієї інтегральної кривої рівняння (9.7), яка проходить через точку M_i.

Тоді $y_{i+1} - y_i = h \times tg(\alpha)$. Тангенс кута нахилу дотичної до $y(x)$ в точці x_i дорівнює $y'(x_j)$, а значить, згідно з (9.7), і дорівнює $f(x_1,y_1)$, звідки і випливає формула методу Ейлера.

Таким чином, у методі Ейлера значення y_i обчислюються рекурентно за формулою:

$$y_{i+1}=y_i+h \times f(x_i,y_i),\ i=0,\ n-1 \tag{9.9}$$

Погрішність методу Ейлера [3; 4; 5; 18], що оцінюється для величини $\backslash y_n$ -

$y(x_n)$, має порядок $O(h)$, тобто існує деяка константа $M > 0$ така, що:

$$|y_n - y(x_n)| \le Mh \tag{9.10}$$

Тут $y(x)$ - точний розв'язок задачі Коші (9.7), (9.8), а порівняння з наближеним розв'язком (x_j, y_j), $i = 0,n$, йде в крайній (правій) точці $x_n = b$ відрізка $[a,b]$, оскільки саме в ній погрішність теоретично буде максимальною, відносно проміжних точок x_j.

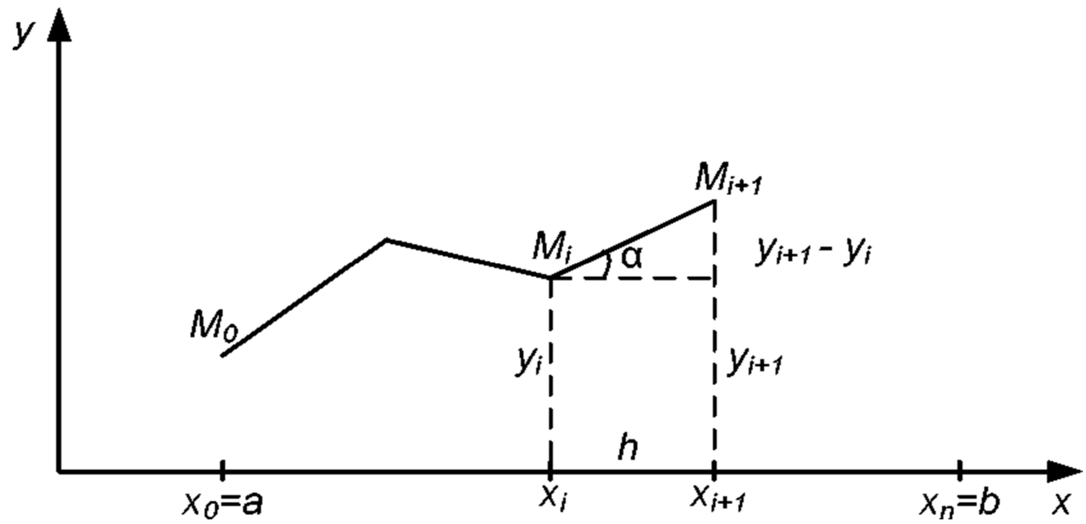


Рис. 9.1. Графічна інтерпретація методу Ейлера

Варто зазначити, що оцінка (9.10) носить лише теоретичний характер, на практиці ж для оцінки отриманого розв'язку можна скористатися подвійним прорахунком. Для цього проводять повторні обчислення, але вже з кроком h, отримують вже точніший наближений розв'язок (x_i^*, y_i^*), $i = 0,n^*$, $(n^* = 2n)$ і погрішність наближення оцінюють як:

$$|y_n^* - y(x_n^*)| = |y_n^* - y_n|$$

Таким чином, для того щоб отримати розв'язок задачі Коші (9.7), (9.8) із заданою точністю $\epsilon > 0$ (застосовуючи метод Ейлера) можна, починаючи з деякого початкового значення кроку h , проводити подвійний прорахунок (тобто зменшуючи вдвічі h) допоки не виконається нерівність $|y^*_{n^*} - y_n| \le \varepsilon$

1-а модифікація методу Ейлера. У 1-й модифікації методу Ейлера значення y_i обчислюються рекурентно за формулами ($i = 0,n - 1$):

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_{i,} y_i); \tag{9.11}$$

$$y_{i+1} = y_i + h \times f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{i+\frac{h}{2}}\right); \tag{9.12}$$

Ідея цієї модифікації методу Ейлера полягає в тому, що спочатку обчислюється значення $y_{i+\frac{1}{2}}$ за формулою (9.11) у проміжній точці $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$ (середині) інтервала (x_j, x_{j+i}), а потім вже отримують y_{i+1} в точці x_{j+i} за формулою (9.12).

Погрішність 1-ї модифікації методу Ейлера [3; 4; 5; 18], що оцінюється для величини $|y_n - y(x_n)|$, має порядок $O(h^3)$, тобто існує деяка константа $M > 0$ така, що $|y_n - y(x_n)| < Mh^3$.

Як видно з наведеної оцінки погрішність 1-ї модифікації метода Ейлера на два порядки менша, ніж у звичайного методу Ейлера, хоча за це доводиться платити додатковими обчисленнями. А саме: функція $f(x,y)$ з правої частини диференціального рівняння (9.7) обчислюється на кожному кроці 1-ї модифікації (9.11), (9.12) двічі. Варто зазначити, що при розв'язанні практичних задач основні обчислювальні витрати припадатимуть саме на обчислення значень функції $f(x,y)$.

2-а модифікація методу Ейлера. У 2-й модифікації методу Ейлера значення $y,$ обчислюються рекурентно за формулами ($i = 0,n -1$):

$$y^*_{i+1} = y_i + h \times f(x_i, y_i); \tag{9.13}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\big(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\big); \tag{9.14}$$

Ідея цієї модифікації методу Ейлера полягає в тому, що спочатку обчислюється "грубе наближення y^*_{i+1} за формулою (9.13) і за ним обчислюють значення $f(x_i, y_i)$, а потім вже «остаточне наближення» y_{i+1} отримують за формулою (9.14), в якому фігурує середнє значення $\frac{1}{2}\big(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\big)$

Погрішність 2-ї модифікації методу Ейлера, що оцінюється для величини $|y_n - y(x_n)|$, також має порядок $O(h^3)$, тобто існує деяка константа $M > 0$ така, що

$|y_n - y(x_n)| < Mh^3$. Значення функції $f(x,y)$ з правої частини диференціального рівняння (9.7) також обчислюються двічі на кожному кроці цієї модифікації (9.13), (9.14).

9.1.3. Метод Рунге - Кутта четвертого порядку

Ідея методу Рунге - Кутта заснована на застосуванні, на відміну від методу Ейлера (кусочно-лінійна ламана), кривих вищого порядку для відновлення значень шуканої функції $y(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Найчастіше при розв'язанні практичних задач (9.7), (9.8)

використовується **метод Рунге - Кутта четвертого порядку**. Згідно з цим методом значення y_i обчислюються рекурентно за формулою

$$y_{i+1} = y_i = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), i = 0, n-1, \tag{9.15}$$

де $k_1 = hf(x_i, y_i), k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right),$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

Погрішність методу Рунге - Кутта 4-го порядку, що оцінюється для величини $|y_n - y(x_n)|$, має порядок $O(h^4)$. Як видно, погрішність при використанні цього методу нижча, ніж при використанні методу Ейлера і його модифікацій, але за це доводиться платити додатковими обчисленнями. А саме: функція $f(x,y)$ з правої частини диференціального рівняння (9.7) обчислюється на кожному кроці методу Рунге - Кутта 4-го порядку (9.15) чотири рази, що у випадках, коли обчислення значення функції $f(x,y)$ є дуже трудомістким, може істотно уповільнити пошук розв'язку.

9.2. Багатокрокові методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

9.2.1. Поняття багатокрокового методу

Розглянуті у розділі 9.1 чисельні методи розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь відносяться до **однокрокових методів** тому, що при розрахунку поточного значення y_{i+1} на i -му кроці використовується тільки інформація на останньому відрізку [x_i, $x_{,+}i$]. Все, що робилось на попередніх кроках методу, явно не використовується. Навпаки, є **багатокрокові методи** розв'язання задачі Коші (9.7), які використовують те, що було отримано на попередніх кроках методу явно. Такими є, наприклад, методи: Адамса - Бошфорда, Адамса - Мултона, Гіра - Брайтона [19].

9.2.2. Метод Адамса - Бошфорда

В основі методу Адамса - Бошфорда лежить формула Ньютона - Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

де $\Phi(x)$ - будь-яка первісна для підінтегральної функції $f(x)$ на відрізку [a, b].

Застосування формули Ньютона - Лейбніца до рівняння (9.7) на будь-якому відрізку [x_i, x_{i+1}] приводить до рівняння:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y(x_{i+1}) - y(x_i) = f(x, y(x))dx,$$

Тоді, якщо вже були отримані значення y_{i-m+1}, $y_{i-m+2}, \ldots, y_{i-1}$ в m попередніх точках (вузлах) $x_{i-m+i}, x_{i-m+2}, \ldots, x_{j-i}$, x_i, то підінтегральну функцію $f(x,y(x))$ можна замінити інтерполяційним поліномом Ньютона $H_m\text{-}i(x)$, побудованим за цими m вузлами. Таким чином, отримуємо загальну рекурентну формулу методу Адамса - Бошфорда m -го порядку:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_{m-1}(x)dx, \qquad (9.16)$$

Оскільки $H_{m-1}(x)$ - поліном, то інтеграл від нього береться аналітично і таким чином отримують різницеву схему розв'язання задачі Коші для будь-якого m. Наприклад, якщо $m = 1$, то $H_{m-i}(x) = f(x_j, y_j)$ і з (9.1) витікає:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

Де $h = x_{i+1} - x_i)$

Таким чином, при $m = 1$ метод Адамса - Бошфорда співпадає з методом Ейлера.

Найчастіше застосовують метод Адамса - Бошфорда 4-го порядку, який має таку різницеву схему [19]:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_{\mathrm{i}} - 59f_{\mathrm{i-1}} + 37f_{\mathrm{i-2}} - 9f_{\mathrm{i-3}}) \qquad (9.17)$$

де $f_i = f(x_i, y_i)$.

Очевидно, що за формулою (9.17) можна проводити обчислення тільки при $i > 3$, тому що на i -му кроці методу треба знати значення $f_{i-3}, f_{j-2}, f_{i-1}, f_i$. Тому перш ніж застосовувати метод Адамса - Бошфорда 4-го порядку, необхідно спочатку обчислити значення $f=, f_1, f_2$ для перших 3-х кроків. Зазвичай для цього застосовують метод Рунге - Кутта, бо він має достатньо велику точність.

Погрішність методу Адамса - Бошфорда 4-го порядку, що оцінюється для величини $|y_n - y(x_n)|$, має порядок $O(h^4)$ [19].

Приклад 9.1. Розв'язати задачу з прикладу 9.1 методом Адамса -

9.2.3. Метод Адамса - Мултона

Слід зазначити, що в методі Адамса - Бошфорда інтерполяційний поліномом Ньютона $H_{m-1}(x)$ застосовується для екстраполяції функції $f(x,y(x))$ на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$, оскільки він будується за вузлами x_{i-m+1}, x_{i-m+2}. У методі Адамса - Мултона також застосовується інтерполяційний поліномом Ньютона $H_{m-1}(x)$, але не для екстраполяції, а для інтерполяції функції $f(x,y(x))$ на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$, оскільки він будується за вузлами x, x_{i-m+1}, x_{i-m+2}.

Тому для методу Адамса - Мултона 4-го порядку отримано таку різницеву схему [19]:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}) \qquad (9.18)$$

де $f_{i-1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$

На відміну від схеми (9.17), в схемі (9.18) у правій частині фігурує ще не відоме значення y_{i+1}. Такі методи носять назву **неявних методів**. Тому для пошуку y_{i+1} треба розв'язати нелінійне рівняння (9.18) відносно y_{i+1}. Слід зазначити, що в загальній постановці задачі Коші виду (9.18), (9.19) при застосуванні методу Адамса - Мултона доведеться на кожному кроці розв'язувати систему нелінійних рівнянь.

Погрішність методу Адамса - Мултона 4-го порядку, що оцінюється для величини $|y_n - y(x_n)|$, має порядок $O(h^5)$ [19].

9.2.4. Метод прогнозу та корекції

Різницеву схему (9.3) застосовують і для уточнення значення y_{i+1}, що було розраховане за різницевою схемою (9.18). Така комбінація методів Адамса - Бошфорда і Адамса - Мултона 4-го порядку має назву **методу прогнозу та корекції** [19].

У багатокроковому **методі прогнозу та корекції** 4-го порядку у ході розв'язання задачі Коші (9.7), (9.8) значення y_t y вузлах сітки x_j, $i = 1,n$, обчислюються рекурентно за формулами:

$$y_{i+1}^{(pred)} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2})$$

$$f_{i+1}^{(pred)} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(pred)})$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_i - 19f_{i-1} + 5f_{i-2})$$

де $f_i=f(x_i, y_i)$

Похибка методу прогнозу та корекції 4-го порядку, оцінювана для величини $|y_n - y(x_n)|$, має порядок $O(h^5)$ [5; 19].

Якщо порівнювати однокрокові та багатокрокові методи розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь, треба підкреслити, що в багатокрокових методах крок h можна обирати більшим, ніж у однокрокових методах. Це дає можливість значно зменшити кількість кроків, а значить і трудомісткість розв'язання задачі в цілому.

9.3. Неявні методи розв'язання жорстких задач Коші

9.3.1. Поняття жорсткої системи диференціальних рівнянь

Поняття жорсткої задачі Коші вводиться для задачі виду (9.3), (9.4) (в матричній формі (9.6)), тобто для системи диференціальних рівнянь.

Для підвищення точності та адекватності математичних моделей складних об'єктів і процесів при побудові моделей доводиться враховувати велику кількість факторів та параметрів. При цьому в математичній моделі, що описується системою диференціальних рівнянь, опиняються складові з великими і малими значеннями похідних від шуканих функцій $y_j(x)$. Це і призводить до так званої **жорсткої системи диференціальних рівнянь.** Тут треба зазначити, що жорсткість є властивістю самої математичної задачі, а не чисельного методу її розв'язання. Застосування описаних (розділи 9.1, 9.2) явних чисельних методів для жорстких систем диференціальних рівнянь дає велику похибку у розв'язку, тому для них розроблені так звані **неявні методи** [19].

Слід розглянути спочатку (замість (9.6)) лінійну систему диференціальних рівнянь з незалежною від x матрицею $A \in R^{mxm}$:

$$y`=A\times y(x) \tag{9.19}$$

Нехай λ_i, $i=1,m$ - множина власних чисел матриці A, $K = \frac{\max\limits_i |Re(\lambda_i)|}{\min\limits_i |Re(\lambda_i)|}$,

де $Re(\lambda_i)$ - дійсна частина власного числа.

Визначення. Система диференціальних рівнянь (9.1) називається **жорсткою**, якщо [19]:

$$Re(\lambda_i) < 0,\ i = 1,m \text{ і } K >> 1.$$

При цьому K називається **числом жорсткості системи** (9.1).

Це поняття жорсткої системи узагальнюється і на систему (9.6).

Роль матриці A при цьому відіграє матриця Якобі

$$A(x) = F'_Y(x,Y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x,Y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x,Y)}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x,Y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x,Y)}{\partial y_m} \end{pmatrix},$$

яка в загальному випадку вже буде залежати від x, тобто змінюватись у часі буде і число жорсткості системи (9.6).

Як вже згадувалося раніше, застосування явних чисельних методів для жорстких систем диференціальних рівнянь дає велику похибку у розв'язку, якщо крок обчислень не є досить малим, а саме він повинен задовольняти обмеженню [19]:

$$h < \frac{c}{|\lambda_{max}|}$$

де c - константа, яка залежить від умов задачі (9.6),

λ_{max} - максимальне за модулем власне число матриці Якобі.

9.3.2. Неявні методи Ейлера і Рунге - Кутта

Поняття неявного методу було введено в розділі раніше. Це методи, що застосовують схему (наприклад, як в схемі (9.3) методу Адамса - Мултона 4-го порядку), в якій в лівій і правій частині фігурує ще не відоме значення y_{j+1}.

Неявний метод Ейлера. Явна схема методу Ейлера має вид (9.9).

У розділі 10.2 було зазначено, що цей метод Ейлера співпадає з методом Адамса - Бошфорда 1-го порядку. В той же час, метод Адамса - Мултона дає алгоритм переходу від явного методу до неявного, шляхом заміни виду інтерполяційного поліному Ньютона. Так, при $m = 1$, якщо побудувати інтерполяційний поліном Ньютона за вузлом x_{j+i}, то він буде мати вигляд: $H_{m-i}(x) = F(x_{j+1}, y_{j+i})$. Таким чином, з (9.1) отримується схема неявного методу Ейлера:

$$y_{i+i} = y_j + hf(x_{j+i}, y_{i+i}). \tag{9.20}$$

Слід зазначити, що для визначення y_{j+i} треба розв'язати систему нелінійних рівнянь (9.2). Система (9.2) нелінійна оскільки в загальному випадку векторна функція $F(x,Y)$ нелінійна відносно Y. Розв'язати систему нелінійних рівнянь (9.2) можна, наприклад, методом Ньютона.

Неявний метод Рунге - Кутта. У неявному методі Рунге - Кутта 4-го порядку для розв'язання жорстких систем звичайних диференціальних рівнянь (9.6) значення y_j у вузлах сітки x_j, $i = 1,n$, рекурентно обчислюються, як розв'язання системи рівнянь [21]:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1^* + 2K_2^* + 2K_3^* + K_4^*), i = 0, n-1, \tag{9.21}$$

де$K_1^* = hF(x_{i+1}, y_{i+1}), K_2^* = hF\left(x_{i+1} - \frac{h}{2}, y_{i+1} - \frac{h}{2}K_1^*\right)$

Глобальна похибка неявного методу Рунге - Кутта 4-го порядку, оцінювана для величини $|y_n - y(x_n)|$, має порядок $O(h^4)$, а локальна - $O(h^5)$ [19].

9.4. Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь

9.4.1. Постановка крайової задачі

Крайова задача для звичайного диференціального рівняння 2-го порядку виду

$$F(x, y, y`, y``) = 0 \tag{9.23}$$

полягає в такому: знайти функцію $y = y(x)$ на заданому відрізку $[a,b]$, що задовольняє рівняння (9.21) і крайові умови:

$$\begin{cases} \phi_1(y(a),y'(a))=0 \\ \phi_2(y(b),y'(b))=0 \end{cases}, \qquad (9.24)$$

де F, ϕi, $\phi 2$ - задані неперервні функції відповідної кількості аргументів.

Крайова задача (9.23), (9.24) називається **лінійною**, якщо всі функції $F, \phi i, \Phi 2$ лінійні відносно y, y', y''. Таким чином, лінійна крайова задача для звичайного диференціального рівняння 2-го порядку полягає в такому: знайти функцію $y=y(x)$ на заданому відрізку $[a,b]$, що задовольняє лінійне рівняння виду

$$y''+ p(x)y' +q(x)y = f(x) \qquad (9.25)$$

і лінійні крайові умови

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)=A \\ \beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)=B \end{cases}, \qquad (9.26)$$

де $p(x), q(x), f(x)$ - задані неперервні функції від x;

a_0, a_1, - задані константи, причому $|a_0| +| a_1|\neq 0$.

Чисельні методи розв'язання задачі (9.23), (9.24), а зокрема і задачі , (9.25), (9.26) знаходять розв'язок (тобто функцію $y(x)$ на відрізку $[a,b]$) у табличному вигляді, а саме у вигляді набору точок $(x,y;)$, $i = 0,n$, де $x_o = a$, $x_i = x_{o+i} h$, $i = 1,n$, $h =ba$, n - задане число розбиття відрізка $[a,b]$, y_j , $i = 0, n$ - знайдені наближені значення функції $y(x)$ в точках x_i .

9.4.2. Метод кінцевих різниць для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

Варто розглянути **метод кінцевих різниць** розв'язання лінійної крайової задачі (9.25), (9.26).

Слід зазначити, що для пошуку чисельного розв'язку задачі (9.25), (9.24) необхідно знайти всі значення y_i , $i = 0,n$, тому вони розглядаються як невідомі.

Вводять позначення:

$$p_i = p(x_i),\ q_i = q(x_i),\ f_j = f(x_i),\ i = \text{n}.$$

Замінюють наближено в кожному внутрішньому вузлі x_j похідні $y'(x\text{-}f)$, $y''(x_j)$ кінцево-різницевими формулами:

$$y'(x_i)\approx\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h},\ y''(x_i)\approx\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2},$$

а на кінцях відрізка [a,b] покладають:

$$y'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h},\ y'(x_n) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}.$$

Використовуючи ці формули, наближено замінюють рівняння (9.25) (в точках x_j, $j = \overline{1,n}$) і крайові умови (9.26) системою рівнянь:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i,\ (i = \overline{1, n-1}); \tag{9.27}$$

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A; \tag{9.28}$$

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \tag{9.29}$$

Отримана система (9.27), (9.29) є лінійною алгебраїчною системою *(n +1)* рівнянь відносно *(n +1)* невідомих y_i , $j = \overline{0,n}$. Розв'язавши її, якщо це можливо, і буде отримана таблиця наближених значень шуканої функції $y(x)$ на відрізку [a,b].

Погрішність методу кінцевих різниць, що оцінюється для величин $|yi - y(x_j)|$, $j = \overline{0,n}$, має порядок $O(h^2)$ [3; 4; 5; 18].

Варто додати, що систему (9.27) - (9.29) при розв'язанні краще записати у вигляді:

$$\begin{cases} (\alpha_0 h - \alpha_1) y_0 + \alpha_1 y_1 = Ah \\ (1 - \frac{p_i h}{2}) y_{i-1} + (q_i h^2 - 2) y_i + (1 + \frac{p_i h}{2}) y_{i+1} = f_i h^2\ (i = \overline{1, n-1}). \\ -\beta_1 y_{n-1} + (\beta_0 h + \beta_1) y_n + = Bh \end{cases} \tag{9.30}$$

Слід звернути увагу на те, що система лінійних алгебраїчних рівнянь (9.27) має трьохдіагональний вигляд, а саме: в кожне i -те внутрішнє рівняння входять лише 3 невідомі y_{i-1}, y_i, y_{i+1}. Для розв'язання такого виду систем на практиці використовують **метод прогонки** [3; 4; 5; 18]. Цей чисельний метод, по суті, є модифікацією методу Гауса, пристосованою для прискореного пошуку розв'язку систем трьохдіагонального виду.

Приклад 9.4. Розв'язати методом кінцевих різниць крайову задачу $x^2y''+xy' = 1$, $y(1) = 0$, $y(1.4) = 0,05661$ з числом розбиття відрізка $n = 10$.

9.4.3. Метод кінцевих різниць для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку

Варто розглянути тепер крайову задачу для нелінійного диференціального рівняння:

$$y'' = f(x,y,y'). \quad (9.31)$$

при лінійних обмеженнях

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B' \end{cases} \quad (9.32)$$

де $f(x,y,y')$ - задана неперервна функція,

a_o, ai, A, B - задані константи.

Метод кінцевих різниць для задачі (9.31), (9.32) записується таким чином.

Знову необхідно знайти всі наближені значення y_i , $i = 0,n$, функції $y = y(X)$ у рівновіддалених вузлах $x_o = a$, $x_i = x_o + ih$, $i = 1,n$ з кроком $h =ab$, де n - задане число розбиття відрізка [a,b].

Треба замінити наближено в кожному внутрішньому вузлі x_j похідні $y'(x_j)$, $y''(x_j)$ симетричними кінцево-різницевими формулами:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

а на кінцях відрізка [a,b] покласти:

$$y'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y'(x_n) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}.$$

Використовуючи ці формули, наближено замінюють рівняння (9.30) (в точках x_j, $i = 1,n$) і крайові умови (9.31) системою рівнянь:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}), \; (i = \overline{1,n-1}); \quad (9.32)$$

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A; \quad (9.33)$$

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \quad (9.34)$$

Таким чином, отримуємо систему (9.32) - (9.34) $(n +1)$ нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно $(n +1)$ невідомих y, $i = 0,n$. Розв'язавши її, і буде отримана таблиця наближених значень шуканої функції *y(x)* на відрізку $[a,b]$

Слід зазначити, що для розв'язання системи (9.32) - (9.34) можна скористатися методом Ньютона або методом ітерацій [3; 4; 5; 18].

Приклад 9.5. Розв'язати методом кінцевих різниць крайову задачу $y`` = \frac{1-xy}{x^2}$ *y(1) = 0, y(1.4) = 0,05661,* з числом розбиття відрізка *n = 10*.

9.5. Висновки

1. Математичні моделі процесів та явищ, зокрема моделі динамічних систем, у більшості випадків записуються у вигляді диференціальних рівнянь.
2. Задача Коші для звичайних диференціальних рівнянь має велике практичне значення.
3. При застосуванні багатокрокового методу необхідно спочатку декілька кроків виконати однокроковим методом.
4. У багатокрокових методах крок h можна обирати більшим, ніж у однокрокових методах.
5. На практиці задача Коші як математична модель деяких динамічних процесів є найчастіше жорсткою.
6. У неявних методах крок h можна обирати більшим, ніж в явних методах.
7. Математичні моделі процесів та явищ, зокрема моделі дина¬мічних систем, у більшості випадків записуються у вигляді диференціаль¬них рівнянь.
8. Задача Коші і крайова задача для звичайних диференціальних рівнянь має велике практичне значення.

9.6. Контрольні запитання

1. Що називається звичайним диференціальним рівнянням?
2. Сформулюйте постановку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння. Що є її розв'язком? У якому вигляді подається розв'язок чисельним методом?
3. Який з відомих вам методів розв'язання задачі Коші для звичайного диференціального рівняння треба застосовувати в тих чи інших випадках?
4. Які чисельні методи розв'язання задачі Коші для звичайних

диференціальних рівнянь називаються багатокроковими методами?

5. Які особливості мають багатокрокові методи відносно одно- крокових методів?

6. Наведіть загальну схему всіх методів розв'язання задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь.

7. У чому полягає суть жорсткої задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь?

8. Які методи розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь називаються неявними методами?

9. Які особливості мають неявні методи відносно явних методів?

10. Сформулюйте постановку задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. Що є її розв'язком? У якому вигляді подається розв'язок чисельним методом?

11. Який з відомих вам методів розв'язання задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь треба застосовувати в тих чи інших випадках?

12. Що називається звичайним диференціальним рівнянням?

13. Сформулюйте постановку крайової задачі для звичайного диференціального рівняння. Що є її розв'язком? У якому вигляді подається розв'язок чисельним методом?

14. В чому суть методу кінцевих різниць для лінійної крайової задачі? Які він має оцінки погрішності?

9.7. Завдання для самостійного опрацювання

1. Розв'яжіть задачу Коші для диференціального рівняння $y` = \frac{x+y-3}{x-y-1}$ на відрізку *[2,25]* (початкова умова *y(2) = 1*) чисельно методами Ейлера і його модифікаціями й методом Рунге - Кутта із числом розбиття відрізка *n = 20*. Побудуйте графіки отриманих розв'язків.

2. Розв'яжіть методом кінцевих різниць нелінійне диференціальне рівняння другого порядку y”-2xy'- 2y2 =-4x, y(0) = 0, y(1) = 3.7 з числом розбиття відрізка n = 20. Побудуйте графік отриманого розв'язку.

Розділ 10
ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

◊**До методів чисельного інтегрування належать?**
метод прямокутників;
метод релаксації;
метод Лейбниця;
метод ділення навпіл;

◊**Що означає відділити корені?**
це означає розділити всю область допустимих значень на відрізки, що містять всередині один корінь;
означає знайти єдиний розв’язок звичайного диференціального рівняння;
означає розв’язати систему рівнянь;
означає знайти певні обмеження на вибір систем базисних функцій;

◊***Транспонована матриця – це?***
матриця, при якій її рядки та стовпці міняються місцями;
матриця, всі діагональні елементи якої дорівнюють 0;
якщо всі елементи матриці рівні між собою;
матриця у якої є вільні члени;

◊**Слід матриці – це?**
це сума усіх її діагональних елементів;
сума рядків;
сума стовпців;
добуток рядків;

◊**Які обмеження накладає метод Гальоркіна?**
надає певні обмеження на вибір системи базисних функцій, які залежать від граничних умов крайової задачі;
цей метод не надає обмеження;
має забезпечити діагональну домінантність;
зменшити істотно погрішність апроксимації;

◊**Прямі методи розв’язування систем лінійних рівнянь – це**
метод обчисленням обернених матриць;
метод Симпсона;
метод Крамера;
метод Гаусса;

◊**З чого складається математична модель?**
складається з рівнянь різної форми, які описують об’єкт дослідження;
з символів;

з рівнянь однакової форми;
з добутку чисел;

◊Які існують джерела похибки результату?
математичної моделі, вихідних даних, наближеного методу розв’язання задачі, округлення при обчисленні;
прямі;
точні;
немає правильної відповіді;

◊Як ще називають метод Зейделя?
методом Гаусса-Зейделя;
немає правильної відповіді;
метод Ньютона;
метод Гаусса;

◊Метод Ньютона відомий як?
метод дотичних;
метод математичної моделі;
метод обчислення;
всі відповіді вірні;

◊Як здійснюється пошук рішень методом Ньютона?
здійснюється шляхом побудови послідовних наближень і заснованих на принципах простої ітерації;
знаходженням похідної;
добутку чисел;
всі відповіді вірні;

◊ Точність розв'язку крайової задачі методом колокацій залежить від:
типу базисних функцій $\Phi_i(x)$
знаків функцій
залежних змінних
незалежних змінних

◊Ідея методу скінченних різниць полягає в тому, що:
похідні в диференціальному рівнянні і граничних умовах заміняються їх скінченними різницями
різницеві апроксимації похідних першого і другого порядків мають похибку першого порядку
асиметрична апроксимація першої похідної має глобальну похибку першого порядку
на елементарному інтервалі не дорівнюють нулю фінітні функції та їх похідні

◊Скільки може мати розв’язків загальна задача лінійного програмування:

єдиний, безліч або не мати оптимальних розв'язків
жодного
безліч
єдиний

◊Щоб знайти оптимальний розв'язок потрібно:
переходити від одного опорного плану до іншого в напрямі зменшення або збільшення цільової функції
розв'язати систему рівнянь
знайти множину допустимих розв'язків та обмежень
знайти будь-який допустимий розв'язок

◊Якщо система обмежень несумісна,то:
задача лінійного програмування не має оптимального розв'язку
то функція мети обмежена на ній
існує лише один оптимальний розв'язок
вона має безліч оптимальних планів

◊Умови застосування методу простої ітерації?
знак першої та другої похідних функції f(x) є незмінними на відрізку ізоляції кореня $[a;b]$
знак першої похідної функції f(x) є незмінними на відрізку ізоляції кореня $[a;b]$
знак другої похідної функції f(x) є незмінними на відрізку ізоляції кореня $[a;b]$
знак функції та першої похідної функції f(x) є незмінними на відрізку ізоляції кореня $[a;b]$

◊ застосовувати метод простої ітерації будемо за умови, що, а λ оберемо так, що
1) $|\lambda| = 1/M_1$, де $M_1 = \max\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$, 2) $\lambda f'(x) > 0$;
тоді за початкову точку методу простої ітерації можна обрати довільну точку з $[a;b]$
тоді за початкову точку методу простої ітерації можна обрати точку a
тоді за початкову точку методу простої ітерації можна обрати точку b
тоді за початкову точку методу простої ітерації можна обрати довільну, що не належить $[a;b]$

◊ За яких умов збіг ітерацій методу простої ітерації буде найшвидшим?
$|\lambda| = 1/M_1$, де $M_1 = \max |f'(x)|$ на проміжку [a,b]; $\lambda^* f'(x)>0$
$|\lambda| = 1/M_1$, де $M_1 = \min |f'(x)|$ на проміжку [a,b]; $\lambda^* f'(x)>0$
$|\lambda| = 1/M_1$, де $M_1 = \max |f'(x)|$ на проміжку [a,b]; $\lambda^* f'(x)<0$
$|\lambda| = 1/M_1$, де $M_1 = \min |f'(x)|$ на проміжку [a,b]; $\lambda^* f'(x)<0$

◊Якщо зміна значень послідовних ітерацій методу простої ітерації припинилась, то чи є це відповідь, тобто наближений корінь даного рівняння з даною точністю?
так
ні
невідомо
так, якщо ця точка належить проміжку ізоляції

◊ Які передумови необхідно забезпечити для застосування методу Ньютона?
Треба знайти відрізок ізоляції шуканого кореня.
Треба забезпечити, щоби на відрізку ізоляції не змінювалися знаки у першої та другої похідних, зменшуючи при необхідності початковий відрізок ізоляції.
За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(x) \cdot f''(x) > 0$.
За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції

◊ Що можна зробити, якщо на відрізку ізоляції кореня знак $f''(x)$ змінюється і отже умови застосування методу Ньютона не виконані?
зменшити проміжок ізоляції
збільшити проміжок ізоляції
метод не буде збіжним
нічого не потрібно робити

◊ Яку точку треба обрати за початкову точку метода Ньютона?
За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(x) \cdot f''(x) > 0$
За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції
За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(x) \cdot f''(x) < 0$
За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f''(x) > 0$
За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f''(x) < 0$

◊ Інша назва методу хорд
лінійного інтерполювання
метод Ньютона
метод Лейбниця
метод Гальоркіна

◊ Які передумови необхідно забезпечити для застосування методу хорд? (Чотирі відповіді слід обрати)
Треба знайти відрізок ізоляції шуканого кореня.
Треба забезпечити, щоби на відрізку ізоляції не змінювалися знаки у першої та другої похідних, зменшуючи при необхідності початковий відрізок.

За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(x) \cdot f''(x) < 0$.
За нерухомий кінець c, який входить до формули методу, можна взяти будь – яку точку відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(c) \cdot f''(c) > 0$.
За нерухомий кінець c, який входить до формули методу, можна взяти будь – яку точку відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(c) \cdot f''(c) < 0$.

◊ Яку точку треба обрати за початкову точку метода хорд?
За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(x) \cdot f''(x) < 0$
За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції
За початкове наближення можна брати точку a початок відрізку ізоляції.
За початкове наближення можна брати точку b - кінець відрізка ізоляції.

◊ Що можна зробити, якщо на відрізку ізоляції кореня знак $f'(x)$ або $f''(x)$ змінюється і отже умови застосування методу хорд не виконані?
зміншити відрізок ізоляці
збільшити відрізок ізоляції
обрати інший метод
все рівно метод буде збіжнм, але отримуємо велику похибку обчислень

◊ Яку точку треба обрати за нерухомий кінець методу лінійного інтерполювання?
За нерухомий кінець c, який входить до формули методу, можна взяти будь – яку точку відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(c) \cdot f''(c) > 0$.
За нерухомий кінець c, який входить до формули методу, можна взяти будь – яку точку відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(c) \cdot f''(c) < 0$.
За нерухомий кінець c, який входить до формули методу, можна взяти будь – яку точку відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(c) > 0$.
За нерухомий кінець c, який входить до формули методу, можна взяти будь – яку точку відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f''(c) > 0$.

◊В чому полягає суть методу Гаусса розв'язання СЛАР?
в послідовному виключенні змінних
в заміні змінних
в транспонуванні змінних
в послідовному включенні змінних

◊ Що з переліченого не є елементарною операцією над СЛР
Множення обох частин рівняння на будь-яке число
Переміна місцями двох рівнянь
Множення обох частин рівняння на деяке число, відмінне від нуля
Додавання (або віднімання) до обох частин деякого рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на деяке число

◊ **До якої форми зводиться матриця системи методом Гаусса?**
до нижньої трикутної
до верхньої трикутної
до діагональної
до додатково визначеної

◊ **Чи завжди всі розв’язки даної СЛР отримуються методом Гаусса?**
так
ні
не завжди
не можу відповісти

◊**Які системи рівнянь дозволяє розв’язувати метод Гаусса?**
будь – яку систему лінійних алгебраїчних рівнянь
додатньо визначену систему лінійних алгебраїчних рівнянь
будь – яку систему нелінійних алгебраїчних рівнянь
будь – яку систему логарифмічних рівнянь
будь – яке лінійне алгебраїчне рівняння

◊ **Чому алгоритм методу Гаусса можна застосувати на комп’ютері?**
він дозволяє розв’язати будь – яку СЛР в результаті цілком визначеної послідовності елементарних операцій
він складається з елементарних матричних операцій
він є легким у використанні
він має швидку збіжність

◊ **Для множення матриць є спеціальний вбудований оператор Excel**
МУМНОЖ
УМНОЖ
УМНОЖМ
МАТРИЦУМНОЖ

◊ **Що слід натиснути, щоб виконати матричну операцію?**
притримуючи кнопки Alt і Shift, треба натиснути на Enter
послідовно натиснути на кнопки Alt, Shift, та Enter
притримуючи кнопки Alt і Ctrl, треба натиснути на Enter
натиснути на Enter

◊ **Знайти обернену матрицю можна за допомогою спеціального вбудованого оператора Excel**
МОБР
МОБРАТ
ОБРМАТР
ОБРАТНАМ

◊ **метод простої ітерації розв'язання СЛАР називають**
стаціонарним
нерухомої точки
дискретним
методом Вієтта

◊**Визначити умови використання методу простої ітерації розв'язання СЛАР**
Діагональні елементи матриці більші за суму всіх інших елементів відповідної стрічки
Діагональні елементи матриці значно менші за суму всіх інших елементів відповідної стрічки
Перші елементи кожної стрічки матриці більші за суму всіх інших елементів відповідної стрічки
Перші елементи кожної стрічки матриці мінші за суму всіх інших елементів відповідної стрічки

◊ **Які вектори можна обирати за початкове наближення x_0 для збіжності методу простої ітерації?**
довільно
тільки з додатних значень
тільки з від'ємних значень
значення менші за 1

◊ **Яка задача визначається наступним твердженням.**
Задачею …є побудова такої функції, яка для даних значень аргументу приймає задані значення
Інтерполяції
Інтеграції
інтегрування
диференціювання
апроксимації

◊**вузлами інтерполяції називають**
Значення аргументу x_1 , x_2 , … , x_n , для яких відомі значення деякої функції $f(x)$: $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, … , $f(x_n) = y_n$
Значень аргументу функції x_1 , x_2 , … , x_n
Значення деякої функції $f(x)$: $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, … , $f(x_n) = y_n$
Значення аргументу x_1 , x_2 , … , x_n , для яких відомі значення похідної функції $f'(x)$

◊ **Многочлен $P_n(x)$, який задовольняє умови $P_n(x_i) = y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, \dots , n)$ називають**
інтерполяційним многочленом
формулою Лагранжа
формулою Ньютога

апроксимуючим многочленом

◊ **Поділена різниця нульового порядку $f(x_i)$ співпадає із**
значенням функції
значенням першої похідної функції
значенням другої похідної функції
комбінації функції та її першої похідної

◊ **Рівністю $f(x_i ; x_j) = \dfrac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$ позначають поділені різниці**
першого порядку
другого порядку
нульового порядку
це взагалі не поділені різниці

◊ **Поділені різниці використовуються для**
побудови інтерполяційного многочлена Ньютона
побудови інтерполяційного многочлена Лагранжа
побудови інтерполяційного многочлена Ерміта
побудови апроксимуючого многочлена Ньютона

◊ **Наближену рівність**
$\mathbf{f(x) \approx f(x_0)\ f(x_0;\ x_1)(x - x_0)\ \ldots\ f(x_0;\ x_1;\ldots\ ;\ x_n)(x - x_0)(x - x_1)\ \ldots\ (x - x_{n-1})}$
називають
інтерполяційною формулою Ньютона з поділеними різницями
інтерполяційною формулою Лагранжа з поділеними різницями
інтерполяційним многочленом Ньютона з поділеними різницями
інтерполяційною формулою Ейткена

◊ **Як можна визначити значення функції в точках, що не є вузлами інтерполювання?**
за інтерполяційною формулою
за інтерполяційним многочленом
визначити неможливо
за методом Гаусса

◊ **Як називають різницю $R_n(f,x) = f(x) - L_n(x)$**
похибкою інтерполювання
залишковим членом інтерполяційної формули
похибкою апроксимації
відносним відхилення першого роду

◊ **Якого степеня многочлен $L_n(x)$ – інтерполяційний многочлен Лагранжа**

ступінь визначається кількістю вузлів інтерполяції
завжди другого ступня
третього ступеня
ступінь визначається кількістю додатків

◊ $\mathbf{L_n(x)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$ $\mathbf{f(x_i)}$
це формула
інтерполяційного многочлена Лагранжа
інтерполяційного многочлена Ньютона
інтерполяційного многочлена Ейткена
апроксимації

◊ $\mathbf{R_n(f,\ x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ $\boldsymbol{\omega_{n1}(x)}$**,** **Це формула для обчислення**
похибки інтерполювання
похибки апроксимації
значення функції в довільних точках проміжку інтерполювання
значення функції в довільних точках проміжку апроксимації

◊ **Нехай функція y = f(x) задана в точках $x_k = x_0\ kh$, де h – дійсна стала, k = 0, 1,…, n, $y_k = f(x_k)$. Тоді величини $\Delta y_i = \Delta f_i = f(x_{i1}) - f(x_i)$ називають**
скінченими різницями першого порядку
скінченими різницями другого порядку
різницею першого порядку
різницею другого порядку
поділеними різницями

◊**які з цих поняття існують**
формула Ньютона для інтерполювання назад
формула Ньютона для інтерполювання вперед
формула Лагранжа для інтерполювання назад
формула Лагранжа для інтерполювання вперед

◊В чисельному диференціюванні похідні замінюються
скінченими різницями
тригонометричними виразами
початковими різницями
поділеними різницями

◊ **формули** $f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\Delta y_0 = \frac{1}{h}(f(x_1) - f(x_0))$; $f'(x_0) \approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0)$. **називають**
однобічними формулами чисельного диференціювання

двубічними формулами чисельного диференціювання
однобічними формулами чисельного інтегрування
формулами чисельного інтегрування

◊ **Абсолютна похибка чисельного диференціювання залежить від**
кроку інтерполяції
розташування вузлів
знаку функції на проміжку
знаку першої похідної на проміжку

◊**Зменшення похибки чисельного диференціювання шляхом зменшення h з огляду на нестійкість чисельного диференціювання призводить до**
збільшення обчислювальної похибки
зменшення обчислювальної похибки
кращих результатів
погіршення результатів моделювання

◊**Чисельне інтегрування використовують коли**
функцію f задано таблично або графічно
підінтегральна функція є поліномом
підінтегральна функція задана наближено
неможливо визначити підінтегральну функцію

◊ **формули вигляду** $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ **. називають**
Квадратурними формулами
Наближеними формулами
Сумарними інтегралами
Розкладенням функції у ряд

◊ **В квадратурній сумі** $\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ **, числа** x_k **і** A_k **називають**
вузлами і коефіцієнтами квадратурної формули
залишковим членом квадратурної формули
коефіцієнтами та значення функції квадратурної формули
індексами та коефіцієнтами квадратурної формули

◊**Яких квадратурних формул не існує**
трапецій центральних
прямокутників лівобічних
прямокутників правобічних
Сімпсона

◊**порядком диференційного рівняння називають**

порядок вищої похідної, що входить до нього
порядок функції, що входить до нього
кількість його доданків
кількість початкових умов

◊ **Розв'язати …чисельно означає для заданої послідовності $x_0, x_1, \dots, x_n$ значень незалежної змінної x і числа y_0 знайти числову послідовність $y_0, y_1, \dots, y_n$ так, щоб y_k з заданою точністю наближав $y(x_k)$ для всіх $k = 1, 2, \dots, n$, де $y(x)$ – єдиний розв'язок з початковою умовою $y(x_0) = y_0$. . Вставьте прпущене слово.**
задачу Коші
крайову задачу
диференційне рівняння
інтегральне рівняння

◊ **Якщо всі точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ рівновіддалені: $x_k = x_0 kh$, то величину h називають**
кроком інтегрування диференціального рівняння
кроком інтерполяції
відстанню між значеннями змінної
кроком апроксимації диференціального рівняння

◊ **Нехай нам задано значення якоїсь функції $y=f(x)$ у вузлах $x_0,x_1,...,x_n$. Будемо шукати поліном $P(x)$ степеня меншого за n, який би в точках x_i набував значень y_i не точно, а з деякою похибкою. Це суть методу**
найменших квадратів
найбільших квадратів
поліноміальний метод
найкращих оцінок

◊ **Який принцип полягає в тому, що найкращі значення коефіцієнтів поліному ті, при яких сума квадратів відхилень поліному від значень функцій в даних точках найменша**
найменших квадратів
апроксимації
чисельного інтегрування
визначення коефіцієнтів квадратурних формул

◊ **Яка задача полягає в наступному: для диференціального рівняння 1-го порядку полягає у відшуканні функції $y=y(x)$, яка задовольняє цьому рівнянню і початковій умові $y(x_0)=y_0$, де x_0, y_0 – задані числа**
задача Коші
задача Буняковського
крайова задача
задача апроксимації

◊ **Суть якої задачі полягає в наступному: для диференціального рівняння n-го порядку $y^{(n)}=f(x, y', y'',..., y^{(n-1)})$полягає у відшуканні функції $y=y(x)$, що задовольняє рівняння і початковим умовам**
$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y^1{}_0,...,y^{(n-1)}(x_0)=y^{n-1}{}_0$.
Задачі Коші
Задачі апроксимації
Задачі чисельного інтегрування
Задачі чисельного диференціювання

◊ **Якщо при розв'язуванні звичайних диференціальних рівнянь додаткові умови задаються при одному значенні незалежної змінної (найчастіше, змінної часу), то така задача називається**
задачею з початковими умовами, або задачею Коші.
задачею інтегрування
задачею Вієрштрасса
крайовою задачею

◊ **Якщо при розв'язуванні звичайних диференціальних рівнянь додаткові умови задаються при двох або більш значеннях незалежної змінної, то задача називається**
крайовою
з початковими умовами
Коші
визначеною

◊ **В задачі Коші додаткові умови називають**
початковими
точковими
крайовими
симетричними

◊ **В крайовій задачі додаткові умови називають**
граничними
початковими
симетричними
точковими

◊ **В крайовій задачі додаткові умови на розв'язок називають**
граничними умовами першого роду
граничними умовами другого роду
класичними граничними умовами
початковими граничними умовами

◊ В крайовій задачі додаткові умови , що накладаються на похідні від розв'язку це
граничні умови другого роду
граничні умови першого роду
додаткові умови
класичні умови

◊ Граничні умови, які є лінійною комбінацією умов на розв'язок і умов на похідні розв'язку називають
граничні умови третього роду
граничні умови першого роду
граничні умови другого роду
класичні граничні умови

◊Оптимальний план, якщо він існує, лежить:
в якійсь з його границь – вершині, ребрі, грані
всередині многогранника
тільки на вершині
на ребрі

◊Як по іншому називають симплексний метод:
метод послідовного поліпшення плану
геометрична інтерпретація
оптимізаційний метод
метод пошуку обмежень

◊В чому полягає суть симплексного методу?
в послідовному поліпшенні плану задачі лінійного програмування
в пошуку оптимальних планів
в пошуку обмежень
в знаходженні багатокутника розв'язків задачі лінійного програмування

◊Компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі називають:
оптимальними оцінками двоїстої задачі
розв'язками задачі
обмеженнями задачі
розв'язками задачі разом із обмеженнями

◊Перша теорема двоїстості:
Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то інша задача також має розв'язок, причому значення цільових функцій для оптимальних планів дорівнюють одне одному, тобто max Z = min F, і навпаки.
За допомогою зазначеного співвідношення під час визначення оптимального плану однієї з пари двоїстих задач лінійного програмування
знаходять розв'язок іншої задачі.

Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження.
Компоненти оптимального розв’язку двоїстої задачі рівні абсолютним значення коефіцієнтів при відповідних змінних лінійний функції вихідної задачі, яка виражена через неосновні змінні її оптимального розв’язку.

◊Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, можна умовно поділити на:
дефіцитні та недефіцитні
дефіцитні та нерентабельні
рентабельні та нерентабельні
рентабельні та дефіцитні

◊Третя теорема двоїстості:
Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження.
Третьої теореми двоїстості не існує
За допомогою зазначеного співвідношення під час визначення оптимального плану однієї з пари двоїстих задач лінійного програмування знаходять розв’язок іншої задачі.
max Z = min F, і навпаки.

◊Друга теорема двоїстості:
Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі і-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний і-й компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю.
Другої реореми двоїстості не існує.
За допомогою зазначеного співвідношення під час визначення оптимального плану однієї з пари двоїстих задач лінійного програмування знаходять розв’язок іншої задачі.
max Z = min F, і навпаки.

◊ Задача чисельного диференціювання полягає в:
знаходженні значень похідних функції y = f(x) в заданих точках у випадках, коли аналітичний вид функції f(x) невідомий (задана неявно), дуже складний або функція f(x) задана таблицею.
знаходженні розв'язків задачі лінійного програмування.
постановці задачі диференціювання, коли її аналітичний вигляд невідомий або дуже складний.
знаходженні значень похідних функції y = f(x).

◊ Чому крок чисельного диференціювання h не можна брати дуже малим?
бо тоді, внаслідок похибок округлення на комп’ютері, похибка розрахунку похідної з застосуванням формул чисельного диференціювання може бути дуже великою.

комп’ютер не обрахує похідну.
похибка розрахунку буде дуже малою.
комп’ютер не розпізнає вхідних даних.

◊ **Що називають нулем функції f(x)=0**
Розв’язок рівняння f(x)=0
значення X при яких f(x)<0
значення X при яких f(x)>0
значення Y при яких f(x)>0

◊ **Що означає розв’язати рівняння f(x)=0**
знайти множину всіх його коренів (тобто таких значень x є [a;b], при яких воно стає числовою тотожністю) або ж довести, що їх не існує
визначити значення x є [a;b], при яких воно стає числовою тотожністю
знайти проміжки існування коренів
відокремити корені рівняння

◊ **В чисельних методах рівняння вважається розв‘язаним, якщо всі корені знайдені**
з заданою точністю
на відрізку існування
наближено
за чисельними методами
за точними методами

◊ **Наперед задана похибка називається**
точністю обчислень
похибкою апроксимації
абсолютною похибкою
відносною похибкою

◊**Відрізком …кореня рівняння називають такий відрізок множини дійсних чисел, в якому рівняння має один і тільки один розв‘язок. Вставте пропущене слово**
ізоляції
апроксимації
диверсифікації
існування

◊**Що називають відрізком ізоляції**
називають такий відрізок множини дійсних чисел, в якому рівняння має один і тільки один розв‘язок
називають такий відрізок множини дійсних чисел, в якому рівняння має розв‘язок
називають такий відрізок множини цілих чисел, в якому рівняння має один і

тільки один розв‘язок
називають такий відрізок множини цілих чисел, в якому рівняння має розв‘язок
називають такий відрізок множини дійсних чисел, в якому рівняння немає розв’язку
називають такий відрізок множини цілих чисел, в якому рівняння немає розв‘язку

◊ **1) відокремлення коренів, тобто знаходження для кожного з них відрізку ізоляції; 2) обчислення кореня у відрізку ізоляції з наперед заданою точністю. За таким алгоритмом можна знайти**
Наближені корені рівняння
Точні корені рівняння
Розв’язок системи лінійних рівнянь
Розв’язок системи диференційних рівнянь

◊ **Які методи використовують для знаходження відрізків ізоляції ? застосовуються графічні, аналітичні та деякі їх комбінації**
графічні та аналітичні
графічні
аналітичні
диференційні
алгебраїчні

◊ **Якщо функція $f(x)$ неперервна на [*a;b*] і набуває на кінцях цього відрізка значень протилежних знаків, тобто *f(a)* f(b)* < 0, то на відрізку існує**
один корінь рівняння *f*(x) = 0
багато коренів рівняння *f*(x) = 0
не існує коренів рівняння *f*(x) = 0
правильної відповіді не зазначено

◊ **Якщо функція $f(x)$ неперервна на [*a;b*] і набуває на кінцях цього відрізка значень протилежних знаків, тобто *f(a)* f(b)* < 0 та при цьому *f*(x) має першу похідну, яка… ,то рівняння на цьому відрізку має єдиний корінь. Вставити пропущене**
зберігає сталий знак всередині відрізка [*a;b*]
є константою на відрізку [*a;b*]
є тільки додатною на відрізку [*a;b*]
є тільки від’ємною на відрізку [*a;b*]

◊ **Рівняння *f(x)* на відрізку [*a;b*] має єдиний корінь, якщо**
функція *f(x)* на кінцях відрізку має різні знаки та друга похідна існує та зберігає постійний знак
функція *f(x)* на кінцях відрізку має однакові знаки та друга похідна існує та зберігає постійний знак

функція *f(x)* на кінцях відрізку має різні знаки
функція *f(x)* має другу похідну, що є сталою

◊ **Інтервал монотонності містить корінь функції *f*(x), якщо**
f(x) набуває на кінцях цього інтервалу значень протилежних знаків
f(x) набуває на кінцях цього інтервалу значень однакових знаків
похідна f(x) набуває на кінцях цього інтервалу значень протилежних знаків
похідна f(x) набуває на кінцях цього інтервалу значень однакових знаків

◊ **Якщо на відрізку зміни знака функції *f*(x) похідна *f ′*(x) не змінює знака, то це**
відрізок ізоляції кореня
відрізок апроксимації кореня
відрізок існування кореня
наближений корень рівняння *f*(x)=0

◊ **Якщо на відрізку зміни знака функції *f*(x) змінює знак і похідна *f ′*(x), то треба**
зменшити відрізок зміни знаку функції *f*(x)
збільшити відрізок зміни знаку функції *f*(x)
поділити пополам відрізок зміни знаку функції *f*(x)
збільшити вдвічі відрізок зміни знаку функції *f*(x)

◊**Як називають інтервали між критичними точками**
інтервали монотонності функції *f*(x)
інтервали існування функції *f*(x)
інтервали, на яких функція *f*(x) більше за нуль
інтервали, на яких функції *f*(x) менше за нуль

◊ **Що є критичними точками функції *f(x)***
точки, де функція не існує або її перша похідна дорівнює нулю
точки, що є коренями рівняння *f(x)=0*
точки, в яких перша похідна не існує
точки, в яких друга похідна дорівнює нулю

◊ **Яка інша назва методу поділу відрізка навпіл**
метод дихотомії
стаціонарний ітераційний метод
метод Зейделя
метод Гаусса

◊**Яка інша назва методу простої ітерації**
стаціонарний ітераційний метод
метод дихотомії
метод Лагранжа

метод поділу відрізка навпіл

◊Суть методу в тому, що відрізок $[a;b]$ ділять пополам точкою $c = 0.5(a+b)$ і обчислюють $f(c)$. Якщо $f(c) = 0$, то $x = c$ є точним значенням кореня. Якщо $f(c) \neq 0$, а $b - a \leq 2\varepsilon$, то $|x^* - c| \leq \varepsilon$ і значення $x = c$ буде шуканим наближенням коренем. Якщо $f(c) \neq 0$ і $b - a > 2\varepsilon$, то обирають той з двох відрізків $[a;c]$ і $[c;b]$, на кінцях якого функція $f(x)$ набуває значень протилежних знаків. Це суть методу
Дихотомії
Гаусса
Скінчених різниць
Лагранжа
Інтерполювання

◊ В чому полягає алгоритм методу дихотомії?
в діленні відрізка навпіл та визначенні факту того чи є отримана точка розв'язком нелінійного рівняння
в діленні відрізка навпіл та визначенні факту того чи є отримана точка розв'язком лінійного рівняння
в діленні відрізка навпіл та визначенні факту того чи є отримана точка розв'язком системи лінійних рівнянь
в діленні відрізка навпіл та визначенні факту того чи є отримана точка розв'язком системи нелінійних рівнянь

◊ Метод ділення відрізка навпіл призначений для розв'язання
нелінійних рівнянь
лінійних рівнянь
систем лінійних рівнянь
систем нелінійних рівнянь
систем лінійних алгебраїчних рівнянь

◊Метод хорд призначений для розв'язання
нелінійних рівнянь
лінійних рівнянь
систем лінійних рівнянь
систем нелінійних рівнянь
систем лінійних алгебраїчних рівнянь

◊ Яким з методів неможливо знайти розв'язок нелінійного рівняння
метод Ейткена
метод хорд
метод дотичних
метод дихотомії

◊ **Яка інша назва методу Ньютона**
Метод хорд
Метод дотичних
Метод дихотомії
Метод ітерацій

◊**Якщо відрізок [a,b] поділити точкою с пропорційно величинам ординат f(a) та f(b) графіка даної функції f(x) : c=a-(f(a)*(b-a))/(f(b)-f(a)), то це буде метод**
хорд
дихотомії
Крамера
Зейделя

◊ **Якщо Ітераційний процес визначається формулою $x_{k1}=x_k-f(x_k)/f'(x_k)$, то це**
метод Ньютона
метод дихотомії
метод поділу відрізка навпіл
метод релаксації

◊**Як** ***називається функція, що задовольняє таким вимогам:***
є неперервною на відрізку[a,b]
є визначеною в будь-якій точці відрізка[a,b]
існує qє(0,1): | f(x2)-f(x1) |≤q*| x2 - x1 | для будь-яких двох точок x1,x2 , що належать відрізку [a,b]
стискальною на відрізку[a,b]
монотонно зростаючою
монотонно спадною
трансидентною

◊ **В тому випадку коли на деякому проміжку функція задовольняє умовам стиснення, то**
рівняння має й при тому єдиний корінь
рівняння має корені
функція є спадною
функція є зростаючою
трансидентною

◊**Як** ***називається функція, що задовольняє таким вимогам:***
є неперервною на відрізку[a,b]
є визначеною в будь-якій точці відрізка[a,b]
існує qє(0,1): | f(x2)-f(x1) |≤q*| x2 - x1 | для будь-яких двох точок x1,x2 , що належать відрізку [a,b]
функцією стиснення на відрізку[a,b]

функцією розриву *на відрізку[a,b]*
функцією розподілення відрізку[a,b]
функцією зони табулювання

◊ **Знаходження коренів рівнянь виду x=f(x) називається *задачею про***
нерухому точку
рухому точку
точку стиснення
точку релаксації

◊ *Нехай функція f(x) визначена та диференційована на відрізку* **[a,b]. Тоді *якщо виконуються умови:***
***1. функція f(x) визначена в будь-якій точці відрізку* [a,b]**
2. існує певне число q<1 таке, що |f '(x)|≤q<1 для довільного X з проміжку [a,b],
починаючи з будь-якого x_0; при цьому x_0 є будь-якою точкою проміжку [a,b]
починаючи з будь-якого x_0; при цьому x_0 *нє належить проміжку* [a,b]
починаючи з будь-якого x_0; при цьому x_0 *належить проміжку* [a,b]
правильної відповіді немає

◊**За яких умов можна використовувати метод простої ітерації?**
функція f(x) визначена та диференційована на відрізку [a,b] *та* існує певне число q<1 таке, що |f '(x)|≤q<1 для довільного X з проміжку [a,b].
функція f(x) визначена та диференційована на відрізку [a,b] *та* існує певне число q>1 таке, що |f '(x)|≤q для довільного X з проміжку [a,b].
функція f(x) визначена та *не*диференційована на відрізку [a,b] *та* існує певне число q<1 таке, що |f '(x)|≤q<1.
функція f(x) визначена та диференційована на відрізку [a,b] *та* існує певне число q таке, що |f '(x)|≤q для довільного X з проміжку [a,b].

◊**За *наступною схемою визначається метод***
простої ітерації
дихотомії
хорд
дотичних

◊ **Апостеріорна оцінка похибки методу простої ітерації: існує такий номер k, що належить множині цілих чисел, для якого виконується умова**
$|\beta - x_k| \le q/(q-1) * | x_{k-1} - x_k|$
можна використовувати на практиці для отримання критерію завершення ітераційного процесу.
можна використовувати для обчислення необхідної кількості ітерацій, що є достатньою для отримання кореня з заданою точністю.
можна використовувати для визначення точності обчислень
правильної відповіді немає

◊ **Апостеріорна оцінка похибки методу простої ітерації: існує такий номер k, що належить множині цілих чисел, для якого виконується умова**
$| \beta - x_k| \leq q^k/(q-1) * | x_{k-1} - x_k|$
можна використовувати для обчислення необхідної кількості ітерацій, що є достатньою для отримання кореня з заданою точністю.
можна використовувати на практиці для отримання критерію завершення ітераційного процесу.
можна використовувати для визначення точності обчислень
правильної відповіді немає

◊**Многокутником розв'язків задачі лінійного програмування на площині є**
Множина точок перетину півплощин
Область допустимих розв'язків задачі
Многокутник, обмежений лініями.
Графік прямих.

◊**Лінією рівня задачі лінійного програмування на площині є**
$2x_1-x_2=10$.
$2x_1-x^2{}_2=const$.
$2x_1-x_25x_3=25$.
$c_1x_1c_2x_2=const$.

◊**Розв'язок задачі лінійного програмування на площині, коли цільова функція приймає максимальне значення, існує тоді**
Коли многокутник обмежений лініями.
Многокутник розв'язків не пустий і на ньому цільова функція обмежена зверху.
Многокутник розв'язків повний.
немає праильної відповіді.

◊**Вектором-градієнтом задачі лінійного програмування на площині для визначення максимального значення функції $zmax=3x_1-2x_2$**
(3;2).
(-3;2).
(-3;-2).
(3;-2).

◊**Для визначення максимального значення задачі лінійного програмування на площині**
Лінію рівня, що проходить через многокутник розв'язків просуваємо в напрямку вектора-градієнта до тих пір, поки вона не пройде через останню її загальну точку з многокутником розв'язку.
Лінію рівня, що проходить через многокутник розв'язків просуваємо в напрямку, протилежному до напрямку вектора-градієнта до тих пір, поки вона не пройде через останню її загальну точку з многокутником розв'язку.

Лінію рівня, що проходить через многокутник розв'язків просуваємо в напрямку, протилежному до напрямку вектора-градієнта до тих пір, поки вона не пройде через останню точку з многокутником.
правильної відповіді немає.

◊**Вектором-градієнтом задачі лінійного програмування на площині для визначення максимального значення функції $z_{min}=15x_1-2x_2$**
(15;-2).
(-15;2).
(-15;-2).
(-15;2).

◊**При паралельному переносі лінії рівня задачі лінійного програмування на площині у напрямку вектора-градієнта значення цільової функції**
Не змінюється
Зростає
Зменшується
по різному

◊**Многокутник розв'язків задачі лінійного програмування на площині**
Завжди розміщений у першому квадраті Декартової системи координат
Завжди розміщений у другому квадраті Декартової системи координат.
Завжди розміщений у третьому квадраті Декартової системи координат.
Завжди розміщений у першому і дрцгому квадраті Декартової системи координат.
Розміщений у всій Декартової системи координат.

◊**Якщо лінія рівня при паралельному переносі у напрямку вектора-градієнта задачі на максимум співпала з останньою загальною стороною АВ многокутника розв'язків задачі лінійного програмування на площині, то**
Розв'язком задачі лінійного програмування є точка А.
Розв'язком задачі лінійного програмування є точка В.
Розв'язком задачі лінійного програмування є точки А і В.
Розв'язком задачі лінійного програмування є відрізок АВ
Розв'язком задачі лінійного програмування є пряма АВ.
Задача лінійного програмування не має розв'язку.

◊**Якщо лінія рівня при паралельному переносі у напрямку протилежному вектора-градієнта задачі на мінімум співпала з вершиною А сторони АВ багатокутника розв'язків задачі лінійного програмування на площині, то**
Розв'язком задачі лінійного програмування є точка А
Розв'язком задачі лінійного програмування є точка В.
Розв'язком задачі лінійного програмування є точки А і В.
Розв'язком задачі лінійного програмування є відрізок АВ.

Розв'язком задачі лінійного програмування є пряма АВ.
Задача лінійного програмування не має розв'язку.

◊В чому полягає симплексний метод розв'язку задачі лінійного програмування (за умови, що дана задача має оптимальний план і кожен її опорний план невироджений)?
В побудові симплекс таблиць.
В переході від одного опорного плану до іншого, в результаті чого значення цільової функції покращується.
У збільшенні значення цільової функції в процесі побудови симплекс-таблиць.
правильної відповіді не має.

◊Опорний план задачі лінійного програмування (задача на макимум) є оптимальним, якщо
всі оцінки стовпчиків є додатніми.
всі оцінки стовпчиків є від'ємними.
всі оцінки стрічок є додатніми.
всі оцінки стрічок є від'ємними.

◊Опорний план задачі ЛП називається не виродженим (в задачі n змінних та m обмежень)
Якщо він містить рівно m одиничних векторів.
Якщо він містить рівно n одиничних векторів.
Якщо він містить рівно mn одиничних векторів.
Якщо він містить рівно m-n одиничних векторів.

◊План =(x1,...,xj,...,xn) задачі ЛП називається опорним
Якщо всі xi є достатніми.
Якщо всі xi є від‘ємними.
Якщо всі xi є достатніми і задовольняється всім обмеженням з системи обмежень.
Якщо всі xi є від‘ємними і задовольняється всім обмеженням з системи обмежень.

◊При розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом з природним базисом елементи нової симплексної таблиці розраховуються за формулою:
"чотирикутника".
"квадрата".
Гаусса.
"прямокутника".
Лапласа.

◊Базисною називається змінна яка
в матриці системи обмежень є одиничним вектором.

в матриці системи обмежень представлена тільки одиницями.
в матриці системи обмежень представлена тільки нулями.
в матриці системи обмежень є нульовим вектором.

◊Який економічний зміст мають штучні змінні, які вводяться для отримання розширеної форми запису ЗЛП?
Ресурс j використано не повністю.
Ресурс j використано повністю.
Це означає, що i-й ресурс використано повністю.
Це означає, що i-й ресурс використано не повністю.
Економічного змісту не мають.

◊Штучна змінна в цільовій функції має коефіцієнт "М" для задачі лінійного програмування, яка розв'язується симплекс-методом зі штучним базисом
Досить мале додатне число.
Досить мале від'ємне число.
Досить велике додатне число
Досить велике від'ємне число.

◊Чому дорівнює кількість змінних у двоїстій задачі по відношенню до прямої задачі?
Кількості змінних в прямій задачі.
Кількості обмежень в прямій задачі.
Кількості обмежень в двоїстій задачі.
Можуть бути довільним числом.

◊Вільні члени системи обмежень у двоїстій задачі
Є коефіцієнтами при відповідних змінних цільової функції прямої задачі.
Є вільними членами системи обмежень прямої задачі.
Є коефіцієнтами при відповідних змінних цільової функції двоїстої задачі.
Визначаються за допомогою певних розрахунків.

◊Матриця коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі
Оберненій матриці коефіцієнтів системи обмежень прямої задачі.
Транспонованій матриці коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі.
Транспонованій матриці коефіцієнтів системи обмежень прямої задачі.
Транспонованій матриці коефіцієнтів системи обмежень прямої задачі помноженої на стовпчик вільних членів.

◊Значення цільової функції прямої задачі при оптимальному розв'язку
Менше або дорівнює значенню цільової функції двоїстої задачі.
Більше або дорівнює значенню цільової функції двоїстої задачі.
Дорівнює значенню цільової функції двоїстої задачі.
Не дорівнює значенню цільової функції двоїстої задачі.

◊**Що з переліченого не входить до оптимізаційної задачі**
умова невід"ємності змінних.
цільова функція.
система обмежень.
наявність ресурсу.

◊**Змінна х3 позначає посівну площу жита. Її двоїста оцінки дорівнює 3. Це позначає**
якщо вирощувати жито на площі 1 га цільова функція зменшиться на 3 одиниці.
змінна x_3=0
що якщо вирощувати жито на площі 1 га цільова функція збільшиться на 3 одиниці.
значення змінної х3>0.
значення змінної х3<0.
нічого не позначає.

◊**Чи є різниця в економічному змісті двоїстих оцінок основних та додаткових змінних?**
Так.
Ні.
Не знаю.
Так, але не завжди.

◊**Де знаходяться двоїсті оцінки змінних?**
в (m1) стрічці.
в (m2) стрічці.
в стовпчику Р0.
в стовпчику Р0/ aij>0.

◊**Надбудова "Поиск решений" дозволяє розв'язувати**
оптимізаційні задачі.
економетричні задачі.
системи рівнянь.
на підбір параметра.

◊**Надбудова "Аналіз данних" дозволяє розв'язувати**
оптимізаційні задачі.
економетричні задачі.
системи рівнянь.
на підбір параметра.

◊**Форма запису задачі ЛП, в якій праві частини є додатними, система обмежень містить лише рівняння називається**
загальною.

канонічною.
розгорнутою.
стандартною.

◊**Яка функція використовується для розрахунку використання ресурсу в Excel?**
СУММАПРОИЗВ.
СУММАКВАДРАТОВ.
СРЗНАЧ.
КОРРЕЛ.
МУЛЬТИНОМ.

◊**Якщо змінні задачі ЛП дорівнює нулю, то**
відповідна продукція є нерентабельною.
відповідна продукція є рентабельною.
відповідний ресурс є нерентабельним.
відповідний ресурс є рентабельним.

◊**Нормована вартість показує**
ступінь нерентабельності продукції.
ступінь дефіцитності продукції.
ступінь нерентабельності ресурсу.
ступінь дефіцитності ресурсу.

◊**Тіньова ціна показує**
ступінь нерентабельності продукції.
ступінь дефіцитності продукції.
ступінь нерентабельності ресурсу.
ступінь дефіцитності ресурсу.

◊**Які показники вказують на те, що структура плану лишиться незмінною, тобто номенклатура продукції залишається без змін, доки запаси ресурсів будуть знаходитись у вказаних межа**
Межі стійкості плану.
Тіньові оцінки ресурсів.
Крефіцієнти нормованої вартості.
Межі стійкості обмежень.

◊**Тіньові оцінки, а отже і цінність ресурсів лишається незмінною до того часу, поки ... будуть знаходитись у межах, визначених межами стійкості плану. Вставьте пропущені слова**
запаси ресурсів.
неефективність реурсів.
оцінки цільової функції.
нерентабельність продукції.

◊У який Звіт включена інформація про верхні та нижні границі значень, що можуть приймати змінювані клітини при виконанні умов обмежень.
Звіт про межі.
Звіт про стійкість.
Звіт за результатами.
Такого звіту немає.

◊Який Звіт містить відомості про чутливість рішень до малих змін формул чи клітин, що змінюються.
Звіт про стійкіть
Звіт про межі
Звіт за результатами
Такого звіту не існує

◊У діалоговому вікні Поиск решения не має такого параметру
метки.
ограничения.
утановить целевую функию.
изменяя ячейки.

◊Умови застосування методу простої ітерації?
знак першої та другої похідних функції f(x) є незмінними на відрізку ізоляції кореня $[a;b]$
знак першої похідної функції f(x) є незмінними на відрізку ізоляції кореня $[a;b]$
знак другої похідної функції f(x) є незмінними на відрізку ізоляції кореня $[a;b]$
знак функції та першої похідної функції f(x) є незмінними на відрізку ізоляції кореня $[a;b]$

◊ застосовувати метод простої ітерації будемо за умови, що, а λ оберемо так, що
1) $|\lambda| = 1/M_1$, де $M_1 = \max\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$, 2) $\lambda f'(x) > 0$;
тоді за початкову точку методу простої ітерації можна обрати довільну точку з $[a;b]$
тоді за початкову точку методу простої ітерації можна обрати точку а
тоді за початкову точку методу простої ітерації можна обрати точку b
тоді за початкову точку методу простої ітерації можна обрати довільну, що не належить $[a;b]$

◊ За яких умов збіг ітерацій методу простої ітерації буде найшвидшім?
$|\lambda| = 1/M_1$, де $M_1 = \max |f'(x)|$ на проміжку [a,b]; $\lambda^* f'(x)>0$

$|\lambda| = 1/M_1$, де $M_1 = \min |f'(x)|$ на проміжку $[a,b]$; $\lambda * f'(x)>0$
$|\lambda| = 1/M_1$, де $M_1 = \max |f'(x)|$ на проміжку $[a,b]$; $\lambda * f'(x)<0$
$|\lambda| = 1/M_1$, де $M_1 = \min |f'(x)|$ на проміжку $[a,b]$; $\lambda * f'(x)<0$

◊Якщо зміна значень послідовних ітерацій методу простої ітерації припинилась, то чи є це відповідь, тобто наближений корінь даного рівняння з даною точністю?
так
ні
невідомо
так, якщо ця точка належить проміжку ізоляції

◊ Які передумови необхідно забезпечити для застосування методу Ньютона?
Треба знайти відрізок ізоляції шуканого кореня.
Треба забезпечити, щоби на відрізку ізоляції не змінювалися знаки у першої та другої похідних, зменшуючи при необхідності початковий відрізок ізоляції.
За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(x) \cdot f''(x) > 0$.
За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції

◊ Що можна зробити, якщо на відрізку ізоляції кореня знак $f''(x)$ змінюється і отже умови застосування методу Ньютона не виконані?
зменшити проміжок ізоляції
збільшити проміжок ізоляції
метод не буде збіжним
нічого не потрібно робити

◊ Яку точку треба обрати за початкову точку метода Ньютона?
За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(x) \cdot f''(x) > 0$
За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції
За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(x) \cdot f''(x) < 0$
За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f''(x) > 0$
За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f''(x) < 0$

◊ Інша назва методу хорд
лінійного інтерполювання
метод Ньютона
метод Лейбниця
метод Гальоркіна

◊ Які передумови необхідно забезпечити для застосування методу хорд?

(Чотирі відповіді слід обрати)
Треба знайти відрізок ізоляції шуканого кореня.
Треба забезпечити, щоби на відрізку ізоляції не змінювалися знаки у першої та другої похідних, зменшуючи при необхідності початковий відрізок.
За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(x) \cdot f''(x) < 0$.
За нерухомий кінець c, який входить до формули методу, можна взяти будь – яку точку відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(c) \cdot f''(c) > 0$.
За нерухомий кінець c, який входить до формули методу, можна взяти будь – яку точку відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(c) \cdot f''(c) < 0$.

◊ **Яку точку треба обрати за початкову точку метода хорд?**
За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(x) \cdot f''(x) < 0$
За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції
За початкове наближення можна брати точку a початок відрізку ізоляції.
За початкове наближення можна брати точку b - кінець відрізка ізоляції.

◊ **Що можна зробити, якщо на відрізку ізоляції кореня знак $f'(x)$ або $f''(x)$ змінюється і отже умови застосування методу хорд не виконані?**
зміншити відрізок ізоляці
збільшити відрізок ізоляції
обрати інший метод
все рівно метод буде збіжнм, але отримуємо велику похибку обчислень

◊ **Яку точку треба обрати за нерухомий кінець методу лінійного інтерполювання?**
За нерухомий кінець c, який входить до формули методу, можна взяти будь – яку точку відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(c) \cdot f''(c) > 0$.
За нерухомий кінець c, який входить до формули методу, можна взяти будь – яку точку відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(c) \cdot f''(c) < 0$.
За нерухомий кінець c, який входить до формули методу, можна взяти будь – яку точку відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(c) > 0$.
За нерухомий кінець c, який входить до формули методу, можна взяти будь – яку точку відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f''(c) > 0$.

◊**В чому полягає суть методу Гаусса розв’язання СЛАР?**
в послідовному виключенні змінних
в заміні змінних
в транспонуванні змінних
в послідовному включенні змінних

◊ **Що з переліченого не є елементарною операцією над СЛР**
Множення обох частин рівняння на будь-яке число
Переміна місцями двох рівнянь

Множення обох частин рівняння на деяке число, відмінне від нуля
Додавання (або віднімання) до обох частин деякого рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на деяке число

◊ **До якої форми зводиться матриця системи методом Гаусса?**
до нижньої трикутної
до верхньої трикутної
до діагональної
до додатково визначеної

◊ **Чи завжди всі розв'язки даної СЛР отримуються методом Гаусса?**
так
ні
не завжди
не можу відповісти

◊**Які системи рівнянь дозволяє розв'язувати метод Гаусса?**
будь – яку систему лінійних алгебраїчних рівнянь
додатньо визначену систему лінійних алгебраїчних рівнянь
будь – яку систему нелінійних алгебраїчних рівнянь
будь – яку систему логарифмічних рівнянь
будь – яке лінійне алгебраїчне рівняння

◊ **Чому алгоритм методу Гаусса можна застосувати на комп'ютері?**
він дозволяє розв'язати будь – яку СЛР в результаті цілком визначеної послідовності елементарних операцій
він складається з елементарних матричних операцій
він є легким у використанні
він має швидку збіжність

◊ **Для множення матриць є спеціальний вбудований оператор Excel**
МУМНОЖ
УМНОЖ
УМНОЖМ
МАТРИЦУМНОЖ

◊ **Що слід натиснути, щоб виконати матричну операцію?**
притримуючи кнопки Alt і Shift, треба натиснути на Enter
послідовно натиснути на кнопки Alt, Shift, та Enter
притримуючи кнопки Alt і Ctrl, треба натиснути на Enter
натиснути на Enter

◊ **Знайти обернену матрицю можна за допомогою спеціального вбудованого оператора Excel**
МОБР

МОБРАТ
ОБРМАТР
ОБРАТНАМ

◊ **метод простої ітерації розв'язання СЛАР називають**
стаціонарним
нерухомої точки
дискретним
методом Вієтта

◊**Визначити умови використання методу простої ітерації розв'язання СЛАР**
Діагональні елементи матриці більші за суму всіх інших елементів відповідної стрічки
Діагональні елементи матриці значно менші за суму всіх інших елементів відповідної стрічки
Перші елементи кожної стрічки матриці більші за суму всіх інших елементів відповідної стрічки
Перші елементи кожної стрічки матриці мінші за суму всіх інших елементів відповідної стрічки

◊ **Які вектори можна обирати за початкове наближення x_0 для збіжності методу простої ітерації?**
довільно
тільки з додатних значень
тільки з від'ємних значень
значення менші за 1

◊ **Яка задача визначається наступним твердженням.**
Задачею …є побудова такої функції, яка для даних значень аргументу приймає задані значення
Інтерполяції
Інтеграції
інтегрування
диференціювання
апроксимації

◊**вузлами інтерполяції називають**
Значення аргументу x_1 , x_2 , … , x_n , для яких відомі значення деякої функції $f(x)$: $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, … , $f(x_n) = y_n$
Значень аргументу функції x_1 , x_2 , … , x_n
Значення деякої функції $f(x)$: $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, … , $f(x_n) = y_n$
Значення аргументу x_1 , x_2 , … , x_n , для яких відомі значення похідної функції $f'(x)$

◊ **Многочлен $P_n(x)$, який задовольняє умови $P_n(x_i) = y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, \dots , n)$**

називають
інтерполяційним многочленом
формулою Лагранжа
формулою Ньютога
апроксимуючим многочленом

◊ **Поділена різниця нульового порядку $f(x_i)$ співпадає із**
значенням функції
значенням першої похідної функції
значенням другої похідної функції
комбінації функції та її першої похідної

◊ **Рівністю $f(x_i ; x_j) = \dfrac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$ позначають поділені різниці**
першого порядку
другого порядку
нульового порядку
це взагалі не поділені різниці

◊ **Поділені різниці використовуються для**
побудови інтерполяційного многочлена Ньютона
побудови інтерполяційного многочлена Лагранжа
побудови інтерполяційного многочлена Ерміта
побудови апроксимуючого многочлена Ньютона

◊ **Наближену рівність**
$f(x) \approx f(x_0)\ f(x_0; x_1)(x - x_0) \ldots f(x_0; x_1; \ldots ; x_n)(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$
називають
інтерполяційною формулою Ньютона з поділеними різницями
інтерполяційною формулою Лагранжа з поділеними різницями
інтерполяційним многочленом Ньютона з поділеними різницями
інтерполяційною формулою Ейткена
◊ **Як можна визначити значення функції в точках, що не є вузлами інтерполювання?**
за інтерполяційною формулою
за інтерполяційним многочленом
визначити неможливо
за методом Гаусса

◊ **Як називають різницю $R_n(f,x) = f(x) - L_n(x)$**
похибкою інтерполювання
залишковим членом інтерполяційної формули
похибкою апроксимації
відносним відхилення першого роду

◊ **Якого степеня многочлен $L_n(x)$ – інтерполяційний многочлен Лагранжа**
ступінь визначається кількістю вузлів інтерполяції
завжди другого ступня
третього ступеня
ступінь визначається кількістю додатків

◊ $\mathbf{L_n(x)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$ $\mathbf{f(x_i)}$
це формула
інтерполяційного многочлена Лагранжа
інтерполяційного многочлена Ньютона
інтерполяційного многочлена Ейткена
апроксимації

◊ $\mathbf{R_n(f, x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ $\boldsymbol{\omega_{n1}(x)}$, **Це формула для обчислення**
похибки інтерполювання
похибки апроксимації
значення функції в довільних точках проміжку інтерполювання
значення функції в довільних точках проміжку апроксимації

◊ **Нехай функція $y = f(x)$ задана в точках $x_k = x_0\ kh$, де h – дійсна стала, $k = 0, 1,\ldots, n$, $y_k = f(x_k)$. Тоді величини $\Delta y_i = \Delta f_i = f(x_{i1}) - f(x_i)$ називають**
скінченими різницями першого порядку
скінченими різницями другого порядку
різницею першого порядку
різницею другого порядку
поділеними різницями

◊**які з цих поняття існують**
формула Ньютона для інтерполювання назад
формула Ньютона для інтерполювання вперед
формула Лагранжа для інтерполювання назад
формула Лагранжа для інтерполювання вперед

◊В чисельному диференціюванні похідні замінюються
скінченими різницями
тригонометричними виразами
початковими різницями
поділеними різницями

◊ **формули** $\mathbf{f'(x_0) \approx \frac{1}{h} \Delta y_0 = \frac{1}{h} (f(x_1) - f(x_0));}$ $\mathbf{f'(x_0) \approx \frac{1}{h} (\Delta y_0 - \frac{1}{2}}$

$\Delta^2 y_0$).   називають
однобічними формулами чисельного диференціювання
двубічними формулами чисельного диференціювання
однобічними формулами чисельного інтегрування
формулами чисельного інтегрування

◊ **Абсолютна похибка чисельного диференціювання залежить від**
кроку інтерполяції
розташування вузлів
знаку функції на проміжку
знаку першої похідної на проміжку

◊**Зменшення похибки чисельного диференціювання шляхом зменшення h з огляду на нестійкість чисельного диференціювання призводить до**
збільшення обчислювальної похибки
зменшення обчислювальної похибки
кращих результатів
погіршення результатів моделювання

◊**Чисельне інтегрування використовують коли**
функцію f задано таблично або графічно
підінтегральна функція є поліномом
підінтегральна функція задана наближено
неможливо визначити підінтегральну функцію

◊ **формули вигляду** $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ **. називають**
Квадратурними формулами
Наближеними формулами
Сумарними інтегралами
Розкладенням функції у ряд

◊ **В квадратурній сумі** $\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ **, числа x_k і A_k називають**
вузлами і коефіцієнтами квадратурної формули
залишковим членом квадратурної формули
коефіцієнтами та значення функції квадратурної формули
індексами та коефіцієнтами квадратурної формули

◊**Яких квадратурних формул не існує**
трапецій центральних
прямокутників лівобічних
прямокутників правобічних
Сімпсона

◊**порядком диференційного рівняння називають**
порядок вищої похідної, що входить до нього
порядок функції, що входить до нього
кількість його доданків
кількість початкових умов

◊ **Розв'язати …чисельно означає для заданої послідовності $x_0, x_1, \dots, x_n$ значень незалежної змінної x і числа y_0 знайти числову послідовність $y_0, y_1, \dots, y_n$ так, щоб y_k з заданою точністю наближав $y(x_k)$ для всіх $k = 1, 2, \dots, n$, де $y(x)$ – єдиний розв'язок з початковою умовою $y(x_0) = y_0$. . Вставьте прпущене слово.**
задачу Коші
крайову задачу
диференційне рівняння
інтегральне рівняння

◊ **Якщо всі точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ рівновіддалені: $x_k = x_0\ kh$, то величину h називають**
кроком інтегрування диференціального рівняння
кроком інтерполяції
відстанню між значеннями змінної
кроком апроксимації диференціального рівняння

◊ **Нехай нам задано значення якоїсь функції $y=f(x)$ у вузлах $x_0,x_1,\dots,x_n$. Будемо шукати поліном $P(x)$ степеня меншого за n, який би в точках x_i набував значень y_i не точно, а з деякою похибкою. Це суть методу**
найменших квадратів
найбільших квадратів
поліноміальний метод
найкращих оцінок

◊ **Який принцип полягає в тому, що найкращі значення коефіцієнтів поліному ті, при яких сума квадратів відхилень поліному від значень функцій в даних точках найменша**
найменших квадратів
апроксимації
чисельного інтегрування
визначення коефіцієнтів квадратурних формул

◊ **Яка задача полягає в наступному: для диференціального рівняння 1-го порядку полягає у відшуканні функції $y=y(x)$, яка задовольняє цьому рівнянню і початковій умові $y(x_0)=y_0$,   де x_0, y_0 – задані числа**
задача Коші
задача Буняковського

крайова задача
задача апроксимації

◊ **Суть якої задачі полягає в наступному: для диференціального рівняння n-го порядку $y^{(n)}=f(x, y', y'',..., y^{(n-1)})$полягає у відшуканні функції $y=y(x)$, що задовольняє рівняння і початковим умовам**
$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y^1{}_0,...,y^{(n-1)}(x_0)=y^{n-1}{}_0$.
Задачі Коші
Задачі апроксимації
Задачі чисельного інтегрування
Задачі чисельного диференціювання

◊ **Якщо при розв'язуванні звичайних диференціальних рівнянь додаткові умови задаються при одному значенні незалежної змінної (найчастіше, змінної часу), то така задача називається**
задачею з початковими умовами, або задачею Коші.
задачею інтегрування
задачею Вієрштрасса
крайовою задачею

◊ **Якщо при розв'язуванні звичайних диференціальних рівнянь додаткові умови задаються при двох або більш значеннях незалежної змінної, то задача називається**
крайовою
з початковими умовами
Коші
визначеною

◊ **В задачі Коші додаткові умови називають**
початковими
точковими
крайовими
симетричними

◊ **В крайовій задачі додаткові умови називають**
граничними
початковими
симетричними
точковими

◊ **В крайовій задачі додаткові умови на розв'язок називають**
граничними умовами першого роду
граничними умовами другого роду
класичними граничними умовами

початковими граничними умовами

◊ **В крайовій задачі додаткові умови , що накладаються на похідні від розв'язку це**
граничні умови другого роду
граничні умови першого роду
додаткові умови
класичні умови

◊ **Граничні умови, які є лінійною комбінацією умов на розв'язок і умов на похідні розв'язку називають**
граничні умови третього роду
граничні умови першого роду
граничні умови другого роду
класичні граничні умови

РОЗДІЛ 11
ПРАКТИКУМ

Лабораторна робота 1

Тема: відокремлення коренів.

Мета: Отримати відомості про методи відокремлення коренів рівняння з одною змінною на відрізку множини дійсних чисел.

Теоретичні відомості.

Нехай задано рівняння з одною змінною $f(x)=0$, де функція $f(x)$ визначена і неперервна на деякому відрізку [a;b] множини дійсних чисел.

Означення 1. Розв‘язати рівняння $f(x)=0$ означає знайти множину всіх його коренів (тобто таких значень x є [a;b], при яких воно стає числовою тотожністю) або ж довести, що їх не існує. Розв‘язок (корінь) рівняння $f(x)=0$ називають ще нулем функції $f(x)$.

В чисельних методах рівняння вважається розв‘язаним, якщо всі корені знайдені з заданою точністю, тобто з наперед заданою похибкою.

Означення 2. Відрізком ізоляції кореня рівняння називають такий відрізок множини дійсних чисел, в якому рівняння має один і тільки один розв‘язок.

Знаходження наближених коренів рівняння звичайно складається з двох етапів:

1) відокремлення коренів, тобто знаходження для кожного з них відрізку ізоляції;

2) обчислення кореня у відрізку ізоляції з наперед заданою точністю.

Для знаходження відрізків ізоляції застосовуються методи графічні, аналітичні та деякі їх комбінації. Найпростіше скористатися *графічним* методом: можна побудувати графік функції $f(x)$ за допомогою Майстра діаграм Excel і знайти відрізки ізоляції з графіку та з таблиці даних, за якою цей графік побудований.

Проте, отримані так результати не є обґрунтованими, не завжди є правильними. Точні результати ґрунтуються на такому відомому твердженні математичного аналізу.

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на [*a;b*] і набуває на кінцях цього відрізка значень протилежних знаків, тобто *f(a)* f(b)* < 0, то на відрізку існує хоча б один корінь рівняння *f*(x) = 0.

2. Якщо при цьому *f*(x) має першу похідну, яка зберігає сталий знак всередині відрізка [*a;b*] , то рівняння на цьому відрізку має єдиний корінь.

Аналітичний метод відокремлення коренів для рівняння *f*(x) = 0 з диференційовною функцією *f*(x) полягає в тому, щоб

1) Знайти критичні точки функції f(x).

2) Знайти інтервали монотонності функції f(x) (це інтервали між критичними точками. На інтервалі монотонності не більш як один корінь за теоремою 2).

3) Інтервал монотонності містить корінь функції f(x), якщо f(x) набуває на кінцях цього інтервалу значень протилежних знаків (за теоремою 1).

4) Відрізки ізоляції коренів (бажано якнайменші) обрати так, щоби кожний з них містив корінь і містився у відповідному інтервалі монотонності.

На жаль, приклади рівнянь, до яких можна застосувати аналітичний метод поодинокі. Тому для таких рівнянь доречним є *комбінований* метод:

1. У таблиці значень функції *f*(x) (за допомогою відповідного графіка) знайти відрізки зміни знака цих значень (бажано якнайменші). На кожному такому відрізку існує корінь рівняння *f*(x) = 0 (за теоремою 1).

2. Побудувати таблицю значень похідної *f* ′(x) і відповідний графік.

3. Якщо на відрізку зміни знака функції *f*(x) з пункту 1 похідна *f* ′(x) не змінює знака, то на ньому єдиний корінь (за теоремою 2), тобто це відрізок ізоляції кореня.

4. Якщо на відрізку зміни знака функції *f*(x) змінює знак і похідна *f* ′(x), то треба повернутись до пункту 1 і зменшити відрізки зміни знаку функції *f*(x).

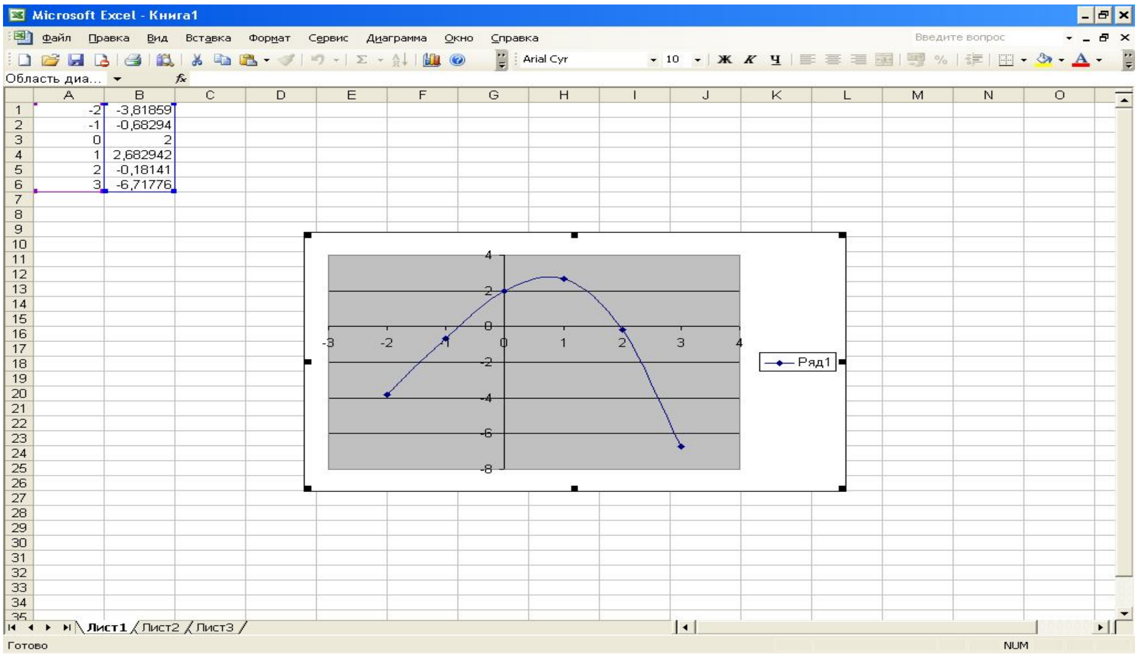
Комбінований метод може бути застосований до довільного рівняння *f*(x)

= 0 з диференційовною функцією f(x). У повному обсязі він є точним [2].

Хід роботи.

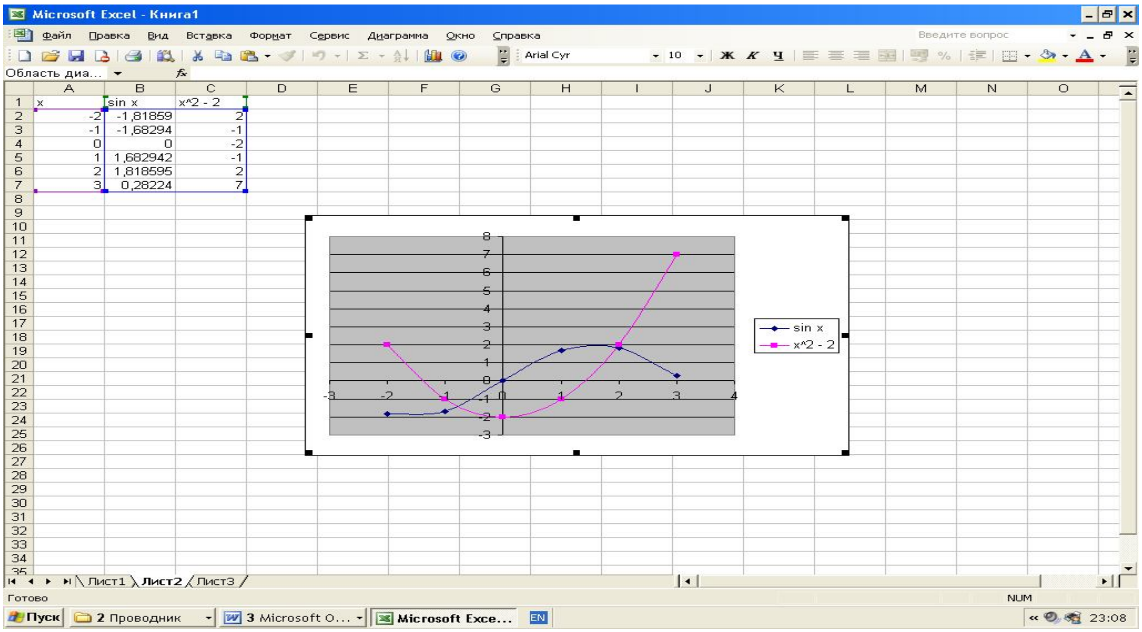
Задача 1. Відокремити корені рівняння 2sinx – x^2 + 2 = 0 на відрізку [– 2; 3] графічним методом.

Побудуємо графік функції y = 2sinx – x^2 + 2 Майстром діаграм Excel за наступною електронною таблицею, де у стовпці А точки з відрізку [– 2; 3], у стовпці В – значення функції y = 2sinx – x^2 + 2 у цих точках.



А саме, виділимо діапазон А1:В6, оберемо *Мастер диаграмм – Точечная – Точечная диаграмма со значениями, соединёнными сглаживающими линиями* та натиснемо на Готово. Можна побачити безпосередньо, що точки перетину графіку з віссю абсцис, тобто корені рівняння 2sinx – x^2 + 2 = 0 – це приблизно точки – 0,8 і 2. Це підтверджується і відповідною електронною таблицею: значення функції у стовпці В змінюють знак на відрізках [– 1; 0] та [1; 2]. У якості можливих відрізків ізоляції оберемо саме ці відрізки.

Інший варіант графічного методу.

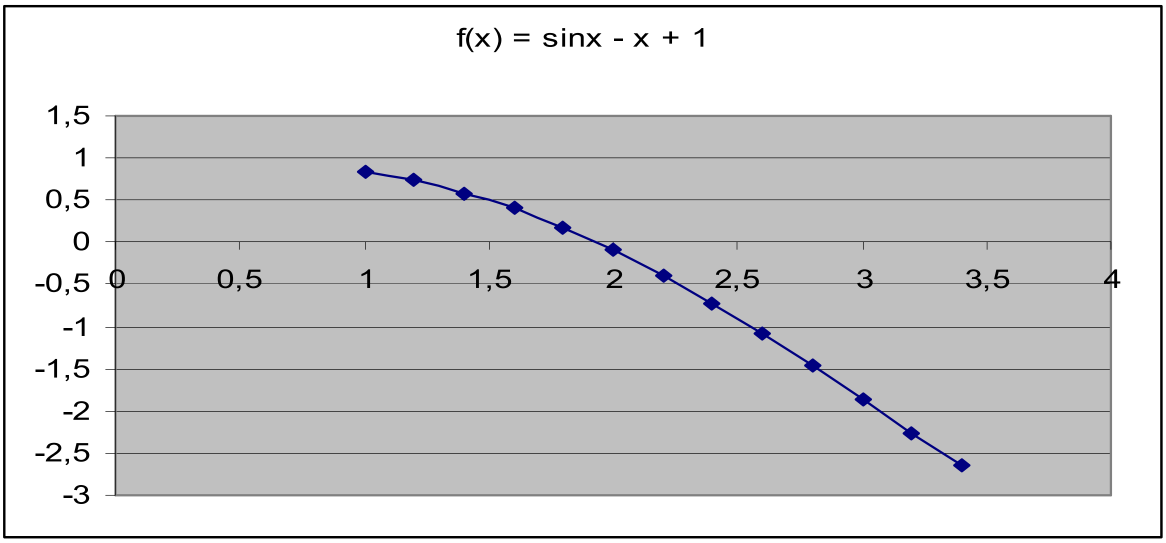


Запишемо рівняння 2sinx – x^2 + 2 = 0 у вигляді $\varphi(x) = g(x)$, де φ(x) = 2sinx, g(x) = = x^2 – 2 і побудуємо графіки функцій $y_1 = \varphi(x)$ і $y_2 = g(x)$ так само, як і вище.

Як бачимо, перетин графіків функцій φ(x) = 2sinx та g(x) = x^2 – 2 – це точки на відрізках [– 1; 0] та [1; 2]. Саме ці відрізки оберемо у якості можливих відрізків ізоляції.

Задача 2. Відокремити корені рівняння sinx – x + 1 = 0 на відрізку [1; 3] аналітичним методом.

Графік функції *f*(x) = sinx – x + 1 на відрізку [1; 3] побудуємо так само, як і в попередній задачі; виглядає він так.



Застосуємо для знаходження відрізків ізоляції аналітичний метод.

1. Критичні точки – це розв’язки рівняння $f'(x) = \cos x - 1 = 0$. Отже, $\cos x = 1$, критичні точки $x = 2\pi k$ ($k \in Z$).

2. Оскільки $|\cos x| \le 1$, то $f'(x) \le 0$, до того ж $f'(x) < 0$ у всіх точках окрім критичних. Це означає, що вся вісь є інтервалом монотонності $f(x)$. Отже, згідно з теоремою 2, існує, як максимум, один корінь даного рівняння.

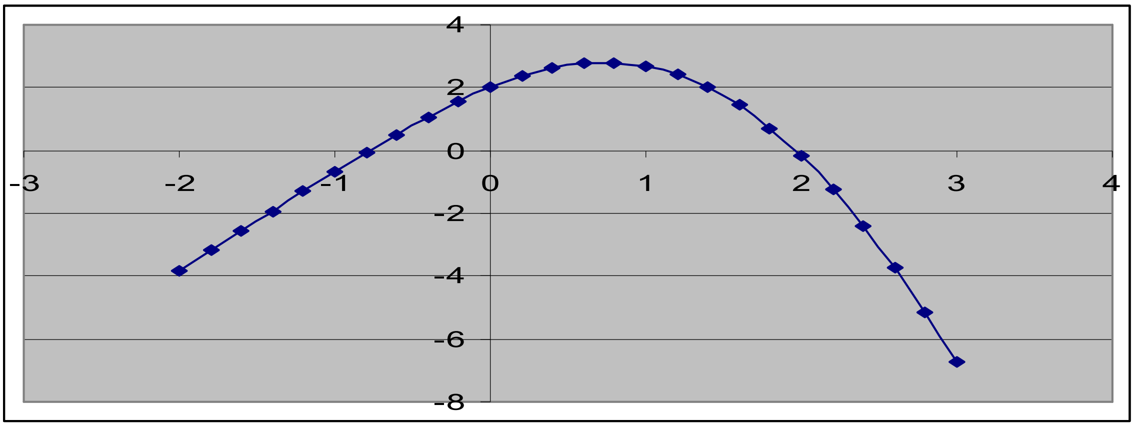
3. Згідно з графіком корінь приблизно дорівнює 2; згідно з таблицею, за якою побудований графік, значення функції змінюють знак на відрізку [1,8; 2]: $f(1{,}8) > 0$, $f(2) < 0$. Отже, на цьому відрізку є корінь рівняння згідно з теоремою 1.

4. У якості відрізка ізоляції цього кореня можна обрати довільний відрізок, що містить його, скажімо [1,8;2,2] (бажано, щоб він був якнайменше).

Додатково з 2. і 3. випливає, що існує єдиний корінь даного рівняння не тільки на [1; 3], але й на всій дійсній прямій.

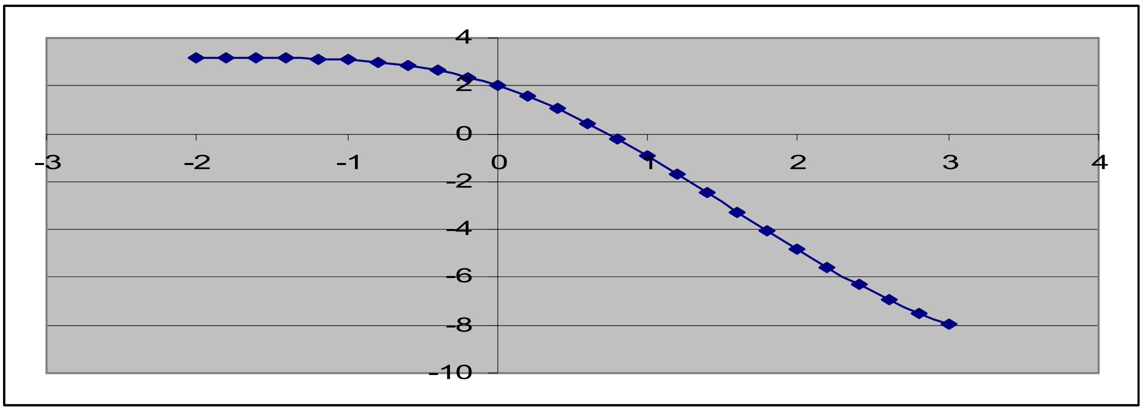
Задача 3. Знайти відрізки ізоляції коренів рівняння $f(x) = 2\sin x - x^2 + 2$ на відрізку [– 2; 3] комбінованим методом відокремлення коренів.

1. Побудуємо таблицю значень та графік функції $y = 2\sin x - x^2 + 2$ Майстром діаграм Excel так само, як у задачі 1.



Згідно з таблицею та графіком відрізками зміни знака функції $f(x)$ є відрізки [– 1; 0] та [1; 2].

2. Похідна $f'(x) = 2\cos x - 2x$, відповідний графік наступний.



3. На відрізку [– 1; 0] $f'(x) > 0$ (тобто $f(x)$ зростає), на відрізку [1; 2] $f'(x) < 0$, (тобто $f(x)$ спадає). Отже, на обох відрізках зміни знака функції $f(x)$ похідна $f'(x)$ знака не змінює, тому обидва є відрізками ізоляції коренів рівняння.

Контрольні питання.

1. Що в чисельних методах означає розв‘язати рівняння з одною змінною $f(x) = 0$?

2. Дайте означення відрізку ізоляції кореня.

3. Що означає відокремлення коренів?

4. Які методи відокремлення коренів вам відомі?

5. На яких твердженнях математичного аналізу ґрунтуються точні методи відокремлення коренів?

6. В чому полягає аналітичний метод відокремлення коренів для рівняння $f(x) = 0$ з диференційовною функцією $f(x)$?

7. В чому полягає комбінований метод відокремлення коренів для рівняння $f(x) = 0$ з диференційовною функцією $f(x)$?

Завдання.

Знайти відрізки ізоляції коренів даного рівняння на відрізку [– 5; 5] комбінованим методом відокремлення коренів.

№	Рівняння	№	Рівняння
1	$2^x + 5x - 3 = 0$	6	$2^x (x-2)^2 - 1 = 0$
2	$x^2 + 4\sin x - 1 = 0$	7	$x^2 - \cos x = 0$
3	$x^2 - 20\sin x - 1 = 0$	8	$(x - 3)\cos x - 1 = 0$
4	$3x - \cos x - 1 = 0$	9	$x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0$
5	$ctg\, x - 0.5x = 0$	10	$x^3 - 2x - 5 = 0$

Лабораторна робота 2

Тема: метод дихотомії (поділу відрізка навпіл).

Мета: Отримати відомості про метод дихотомії обчислення кореня на відрізку ізоляції з наперед заданою точністю та навчитися застосовувати цей метод до конкретних задач.

Теоретичні відомості.

Позначимо через x^* точне значення кореня рівняння $f(x)=0$ на відрізку ізоляції $[a;b]$, а через ε – його задану абсолютну похибку. Суть методу в тому, що відрізок $[a;b]$ ділять пополам точкою $c=0.5(a+b)$ і обчислюють $f(c)$. Якщо $f(c)=0$, то $x=c$ є точним значенням кореня. Якщо $f(c)\neq 0$, а $b-a\leq 2\varepsilon$, то $|x^*-c|\leq\varepsilon$ і значення $x=c$ буде шуканим наближенням коренем. Якщо $f(c)\neq 0$ і $b-a>2\varepsilon$, то обирають той з двох відрізків $[a;c]$ і $[c;b]$, на кінцях якого функція $f(x)$ набуває значень протилежних знаків. Позначимо цей відрізок $[a_1;b_1]$. Далі відрізок $[a_1;b_1]$ точкою $c_1=0.5(a_1+b_1)$ знов ділять пополам і роблять так само, як і для відрізка $[a;b]$. В результаті процесу ділення відрізків пополам дістають послідовність вкладених відрізків $[a;b]$, $[a_1;b_1]$, $[a_2;b_2]$, ..., $[a_n;b_n]$, ..., кожен з яких містить точне значення кореня x^*. Довжина відрізка $[a_n;b_n]$ дорівнює $(b-a)/2^n$, тому $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)$ = 0. Звідси випливає, що для деякого n $b_n-a_n\leq 2\varepsilon$, а $c_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ – наближене значення x^* з заданою абсолютною похибкою ε, оскільки $|x^*-c_n|\leq\varepsilon.$

Хід роботи.

Задача. Розв‘язати рівняння f(x) = 2x + 5x – 3 = 0 на відрізку [–10; 10] з точністю ε = 0,5*10-5.

Знаходження наближених коренів рівняння складається з двох етапів:

1) відокремлення коренів, тобто знаходження для кожного з них відрізку

ізоляції;

2) обчислення кореня у відрізку ізоляції з наперед заданою точністю. Отже:

1. Відокремлення коренів рівняння $f(x) = 2x + 5x - 3 = 0$ на відрізку [– 10; 10].

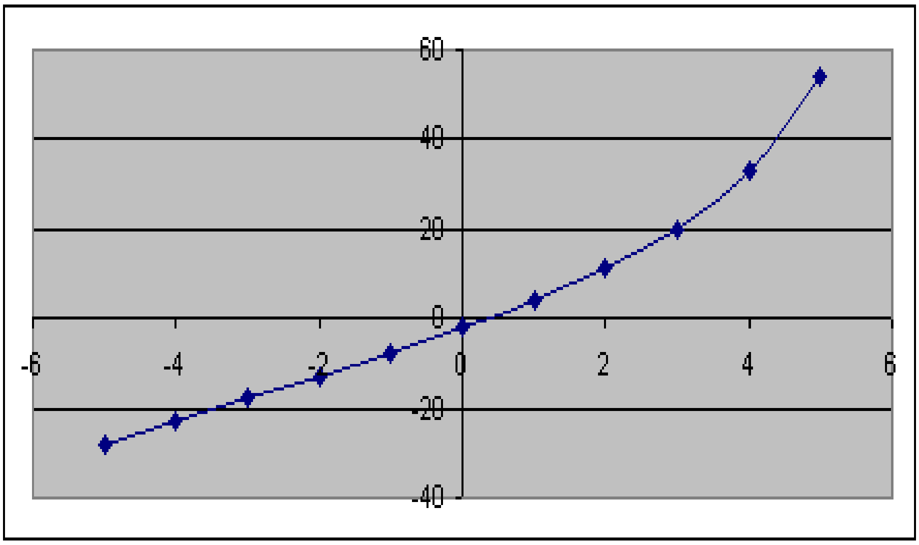
Застосуємо для знаходження відрізків ізоляції аналітичний метод.

Критичні точки – це розв'язки рівняння $f'(x) = 2x \ln 2 + 5 = 0$. Тут $f'(x) > 0$ при всіх x, оскільки $\ln 2 > 0$. Отже, рівняння $f'(x) = 0$ не має розв'язків, тобто критичних точок нема.

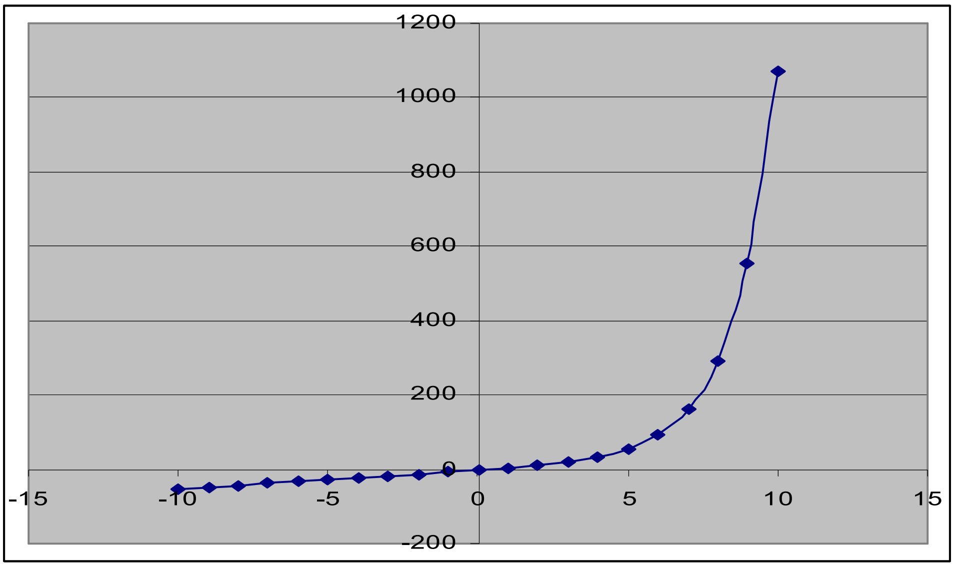
Оскільки $f'(x) > 0$ при всіх x, то вся вісь – область зростання функції f(x), існує не більш як один нуль f(x) згідно з теоремою 2.

3. Побудуємо електронну таблицю, а за її допомогою Майстром діаграм графік функції.

-5	27,9688
-4	22,9375
-3	-17,875
-2	-12,75
-1	-7,5
0	-2
1	4
2	11
3	20
4	33
5	54



У першому стовпці електронної таблиці – точки із області визначення функції, у другому – значення функції $f(x) = 2^x + 5x - 3$ у цих точках. Відрізок [–5;5] та крок 1 тут обрані досить довільно, однак зазначимо, що на [–10;10] графік виглядає так, що їм важко було б скористатись для локалізації коренів.



Згідно з таблицею та графіком функції вона змінює знак на [0;1]. Отже, на цьому відрізку є корінь рівняння згідно з теоремою 1. Це єдиний корінь рівняння згідно з пунктом 2.

4. У якості відрізка ізоляції цього кореня можна обрати саме відрізок [0;1].

2. Знайдемо корінь на [0;1] з точністю $\varepsilon = 0.5*10^{-5}$ методом дихотомії.

У даному випадку, a = 0, b = 1; нехай c = (a + b)/2. Оскільки *f*(x) зростає, то

$[a_1;b_1]=\begin{cases}[a;c], \text{ якщо } f(c)>0\\ [c;b], \text{ якщо } f(c)<0\end{cases}$. Надамо чарункам електронної таблиці таких значень:

	A	B	C	D
1	0	1	= (A1 + B1)/2	= 2^C1 + 5*C1 – 3
2	= ЕСЛИ(D1 > 0; A1; C1)	= ЕСЛИ(D1 > 0; C1; B1)	↓	↓
3	↓	↓	↓	↓

Тут у чарунки A1 та B1 занесені початкові точки відповідно a = 0, b = 1, у C1 (a + b)/2, у D1 значення функції *f*(x) при x = C1, у A2 та B2 знаходяться значення відповідно a_1 та b_1, обрахованих у залежності від значення функції *f*(x) у D1. Символ ↓ означає копіювання попередніх чарунок. В результаті отримаємо таку таблицю:

	A	B	C	D
1	0	1	0,5	0,914214
2	0	0,5	0,25	-0,56079
3	0,25	0,5	0,375	0,17184
4	0,25	0,375	0,3125	-0,19564
5	0,3125	0,375	0,34375	-0,0122
6	0,34375	0,375	0,359375	0,079745

7	0,34375	0,359375	0,351563	0,033754
8	0,34375	0,351563	0,347656	0,010773
9	0,34375	0,347656	0,345703	-0,00071
10	0,345703	0,347656	0,34668	0,005029
11	0,345703	0,34668	0,346191	0,002157
12	0,345703	0,346191	0,345947	0,000722
13	0,345703	0,345947	0,345825	3,67E-06
14	0,345703	0,345825	0,345764	-0,00036
15	0,345764	0,345825	0,345795	-0,00018
16	0,345795	0,345825	0,34581	-8,6E-05
17	0,34581	0,345825	0,345818	-4,1E-05
18	0,345818	0,345825	0,345821	-1,9E-05
19	0,345821	0,345825	0,345823	-7,5E-06
20	0,345823	0,345825	0,345824	-1,9E-06
21	0,345824	0,345825	0,345825	8,66E-07
22	0,345824	0,345825	0,345824	-5,4E-07
23	**0,345824**	**0,345825**	**0,345825**	**1,65E-07**
24	0,345824	0,345825	0,345825	-1,9E-07
25	0,345825	0,345825	0,345825	-1E-08

Як бачимо, починаючи з рядка 23 у стовбці С зміна значень припиняється. Це ефект обчислювальної похибки, докладно розглянутий у [2]: досягнуто найбільш точне значення кореня, яке тільки можливе при даному форматі чарунки, тобто з максимально можливим у чарунці числі значучих цифр.

Перевірка.

Перевіримо правильність отриманого розв'язку безпосередньо. А саме задамо у чарунку С26 формулу = С25 + $0,5*10^{-5}$, у чарунку С27 формулу = С25 – $0,5*10^{-5}$. Значення f(x) у стовбці D підраховуються автоматично. В результаті отримаємо:

	A	B	C	D
23	0,345824	0,345825	0,345825	1,65E-07
24	0,345824	0,345825	0,345825	-1,9E-07
25	0,345825	0,345825	0,345825	-1E-08
26			0,34583	2,94E-05
27			0,34582	-2,9E-05

Оскільки $f(0,345825 + 0,5*10^{-5}) > 0$, а $f(0,345825 – 0,5*10^{-5}) < 0$, то відмінність значення 0,345825 від точного значення кореня не перевищує ε = $0,5*10^{-5}$, тобто 0,345825 є єдиним коренем рівняння з точністю ε = $0,5*10^{-5}$.

Контрольні питання.

1. З яких етапів складається знаходження наближених коренів рівняння методом дихотомії?

2. В чому полягає алгоритм методу дихотомії?

3. Чи можливо знайти наближений корінь методом дихотомії вже на першому кроці?

4. Як виглядають формули методу дихотомії в Excel, якщо дана функція f(x) є спадною?

5. Як виглядають формули методу дихотомії, якщо дана функція f(x) має максимум?

6. Якщо зміна значень послідовних ітерацій методу дихотомії припинилась, то чи є це відповідь, тобто наближений корінь даного рівняння з даною точністю?

7. Чи можливо не знайти методом дихотомії правильної відповіді, не зробивши жодної помилки?

Завдання.

Знайти відрізки ізоляції коренів даного рівняння на відрізку [– 10; 10] і розв’язати його на кожному з цих відрізків методом дихотомії з точністю $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$. Варіанти завдань взяти з попередньої роботи.

Лабораторна робота 3

Тема: метод простої ітерації (стаціонарний ітераційний метод).

Мета: Отримати відомості про метод простої ітерації обчислення кореня на відрізку ізоляції з наперед заданою точністю та навчитися застосовувати цей метод до конкретних задач.

Теоретичні відомості.

Згідно з методом простої ітерації, задане рівняння $f(\mathrm{x}) = 0$ замінюють на еквівалентне $\mathrm{x} = \varphi(\mathrm{x})$, де $\varphi(\mathrm{x}) = \mathrm{x} - \lambda f(\mathrm{x})$, а λ – дійсна стала ($\lambda \neq 0$) і обчислюють ітерації $\mathrm{x}_{n+1} = \varphi(\mathrm{x}_n)$.

Теорема. Нехай функція $f(\mathrm{x})$ диференційовна на відрізку $[a;b]$ ізоляції її кореня з незмінним там знаком $f'(\mathrm{x})$. Тоді найефективнішім (тобто найшвидшім) збіг ітерацій $\mathrm{x}_{n+1} = \varphi(\mathrm{x}_n)$ з $\varphi(\mathrm{x}) = \mathrm{x} - \lambda f(\mathrm{x})$ на відрізку $[a;b]$ до кореня рівняння $f(\mathrm{x}) = 0$ буде за умов

$$1)\ |\lambda| = 1/\mathrm{M}_1, \text{ де } \mathrm{M}_1 = \max_{[a;b]}|f'(x)|,$$

$$2)\ \lambda f'(x) > 0.$$

Якщо і знак $f''(\mathrm{x})$ є незмінним на відрізку ізоляції $[a;b]$ (тобто якщо функція $f'(\mathrm{x})$ монотонна на $[a;b]$), то $\mathrm{M}_1 = \max\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$. Якщо на відрізку ізоляції кореня знак $f''(\mathrm{x})$ змінюється, то такий відрізок ізоляції треба зменшити.

Отже, застосовувати метод простої ітерації будемо за умови, що знак першої та другої похідних функції $f(\mathrm{x})$ є незмінними на відрізку ізоляції кореня $[a;b]$, а λ оберемо так, що

$$1)\ |\lambda| = 1/\mathrm{M}_1, \text{ де } \mathrm{M}_1 = \max\{|f'(a)|, |f'(b)|\},$$

$$2)\ \lambda f'(x) > 0;$$

тоді за початкову точку методу простої ітерації можна обрати довільну точку з $[a;b]$.

Хід роботи.

Задача. Знайти відрізки ізоляції коренів рівняння $f(\mathrm{x}) = 2 \cdot \sin \mathrm{x} - \mathrm{x}^2 + 2 = 0$

на [– 2; 3] і розв'язати його на кожному з цих відрізків методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 0{,}5*10^{-5}$.

1. *Відокремлення коренів рівняння* $f(x) = 2 \cdot \sin x - x^2 + 2 = 0$ *на відрізку* [–2; 3]
комбінованим методом розглядалося уже в лабораторній роботі 1. У якості відрізків ізоляції коренів тут візьмемо [–1; – 0,6] і [1,8; 2,2].

2. *Умови застосовування методу.*

Незмінність знаку першої похідної на відрізках ізоляції була перевірена в лабораторній роботі 1. Друга похідна $f''(x) = -2 \cdot \sin x - 2 \le 0$ при всіх x.

3. *Знайдемо заміну* $\varphi_i(x) = x - \lambda_i f(x)$ *для кожного з відрізків* i = 1, 2.

При i = 1 $[a;b]$ = [–1; – 0,6], $M_1 = \max\{|f'(a)|, |f'(b)|\} = |f'(-1)| \approx 3{,}08$, $\lambda_1 = 1/M_1 \approx 0{,}32$, $\varphi_1(x) = x - 0{,}32\cdot(2\sin x - x^2 + 2)$.

При i = 2 $[a;b]$ = [1,8; 2,2], $M_1 = \max\{|f'(a)|, |f'(b)|\} = |f'(2{,}2)| \approx 5{,}57$, $\lambda_2 = -1/M_1 \approx -0{,}18$ (оскільки $\lambda f'(x) > 0$, а $f'(x) < 0$ на [1,8;2,2]), $\varphi_2(x) = x + 0{,}18\cdot(2\sin x - x^2+2)$.

4. *Знайдемо корені на відрізках ізоляції з точністю* $\varepsilon = 0.5*10^{-5}$ *методом простої ітерації.*

При i = 1 $[a;b]$ = [–1; – 0,6], $\lambda_1 \approx 0{,}32$, $\varphi_1(x) = x - 0{,}32\cdot(2\sin x - x^2 + 2)$. За початкову точку методу простої ітерації можна обрати довільну точку з $[a;b]$, наприклад $a = -1$. Надамо чарункам електронної таблиці таких значень:

	A	B	C
1	– 1	= 2 · sin(A1) – A1^2 + 2	0,32
2	= A1 – $C$1*B1	↓	
3	↓	↓	

Тут у A1 початкова точка a = – 1, у B1 значення функції $f(x)$ при x = A1, у C1 значення λ_1, у A2 перша ітерація $\varphi_1(x) = x - \lambda_1 \cdot f(x)$ при x = A1. Символ ↓ означає копіювання попередніх чарунок. В результаті отримаємо таку таблицю:

	A	B	C
1	-1	-0,68294197	0,32

2	-0,78145857	-0,019308672	
3	-0,775279795	-0,000890639	
4	-0,77499479	-4,16322E-05	
5	-0,774981468	-1,94725E-06	
6	-0,774980845	-9,10811E-08	
7	-0,774980816	-4,26025E-09	
8	**-0,774980814**	**-1,9927E-10**	
9	-0,774980814	-9,32099E-12	
10	-0,774980814	-4,36096E-13	

Як бачимо, починаючи з рядка 8 у стовбці A зміна значень припиняється: досягнуто найбільш точне значення кореня, яке тільки можливе при даному форматі чарунки, тобто при максимально можливому у чарунці числі значущих цифр [2].

Перевірка.

Перевіримо правильність отриманого розв'язку безпосередньо. А саме надамо чарункам таких значень:

	A	B	C
11	= B10 + $0,5*10^{-5}$		
12	= B10 – $0,5*10^{-5}$		

У стовпці B значення функції $f(x)$ приймаються автоматично. В результаті отримаємо:

	A	B	C
10	-0,774980814	-4,36096E-13	
11	-0,774975814	1,48941E-05	
12	-0,774985814	-1,48942E-05	

Оскільки $f(-0,774980814 + 0,5*10^{-5}) > 0$, а $f(-0,774980814 - 0,5*10^{-5}) < 0$, то відмінність значення – 0,774981 від точного значення кореня не перевищує $\varepsilon = 0,5*10^{-5}$, тобто це значення є коренем рівняння $f(x) = 0$ з точністю $0,5*10^{-5}$.

Другий випадок є аналогічним: при і = 2 $[a;b]$ = [1,8; 2,2], $\lambda_2 \approx -0,18$, $\varphi_2(x) = x + 0,18\cdot(2\sin x - x^2 + 2)$. За початкову точку методу простої ітерації обираємо a = 1,8. Треба лише в попередній електронній таблиці замінити значення у чарунках А1 і С1:

	A	B	C
1	1,8	= 2 · sin(A1) – A1^2 + 2	– 0,18
2	= A1 – $C$1*B1	↓	
3	↓	↓	

В результаті отримаємо:

	A	B	C
1	1,8	0,707695262	-0,18
2	1,927385147	0,159372589	
3	1,956072213	0,027171069	
4	1,960963005	0,004315447	
5	1,961739786	0,000676925	
6	1,961861632	0,000105972	
7	1,961880707	1,65847E-05	
8	1,961883693	2,5954E-06	
9	1,96188416	4,06159E-07	
10	1,961884233	6,35605E-08	
11	1,961884244	9,94668E-09	
12	**1,961884246**	**1,55657E-09**	
13	1,961884246	2,43591E-10	
14	1,961884246	3,81204E-11	

Зміна значень у стовпці А з максимальним можливим числом значущих цифр у чарунці припиняється у рядку 12. Зробимо перевірку аналогічно:

	A	B	C
14	1,961884246	3,81204E-11	

15	1,961889246	-2,34308E-05	
16	1,961879246	2,34308E-05	

Тож значення 1,96188 є коренем рівняння f(x) = 0 з точністю $0,5*10^{-5}$.

Контрольні питання.

1. З яких етапів складається знаходження наближених коренів рівняння методом простої ітерації?

2. В чому полягає алгоритм методу простої ітерації?

3. Чи може значення λ змінюватись в області визначення функції f(x) у методі простої ітерації?

4. За яких умов збіг ітерацій методу простої ітерації буде найшвидшим?

5. Що можна зробити, якщо на відрізку ізоляції кореня знак f''(x) змінюється і отже умови застосування методу простої ітерації не виконані?

6. Яку точку треба обрати за початкову точку методу простої ітерації?

7. Якщо зміна значень послідовних ітерацій методу простої ітерації припинилась, то чи є це відповідь, тобто наближений корінь даного рівняння з даною точністю?

Завдання.

Знайти відрізки ізоляції коренів даного рівняння на відрізку [– 10; 10] і розв’язати його на кожному з цих відрізків методом простої ітерації з точністю ε = $0,5*10^{-6}$.

№	Рівняння	№	Рівняння
1	$2^x + 5x – 3 = 0$	6	$2^x (x-2)^2 – 1 = 0$
2	$x^2 + 4\sin x – 1= 0$	7	$x^2 – \cos x = 0$
3	$x^2 - 20\sin x – 1= 0$	8	$(x - 3)\cos x– 1 = 0$
4	$3x – \cos x –1 = 0$	9	$x^3 – 3x^2 – 24x – 5 = 0$
5	$ctg\, x – 0.5x = 0$	10	$x^3 – 2x – 5 = 0$

Лабораторна робота 4

Тема: метод Ньютона (метод дотичних).

Мета: Отримати відомості про метод Ньютона обчислення кореня на відрізку ізоляції з наперед заданою точністю та навчитися застосовувати цей метод до конкретних задач.

Теоретичні відомості.

Формула $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ (k = 0, 1, 2) визначає ітераційний метод Ньютона обчислення кореня рівняння $f(x) = 0$ на відрізку його ізоляції.

Для застосування методу Ньютона необхідно забезпечити наступні передумови.

1. Треба знайти відрізок ізоляції шуканого кореня.

2. Треба забезпечити, щоби на відрізку ізоляції не змінювалися знаки у першої та другої похідних, зменшуючи при необхідності початковий відрізок ізоляції.

3. За початкове наближення можна брати будь - яку точку x відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(x)\,f''(x) > 0$.

Хід роботи.

Задача. Розв‘язати рівняння $f(x) = 2^x + 5x - 3 = 0$ на відрізку [– 10; 10] з точністю $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ методом Ньютона.

1. *Відокремлення коренів рівняння на відрізку* [– 10; 10].

Ця задача уже була розв’язана у лабораторній роботі 2 і там був знайдений відрізок ізоляції [0;1] для єдиного кореня даного рівняння.

2. *Умови застосовування методу.*

Незмінність знаку першої похідної була перевірена в лабораторній роботі 2 при всіх x. Друга похідна $f''(x) = 2^x(\ln 2)^2 > 0$ при всіх x. Отже на [0;1] знак $f''(x)$ не змінюється.

3. *Початкове наближення.*

Оскільки $f(1) = 4$, звідки $f(1)\,f''(1) > 0$, то за початкове наближення можна взяти точку 1.

4. *Знайдемо корінь на відрізку ізоляції з точністю* $\varepsilon = 0.5*10^{-5}$ *методом Ньютона.*

Надамо чарунками електронної таблиці таких значень:

	A	B	C
1	1	= 2^A1 + 5*A1 – 3	= 2^A1*ln2 + 5
2	= A1 – B1/C1	↓	↓
3	↓	↓	↓

Тут у A1 початкова точка 1, у B1 значення $f(x)$ при x = A1, у C1 – значення $f'(x)$ при x = A1, у A2 задано формулу метода Ньютона $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. Далі копіюємо ці формули і в результаті дістанемо:

	A	B	C
1	1	4	6,386294361
2	0,373658686	0,163927839	5,898065336
3	0,345865193	0,000238894	5,880929713
4	0,345824571	5,03792E-10	5,880904909
5	**0,345824571**	**0**	**5,880904909**
6	0,345824571	0	5,880904909

Тут стабілізація здійснилась за п’ять кроків при максимально можливому для комп’ютера числі значущих цифр у чарунці (на відміну від методу дихотомії, де вона відбулась лише при 23 ітераціях, та й то з меншим числом значущих цифр).

Перевірка.

Перевіримо правильність отриманого розв’язку безпосередньо. А саме надамо чарункам таких значень:

	A	B	C
7	= A6 + $0,5*10^{-5}$		
8	= A6 – $0,5*10^{-5}$		

У стовпці B значення функції $f(x)$ приймаються автоматично. В результаті отримаємо:

	A	B	C
6	0,345824571	0	5,880904909
7	0,345834571	5,88091E-05	5,880911015
8	0,345814571	-5,8809E-05	5,880898803

Оскільки $f(0{,}345824571 + 0{,}5*10^{-5}) > 0$, а $f(0{,}345824571 - 0{,}5*10^{-5}) < 0$, то відмінність значення 0,345824571 від точного значення кореня не перевищує $\varepsilon=0{,}5*10^{-5}$, тобто це значення є єдиним коренем рівняння $f(x) = 0$ з точністю $0{,}5*10^{-5}$.

Контрольні питання.

1. З яких етапів складається знаходження наближених коренів рівняння методом Ньютона?

2. В чому полягає алгоритм методу Ньютона?

3. Які передумови необхідно забезпечити для застосування методу Ньютона?

4. Що можна зробити, якщо на відрізку ізоляції кореня знак $f''(x)$ змінюється і отже умови застосування методу Ньютона не виконані?

5. Яку точку треба обрати за початкову точку метода Ньютона?

6. Якщо для початкової точки x методу Ньютона виконується умова $f(x) \cdot f''(x) < 0$, то чи можна стверджувати, що не буде збіжності цього методу?

7. Якщо зміна значень послідовних ітерацій методу Ньютона припинилась, то чи є це відповідь, тобто наближений корінь даного рівняння з даною точністю?

Завдання.

Знайти відрізки ізоляції коренів даного рівняння на відрізку [– 10; 10] і розв’язати його на кожному з цих відрізків методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 0{,}5*10^{-6}$.

№	**Рівняння**	**№**	**Рівняння**
1	$2^x + 5x - 3 = 0$	6	$2^x (x-2)^2 - 1 = 0$
2	$x^2 + 4\sin x - 1 = 0$	7	$x^2 - \cos x = 0$
3	$x^2 - 20\sin x - 1 = 0$	8	$(x - 3)\cos x - 1 = 0$
4	$3x - \cos x - 1 = 0$	9	$x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0$
5	$ctg\, x - 0.5x = 0$	10	$x^3 - 2x - 5 = 0$

Лабораторна робота 5

Тема: метод лінійного інтерполювання (метод хорд).

Мета: Отримати відомості про метод хорд обчислення кореня на відрізку ізоляції з наперед заданою точністю та навчитися застосовувати цей метод до конкретних задач.

Теоретичні відомості.

Це класичний ітераційний метод наближеного обчислення кореня рівняння $f(x) = 0$ на відрізку його ізоляції [a;b]. Цей метод визначає формула

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(c)}(x_k - c) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

де $c \in [a;b]$. Для застосування методу лінійного інтерполювання необхідно забезпечити наступні передумови.

1. Треба знайти відрізок ізоляції шуканого кореня.
2. Треба забезпечити, щоби на відрізку ізоляції не змінювалися знаки у першої та другої похідних, зменшуючи при необхідності початковий відрізок.
3. За початкове наближення можна брати будь – яку точку x відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(x) \cdot f''(x) < 0$.
4. За нерухомий кінець c, який входить до формули методу, можна взяти будь – яку точку відрізку ізоляції, у якій виконується умова $f(c) \cdot f''(c) > 0$.

Хід роботи.

Задача. Розв‘язати рівняння $f(x) = 2^x + 5x - 3 = 0$ на відрізку [– 10; 10] з точністю $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ методом лінійного інтерполювання.

1. *Відокремлення коренів рівняння на відрізку* [– 10; 10].

Ця задача уже була розв'язана у лабораторній роботі 2 і там був знайдений відрізок ізоляції [0;1] для єдиного кореня даного рівняння.

2. *Умови застосовування методу.*

Незмінність знаку першої похідної була перевірена в лабораторній роботі 2 при всіх x. Друга похідна $f''(x) = 2^x(\ln 2)^2 > 0$ при всіх x. Отже на [0;1] знак $f''(x)$

не змінюється.

3. *Початкове наближення.*

Оскільки $f(0) = -2$, звідки $f(0) \cdot f''(0) < 0$, то за початкове наближення можна взяти точку a = 0.

4. Нерухомий кінець методу.

Оскільки $f(1) = 4$, звідки $f(1) \cdot f''(1) > 0$, то за нерухомий кінець с з формули методу можна взяти точку b = 1.

5. Знайдемо корінь на відрізку ізоляції з точністю $\varepsilon = 0{,}5{*}10^{-5}$ *методом лінійного інтерполювання.*

6. Надамо чарункам електронної таблиці таких значень:

	A	B	C	D
1	0	= 2^A1 + 5*A1 – 3	1	= 2^C1 + 5*C1 – 3
2	= A1 – B1*(A1 – $C$1)/(B1 – $D$1)	↓		
3	↓	↓		

Тут у чарунці A1 початкове наближення a = 0, у B1 $f(a)$, у C1 нерухомий кінець b = 1, у D1 $f(b)$. Зауважимо, що формулу у D1 можна просто скопіювати з B1. У чарунці A2 задана формула методу лінійного інтерполювання. Нерухомий кінець не змінюється, отже для його завдання використана абсолютна адресація (після набору C1 треба натиснути F4; так само з D1). Формули у стовбцях A і B копіюються. В результаті отримуємо:

	A	B	C	D
1	0	-2	1	4
2	0,333333333	-0,073412283		
3	0,345348204	-0,0028014		
4	0,345806369	-0,000107047		
5	0,345823876	-4,09071E-06		
6	0,345824545	-1,56323E-07		
7	0,34582457	-5,97374E-09		
8	**0,345824571**	**-2,28281E-10**		
9	0,345824571	-8,72369E-12		
10	0,345824571	-3,33067E-13		

Для стабілізації тут знадобилось 8 ітерацій при максимально можливому для комп’ютера числі значущих цифр у чарунці. Це ефект обчислювальної похибки, докладно розглянутий у [2].

Перевірка.

Перевіримо правильність отриманого розв'язку безпосередньо. А саме надамо чарункам таких значень:

	A	B	C
11	= A10 + 0,5*10^{-5}		
12	= A10 – 0,5*10^{-5}		

У стовпці В значення функції f(x) приймаються автоматично. В результаті отримаємо:

	A	B	C	D
10	0,345824571	-3,33067E-13		
11	0,345829571	2,94045E-05		
12	0,345774571	-0,000294044		

Оскільки f(0,345824571 + 0,5*10^{-5}) > 0, а f(0,345824571 – 0,5*10^{-5}) < 0, то відмінність значення 0,345824571 від точного значення кореня не перевищує ε = 0,5*10^{-5}, тобто це значення є єдиним коренем рівняння f(x) = 0 з точністю 0,5*10^{-5}.

Контрольні питання.

1. З яких етапів складається знаходження наближених коренів рівняння методом лінійного інтерполювання?

2. В чому полягає алгоритм методу хорд?

3. Які передумови необхідно забезпечити для застосування методу хорд?

4. Що можна зробити, якщо на відрізку ізоляції кореня знак f'(x) або f''(x) змінюється і отже умови застосування методу хорд не виконані?

5. Яку точку треба обрати за початкову точку метода Ньютона?

6. Яку точку треба обрати за нерухомий кінець методу лінійного інтерполювання?

7. Якщо для початкової точки x методу Ньютона виконується умова f(x) · f''(x) > 0, то чи можна стверджувати, що не буде збіжності цього методу?

8. Якщо зміна значень послідовних ітерацій методу Ньютона припинилась, то чи є це відповідь, тобто наближений корінь даного рівняння з даною точністю?

Завдання.

Знайти відрізки ізоляції коренів даного рівняння на відрізку [– 10; 10] і розв'язати його на кожному з цих відрізків методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$.

№	**Рівняння**
1	$2^x + 5x - 3 = 0$
2	$x^2 + 4\sin x - 1 = 0$
3	$x^2 - 20\sin x - 1 = 0$
4	$3x - \cos x - 1 = 0$
5	$\mathrm{ctg}\, x - 0.5x = 0$
6	$2^x (x-2)^2 - 1 = 0$
7	$x^2 - \cos x = 0$
8	$(x - 3)\cos x - 1 = 0$
9	$x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0$
10	$x^3 - 2x - 5 = 0$

Лабораторна робота 6

Тема: метод Гаусса розв’язування систем лінійних рівнянь.

Мета: Отримати відомості про метод Гаусса розв’язування систем лінійних рівнянь та навчитися застосовувати ці методи до конкретних задач.

Теоретичні відомості.

Метод послідовного виключення змінних, відомий як метод Гаусса, є найпоширенішим методом розв’язання систем лінійних рівнянь (СЛР). Метод Гаусса дозволяє розв’язати будь – яку СЛР в результаті цілком визначеної послідовності елементарних операцій і отже це алгоритм, який можна застосувати на комп’ютері.

Елементарні операції над СЛР:

1. Переміна місцями двох рівнянь.
2. Множення обох частин рівняння на деяке число, відмінне від нуля.
3. Додавання (або віднімання) до обох частин деякого рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на деяке число.

Елементарним операціям СЛР відповідають

Елементарні операції над матрицею:

1. Переміна місцями двох рядків матриці.
2. Множення рядка матриці на деяке число, відмінне від нуля.
3. Додавання (або віднімання) до рядка іншого рядка, помноженого на деяке число.

Легко перевірити, що в результаті кожної елементарної операції завжди отримується СЛР, еквівалентна (рівносильна) початковій.

Хід роботи.

Задача 1. Розв’язати СЛР $\begin{cases} 3{,}9x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}98x_3 = 4{,}905 \\ 0{,}74x_1 + 3{,}45x_2 - 0{,}84x_3 = 6{,}031 \\ -0{,}65x_1 + 1{,}18x_2 + 2{,}38x_3 = 10{,}134 \end{cases}$.

Розв’язання. Запишемо розширену матрицю даної СЛР у діапазон A2:C4

	A	B	C	D
1	x1	x2	x3	b
2	3,9	1,25	-0,98	4,905
3	0,74	3,45	-0,84	6,031
4	-0,65	1,18	2,38	10,134

Тут і надалі доцільно підкреслити всі границі цієї таблиці, натиснувши кнопку *Границы → Все границы* на панелі *Форматирование*: це дасть змогу не рахувати потім номер рядка чи стовпця при подальших обчисленнях. На першому кроці алгоритму наша мета – досягти того, щоби в результаті послідовності елементарних операцій над матрицею під рядком 2 у стовпці A значення чарунок дорівнювали нулю. Це і реалізує така електронна таблиця:

	A	B	C	D
6	= A2/$A$2	→	→	→
7	= A3 - A6*$A$3	→	→	→
8	= A4 - A6*$A$4	→	→	→

Тут формули для матричних операцій над рядком записуються в одну чарунку, а потім розповсюджуються на весь рядок, просто перетягнувши маркер заповнення згідно з правилами Excel. **Ф**ормули треба виконувати спочатку у першому стовпці (у стовпці 6), а потім у стовпцях 7 і 8. В результаті дістанемо:

	A	B	C	D
6	1	0,320513	-0,25128	1,257692
7	0	3,212821	-0,65405	5,100308
8	0	1,388333	2,216667	10,9515

На другому кроці треба отримати 1 для елемента матриці, відповідного B7 і 0 для елементів, відповідних B6 і B8. Це реалізує така електронна таблиця:

	A	B	C	D
10	←	= B6 – B11*$B$6	→	→
11	←	= B7/$B$7	→	→
12	←	= B8 – B11*$B$8	→	→

Тут формули для матричних операцій записуються у чарунки стовпця B, а потім копіюються на відповідні рядки. **Ф**ормули треба виконувати спочатку у другому стовпці (тобто у стовпці 11), а потім у стовпцях 10 і 12. В результаті дістанемо:

	A	B	C	D
10	1	0	-0,18603	0,748883
11	0	1	-0,20358	1,587486
12	0	0	2,499297	8,74754

Нарешті, на третьому кроці треба отримати 1 для елемента матриці, відповідного C12 і 0 для елементів, відповідних C10 і C11.

	A	B	C	D
10	←	←	= C10 – C16*$C$10	→
11	←	←	= C11 – C16*$C$11	→
12	←	←	= C12/$C$12	→

Формули треба виконувати спочатку у рядку 12, а потім у 10 і 11. В результаті:

	A	B	C	D
14	1	0	0	1,4
15	0	1	0	2,3
16	0	0	1	3,5

Матриця системи зведена до діагональної форми. Отже, відповідна СЛР має вигляд: $\begin{cases} x_1 = 1{,}4 \\ x_2 = 2{,}3 \\ x_3 = 3{,}5 \end{cases}$. Це і є розв'язок даної СЛР.

Перевірка.

Перевіримо правильність отриманого розв'язку безпосередньо. А саме виділимо діапазон A18:C18, у чарунці A18 задамо формулу = ТРАНСП(D14:D16). Розв'язок з'явиться у діапазоні A18:C18. Формулу = СУММПРОИЗВ($A$18:$C$18; A2:C2), яка підраховує результат підстановки розв'язку у перше рівняння системи, задамо у чарунці D18. Після цього перетягнемо маркер заповнення з D18 на дві чарунки вниз – там з'являться підрахунки результатів підстановки у друге та третє рівняння розв'язку згідно з правилами копіювання формул в Excel:

	A	B	C	D
18	1,4	2,3	3,5	4,905
19				6,031
20				10,134

Значення в діапазоні D18:D20 точно співпадають з вільними членами даної СЛР у D2:D4, що є безпосереднім доведенням правильності отриманого розв'язку.

Задача 2. Розв'язати СЛР

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю даної СЛР у діапазон A2:E4

	A	B	C	D	E
1	x1	x2	x3	x4	b
2	1	-2	3	-2	3
3	2	-3	1	-2	-2
4	4	-1	2	-1	0

– це система трьох лінійних рівнянь з чотирма змінними. Проте метод Гаусса – алгоритм, який дозволяє розв'язати будь – яку СЛР. Послідовність дій фактично не відрізняється від попереднього прикладу. Перший крок:

	A	B	C	D	E
6	= A2	→	→	→	→
7	= A3 – A6*$A$3	→	→	→	→
8	= A4 – A6*$A$4	→	→	→	→

В результаті:

	A	B	C	D	E
6	1	-2	3	-2	3
7	0	1	-5	2	-8
8	0	7	-10	7	-12

Другий крок:

	A	B	C	D	E
10	←	= B6 + B7*2	→	→	→
11	←	= B7	→	→	→
12	←	= B6 – B7*7	→	→	→

Тут елементи матриці – цілі числа, тому зручно у формулах замість адреси чарунки використати саме значення. В результаті:

	A	B	C	D	E
10	1	0	-7	2	-13
11	0	1	-5	2	-8
12	0	0	25	-7	44

Третій крок:

	A	B	C	D	E
10	←	←	= C10 – C16*$C$10	→	→
11	←	←	= C11 – C16*$C$11	→	→
12	←	←	= C12/$C$12	→	→

звідки

	A	B	C	D	E
14	1	0	0	0,04	-0,68
15	0	1	0	0,6	0,8
16	0	0	1	-0,28	1,76

Матриця у діапазоні A14:C16 зведена до діагонального вигляду, що завершує алгоритм. Отриманій матриці відповідає така СЛР: $\begin{cases} x_1 + 0{,}04x_4 = -0{,}68 \\ x_2 + \ 0{,}6x_4 = \ 0{,}8 \\ x_3 - 0{,}28x_4 = \ 1{,}76 \end{cases}$.

Тут за означенням змінні x_1, x_2, x_3, яким відповідають діагональні елементи матриці – це основні (базові) змінні, всі інші (тут тільки x_4) – неосновні (вільні). Переносимо у рівняннях СЛР вільні змінні зліва направо: $\begin{cases} x_1 = -0{,}68 - 0{,}04x_4 \\ x_2 = \ 0{,}8 \ - \ 0{,}6x_4 \\ x_3 = 1{,}76 + 0{,}28x_4 \end{cases}$ і отримуємо загальний розв'язок: кожному значенню вільної змінної відповідає свій (частковий) розв'язок і всі розв'язки СЛР мають такий вигляд. В електронній таблиці їх можна отримувати так:

	A	B	C	D	E	F
14	1	0	0	0,04	– 0,68	= E14 – D14*$F$17
15	0	1	0	0,6	0,8	↓
16	0	0	1	– 0,28	1,76	↓
17						*

У чарунку F17 замість * можна занести довільне значення змінної x_4 і в діапазоні F14:F17 дістанемо відповідний частковий розв'язок даної СЛР. Наприклад,

	A	B	C	D	E	F
14	1	0	0	0,04	-0,68	-0,72
15	0	1	0	0,6	0,8	0,2
16	0	0	1	-0,28	1,76	2,04
17						1

або

	A	B	C	D	E	F
14	1	0	0	0,04	-0,68	-0,6
15	0	1	0	0,6	0,8	2
16	0	0	1	-0,28	1,76	1,2
17						-2

Перевірка.

Перевіримо правильність отриманого розв’язку безпосередньо. А саме виділимо діапазон A19:D19, у чарунці A19 задамо формулу = ТРАНСП(F14:F16). Розв’язок з’явиться у діапазоні A19:D19. Формулу = СУММПРОИЗВ($A$19:$D$19;A2:D2), яка підраховує значення результату підстановки розв’язку у перше рівняння задамо у чарунці E19 і перетягнемо маркер заповнення на дві чарунки вниз – там з’являться підрахунки результатів підстановки у друге та третє рівняння розв’язку згідно з правилами копіювання формул в Excel:

	A	B	C	D	E
19	-0,6	2	1,2	-2	3
20					-2
21					-4,4E-16

Значення в діапазоні E19:E21 співпадають з вільними членами даної СЛР: у чарунці E14 тут знаходиться значення, яке з точки зору Excel не відрізняється від нуля. Можна надати довільне значення вільній змінній x_4 у чарунці F17: тоді дістанемо новий розв’язок у діапазоні A19:D19, проте значення вільних членів у діапазоні E19:E21 залишаться незмінними, що й є безпосереднім доведенням правильності отриманого розв’язку.

Отже, **відповідь:** $\begin{cases} x_1 = -0{,}68 - 0{,}04x_4 \\ x_2 = \ 0{,}8 \ - \ 0{,}6x_4 \\ x_3 = 1{,}76 + 0{,}28x_4 \end{cases}$ – це загальний розв’язок СЛР,

$\begin{cases} x_1 = -0{,}72 \\ x_2 = 0{,}2 \\ x_3 = 2{,}04 \\ x_4 = 1 \end{cases}$ або $\begin{cases} x_1 = -0{,}6 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1{,}2 \\ x_4 = -2 \end{cases}$ – це приклади часткових розв’язків.

Задача 3. Розв’язати СЛР $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ \ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3 \ . \end{cases}$$

Розв’язання. Запишемо розширену матрицю даної СЛР у діапазон A2:D5

	A	B	C	D
1	x1	x2	x3	b
2	3	-2	1	2
3	2	-3	2	-1
4	1	-1	3	0
5	2	-4	2	3

– це система чотирьох лінійних рівнянь з трьома змінними. Але оскільки метод Гаусса – алгоритм, то послідовність дій та ж, що й у попередніх прикладах. Перший крок:

	A	B	C	D
7	= A2/$A$2	→	→	→
8	= A3 – A7*$A$3	→	→	→
9	= A4 – A7*$A$4	→	→	→
10	= A5 – A7*$A$5	→	→	→

В результаті:

	A	B	C	D
7	1	- 2/3	1/3	2/3
8	0	-1 2/3	1 1/3	-2 1/3
9	0	- 1/3	2 2/3	- 2/3
10	0	-2 2/3	1 1/3	1 2/3

Оскільки елементи початкової матриці цілі числа, то обрано дрібний формат чарунок.

Другий крок:

	A	B	C	D
12	←	= B7 – B13*$B$7	→	→
13	←	= B8/$B$8	→	→
14	←	= B9 – B13*$B$9	→	→
15	←	= B10 – B13*$B$10	→	→

звідки

	A	B	C	D
12	1	0	- 1/5	1 3/5
13	0	1	- 4/5	1 2/5
14	0	0	2 2/5	- 1/5
15	0	0	- 4/5	5 2/5

Третій крок:

	A	B	C	D
17	←	←	= C12 – C19*$C$12	→
18	←	←	= C13 – C19*$C$13	→
19	←	←	= C14/$C$14	→
20	←	←	= C15 – C19*$C$15	→

звідки

	A	B	C	D
17	1	0	0	1 7/12
18	0	1	0	1 1/3
19	0	0	1	- 1/12
20	0	0	0	5 1/3

Матриця у діапазоні A17:C19 зведена до діагонального вигляду, що завершує алгоритм. Отриманій матриці відповідає така СЛР:

$$\begin{cases} x_1 = 1\,7/12 \\ x_2 = 1\,1/3 \\ x_3 = -1/12 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5\,1/3 \end{cases}.$$

Останнє рівняння виписано із всіма нульовими коефіцієнтами. Яким би не був набір значень x_1, x_2 , x_3, в результаті їх підстановки в останнє рівняння отримаємо протиріччя: 0 = 5 1/3. Отже, це рівняння, а тому і вся система не мають розв’язків. Але звідси несумісною є й початкова СЛР, еквівалентна кінцевій.

Відповідь: розв’язків не існує.

Контрольні питання.

1. З послідовності яких операцій складається алгоритм методу Гаусса?
2. Сформулюйте елементарні операції над СЛР, над матрицею.
3. Чи є множення обох частин рівняння на нуль еквівалентною операцією?
4. До якої форми зводиться матриця системи методом Гаусса?
5. Що називається розв’язком СЛР?
6. Як перевірити, що деякий набір чисел є розв’язком СЛР?
7. Чи завжди всі розв’язки даної СЛР отримуються методом Гаусса?
8. Чи можна в результаті виконання методу Гаусса отримати зайві розв’язки?
9. Як записати всі розв’язки даної СЛР, якщо їх безліч?
10. Скільки розв’язків даної СЛР отримано в задачі 2? в задачі 3?

Завдання.

Задача. Розв'язати наступну СЛР методом Гаусса.

Варіант 1.

$$\begin{cases} 2x-3y+5z=-1 \\ 3x-2y+5z=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$$

Варіант 2.

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3=-1 \\ 3x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2-4x_3=5 \end{cases}$$

Варіант 3.

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3=-1 \\ 3x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2-4x_3=1 \end{cases}$$

Варіант 4.

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3-x_4=-2 \\ 5x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ x_1-2x_2+x_3-4x_4=3 \end{cases}$$

Варіант 5.

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=-2 \\ 4x_1-2x_2-x_3=0 \\ x_1-3x_2+2x_3=-1 \\ 3x_1-x_2+4x_3=3 \end{cases}$$

Варіант 6.

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3-x_4=5 \\ 3x_1-x_2+5x_3-4x_4=2 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=-8 \end{cases}$$

Варіант 7.

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=0 \\ x_1-2x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=4 \\ 4x_1-x_2+2x_3=5 \end{cases}$$

Варіант 8.

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=-2 \\ x_1-3x_2+2x_3=1 \\ 2x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

Варіант 9.

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-1 \\ x_1-x_2+3x_3=2 \\ 4x_1-5x_2+7x_3=3 \end{cases}$$

Варіант 10.

$$\begin{cases} 3x-2y+5z=2 \\ x-3y+2z=-3 \\ 2x-4y+3z=-1 \end{cases}$$

Лабораторна робота 7

Тема: матричні операції в Excel.

Мета: Отримати відомості про матричні операції в Excel та навчитися застосовувати їх до конкретних задач.

Теоретичні відомості.

Означення 1. Добуток m × n – матриці A на n × p матрицю B – це така m × p – матриця C = A·B, елемент c_{ij} якої є скалярним добутком вектор – рядка i матриці A на вектор – стовпець j матриці B.

Добуток 2 × 3 матриці A = $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ на 2 × 2 матрицю B = $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ C = A · B не існує, оскільки число стовпців матриці A дорівнює 3 і не дорівнює числу рядків B.

Означення 2. Матриця, обернена до квадратної матриці A порядку n – це така квадратна матриця A^{-1} того ж порядку, що A A^{-1} = A^{-1} A = E, де E – одинична матриця.

Якщо A має обернену, то її можна знайти методом Гаусса. Розглянемо n × 2n матрицю AE, яку можна отримати, дописавши праворуч від матриці A одиничну матрицю того ж порядку. Наприклад, якщо A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, то AE = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Зведемо матрицю AE до діагональної форми методом Гаусса. Тоді вона отримає вигляд EB, де B – деяка квадратна матриця порядку n. Наприклад при n = 3 EB = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$. Стверджується, що така матриця B і є обернена до A, тобто B = A^{-1}.

<u>Хід роботи</u>.

Для множення матриць є спеціальний вбудований оператор Excel МУМНОЖ. Наприклад, у наступній електронній таблиці

	A	B	C	D	E	F
1	3	-5		5	0	-4
2	4	0		3	1	7
3	-7	2				

задані 3×2 матриця $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 0 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$ і 2×3 матриця $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Для знаходження 3×3 матриці $C = A \cdot B$ виділимо діапазон A5:C7 і (можливо за

	A	B	C	D	E	F
1	3	-5		5	0	-4
2	4	0		3	1	7
3	-7	2				
4						
5	=МУМНОЖ(A1:B3;D1:F2)					
6						
7						

допомогою вікна цього оператора) введемо в нього формулу = МУМНОЖ(A1:B3;D1:F2):

Після цього, притримуючи кнопки Alt і Shift, треба натиснути не Enter. В результаті отримаємо матрицю С:

	A	B	C	D	E	F
1	3	-5		5	0	-4
2	4	0		3	1	7
3	-7	2				
4						
5	0	-5	-47			
6	20	0	-16			
7	-29	2	42			

Якщо спробувати помножити матриці A і B з нерівними числами стовпців у A та рядків у B, то отримаємо повідомлення про помилку #ЗНАЧ! .

Задача. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 4{,}05 & -0{,}93 & -0{,}41 \\ 1{,}18 & 3{,}78 & -0{,}87 \\ -0{,}96 & -1{,}02 & 3{,}68 \end{pmatrix}$

методом Гаусса.

Розв’язання. Задамо в електронній таблиці матрицю АЕ:

	A	B	C	D	E	F
1	4,05	-0,93	-0,41	1	0	0
2	1,18	3,78	-0,87	0	1	0
3	-0,96	-1,02	3,68	0	0	1

Зведемо її до діагональної так само, як і в лабораторній роботі 6:

	A	B	C	D	E	F
1	4,05	-0,93	-0,41	1	0	0
2	1,18	3,78	-0,87	0	1	0
3	-0,96	-1,02	3,68	0	0	1
4						
5	1	-0,22963	-0,10123	0,246914	0	0
6	0	4,050963	-0,75054	-0,29136	1	0
7	0	-1,24044	3,582815	0,237037	0	1
8						
9	1	0	-0,14378	0,230398	0,056685	0
10	0	1	-0,18528	-0,07192	0,246855	0
11	0	0	3,352991	0,14782	0,30621	1
12						
13	1	0	0	0,236737	0,069816	0,042881
14	0	1	0	-0,06376	0,263775	0,055257
15	0	0	1	0,044086	0,091324	0,298241

Отже, матриця $B = -\begin{pmatrix} 0,236737 & 0,069816 & 0,042881 \\ 0,06376 & 0,263775 & 0,055257 \\ 0,044086 & 0,091324 & 0,298241 \end{pmatrix}$

є оберненою до матриці А.

Перевірка.

Перевіримо це безпосередньо за означенням за допомогою вбудованого оператора МУМНОЖ. Результат множення А на В, тобто результат дії оператору МУМНОЖ(A1:C3; D13:F15) дорівнює

1	-3,46945E-17	-1,38778E-17
6,25E-17	1	-5,55112E-17
0	-5,55112E-17	1

Оскільки числа ~ 10^{-17} з точки зору Excel не відрізняються від нуля, то отримана матриця є одиничною. Знайти обернену матрицю можна також і за допомогою спеціального вбудованого оператора Excel МОБР. Треба виділити квадратний діапазон того ж розміру, що й у даної матриці, (в цьому прикладі з 9 чарунок), задати в ньому цей оператор, єдиним аргументом якого є діапазон даної матриці (тут це МОБР(A1:C3)) і, притримуючи кнопки Alt і Shift, натиснути не Enter.

Контрольні питання.

1. Визначте добуток двох матриць.
2. Чи завжди можна помножити дві матриці?
3. Якою буде відповідь Excel, якщо спробувати помножити матриці A · B з нерівними числами стовпців у A та рядків у B?
4. Як визначаються операції додавання та віднімання для матриць, у яких не співпадають число рядків або число стовпців?
5. Чи можна помножити довільну матрицю на дійсне число?
6. Чи має обернену довільна матриця?
7. Як знайти обернену матрицю методом Гаусса?
8. Як знайти обернену матрицю за допомогою вбудованого оператора Excel?
9. Чи співпадають обернена матриця, отримана методом Гаусса, з оберненою матрицею, отриманою за допомогою вбудованого оператора Excel?

Завдання.

Задача 1. Знайти матрицю X за допомогою вбудованих операторів Excel.

Варіант 1.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Варіант 2.

$$X=\begin{pmatrix}2&-1&3\\7&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-4\\0&1\\1&0\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}3&0\\7&-1\end{pmatrix}$$

Варіант 3.

$$X=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&4&-1\\-2&-1&3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\\1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&4&-1\\-2&-1&3\end{pmatrix}$$

Варіант 4.

$$X=\begin{pmatrix}1&-3&5\\7&15&-21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}14&-10\\15&131\\-17&3\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}4&19\\-10&21\\3&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}15&-12&4\\100&-2&-105\end{pmatrix}$$

Варіант 5.

$$X=\begin{pmatrix}1&-2\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\0&2\\3&-1\end{pmatrix}$$

Варіант 6.

$$X=3\begin{pmatrix}1&-2\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2\\-3&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3&-4\\1&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2\\-3&1\end{pmatrix}$$

Варіант 7.

$$X=3\begin{pmatrix}1&0&-2\\3&-2&5\\7&-4&-3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-2&-1\end{pmatrix}$$

Варіант 8.

$$X=2\begin{pmatrix}1&-3\\5&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2\\-3&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3&-4\\1&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\-3&1\end{pmatrix}$$

Варіант 9.

$$X=3\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&2&1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}3&-5&0\\2&1&-1\\3&0&2\end{pmatrix}$$

Варіант 10.

$$X=3\begin{pmatrix}1&-3&5\\7&0&1\\3&-2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0&2\\-1&3&4\\5&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1\\7&0\\5&-1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}2&5&1\\7&0&-1\\2&5&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0&1\\7&-2&5\\4&0&1\end{pmatrix}$$

Задача 2. Знайти матрицю, обернену до даної матриці, методом Гаусса та за допомогою вбудованого оператора Excel.

Варіант	Матриця		
1	3.90	1.25	-0.98
	0.74	3.45	-0.84
	-0.65	1.18	2.38
2	2.68	-0.68	0.48
	-0.73	2.92	-0.39
	-0.58	-1.12	3.12
3	2.50	-0.91	-0.32
	-0.91	3.64	-0.48
	0.48	-0.98	2.14
4	3.45	0.78	-0.97
	0.78	2.63	-0.89
	-0.97	-0.89	2.41
5	3.21	0.81	-0.93
	0.81	2.49	-0.94
	-0.93	-0.94	2.53
6	2.78	0.38	-0.43
	-0.78	3.14	-0.81
	-0.45	-0.86	2.48
7	3.96	-0.78	-0.35
	1.18	3.78	-0.87
	-0.96	-1.02	3.68
8	3.48	1.12	-0.94
	1.08	3.67	-0.87
	-1.21	-1.43	4.14
9	3.67	0.68	-1.21
	0.68	2.71	-0.96
	-1.21	-0.96	2.69
10	3.78	0.67	-0.83
	0.67	2.76	-0.69
	-0.83	-0.69	2.39

Лабораторна робота 8

Тема: метод простої ітерації для систем лінійних рівнянь.

Мета: Отримати відомості про метод простої ітерації для розв'язування систем лінійних рівнянь та навчитися застосовувати їх до конкретних задач.

Теоретичні відомості.

Нехай задана система лінійних рівнянь (СЛР) Ax = b, для матриці системи A = (a_{ij}) якої $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Поділимо кожне рівняння системи Ax = b на a_{ii}. Тоді для матриці A' отриманої еквівалентної системи A'x = b' діагональні елементи дорівнюють 1, для матриці C = E – A' діагональні елементи дорівнюють нулю, а суми модулів недіагональних елементів $\sum_{j \neq i} |c_{ij}|$ < 1. Очевидно, СЛР A'x = b' еквівалентна рівності x = Φ(x) = Cx + b'.

Тоді ітераційний процес $x_k = \Phi(x_{k-1})$, k = 1, 2, … буде збігатися до єдиного розв'язку рівняння x = Φ(x), тобто до розв'язку СЛР Ax = b при довільному початковому x_0. Такий ітераційний метод для розв'язування СЛР називають стаціонарним або методом простої ітерації.

Хід роботи

Задача. Розв'язати СЛР
$$\begin{cases} 3,9x_1 + 1,25x_2 - 0,98x_3 = 4,905 \\ 0,74x_1 + 3,45x_2 - 0,84x_3 = 6,031 \\ -0,65x_1 + 1,18x_2 + 2,38x_3 = 10,134 \end{cases}$$
методом простої ітерації.

Розв'язання. Оскільки 3,9 > 1,25 + 0,98 , 3,45 > 0,74 + 0,84 , 2,38 > 0,65 + 1,18 , тобто виконана умова $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, то скористаємося викладеним вище алгоритмом. Запишемо розширену матрицю даної СЛР в електронну таблицю:

	A	B	C	D
1	3,9	1,25	-0,98	4,905
2	0,74	3,45	-0,84	6,031
3	-0,65	1,18	2,38	10,134

Поділимо кожний рядок цієї матриці на a_{ii}:

	A	B	C	D
5	=A1/$A$1	→	→	→
6	←	=B2/$B$2	→	→
7	←	←	=C3/$C$3	→

В результаті отримаємо розширену матрицю еквівалентної системи A'x = b':

	A	B	C	D
5	1	0,320513	-0,25128	1,257692
6	0,214493	1	-0,24348	1,748116
7	-0,27311	0,495798	1	4,257983

Наступним кроком знайдемо матрицю C = E – A'. Для цього помножимо A' на – 1

	A	B	C
9	= – A5	–	–
10	↓	–	–
11	↓	–	–

отримавши

	A	B	C
12	-1	-0,32051	0,251282
13	-0,21449	-1	0,243478
14	0,273109	-0,4958	-1

а потім додамо одиничну матрицю: фактично просто задамо 0 замість – 1 у її діагональних елементах:

	A	B	C
12	0	-0,32051	0,251282
13	-0,21449	0	0,243478
14	0,273109	-0,4958	0

Тепер застосуємо ітераційний процес $x_k = Ф(x_{k-1})$, k = 1, 2, … , де Ф(x) = Cx + b'. За початкове наближення візьмемо b', яке знаходиться в діапазоні D5:D7: x_0 = b'. Спочатку розташуємо вектор b' у горизонтальному діапазоні A16:C16, тобто транспонуємо його за допомогою відповідного вбудованого оператора Excel. Для цього виділимо цей діапазон і задамо там оператор ТРАНСП(D5:D7). У наступних рядках задамо формули ітераційного процесу $x_k = Cx_{k-1}$ + b':

A17 = $A$16 + СУММПРОИЗВ($A$12:$C$12;A16:C16);

B17 = $B$16 + СУММПРОИЗВ($A$13:$C$13;A16:C16);

C17 = $C$16 + СУММПРОИЗВ($A$14:$C$14;A16:C16).

У наступні рядки стовпців A, B, C ці формули треба копіювати (тобто протягувати). В результаті дістанемо:

	A	B	C
16	1,257692	1,748116	4,257983
17	1,767353	2,515076	3,734758
18	1,390056	2,278364	3,493693
19	1,40535	2,300597	3,508011
20	1,401822	2,300803	3,501165
21	1,400035	2,299893	3,500099
22	1,400059	2,300017	3,500063
23	1,40001	2,300003	3,500008
24	1,400001	2,3	3,500002
25	1,4	2,3	3,5
26	1,4	2,3	3,5

Перевірка

У правильності отриманого розв'язку переконаємось безпосередньо:

	D
16	= СУММПРОИЗВ($A$26:$C$26;A1:C1)
17	↓
18	↓

звідки

	D
15	Проверка
16	4,905002
17	6,031
18	10,134

Контрольні питання.

1. Чи для кожної СЛР можна застосувати метод простої ітерації?

2. Чи справді метод простої ітерації не буде збігатися, якщо не виконується умова $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ для матриці A = (a_{ij}) СЛР Ax = b?

3. Чи справді СЛР Ax = b завжди має єдиний розв'язок, якщо для матриці A = (a_{ij}) виконується умова $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$?

4. Чи є необхідним для збіжності методу простої ітерації за початкове наближення обрати b', як це зроблено в задачі?

5. Які вектори можна обирати за початкове наближення x_0 для збіжності методу простої ітерації?

6. Чи всі розв'язки даної СЛР отримані в задачі?

Завдання.

Задача. Розв'язати дану СЛР Ax = b методом простої ітерації. Переконатись у правильності отриманого розв'язку.

Варіант	Матриця А			b
1	3.90	1.25	-0.98	4.905
	0.74	3.45	-0.84	6.031
	-0.65	1.18	2.38	10.134
2	2.68	-0.68	0.48	3.868
	-0.73	2.92	-0.39	4.329
	-0.58	-1.12	3.12	7.532
3	2.50	-0.91	-0.32	0.287
	-0.91	3.64	-0.48	5.418
	0.48	-0.98	2.14	5.908
4	3.45	0.78	-0.97	3.229
	0.78	2.63	-0.89	4.026
	-0.97	-0.89	2.41	5.030
5	3.21	0.81	-0.93	3.102
	0.81	2.49	-0.94	3.571
	-0.93	-0.94	2.53	5.391
6	2.78	0.38	-0.43	3.261
	-0.78	3.14	-0.81	3.295
	-0.45	-0.86	2.48	6.072
7	3.96	-0.78	-0.35	2.525
	1.18	3.78	-0.87	7.301
	-0.96	-1.02	3.68	9.190
8	3.48	1.12	-0.94	4.158
	1.08	3.67	-0.87	6.908
	-1.21	-1.43	4.14	9.507
9	3.67	0.68	-1.21	2.467
	0.68	2.71	-0.96	3.825
	-1.21	-0.96	2.69	5.513
10	3.78	0.67	-0.83	3.928
	0.67	2.76	-0.69	4.871
	-0.83	-0.69	2.39	5.616

Лабораторна робота 9

Тема: інтерполяція функцій.

Мета: Отримати відомості про методи інтерполювання функцій та навчитися застосовувати ці методи до конкретних задач.

Теоретичні відомості.

Означення 1. Задачею інтерполяції (або інтерполювання) є побудова такої функції, яка для даних значень аргументу приймає задані значення. Нехай для значень аргументу x_1 , x_2 , … , x_n , які називають *вузлами інтерполяції*, відомі значення деякої функції $f(x)$: $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, … , $f(x_n) = y_n$. Треба знайти *інтерполюючу* функцію P(x), так, щоби у вузлах інтерполяції вона приймала ті ж самі значення, що й $f(x)$, тобто $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, … , $P(x_n) = y_n$.

Многочлен $P_n(x)$, який задовольняє умови $P_n(x_i) = y_i = f(x_i)$ (i = 0, 1, … , n) називають *інтерполяційним многочленом*.

Означення 2. Наближену рівність $f(x) \approx P_n(x)$ називають *інтерполяційною формулою*.

Означення 3. *Поділена різниця нульового порядку* $f(x_i)$ співпадає із значенням функції $f(x_i)$. *Поділені різниці першого порядку* визначаються рівністю $f(x_i\,;\,x_j) = \dfrac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$, *різниці другого порядку* – рівністю $f(x_i\,;\,x_j;\,x_k) = \dfrac{f(x_j;x_k) - f(x_i;x_j)}{x_k - x_i}$, … , *різниці k – го порядку* визначаються через різниці (k – 1) – го порядку за формулою:

$$f(x_0\,;\,x_1;\,\dots\,;\,x_k) = \frac{f(x_1;\dots;x_k) - f(x_0;\dots;x_{k-1})}{x_k - x_0}.$$

Означення 4. Інтерполяційний многочлен у формі

$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0;\,x_1)(x - x_0) + \dots + f(x_0;\,x_1;\dots\,;\,x_n)(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$ називають *інтерполяційним многочленом Ньютона з поділеними різницями*.

Наближену рівність виду:

$$f(x) \approx f(x_0) + f(x_0;\,x_1)(x - x_0) + \dots + f(x_0;\,x_1;\dots\,;\,x_n)(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

називають *інтерполяційною формулою Ньютона з поділеними різницями*.

Означення 5. Якщо функція $f(x)$ задана у точках $x_0, x_1, \dots, x_n$, то таблицю виду:

$f(x_0)$	$f(x_0; x_1)$	$f(x_0; x_1; x_2)$	$f(x_0; x_1; x_2; x_3)$	…	$f(x_0; x_1; \dots; x_n)$
$f(x_1)$	$f(x_1; x_2)$	$f(x_1; x_2; x_3)$	$f(x_1; x_2; x_3; x_4)$	…	
$f(x_2)$	$f(x_2; x_3)$	$f(x_2; x_3; x_4)$	$f(x_2; x_3; x_4; x_5)$		
…	…	…			
$f(x_{n-2})$	$f(x_{n-2}; x_{n-1})$	$f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n)$			
$f(x_{n-1})$	$f(x_{n-1}; x_n)$				
$f(x_n)$					

називають *таблицею її поділених різниць*.

<u>Хід роботи</u>.

Задача 1. Для функції f, заданої таблицею

i	0	1	2	3	4
x_i	0,45	0,32	0,79	0,51	0,64
y_i	0,434966	0,314567	0,710353	0,488177	0,597195

знайти її поділені різниці $f(x_2; x_3; x_4)$, $f(x_1; x_2; x_3; x_4)$, $f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$.

Розв'язання. Побудуємо таблицю поділених різниць, звідки й отримаємо шукані значення. Спочатку дістанемо таблицю різниць вузлів інтерполяції $x_j - x_i$, на які треба ділити поділені різниці за означенням 3. Надамо чарункам електронної таблиці таких значень:

	A	B	C	D	E	F
1		xi	1	2	3	4
2	x0	0,45	= B3 – B2	= B4 – B2	= B5 – B2	= B6 – B2
3	x1	0,32	↓	↓	↓	
4	x2	0,79	↓	↓		
5	x3	0,51	↓			
6	x4	0,64				

Як і раніше, символ ↓ означає копіювання попередніх чарунок. Тут у рядку вузла інтерполяції xi завжди віднімається саме x_i від x_j , а число у заголовку стовпця дорівнює j – i. В результаті отримаємо таку трикутну таблицю:

	A	B	C	D	E	F
1		xi	1	2	3	4
2	x0	0,45	-0,13	0,34	0,06	0,19
3	x1	0,32	0,47	0,19	0,32	
4	x2	0,79	-0,28	-0,15		
5	x3	0,51	0,13			
6	x4	0,64				

Використовуючи цю таблицю, побудуємо тепер трикутну електронну таблицю поділених різниць. Надамо чарункам таких значень:

	A	B	C	D	E	F
9		0	1	2	3	4
10	x0	0,434966	=(B11 - B10)/C2	→	→	→
11	x1	0,314567	↓	↓	↓	
12	x2	0,710353	↓	↓		
13	x3	0,488177	↓			
14	x4	0,597195				

У стовпці B тут значення функції *f*, задані умовою задачі. Правила копіювання Excel дозволяють отримати у відповідних чарунках саме ті формули, які повинні там бути згідно з означенням 5. В результаті отримаємо:

	A	B	C	D	E	F
9		0	1	2	3	4
10	x0	0,434966	0,926146	-0,2472	-0,14442	0,021447
11	x1	0,314567	0,842099	-0,25586	-0,14034	
12	x2	0,710353	0,793486	-0,30077		
13	x3	0,488177	0,838601			
14	x4	0,597195				

Тут число у заголовку стовпця дорівнює порядку поділеної різниці. У кожному рядку у формулах поділених різниць вузли інтерполяції починаються з того, що знаходиться у заголовку рядка. Так $f(x_2; x_3; x_4)$ є різницею порядку 2 і її формула починається з x_2; отже, ця різниця знаходиться у чарунці D12 і дорівнює – 0,30077. Аналогічно $f(x_1; x_2; x_3; x_4) = -0,14034$ і знаходиться у чарунці E11; $f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4) = 0,021447$ у чарунці F10.

Зазначимо, що скажімо поділеної різниці $f(x_0; x_1; x_3; x_4)$ нема у цій таблиці: у цій формулі вузли інтерполяції не ідуть підряд, пропущений вузол x_2. Щоби отримати таку різницю треба будувати іншу таблицю, у якій вузли x_0; x_1; x_3; x_4 розташовані підряд.

Задача 2. Додати до таблиці задачі 1 ще один вузол $x_5 = 0{,}49$ із значенням функції $y_5 = f(0, 49) = 0{,}470626$ і отримати інтерполяційну формулу Ньютона з поділеними різницями для функції f, заданої такою таблицею.

Розв'язання. Після додавання нового вузла маємо таку таблицю:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,45	0,32	0,79	0,51	0,64	0,49
y_i	0,434966	0,314567	0,710353	0,488177	0,597195	0,470626

Тут нема потреби будувати все спочатку, можна дописати відповідні рядки та стовпці до уже отриманих у задачі 1 таблиць. Отже, спочатку додамо останні рядок і стовпець до таблиці різниць вузлів інтерполяції $x_j - x_i$ попередньої задачі і продовжимо копіювання на нову діагональ отриманої там трикутної таблиці:

	A	B	C	D	E	F	G
1		xi	1	2	3	4	5
2	x0	0,45	=B3 – B2	=B4 – B2	=B5 – B2	=B6 – B2	=B7 – B2
3	x1	0,32	↓	↓	↓	↓	
4	x2	0,79	↓	↓	↓		
5	x3	0,51	↓	↓			
6	x4	0,64	↓				
7	x5	0,49					

В результаті дістанемо:

	A	B	C	D	E	F	G
1		xi	1	2	3	4	5
2	x0	0,45	-0,13	0,34	0,06	0,19	0,04
3	x1	0,32	0,47	0,19	0,32	0,17	
4	x2	0,79	-0,28	-0,15	-0,3		
5	x3	0,51	0,13	-0,02			
6	x4	0,64	-0,15				
7	x5	0,49					

Так само додамо рядок, стовпець і продовжимо копіювання на нову діагональ для електронної трикутної таблиці поділених різниць задачі 1. В результаті отримаємо:

	A	B	C	D	E	F	G
9		0	1	2	3	4	5
10	x0	0,434966	0,926146	-0,2472	-0,14442	0,021447	0,007165
11	x1	0,314567	0,842099	-0,25586	-0,14034	0,021734	
12	x2	0,710353	0,793486	-0,30077	-0,13665		
13	x3	0,488177	0,838601	-0,25978			
14	x4	0,597195	0,843797				
15	x5	0,470626					

У порівнянні з таблицею поділених різниць задачі 1 тут додатково підрахована поділена різниця порядку 5 $f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) = 0{,}007165$. Тепер треба виписати інтерполяційну формулу Ньютона:

$$f(x) \approx f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + \ldots + f(x_0; x_1; \ldots ; x_n)(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}).$$

Оскільки за таблицею $f(x_0) = 0{,}434966$, $f(x_0; x_1) = 0{,}926146$, $f(x_0; x_1; x_2) = -0{,}2472$, $f(x_0; x_1; x_2; x_3) = -0{,}14442$, $f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4) = 0{,}021447$, $f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) = 0{,}007165$, то інтерполяційна формула Ньютона набуває вигляду:

$f(x) \approx 0{,}434966 + 0{,}926146(x - 0{,}45) - 0{,}2472(x - 0{,}45)(x - 0{,}32) - 0{,}14442(x - 0{,}45)(x - 0{,}32)(x - 0{,}79) + 0{,}021447(x - 0{,}45)(x - 0{,}32)(x - 0{,}79)(x - 0{,}51) + 0{,}007165(x - 0{,}45)(x - 0{,}32)(x - 0{,}79)(x - 0{,}51)(x - 0{,}64)$. Задачу розв’язано.

Контрольні питання.

1. В чому полягає задача інтерполяції?
2. Визначить вузли інтерполяції, інтерполюючу функцію, інтерполяційний многочлен.
3. Що таке інтерполяційна формула?
4. Визначить поділені різниці нульового порядку, поділені різниці k – го порядку.
5. Запишіть інтерполяційну формулу Ньютона з поділеними різницями.
6. Чи є необхідним для обчислення таблиці поділених різниць, щоб всі вузли інтерполяції були попарно відмінними?
7. Чи можна отримати поділену різницю порядку 10, якщо дано 10 вузлів інтерполяції?

8. Чи можна отримати будь – яку поділену різницю порядку 10, якщо дано 11 попарно відмінних вузлів інтерполяції?

9. Чи всі поділені різниці порядку 10 знаходяться у таблиці поділених різниць, якщо дано 11 попарно відмінних вузлів інтерполяції?

10. Чи можна додати ще один вузол інтерполяції у таблицю поділених різниць у довільне місце, чи лише в кінці таблиці (як у задачі 2)?

11. Якщо треба виписати інтерполяційну формулу Ньютона, то чи потрібні інші елементи таблиці поділених різниць, окрім одного її рядка?

12. Чи можна, обчислюючи таблицю поділених різниць, обмежитись одним її рядком?

Завдання.

Задача. 1. Для функції *f*, заданої наступною таблицею, знайти такі її поділені різниці.

2. Записати інтерполяційну формулу Ньютона з поділеними різницями для функції *f*, заданої такою таблицею.

Варіант 1.

i	0	1	2	3	4
x_i	2,31	4,72	7,83	5,82	6,46
y_i	0,837248	1,551809	2,057963	1,7613	1,865629

поділені різниці: $f(x_2; x_3; x_4)$, $f(x_0; x_1; x_2; x_3)$, $f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$, $f(x_0; x_1; x_3; x_4)$

Варіант 2.

i	0	1	2	3	4
x_i	3,12	7,42	8,73	8,52	4,66
y_i	0,021591	0,907299	0,640215	0,786288	-0,99863

поділені різниці: $f(x_1; x_2; x_3)$, $f(x_1; x_2; x_3; x_4)$, $f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$, $f(x_1; x_2; x_4)$

Варіант 3.

i	0	1	2	3	4
x_i	3,12	7,42	8,73	8,52	4,66
y_i	0,021591	0,907299	0,640215	0,786288	-0,99863

поділені різниці: $f(x_1; x_2; x_3)$, $f(x_1; x_2; x_3; x_4)$, $f(x_1; x_2; x_3; x_4; x_0)$, $f(x_3; x_4; x_0)$

Варіант 4.

i	0	1	2	3	4
x_i	1,23	2,47	3,78	2,58	1,37
y_i	3,42123	11,82245	43,81604	13,19714	3,935351

поділені різниці: $f(x_3; x_2; x_1)$, $f(x_4; x_3; x_2; x_1)$, $f(x_4; x_3; x_2; x_1; x_0)$, $f(x_2; x_1; x_0)$

Варіант 5.

i	0	1	2	3	4
x_i	1,37	2,58	3,78	2,47	1,28
y_i	0,979908	0,532535	-0,59592	0,622234	0,958016

поділені різниці: $f(x_4; x_3; x_2)$, $f(x_3; x_2; x_1; x_0)$, $f(x_4; x_3; x_2; x_1; x_0)$, $f(x_3; x_1; x_0)$

Варіант 6.

i	0	1	2	3	4
x_i	2,31	4,72	7,83	5,82	6,46
y_i	0,837248	1,551809	2,057963	1,7613	1,865629

поділені різниці: $f(x_1; x_2; x_3)$, $f(x_1; x_2; x_3; x_4)$, $f(x_1; x_2; x_3; x_4; x_0)$, $f(x_3; x_4; x_0)$

Варіант 7.

i	0	1	2	3	4
x_i	3,12	7,42	8,73	8,52	4,66
y_i	0,021591	0,907299	0,640215	0,786288	-0,99863

поділені різниці: $f(x_3; x_2; x_1)$, $f(x_4; x_3; x_2; x_1)$, $f(x_4; x_3; x_2; x_1; x_0)$, $f(x_2; x_1; x_0)$

Варіант 8.

i	0	1	2	3	4
x_i	1,37	2,58	3,78	2,47	1,28
y_i	0,979908	0,532535	-0,59592	0,622234	0,958016

поділені різниці: $f(x_3; x_2; x_1)$, $f(x_4; x_3; x_2; x_1)$, $f(x_4; x_3; x_2; x_1; x_0)$, $f(x_2; x_1; x_0)$

Варіант 9.

i	0	1	2	3	4
x_i	1,23	2,47	3,78	2,58	1,37
y_i	3,42123	11,82245	43,81604	13,19714	3,935351

поділені різниці: $f(x_4; x_3; x_2)$, $f(x_3; x_2; x_1; x_0)$, $f(x_4; x_3; x_2; x_1; x_0)$, $f(x_3; x_1; x_0)$

Варіант 10.

i	0	1	2	3	4
x_i	2,31	4,72	7,83	5,82	6,46
y_i	0,837248	1,551809	2,057963	1,7613	1,865629

поділені різниці: $f(x_3; x_2; x_1)$, $f(x_4; x_3; x_2; x_1)$, $f(x_4; x_3; x_2; x_1; x_0)$, $f(x_2; x_1; x_0)$.

Лабораторна робота 10

Тема: **наближення інтерполяції та точні оцінки похибок інтерполювання.**

Мета: Отримати відомості про методи обчислення точних оцінок похибок інтерполювання та навчитися застосовувати ці методи до конкретних задач.

Теоретичні відомості.

Нехай $f(x)$ – задана функція, $L_n(x)$ – інтерполяційний многочлен степеня n скажімо у

формі *інтерполяційного многочлена Лагранжа*

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} f(x_i)$$

або у формі *інтерполяційного многочлена Ньютона з поділеними різницями*

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + \dots + f(x_0; x_1;\dots ; x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Нехай далі $f(x) \approx L_n(x)$ – відповідна інтерполяційна формула. Тоді

Означення. Різницю $R_n(f,x) = f(x) - L_n(x)$ називають *похибкою інтерполювання* або *залишковим членом інтерполяційної формули*.

Теорема. (Оцінка похибки інтерполювання). Якщо вузли інтерполювання x_i $(i = 0, 1, \dots, n)$ різні і належать відрізку [a; b], функція $f(x)$ n + 1 раз неперервно диференційовна на [a; b], то похибка інтерполювання

$$R_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x), \qquad (1)$$

де $\xi = \xi(x) \in [a; b]$, $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$.

Зауважимо, що обчислювальна похибка інтерполяційної формули у комп’ютері не буває такою великою, щоби суттєво вплинути на результат, тобто за величиною зрівнятись з похибкою метода, оцінюваною у (1). Тому на відміну від ітераційних методів похибкою обчислень при інтерполюванні звичайно нехтують.

<u>Хід роботи</u>.

Задача 1. Нехай функція sin x задана таблично

i	0	1	2	3	4
x_i	0,45	0,32	0,79	0,51	0,64
y_i	0,434966	0,314567	0,710353	0,488177	0,597195

1. Записати інтерполяційну формулу Ньютона з поділеними різницями по заданій таблиці. 2. По цій формулі обчислити наближене значення в точці x=0,58.

Розв'язання. Відповідна таблиця поділених різниць для заданої таблиці була отримана вже у задачі 1 лабораторної роботи 9:

	A	B	C	D	E	F
9		0	1	2	3	4
10	x0	0,434966	0,926146	-0,2472	-0,14442	0,021447
11	x1	0,314567	0,842099	-0,25586	-0,14034	
12	x2	0,710353	0,793486	-0,30077		
13	x3	0,488177	0,838601			
14	x4	0,597195				

Тут потрібно, по – перше, виписати інтерполяційну формулу Ньютона:

$f(x) \approx L_n(x) = f(x_0) + f(x_0;\, x_1)(x - x_0) + \ldots + f(x_0;\, x_1;\ldots;\, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$.

Оскільки за результатами розрахунків $f(x_0) = 0{,}434966$, $f(x_0;\, x_1) = 0{,}926146$, $f(x_0;\, x_1;\, x_2) = -\,0{,}2472$, $f(x_0;\, x_1;\, x_2;\, x_3) = -\,0{,}14442$, $f(x_0;\, x_1;\, x_2;\, x_3;\, x_4) = 0{,}021447$, то

$f(x) \approx 0{,}434966 + 0{,}926146(x - 0{,}45) - 0{,}2472(x - 0{,}45)(x - 0{,}32) - 0{,}14442(x - 0{,}45)(x - 0{,}32)(x - 0{,}79) + 0{,}021447(x - 0{,}45)(x - 0{,}32)(x - 0{,}79)(x - 0{,}51)$.

По – друге, треба знайти наближене значення функції sin x в точці x = 0,58. Нехай значення вузлів інтерполяції містяться додатково в діапазоні A16:E16,

	A	B	C	D	E
16	0,45	0,32	0,79	0,51	0,64

а задане значення x = 0,58 у чарунці A21. Тоді відповідні розрахунки можна виконати за допомогою наступної електронної таблиці:

	A	B	C	D	E
19	= \$A\$21 – A16	→	→	→	→
20	1	= A20*A19	→	→	→
21	0,58	= СУММПРОИЗВ(A20:E20; A10:E10)			

Тут у рядку 19 підраховуються значення у дужках $(x - x_i)$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$; у рядку 20 множники на відповідні поділені різниці в інтерполяційній формулі Ньютона; у чарунці B21 шукане наближене значення $f(0{,}58)$ по цій формулі. В результаті отримаємо:

	A	B	C	D	E
19	0,13	0,26	-0,21	0,07	-0,06
20	1	0,13	0,0338	-0,0071	-0,0005
21	0,58	0,548024			

Отже, $\sin 0{,}58 \approx 0{,}548024$.

Задача 2. За формулою (1) оцінити похибку, з якою значення sin 0,58 отримане у задачі 1. Скільки вузлів інтерполяції x_i треба застосувати, для того, щоби отримати це значення з точністю п’ятизначних математичних таблиць Брадіса.

Розв’язання. Тут $f(x) = \sin x$, $x = 0{,}58$, $n = 4$. Тому за формулою (1) тут

$R_4(f, x) = \dfrac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!}\,\omega_5(x)$, де $\xi = \xi(x) \in [0{,}32; 0{,}79]$. Значення $\omega_5(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_4)$ підрахуємо практично так само, як в задачі 1, у такій електронній таблиці:

	A	B	C	D	E
23	= \$A\$21 – A16	→	→	→	→
24	= A23	= A24*B23	→	→	→

Тут у рядку 23 підраховуються значення у дужках $(x - x_i)$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$, у рядку 24 їх добутки $\omega_n(x)$; зокрема $\omega_5(x)$ отримаємо у чарунці E24. Маємо:

	A	B	C	D	E
23	-0,13	-0,26	0,21	-0,07	0,06
24	-0,13	0,0338	0,007098	-0,0005	-3E-05

Отже, $\omega_5(x) \approx -3 \cdot 10^{-5}$. Таблиця для підрахунку 1/n! наступна

	A	B	C	D	E
26	1	2	3	4	5
27	1	= A7*B6	→	→	→
28	= 1/A7	→	→	→	→

В результаті дістанемо

	A	B	C	D	E
26	1	2	3	4	5
27	1	2	6	24	120
28	1	0,5	0,166667	0,041667	0,008333

Отже, $\frac{1}{5!} \approx 0{,}008333$. Далі $|\sin^{(5)}(x)| = |\cos x| \le 1$. Тож абсолютна похибка наближення для sin 0,58 $|R_4(f, x)| = \frac{|\cos(\xi)|}{5!} |\omega_5(x)| \le \frac{1}{5!} |\omega_5(x)| \approx 0{,}008333 \cdot 3 \cdot 10^{-5} \approx 2{,}4843 \cdot 10^{-7}$. Таким чином наближення задачі 1 sin 0,58 ≈ 0,548024 має всі 6 вірних значущих цифр, що навіть перевищує вимоги п’ятизначних математичних таблиць Брадіса.

Чи можна зменшити кількість вузлів, якщо нам потрібні лише 5 вірних значущих цифр? Підрахуємо абсолютну похибку наближення $|R_3(f, x)| \le \frac{1}{4!} |\omega_4(x)| \approx 0{,}041667 \cdot 0{,}0005 \approx 2{,}1 \cdot 10^{-5}$. При такій похибці відповідне наближення для sin 0,58 буде мати лише 4 значущі цифри.

Отже, для отримання необхідних 5 значущих цифр треба застосувати всі 5 вузлів інтерполяції з таблиці, заданої умовою задачі 1. Задачу розв’язано.

Контрольні питання.

1. Запишіть формулу для інтерполяційного многочлена Лагранжа Ln(x).

2. Якого степеня многочлен Ln(x) – інтерполяційний многочлен Лагранжа?

3. Запишіть формулу для інтерполяційного многочлена Ньютона з поділеними різницями Ln(x).

4. Чи дорівнює інтерполяційний многочлен Лагранжа Ln(x) інтерполяційному многочлену Ньютона з поділеними різницями Ln(x)?

5. Що таке Rn(f,x) – похибка інтерполювання? Що таке залишковий член інтерполяційної формули?

6. Чи залежить ξ у формулі (1) для похибки інтерполювання Rn(f, x) від x?

7. Чи треба враховувати обчислювальну похибку для точної оцінки похибки інтерполювання?

8. Чи годиться отримане в задачі 2 наближене значення sin 0,58 для шестизначних математичних таблиць?

Завдання.

Задача. Нехай у наступних вузлах інтерполювання x_i

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
– 0,25	– 0, 17	0,32	1,28	2,53

задані значення такої функції.

Варіант	Функція
1	$\cos x$
2	e^x
3	$\sin 2x$
4	$\cos \frac{1}{2} x$
5	$3\, e^{-2x}$
6	$\cos x + 3x^2$
7	$e^x - 5x^3$
8	$\sin 2x + 3x^2 - 2x^3$
9	$x \cdot \cos x$
10	$3x \cdot \sin 2x$

1. Записати інтерполяційну формулу Ньютона з поділеними різницями по заданій таблиці.

2. По цій формулі обчислити наближене значення в точці $x = 0,75$.

3. За формулою (1) оцінити похибку, з якою отримане значення в точці $x = 0,75$.

Лабораторна робота 11

Тема: інтерполювання за схемою Ейткіна.

Мета: Отримати відомості про метод інтерполювання за схемою Ейткіна та навчитися застосовувати цей метод до конкретних задач.

Теоретичні відомості.

Якщо значення інтерполяційного многочлена треба обчислити лише в одній заданій точці, то немає потреби будувати самий многочлен. Звичайно для розв'язання такої задачі застосовують наступну інтерполяційну схему Ейткіна.

Нехай функцію $f(x)$, яка в точках x_i набуває значень $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, \dots, n)$ задано таблично. Треба обчислити її значення в точці $x \in [x_0 ; x_n]$, яка не збігається з вузлами інтерполяції x_i. Нехай $L_{(k,k+1,\dots,i)}(x)$ – це інтерполяційний многочлен з вузлами інтерполяції $x_k, x_{k+1}, \dots, x_i$, зокрема $L_{(k)}(x) = f(x_k)$. Має місце рівність

$$L_{(k,k+1,\dots,i+1)}(x) = \frac{L_{(k+1,\dots,i+1)}(x)(x-x_k) - L_{(k,\dots,i)}(x)(x-x_{i+1})}{x_{i+1}-x_k} \qquad (1).$$

Схема Ейткіна обчислення значення $L_n(x) = L_{(0,1,\dots,n)}(x)$ полягає у послідовних підрахунках за допомогою попередньої формули елементів наступної таблиці значень інтерполяційного многочлена.

$L_{(0)}(x)$	$L_{(0,1)}(x)$	$L_{(0,1,2)}(x)$	…	$L_{(0,1,\dots,n)}(x)$
$L_{(1)}(x)$	$L_{(1,2)}(x)$	…	…	
$L_{(2)}(x)$	…	…	…	
…	…	…		
$L_{(n-1)}(x)$	$L_{(n-1,n)}(x)$			
$L_{(n)}(x)$				

Оцінка похибки значення $L_n(x)$ заснована на формулі

$R_n(f, x) = f(x) - L_n(x) \approx L_{n+1}(x) - L_n(x).$

Згідно цієї формули величину $\varepsilon_m = L_{m+1}(x) - L_m(x)$ можна розглядати, як наближену оцінку похибки $R_m(f, x)$ інтерполяційної формули $f(x) \approx L_m(x)$.

Алгоритм методу: занумеруємо вузли інтерполяції x_i в порядку зростання $|x_i - x|$. Послідовно підраховуємо $L_0(x)$, $L_1(x)$, ε_0, $L_2(x)$, ε_1, Якщо при деякому m $\varepsilon_m \le E$, де E – точність, яка нас задовольняє, то підрахунки закінчуються і вважають, що $f(x) \approx L_m(x)$. Якщо нерівність $\varepsilon_m \le E$ не виконується при жодному m, то знаходять $\varepsilon_{m_0} = \min\limits_{m} \varepsilon_m$ і вважають, що $f(x) \approx L_{m_0}(x)$ з оцінкою похибки ε_{m_0}. Оскільки значення $|x_i - x|$ послідовно зростають, то і ε_m, починаючи з деякого m можуть мати сталу тенденцію до зростання. Якщо так сталося, то з такого m підрахунки $L_m(x)$ і ε_m припиняють.

Хід роботи.

Задача 1. За схемою Ейткіна обчислити значення функції $e^{2,72}$ з табличною точністю (тобто 6 вірних значущих цифр), якщо функція задана наступною таблицею.

2. Обчислити це значення з точністю 10 вірних значущих цифр.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1,85	2,09	2,15	2,44	2,63	2,75	2,89	3,12
y_i	6,35982	8,08491	8,58486	11,4730	13,8738	15,6426	17,9933	22,6464

Розв'язання. Спочатку згідно з цією схемою перенумеруємо вузли інтерполяції x_i в порядку зростання $|x - x_i|$, де $x = 2,72$:

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	2,75	2,63	2,89	2,44	3,12	2,15	2,09	1,85
y_i	15,6426	13,8738	17,9933	11,4730	22,6464	8,58486	8,08491	6,35982
$x - x_i$	– 0,03	0,09	– 0,17	0,28	– 0,4	0,57	0,63	0,87

Побудуємо електронну таблицю для підрахунків за схемою Ейткіна (схожу на таблицю, яка була використана в лабораторній роботі 9). Надамо чарункам таких значень:

	A	B	C	D
1	x_0	– 0,03	15,6426	= (C2*B1 – C1*B2)/(B1 – B2)
2	x_1	0,09	13,8738	
3	x_2	– 0,17	17,99331	
…	…	…	…	
8	x_7	0,87	6,35982	
9			ε =	= D1 – C1

Тут у стовпці B значення $x - x_i$, у стовпці C відповідні значення $y_i = e^{x_i} = f(x_i) = L_{(i)}(x)$. У чарунці D1 формула визначає $L_1(x) = L_{(0,1)}(x)$ згідно з формулою (1). У чарунці D9 обчислюємо похибку $\varepsilon_0 = L_1(x) - L_0(x)$. В результаті дістанемо:

	A	B	C	D
1	x0	-0,03	15,6426	15,20041
2	x1	0,09	13,8738	
3	x2	-0,17	17,9933	
4	x3	0,28	11,4730	
5	x4	-0,4	22,6464	
6	x5	0,57	8,58486	
7	x6	0,63	8,08491	
8	x7	0,87	6,35982	
9			ε =	-0,44221

Оскільки $\varepsilon_0 = -0{,}4422155$, то отримане значення $L_1(2{,}72) = 15{,}20041$ має тільки 2 вірні значущі цифри замість 6 потрібних. Тому зробимо другий крок схеми Ейткіна, як указано у наступній таблиці:

	A	B	C	D	E
1	x_0	– 0,03	15,6426	= (C2*B1 – C1*B2)/(B1 – B2)	= (D2*B1 – D1*B3)/(B1 – B3)
2	x_1	0,09	13,8738	↓	
3	x_2	– 0,17	17,99331	↓	
…	…	…	…	↓	
8	x_7	0,87	6,35982		
9			ε =	= D1 – C1	→

А саме: 1) підрахуємо значення всіх многочленів другого степеня $L_{(k,k+1)}(x)$ при x = 2,72, просто скопіювавши формулу з D1 у діапазон D2:D7; 2) у чарунку E1 запишемо формулу для підрахунку $L_2(x) = L_{(0,1,2)}(x)$ згідно з формулою (1); 3) знайдемо у чарунці E9 похибку ε_1 , просто скопіювавши формулу з D9. В результаті дістанемо:

	A	B	C	D	E
1	x0	-0,03	15,64263	15,20042	15,17913
2	x1	0,09	13,87377	15,29976	
3	x2	-0,17	17,99331	15,5301	
4	x3	0,28	11,47304	16,07383	
5	x4	-0,4	22,64638	16,84781	
6	x5	0,57	8,584858	13,33432	
7	x6	0,63	8,084915	12,61329	
8	x7	0,87	6,35982		
9			ε =	-0,44222	-0,02128

Як бачимо, отримане значення $L_2(2{,}72) = 15{,}17913$ має лише 3 вірні значущі цифри. Отже, потрібним є третій крок схеми:

1) скопіюємо з E1 у діапазон E2:E6, підрахувавши тим самим значення

всіх многочленів третього степеня $L_{(k,k+1,k+2)}(x)$ при x = 2,72;

2) у чарунку F1 запишемо формулу для підрахунку $L_3(x) = L_{(0,1,2,3)}(x)$ згідно з (1);

3) скопіюємо формулу з E9 у F9, тим самим підрахувавши похибку ε_2 .

	A	B	C	D	E	F
1	x_0	– 0,03	15,6426	15,2004	15,17913	= (E2*$B1 – E1*$B4)/($B1 – $B4)
2	x_1	0,09	13,8738	15,2997	↓	
3	x_2	– 0,17	17,99331	15,5301	↓	
…	…	…	…	…		
8	x_7	0,87	6,35982			
9			ε =	-0,44222	→	→

В результаті дістанемо:

	A	B	C	D	E	F
1	x0	-0,03	15,64263	15,20042	15,17913	15,18024
2	x1	0,09	13,87377	15,29976	15,19066	
3	x2	-0,17	17,99331	15,5301	15,12821	
4	x3	0,28	11,47304	16,07383	15,32653	
5	x4	-0,4	22,64638	16,84781	15,48335	
6	x5	0,57	8,584858	13,33432	14,70427	
7	x6	0,63	8,084915	12,61329		
8	x7	0,87	6,35982			
9			ε =	-0,44222	-0,02128	0,001116

Тут $L_3(x)$ = 15,18024 уже має 4 вірні значущі цифри, потрібен ще крок.

Зазначимо, що формула у чарунку F1 була введена дещо по – іншому: адреса стовпця B тут є абсолютною. Якщо тепер скопіювати цю формулу у G1, то за правилами копіювання у Excel дістанемо G1 = (F2*$B4 – F1*$B2)/($B1 – $B4). Насправді ж згідно з (1) формула для підрахунку $L_4(x) = L_{(0,1,2,3,4)}(x)$ виглядає так: G1 = (F2*$B5 – F1*$B2)/($B1 – $B5). Отже, достатньо для отримання правильної формули після копіювання виділити чарунку G1, підвести курсор у рядок формул Excel і виправити у відповідній формулі 4 на 5. Решта дій на четвертому кроці та ж сама:

	A	B	C	D	E	F	G
1	x_0	– 0,03	15,6426	15,2004	15,17913	15,17913	→ і виправити 4 на 5
2	x_1	0,09	13,8738	15,2997	15,19066	↓	
3	x_2	– 0,17	17,9933	15,5301	15,12821	↓	
…	…	…	…	…	…		
8	x_7	0,87	6,35982				
9			ε =	– 0,44222	– 0,02128	0,001116	→

В результаті отримаємо:

	A	B	C	D	E	F	G
1	x0	-0,03	15,64263	15,20042	15,17913	15,18024	15,18033
2	x1	0,09	13,87377	15,29976	15,19066	15,17919	
3	x2	-0,17	17,99331	15,5301	15,12821	15,17377	
4	x3	0,28	11,47304	16,07383	15,32653	15,20107	
5	x4	-0,4	22,64638	16,84781	15,48335	15,23797	
6	x5	0,57	8,584858	13,33432	14,70427		
7	x6	0,63	8,084915	12,61329			
8	x7	0,87	6,35982				
9			ε =	-0,44222	-0,02128	0,001116	8,55E-05

Отримане значення $L_4(x) = 15,18033$ тепер має 6 вірних значущих цифр, що відповідає точності табличних даних. Отже, це відповідь на перше питання.

Для обчислення $f(2,72) = e^{2,72}$ з точністю 10^{-10} необхідні ще кроки, які ми проведемо так само, як і попередній:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x_0	– 0,03	15,6426	15,2004	15,17913	15,17913	15,2379	→
2	x_1	0,09	13,8738	15,2997	15,19066	15,17919	↓	
3	x_2	– 0,17	17,9933	15,5301	15,12821	15,17377	↓	
…	…	…	…	…	…			
8	x_7	0,87	6,35982					
9			ε =	– 0,44222	– 0,02128	0,001116	8,55E-05	→

У чарунці H1 треба після копіювання виправити у відповідній формулі 5 на 6. В результаті

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x0	-0,03	15,64263	15,20042	15,17913	15,18024	15,18033	15,18032
2	x1	0,09	13,87377	15,29976	15,19066	15,17919	15,18021	
3	x2	-0,17	17,99331	15,5301	15,12821	15,17377	15,17957	
4	x3	0,28	11,47304	16,07383	15,32653	15,20107	15,18356	
5	x4	-0,4	22,64638	16,84781	15,48335	15,23797		
6	x5	0,57	8,584858	13,33432	14,70427			
7	x6	0,63	8,084915	12,61329				
8	x7	0,87	6,35982					
9			ε =	-0,44222	-0,02128	0,001116	8,55E-05	-6,2E-06

Значення $L_5(x) = 15,18032$ уже має 7 вірних значущих цифр. Максимально можна ще зробити 2 кроки так само, як попередні, і отримати значення $L_7(x)$:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x0	-0,03	15,64263	15,20042	15,17913	15,18024	15,18033	15,18032	15,18032	15,18032
2	x1	0,09	13,87377	15,29976	15,19066	15,17919	15,18021	15,18031	15,18032	
3	x2	-0,17	17,99331	15,5301	15,12821	15,17377	15,17957	15,18022		
4	x3	0,28	11,47304	16,07383	15,32653	15,20107	15,18356			
5	x4	-0,4	22,64638	16,84781	15,48335	15,23797				
6	x5	0,57	8,584858	13,33432	14,70427					
7	x6	0,63	8,084915	12,61329						
8	x7	0,87	6,35982							
9			ε =	-0,44222	-0,02128	0,001116	8,55E-05	-6,2E-06	-5,4E-07	-4,5E-08

Отже, значення $L_7(x)$ має 9 вірних значущих цифр. Щоби їх побачити треба розсунути стовпець J , тоді маємо $L_7(x) \approx 15,1803222$. Досягти 10 вірних значущих цифр принципово не можливо при даних задачі. Тому за схемою Ейткіна вважаємо, що $e^{2,72} \approx 15,1803222$ з оцінкою похибки $\varepsilon_6 = 4,5E\text{-}08$. Задачу закінчено.

Контрольні питання.

1. У лабораторних роботах 9, 10 описані методи інтерполяції функцій та обчислення точних оцінок похибок інтерполювання. Навіщо потрібна схема Ейткіна?

2. Визначить інтерполяційний многочлен L(k,k+1,…,i)(x).

3. За яких умов L(k,k+1,…,n)(x) дорівнює інтерполяційному многочлену Ln(x)?

4. Як оцінюється похибка у схемі Ейткіна? Чи є вона точною?

5. В чому полягає алгоритм схеми Ейткіна?

6. Чи можна по даним задачі відразу знайти кількість вірних значущих цифр у результаті інтерполювання за схемою Ейткіна?

7. Що робити за схемою Ейткіна, якщо для заданої точності відповіді E і похибки на кроці εm нерівність $\varepsilon m \le E$ не виконується при жодному m?

8. Чи можливо за схемою Ейткіна, що похибка на кроці εm зростає із зростанням m?

Завдання.

Задача. Нехай у наступних вузлах інтерполювання x_i

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
– 0,25	– 0, 17	0,32	1,28	2,53	– 1,78	3,45

задані значення такої функції.

Варіант	Функція
1	$\cos x$
2	e^x
3	$\sin 2x$
4	$\cos \frac{1}{2} x$
5	$3 e^{-2x}$
6	$\cos x + 3x^2$
7	$e^x - 5x^3$
8	$\sin 2x + 3x^2 - 2x^3$
9	$x \cdot \cos x$
10	$3x \cdot \sin 2x$

1. За схемою Ейткіна обчислити значення даної функції у точці $x = 0,75$ з 6 вірними значущими цифрами.

2. За схемою Ейткіна обчислити значення даної функції у точці $x = 0,75$ з 10 вірними значущими цифрами.

Лабораторна робота 12

Тема: **скінчені різниці, інтерполяційні формули Ньютона для рівновіддалених вузлів.**

Мета: Отримати відомості про скінчені різниці, про методи інтерполювання функцій за інтерполяційними формулами Ньютона для рівновіддалених вузлів та навчитися застосовувати ці методи до конкретних задач.

Теоретичні відомості.

Якщо вузли інтерполяції рівновіддалені: x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, … , $x_n = x_0 + nh$, то інтерполяційна формула Ньютона спрощується, а алгоритми стають ефективнішими. Замість поділених різниць у таких випадках використовують *скінчені різниці.*

Означення 1. Нехай функція $y = f(x)$ задана в точках $x_k = x_0 + kh$, де h – дійсна стала, k = 0, 1,…, n, $y_k = f(x_k)$. Тоді величини $\Delta y_i = \Delta f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ називають *скінченими різницями першого порядку*. *Скінчені різниці другого порядку* $\Delta^2 y_i$ – це різниці перших різниць, тобто $\Delta^2 y_i = \Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)$. *Різниці* $\Delta^n y_i$ *порядку n* – це різниці різниць порядку n – 1: $\Delta^n y_i = \Delta^n f_i = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i$.

Зазначимо, що нижні індекси при $\Delta^n y_i$ завжди ті ж самі, що й у від’ємника $\Delta^{n-1} f_i$.

Означення 2. Якщо вузли інтерполяції $x_k = x_0 + kh$, де h – дійсна стала, k = 0,1,…,n, $y_k = f(x_k)$, то таблицю

x	0	1	2	3		n
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	…	$\Delta^n y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	…	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$		
	…	…	…			
x_{n-2}	y_{n-2}	Δy_{n-2}	$\Delta^2 y_{n-2}$			
x_{n-1}	y_{n-1}	Δy_{n-1}				
x_n	y_n					

називають горизонтальною таблицею її скінчених різниць.

Теорема. Нехай вузли інтерполяції $x_k = x_0 + kh$, де h – дійсна стала, k =

0,1,…,n , $y_k = f(x_k)$. Тоді інтерполяційна формула Ньютона з поділеними різницями набуває вигляду:

$$f(x) \approx L_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)...(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 , \qquad (1)$$

де $t = (x - x_0)/h$. Інтерполяційну формулу (1) називають *першою інтерполяційною формулою Ньютона.*

Насправді формулу (1) доцільно використовувати лише, якщо x міститься на початку таблиці, тобто $x \in [x_0 ; x_1]$. Тому першу інтерполяційну формулу Ньютона називають також *формулою Ньютона для інтерполювання вперед.* Якщо $x \in [x_1 ; x_2]$, то недоцільно користуватись формулою (3) безпосередньо. У цьому разі за перший вузол треба взяти x_1 і в інтерполяційному многочлені використовувати скінчені різниці Δy_1 , $\Delta^2 y_1$, … , $\Delta^n y_1$.

Якщо значення x лежить ближче до кінця відрізка інтерполювання, то занумерувати вузли треба у зворотному порядку: x_n , x_{n-1} , … , x_1 , x_0 . Тоді інтерполяційна формула Ньютона з поділеними різницями набуває вигляду:

$$f(x) \approx L_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1)...(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 , \qquad (2)$$

де $t = (x - x_n)/h$, її називають *другою інтерполяційною формулою Ньютона* або *формулою Ньютона для інтерполювання назад.*

<u>**Хід роботи**</u>.

Задача 1. Для функції f, заданої таблицею

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y_i	0	0,1974	0,3805	0,5404	0,6747	0,7854

знайти її скінчені різниці $\Delta^2 y_3$, $\Delta^4 y_3$, $\Delta^5 y_0$.

Розв'язання. Побудуємо таблицю скінчених різниць, звідки й отримаємо шукані значення. Надамо чарункам електронної таблиці таких значень:

	A	B	C	D	E	F	G
1		0	1	2	3	4	5
2	0	0	= B3 – B2	→	→	→	→
3	1	0,1974	↓	↓	↓	↓	
4	2	0,3805	↓	↓	↓		
5	3	0,5404	↓	↓			
6	4	0,6747	↓				
7	5	0,7854					

У рядку 1 указані порядки скінчених різниць у відповідному стовпці. У стовпці В тут різниці порядку 0, тобто значення функції f у вузлі інтерполяції, номер якого вказаний у стовпці А. Правила копіювання Excel дозволяють отримати у відповідних чарунках саме ті формули, які повинні там бути згідно з означенням 2: так у чарунці E4 міститься $\Delta^3 y_2$. В результаті отримаємо таку трикутну таблицю:

	A	B	C	D	E	F	G
1		0	1	2	3	4	5
2	0	0	0,1974	-0,01428	-0,00891	0,006519	-0,0022
3	1	0,1974	0,183111	-0,0232	-0,00239	0,004321	
4	2	0,3805	0,159913	-0,02559	0,001927		
5	3	0,5404	0,134321	-0,02366			
6	4	0,6747	0,110657				
7	5	0,7854					

Тут $\Delta^3 y_2 \approx 0{,}0019$, $\Delta^5 y_0 \approx -0{,}0022$, скінчена різниця $\Delta^4 y_3$ не визначена умовами задачі.

Задача 2. Для функції f, заданої таблицею

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
y_i	0	0,1974	0,3805	0,5404	0,6747	0,7854	0,8761

знайти наближені значення функції в точках $x_1^* = 0{,}1$ і $x_2^* = 1{,}1$.

Розв'язання. Побудуємо спочатку таблицю скінчених різниць, за якою знайдемо інтерполяційний многочлен Ньютона. Оскільки дана в умові таблиця відрізняється від таблиці в умові задачі 1 тільки доданим шостим вузлом інтерполяції, то і таблицю скінчених різниць цієї задачі можна отримати з такої таблиці попередньої задачі, просто продовживши її копіювання:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		0	1	2	3	4	5	6
2	0	0	= B3 – B2	→	→	→	→	→
3	1	0,1974	↓	↓	↓	↓	↓	
4	2	0,3805	↓	↓	↓	↓		
5	3	0,5404	↓	↓	↓			
6	4	0,6747	↓	↓				
7	5	0,7854	↓					
8	6	0,8761						

В результаті отримаємо таку трикутну таблицю:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		0	1	2	3	4	5	6
2	0	0	0,1974	-0,01428	-0,00891	0,006519	-0,0022	-0,00038
3	1	0,1974	0,183111	-0,0232	-0,00239	0,004321	-0,00258	
4	2	0,3805	0,159913	-0,02559	0,001927	0,001739		
5	3	0,5404	0,134321	-0,02366	0,003667			
6	4	0,6747	0,110657	-0,02				
7	5	0,7854	0,09066					
8	6	0,8761						

Оскільки в даному випадку $x_1^* = 0,1$ міститься на початку таблиці, тобто x_1^* є $[x_0 ; x_1]$, то тут доцільно буде скористатися формулою Ньютона для інтерполювання вперед, тобто першою інтерполяційною формулою Ньютона (1). У ній задіяні тільки скінчені різниці $\Delta^k y_0$, які всі містяться у рядку 2 останньої таблиці. За умовою $t = (x_1^* - x_0)/h = (0,1 - 0)/0,2 = 0,5$. Побудуємо таблицю для підрахунків $L_k(x_1^*)$ $(k = 1,\ldots,6)$. Надамо таких значень чарункам електронної таблиці:

	A	B	C	D	E	F	G	H
11	k	0	1	2	3	4	5	6
12	t – k	0,5	= 0,5 – C11	→	→	→	→	→
13	t*…*(t–k+1)	1	= B13*B12	→	→	→	→	→
14	k!	1	= B14*C11	→	→	→	→	→
15	$u_k(x_1^*)$	= B2*B13/B14	→	→	→	→	→	→
16	$L_k(x_1^*)$	= СУММ($B$15:B15)	→	→	→	→	→	→

Тут у рядку 11 позначений номер k одночлена $u_k(x) = \frac{t(t-1)...(t-k+1)}{k!}\Delta^k y_0$ першого інтерполяційного многочлена Ньютона $L_k(x)$. У чарунці B12 значення кроку $t = 0,5$ вузлів інтерполяції. У рядку 13 підраховуються множники $t(t-1)(t-2)\ldots(t-k+1)$ з номером k, позначеним у рядку 11. У рядку 14 підраховуються значення факторіалу k! з відповідним для цього стовпця номером k. У рядку 15 знаходимо значення одночлена $u_k(x)$ з відповідним стовпцю номером k у заданій точці x_1*. Нарешті у рядку 16 послідовно знаходимо суми одночленів $u_k(x_1*)$, шукане значення $L_6(x_1*)$ дістанемо у чарунці H16.

В результаті отримаємо таку таблицю:

	A	B	C	D	E	F	G	H
11	k	0	1	2	3	4	5	6
12	t-k	0,5	-0,5	-1,5	-2,5	-3,5	-4,5	-5,5
13	t*…*(t-k+1)	1	0,5	-0,25	0,375	-0,9375	3,28125	-14,7656
14	k!	1	1	2	6	24	120	720
15	uk(x1*)	0	0,098698	0,001786	-0,00056	-0,00025	-6E-05	7,89E-06
16	Lk(x1*)	0	0,098698	0,100483	0,099926	0,099672	0,099612	0,099619

Отже, відповідь $f(0,1) \approx L_6(0,1) \approx 0,099619$. Щодо $x_2* = 1,1$, то це значення міститься ближче до кінця відрізка інтерполювання, $x_2* \in [x_5 ; x_6]$. Тож тут доцільно скористатися формулою Ньютона для інтерполювання назад, тобто другою інтерполяційною формулою Ньютона (2). У ній задіяні тільки скінчені різниці $\Delta^k y_{n-k}$ $(k = 1,\ldots,n)$, які за означенням 2 всі містяться на діагоналі горизонтальної таблиці скінчених різниць. Оскільки зручніше для подальших підрахунків тримати всі ці значення на горизонталі, то таблицю скінчених різниць дещо переформуємо у порівнянні з означенням 2:

0	1	2	3		n – 1	n
y_0						
y_1	Δy_0					
y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$				
…	…	…	…			
y_{n-2}	Δy_{n-3}	$\Delta^2 y_{n-4}$	$\Delta^3 y_{n-5}$	…		
y_{n-1}	Δy_{n-2}	$\Delta^2 y_{n-3}$	$\Delta^3 y_{n-4}$	…	$\Delta^{n-1} y_0$	
y_n	Δy_{n-1}	$\Delta^2 y_{n-2}$	$\Delta^3 y_{n-3}$	…	$\Delta^{n-1} y_1$	$\Delta^n y_0$

Зауваження. Традиційно цю останню таблицю записують у такому форматі:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_3		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_4			
x_4	y_4				

Природно, що таку таблицю звичайно називають діагональною. Однак нам зручніше буде використовувати її для розрахунків у попередньому форматі.

Отже, надамо чарункам електронної таблиці таких значень:

	A	B	C	D	E	F	G	H
18		0	1	2	3	4	5	6
19	0	0						
20	1	0,1974	↑					
21	2	0,3805	↑	↑				
22	3	0,5404	↑	↑	↑			
23	4	0,6747	↑	↑	↑	↑		
24	5	0,7854	↑	↑	↑	↑	↑	
25	6	0,8761	= B25 – B24	→	→	→	→	→

В результаті отримаємо ту ж саму таблицю скінчених різниць у новому форматі:

	A	B	C	D	E	F	G	H
18		0	1	2	3	4	5	6
19	0	0						
20	0,2	0,1974	0,197396					
21	0,4	0,3805	0,183111	-0,01428				
22	0,6	0,5404	0,159913	-0,0232	-0,00891			
23	0,8	0,6747	0,134321	-0,02559	-0,00239	0,006519		
24	1	0,7854	0,110657	-0,02366	0,001927	0,004321	-0,0022	
25	1,2	0,8761	0,09066	-0,02	0,003667	0,001739	-0,00258	-0,00038

Побудуємо таблицю для підрахунку $L_k(x_2*)$. Тут за умовою $t = (x_2* - x_6)/h = (1,1 - 1,2)/0,2 = -0,5$. Надамо чарункам електронної таблиці таких значень:

	A	B	C	D	E	F	G	H
27	k	0	1	2	3	4	5	6
28	t + k	– 0,5	= – 0,5 + C27	→	→	→	→	→
29	t*…*(t + k–1)	1	= B29*B28	→	→	→	→	→
30	k!	1	= B30*C27	→	→	→	→	→
31	$u_k(x_2*)$	= B25*B29/B30	→	→	→	→	→	→
32	$L_k(x_2*)$	= СУММ($B$32:B32)	→	→	→	→	→	→

Вона майже не відрізняється від копії таблиці для підрахунку $L_k(x_1*)$ у нові чарунки: лише у чарунці B28 нове значення t = – 0,5 , у формулі чарунки C28 заміняємо – на + і у чарунці B31 посилаємось на таблицю скінчених різниць у новому форматі. В результаті отримаємо таку таблицю:

	A	B	C	D	E	F	G	H
27	k	0	1	2	3	4	5	6
28	t+k	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
29	t*…(t+k-1)	1	-0,5	-0,25	-0,375	-0,9375	-3,28125	-14,7656
30	k!	1	1	2	6	24	120	720
31	uk(x2*)	0,876058	-0,04533	0,0025	-0,00023	-6,8E-05	7,06E-05	7,89E-06
32	Lk(x2*)	0,876058	0,830728	0,833228	0,832999	0,832931	0,833001	0,833009

Шукане значення $L_6(x_2^*)$ у чарунці H32. Отже, відповідь $f(1,1) \approx L_6(1,1) \approx 0,833$.

Контрольні питання.

9. Інтерполяція за допомогою поділених різниць є досить ефективною. Навіщо виникли скінчені різниці?

10. Визначте скінчені різниці порядку n.

11. Який нижній індекс у скінченої різниці порядку n, що дорівнює Δn-1f i +1 – Δn-1f i ?

12. Яку таблицю називають горизонтальною таблицею скінчених різниць?

13. Яку інтерполяційну формулу називають першою інтерполяційною формулою Ньютона?

14. За якої умови доцільно використовувати першу інтерполяційну формулу Ньютона?

15. Яку інтерполяційну формулу із скінченими різницями доцільно використовувати, якщо значення x лежить ближче до кінця відрізка інтерполювання?

16. Яку таблицю називають діагональною таблицею скінчених різниць?

Завдання.

Задача. Для функції *f*, заданої таблицею

Варіант 1.

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8
y_i	0,837248	1,551809	2,057963	1,7613	1,865629

Варіант 2.

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8
y_i	0,021591	0,907299	0,640215	0,786288	0,99863

Варіант 3.

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8

y_i	0,021591	0,907299	0,640215	0,786288	0,99863

Варіант 4.

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8
y_i	3,42123	11,82245	43,81604	13,19714	3,935351

Варіант 5.

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8
y_i	0,979908	0,532535	0,59592	0,622234	0,958016

Варіант 6.

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8
y_i	0,837248	1,551809	2,057963	1,7613	1,865629

Варіант 7.

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8
y_i	0,021591	0,907299	0,640215	0,786288	0,99863

Варіант 8.

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8
y_i	0,979908	0,532535	-0,59592	0,622234	0,958016

Варіант 9.

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8
y_i	3,42123	11,82245	43,81604	13,19714	3,935351

Варіант 10.

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8
y_i	0,837248	1,551809	2,057963	1,7613	1,865629

1. Знайти її скінчені різниці

Варіант	скінчені різниці		
1	$\Delta^2 y_2$, $\Delta^3 y_1$, $\Delta^5 y_1$	6	$\Delta^1 y_1$, $\Delta^2 y_2$, $\Delta^3 y_3$
2	$\Delta^1 y_3$, $\Delta^4 y_3$, $\Delta^3 y_1$	7	$\Delta^0 y_2$, $\Delta^1 y_3$, $\Delta^2 y_4$
3	$\Delta^2 y_3$, $\Delta^0 y_3$, $\Delta^3 y_3$	8	$\Delta^1 y_3$, $\Delta^3 y_1$, $\Delta^2 y_2$
4	$\Delta^4 y_2$, $\Delta^5 y_1$, $\Delta^3 y_2$	9	$\Delta^2 y_3$, $\Delta^4 y_3$, $\Delta^5 y_0$
5	$\Delta^2 y_3$, $\Delta^4 y_3$, $\Delta^4 y_0$	10	$\Delta^2 y_3$, $\Delta^1 y_2$, $\Delta^0 y_1$

2. Знайти наближені значення функції в точках $x_1^* = 0,1$ і $x_2^* = 0,7$.

Лабораторна робота 13

Тема: **оцінки похибок інтерполювання за формулами Ньютона для рівновіддалених вузлів.**

Мета: Отримати відомості про методи обчислення похибок інтерполювання за формулами Ньютона та навчитися застосовувати ці методи до конкретних задач.

Теоретичні відомості.

Нехай вузли інтерполяції $x_k = x_0 + kh$, де h – дійсна стала, $k = 0, 1, \ldots, n$, $y_k = f(x_k)$, відповідна перша інтерполяційна формула Ньютона

$$f(x) \approx L_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \qquad (1)$$

друга інтерполяційна формула Ньютона

$$f(x) \approx L_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0, \qquad (2)$$

де $t = (x - x_n)/h$. Тоді виконується така

Теорема. Якщо функція $f(x)$ $n + 1$ раз неперервно диференційовна, то залишковий член (похибка інтерполяції) $R_n(f, x) = f(x) - L_n(x)$ першої інтерполяційної формули Ньютона дорівнює

$$R_n(f,x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}t(t-1)(t-2)\ldots(t-n) \approx \frac{\Delta^{n+1}y_0}{(n+1)!}t(t-1)(t-2)\ldots(t-n) \quad (x_0 \le \xi \le x_n). \quad (3)$$

Для другої інтерполяційної формули Ньютона залишковий член $R_n(f, x)$ дорівнює

$$R_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}t(t+1)(t+2)\ldots(t+n) \approx \frac{\Delta^{n+1}y_0}{(n+1)!}t(t+1)(t+2)\ldots(t+n) \quad (x_0 \le \xi \le x_n). \quad (4)$$

Хід роботи.

Задача 1. Для функції f, заданої таблицею

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
y_i	0	0,1974	0,3805	0,5404	0,6747	0,7854	0,8761

знайти наближені значення функції в точках $x_1^* = 0,1$ і $x_2^* = 1,1$.

2. Оцінити похибку інтерполяції, якщо вважати, що функція $f(x)$ 9 разів неперервно диференційовна і до заданої таблиці ще додано значення функції $f(1,4) = 0,9505$.

Розв'язання. Перша частина задачі вже була розв'язана у задачі 2 лабораторної роботи 12. Тут залишилося оцінити похибки інтерполяції отриманих там наближень $f(0,1) \approx L_6(0,1) \approx 0,099619$ і $f(1,1) \approx L_6(1,1) \approx 0,8330$.

Згідно з (3) похибка інтерполяції $R_6(f,x)$ за першою інтерполяційною формулою Ньютона це $R_6(f,x) = f(x) - L_6(x) \approx \frac{\Delta^7 y_0}{7!} t(t-1)(t-2)\ldots(t-7)$. Це останній одночлен $u_7(x)$ першого інтерполяційного многочлена Ньютона $L_7(x)$. Отже, для отримання похибки інтерполяції необхідно просто продовжити таблиці задачі 2 лабораторної роботи 12 ще на один вузол:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	0	= B3 – B2	→	→	→	→	→	→
3	1	0,1974	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
4	2	0,3805	↓	↓	↓	↓	↓		
5	3	0,5404	↓	↓	↓	↓			
6	4	0,6747	↓	↓	↓				
7	5	0,7854	↓	↓					
8	6	0,8761	↓						
9	7	0,9595							

В результаті отримаємо таку трикутну таблицю:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	0	0,1974	-0,01428	-0,00891	0,006519	-0,0022	-0,00038	0,001386
3	1	0,1974	0,183111	-0,0232	-0,00239	0,004321	-0,00258	0,001001	
4	2	0,3805	0,159913	-0,02559	0,001927	0,001739	0,00158		
5	3	0,5404	0,134321	-0,02366	0,003667	0,000159			
6	4	0,6747	0,110657	-0,02	0,003826				
7	5	0,7854	0,09066	-0,01617					
8	6	0,8761	0,074489						
9	7	0,9505							

Побудуємо таблицю для підрахунку $L_7(x_1^*)$ таку ж, як у лабораторній роботі 12:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
11	k	0	1	2	3	4	5	6	7
12	t-k	0,5	= 0,5 – C11	→	→	→	→	→	→
13	t*…*(t-k+1)	1	= B13*B12	→	→	→	→	→	→
14	k!	1	= B14*C11	→	→	→	→	→	→
15	$u_k(x_1*)$	= B2*B13/B14	→	→	→	→	→	→	→
16	$L_k(x_1*)$	= СУММ($B$15:B15)	→	→	→	→	→	→	→

В результаті отримаємо таку таблицю:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
11	k	0	1	2	3	4	5	6	7
12	t-k	0,5	-0,5	-1,5	-2,5	-3,5	-4,5	-5,5	-6,5
13	t*…(t-k+1)	1	0,5	-0,25	0,375	-0,9375	3,28125	-14,7656	81,21094
14	k!	1	1	2	6	24	120	720	5040
15	uk(x1*)	0	0,098698	0,001786	-0,00056	-0,00025	-6E-05	7,89E-06	2,23E-05
16	Lk(x1*)	0	0,098698	0,100483	0,099926	0,099672	0,099612	0,099619	0,099642

Похибка інтерполяції $R_6(f,x) \approx u_7(x)$ міститься у чарунці I15: $R_6(f,x) \approx 2{,}23\cdot10^{-5}$. Отже, наближення $f(0{,}1) \approx L_6(0{,}1) \approx 0{,}099619$ отримане тут з табличною точністю п'яти вірних значущих цифр.

Аналогічно похибка інтерполяції $R_6(f,x)$ за другою інтерполяційною формулою Ньютона це $R_6(f,x) = f(x) - L_6(x) \approx \frac{\Delta^7 y_0}{7!} t(t+1)(t+2)\ldots(t+n) = u_7(x)$ згідно з (3). Отже, і тут треба продовжити відповідні таблиці задачі 2 лабораторної роботи 12 ще на один вузол:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
18		0	1	2	3	4	5	6	7
19	0	0							
20	1	0,1974	↑						
21	2	0,3805	↑	↑					
22	3	0,5404	↑	↑	↑				
23	4	0,6747	↑	↑	↑	↑			
24	5	0,7854	↑	↑	↑	↑	↑		
25	6	0,8761	↑	↑	↑	↑	↑	↑	
26	7	0,9595	= B26 – B25	→	→	→	→	→	→

В результаті отримаємо таку трикутну таблицю:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
18		0	1	2	3	4	5	6	7
19	0	0							
20	0,2	0,197396	0,197396						
21	0,4	0,380506	0,183111	-0,01428					
22	0,6	0,54042	0,159913	-0,0232	-0,00891				
23	0,8	0,674741	0,134321	-0,02559	-0,00239	0,006519			
24	1	0,785398	0,110657	-0,02366	0,001927	0,004321	-0,0022		
25	1,2	0,876058	0,09066	-0,02	0,003667	0,001739	-0,00258	-0,00038	
26	1,4	0,950547	0,074489	-0,01617	0,003826	0,000159	-0,00158	0,001002	0,001386

Побудуємо таблицю для підрахунку $L_7(x_2*)$:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
27	k	0	1	2	3	4	5	6	7
28	t + k	– 0,5	= – 0,5 + C27	→	→	→	→	→	→
29	t*…*(t + k–1)	1	= B29*B28	→	→	→	→	→	→
30	k!	1	= B30*C27	→	→	→	→	→	→
31	$u_k(x_2*)$	= B25*B29/B30	→	→	→	→	→	→	→
32	$L_k(x_2*)$	= СУММ($B$32:B32)	→	→	→	→	→	→	→

В результаті отримаємо:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
27	k	0	1	2	3	4	5	6	7
28	t+k	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
29	t*…(t+k-1)	1	-0,5	-0,25	-0,375	-0,9375	-3,28125	-14,7656	-81,2109
30	k!	1	1	2	6	24	120	720	5040
31	uk(x2*)	0,950547	-0,03724	0,002021	-0,00024	-6,2E-06	4,32E-05	-2,1E-05	-2,2E-05
32	Lk(x2*)	0,950547	0,913302	0,915324	0,915085	0,915078	0,915122	0,915101	0,915079

Похибка інтерполяції $R_6(f, x) \approx u_7(x)$ міститься у чарунці I31: $R_6(f,x) \approx 2{,}2\cdot10^{-5}$. Отже, наближення лабораторної роботи 12 отримане тут також з табличною точністю п’яти вірних значущих цифр.

Контрольні питання.

1. Продовжить першу інтерполяційну формулу Ньютона $f(x) \approx L3(x) =$.

2. Продовжить другу інтерполяційну формулу Ньютона $f(x) \approx L4(x) =$.

3. Чи повинні зростати вузли в інтерполяційних формулах Ньютона для рівновіддалених вузлів?

4. Чому дорівнює похибка інтерполяції $R5(f, x)$ першої інтерполяційної формули Ньютона?

5. Чому дорівнює залишковий член $R6(f, x)$ другої інтерполяційної формули Ньютона?

6. У розрахунках лабораторної роботи ніде не використане, що функція $f(x)$ 9 разів неперервно диференційовна. Навіщо ця умова наведена в умові задачі?

7. Чи можна отримати наближення для $f(1,1)$ і $f(0,1)$ з більшою кількістю вірних значущих цифр лише на основі розрахунків цієї лабораторної роботи?

Завдання.

Задача. Оцінити похибку інтерполяції отриманої в лабораторній роботі 12, якщо вважати, що функція $f(x)$ 8 разів неперервно диференційовна і до заданої там таблиці ще додано значення функції при $x = 1$

Варіант	значення функції
1	$f(1) = 1,99863$
2	$f(1) = 1,165629$
3	$f(1) = 1,235351$
4	$f(1) = 4,09863$
5	$f(1) = 1,065629$
6	$f(1) = 1,165629$
7	$f(1) = 1,258016$
8	$f(1) = 1,09863$
9	$f(1) = 4,165629$
10	$f(1) = 1,835351$

Лабораторна робота 14

Тема: **однобічні формули чисельного диференціювання**

Мета: Отримати відомості про методи чисельного диференціювання та навчитися їх застосовуванню на конкретних прикладах.

Теоретичні відомості.

Нехай функцію f задано таблично в рівновіддалених точках x_i відрізка $[a; b]$: $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Щоб знайти наближення похідної $f'(x_0)$, скористаємося горизонтальною таблицею скінчених різниць $\Delta^n y_i$, побудованою за вузлами x_i. Тоді

$$f'(x_0) \approx L'_n(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^n y_0\right), \qquad (1)$$

де $h = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Найпростіші формули ($n = 1$ та $n = 2$ у (1) відповідно)

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\Delta y_0 = \frac{1}{h}(f(x_1) - f(x_0)); \qquad f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0\right). \quad (2)$$

Саме ці формули (1), (2) звичайно і називають *однобічними формулами чисельного диференціювання.*

Оцінимо похибки формул (1), (2). Абсолютна похибка чисельного диференціювання (залишковий член чисельного диференціювання)

$$|R'_n(x, f)| \le \frac{h^n}{n+1}\left(\max_{[y_1, y_2]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|\right) \approx \left|\frac{\Delta^{n+1} y_0}{h(n+1)}\right|. \qquad (3)$$

Слід зазначити, що зменшення похибки (3) шляхом зменшення h з огляду на нестійкість чисельного диференціювання призводить до збільшення обчислювальної похибки [2].

Хід роботи.

Задача 1. У точках 1) $x = 1$ та 2) $x = 1{,}1$ знайти похідну від функції $\frac{1}{x}$, заданої таблицею на відрізку $[1; 1{,}7]$ з кроком $h = 0{,}1$, скориставшись однобічними формулами чисельного диференціювання з $n \le 5$.

Розв'язання. Побудуємо спочатку горизонтальну таблицю скінчених різниць так само, як у задачі 1 лабораторної роботи 12:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		0	1	2	3	4	5	6
2	0	1	-0,090909	0,0151515	-0,003497	0,000999	-0,000333	0,000125
3	1	0,909091	-0,075758	0,011655	-0,002498	0,000666	-0,000208	
4	2	0,833333	-0,064103	0,0091575	-0,001832	0,000458		
5	3	0,769231	-0,054945	0,007326	-0,001374			
6	4	0,714286	-0,047619	0,0059524				
7	5	0,666667	-0,041667					
8	6	0,625						

Тут у стовпці A номери i вузлів інтерполяції $x_i = x_0 + h \cdot i$, де $x_0 = 1$, h = 0,1 , у стовпці B відповідні значення функції $y_i = 1/x_i$, які за означенням є скінченими різницями порядку 0. У чарунку C2 введена формула = B3 – B2, що обраховує значення скінченої різниці Δy_0, а потім ця формула копіюється на всю трикутну таблицю. В результаті скінчена різниця $\Delta^j y_i$ знаходиться у чарунці, що відповідає номеру i у стовпці A і номеру j у рядку 1.

1) Точка 1 розміщена на початку таблиці, тому похідну обчислюватимемо за формулою (1): у цьому разі $x_0 = 1$, h = 0,1 , скінчені різниці $\Delta^j y_0$ знаходяться у відповідних чарунках рядка 2. (Зауважимо, що зважаючи на (1), використання ще і шостого доданку $-1/6 \cdot \Delta^6 y_0 = -1/6 \cdot 0{,}000125$ вплинуло би хіба що на п'яту значущу цифру).

Побудуємо таблицю для підрахунку $f'(x_0)$ згідно з (1). Надамо чарункам електронної таблиці таких значень:

	A	B	C	D	E	F
11	n	1	2	3	4	5
12	(–1)^(n+1)/n	= (–1)^C11/B11	→	→	→	→
13	$u_n(x)$	= C2*B12	→	→	→	→
14	$f'(x_0)$	= 10*B13	= B14 + 10*C13	→	→	→

Тут у рядку 12 знаходимо $(-1)^{n+1}/n$ замість $(-1)^{n-1}/n$ у формулі (2). Це не впливає на результат, проте зручніше для підрахунків у цій таблиці. У рядку 13 дістаємо значення доданків з формули (1). У рядку 14 отримуються наближені значення $f'(x_0)$, причому кількість використаних доданків дорівнює числу у рядку 11 того ж стовпця. В результаті отримаємо таку таблицю:

	A	B	C	D	E	F
11	n	1	2	3	4	5
12	(-1)^(n+1)/n	1	-0,5	0,333333	-0,25	0,2
13	un(x0)	-0,090909	-0,00758	-0,00117	-0,00025	-6,7E-05
14	f ' (x0)	-0,909091	-0,98485	-0,9965	-0,999001	-0,99967

Отже, при використанні п'яти доданків у (1) $f'(1) \approx -0{,}99967$.

Зауважимо, що не важко підрахувати точне значення похідної $f'(1) = -1$. По останньому рядку можна простежити, як значення, отримане за формулою (1), наближається до точного із зростанням числа доданків.

2) Оскільки $x = 1{,}1$ – вузол інтерполяції, $x = x_1$, то відповідні скінчені різниці $\Delta^j y_1$ знаходяться у відповідних чарунках рядка 3; як і раніше, $h = 0{,}1$. Таблиця для підрахунків майже ідентична:

	A	B	C	D	E	F
16	n	1	2	3	4	5
17	(–1)^(n+1)/n	= (–1)^C16/B16	→	→	→	→
18	$u_n(x)$	= C3*B17	→	→	→	→
19	$f'(x_0)$	= 10*B18	= B19 + 10*C18	→	→	→

В результаті отримаємо таку таблицю:

	A	B	C	D	E	F
16	n	1	2	3	4	5
17	(-1)^n/n	1	-0,5	0,333333	-0,25	0,2
18	un(x)	-0,07576	-0,005828	-0,00083	-0,00017	-4,2E-05
19	f ' (x)	-0,75758	-0,815851	-0,82418	-0,82584	-0,82626

Отже, при використанні п'яти доданків у (1) $f'(1{,}1) \approx -0{,}82646$.

Задача 2. У точках 1) $x = 1$ та 2) $x = 1{,}1$ оцінити отримані в задачі 1 значення похідної від функції $\frac{1}{x}$, скориставшись формулою (3).

Розв'язання. Оскільки в задачі 1 $n = 5$, то згідно з (3) $|R'_5(x_0, f)| \le \left|\frac{\Delta^6 y_0}{6h}\right|$ та $|R'_5(x_1, f)| \le \left|\frac{\Delta^6 y_1}{6h}\right| \approx \left|\frac{\Delta^6 y_0}{6h}\right|$. Значення $\Delta^6 y_0$ дістаємо з таблиці скінчених різниць задачі 1: $\Delta^6 y_0 = 0{,}000125$, звідки $\left|\frac{\Delta^6 y_0}{6h}\right| \approx 0{,}000208$. Отже, похибка чисельного диференціювання $|R'_5(x_1, f)| \le 0{,}000208$.

Контрольні питання.

1. Які формули називають однобічними формулами чисельного

диференціювання?

2. Запишіть однобічну формулу чисельного диференціювання з трьома доданками.

3. Як називають похибку однобічної формули чисельного диференціювання?

4. Випишіть звичайне позначення абсолютної похибки чисельного диференціювання.

5. Якого порядку скінчену різницю треба застосувати для оцінки похибок формул (2)?

6. Чи можна стверджувати, що абсолютна похибка чисельного диференціювання $|R'n(x, f)|$ завжди не перевищує значення $\left|\frac{\Delta^{n+1} y_0}{h(n+1)}\right|$?

7. Чи можна отримати наближення похідної з довільною заданою точністю, відповідно зменшуючи відстань h між вузлами інтерполяції?

8. Якщо обчислювати похідну $f'(1,2)$ за заданою таблицею задачі 1 по однобічній формулі чисельного диференціювання, то скільки доданків цієї формули можна використати, як максимум?

Завдання.

Задача 1. У точках 1) x = 2 та 2) x = 2,2 знайти похідну від функції, заданої на відрізку [2; 3,2] таблицею з кроком h = 0,2 , скориставшись однобічними формулами чисельного диференціювання.

Варіант	Функція	Варіант	Функція
1	cos x		$\cos x + 3x^2$
2	e^x		$e^x - 5x^3$
3	sin 2x		$\sin 2x + 3x^2 - 2x^3$
4	$\cos\frac{1}{2}x$		$x \cdot \cos x$
5	$3e^{-2x}$		$3x \cdot \sin 2x$

2. Оцінити отримані в 1. значення похідної, скориставшись формулою (3).

3. Знайти безпосередньо значення похідної з **1.**, за допомогою Excel. Порівняти різниці між цими значеннями та значеннями, отриманими в **1.**, з похибками, отриманими в **2.**

Лабораторна робота 15

Тема: **чисельне інтегрування, квадратурні формули.**

Мета: Отримати відомості про квадратурні формули, чисельні методи інтегрування та навчитися застосовувати ці методи до конкретних задач.

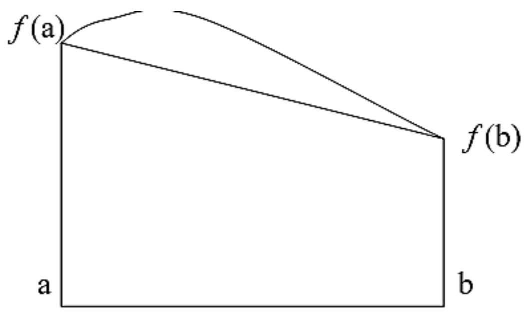
Теоретичні відомості.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку [a; b] і відома її первісна F, то справедлива формула Ньютона – Лейбниця $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Проте цією формулою неможливо скористатися, якщо первісну F не можна виразити у відомих (традиційно в елементарних) функціях, або якщо функцію f задано таблично або графічно. У цих випадках необхідно будувати методи для наближеного обчислення визначених інтегралів. Найчастіше застосовують *квадратурні формули.*

Означення. *Квадратурні формули* – це формули вигляду $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$. Суму в правій частині формули $\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ називають *квадратурною сумою*, числа x_k і A_k називають відповідно *вузлами* і *коефіцієнтами квадратурної формули*.

Найпростіші квадратурні формули можна отримати з наочних міркувань. Наприклад,

нехай функція $f(x)$ близька до лінійної. Тоді природно замінити інтеграл площею трапеції з висотою b – a та основами $f(a)$ і $f(b)$.



В результаті отримаємо *формулу трапецій:*

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Більш складні квадратурні формули отримують за допомогою апарату інтерполювання. Наприклад, саме так отримана квадратурна формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right),$$

яку називають *квадратурною формулою Сімпсона*.

Якщо функцію $f(x)$ задано на великому проміжку [a; b], то точність розглянутих квадратурних формул стає неприйнятною. Тому для обчислення $\int_a^b f(x)dx$ застосовують відповідну *узагальнену квадратурну формулу*. Це означає, що відрізок [a; b] ділять на рівні відрізки і на кожному з них застосовують дану квадратурну формулу.

Наприклад, *узагальнена формула трапецій* виглядає так:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b)\right). \qquad (1)$$

А *узагальнена формула Сімпсона* має вигляд

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(b)\right). \qquad (2)$$

Хід роботи.

Задача 1. Обчислити наближені значення інтегралу функції $f(x) = e^{\sin x}\cos 2x$ на відрізку [0;1] за узагальненою формулою трапецій з кроками інтегрування h = 0,2 0,1 0,05.

Розв'язання. Спочатку побудуємо електронну таблицю значень функції $f(x)$ у вузлах інтегрування. Надамо чарункам електронної таблиці таких значень:

	A	B
1	x	f(x)
2	0	= EXP(SIN(A2))*COS(2*A2)
3	= A2 + h	↓
4	↓	↓

Символ ↓ означає копіювання попередніх чарунок. Спочатку h = 0,2 і треба копіювати у стовпці A до значення 1, тобто до чарунки A7. В результаті отримаємо таку таблицю:

	A	B
1	x	*f*(x)
2	0	1
3	0,2	1,12349
4	0,4	1,028424
5	0,6	0,637322
6	0,8	-0,05983
7	1	-0,96537

У стовпці C до отриманої таблиці додамо відповідні коефіцієнти узагальненої формули трапецій:

	A	B	C
1	x	*f*(x)	к
2	0	1	1
3	0,2	1,12349	2
4	0,4	1,028424	2
5	0,6	0,637322	2
6	0,8	-0,05983	2
7	1	-0,96537	1

Аналогічно дістанемо такі таблиці для h = 0,1 і h = 0,05:

	E	F	G
1	x	*f*(x)	к
2	0	1	1
3	0,1	1,082961	2
4	0,2	1,12349	2
5	0,3	1,109107	2
6	0,4	1,028424	2
7	0,5	0,872667	2
8	0,6	0,637322	2
9	0,7	0,323702	2
10	0,8	-0,05983	2
11	0,9	-0,49729	2
12	1	-0,96537	1

	J	K	L
1	x	f(x)	к
2	0	1	1
3	0,05	1,045997	2
4	0,1	1,082961	2
5	0,15	1,109319	2
6	0,2	1,12349	2
7	0,25	1,123917	2
	…	…	…
17	0,75	0,139856	2
18	0,8	-0,05983	2
19	0,85	-0,27311	2
20	0,9	-0,49729	2
21	0,95	-0,72921	2
22	1	-0,96537	1

На основі цих обчислень побудуємо таблицю для отримання відповідних наближень інтегралу функції $f(x) = e^{\sin x} \cos 2x$.

	A	B	C
25	h	s	I
26	0,2	= СУММПРОИЗВ(B2:B7;C2:C7)	= 0,5*A26*B26
27	0,1	= СУММПРОИЗВ(F2:F12;G2:G12)	↓
28	0,05	= СУММПРОИЗВ(K2:K22;L2:L22)	↓

Тут у стовпці A крок інтегрування h. У стовпці B інтегральна сума, у стовпці C – відповідне наближене значення інтеграла згідно з узагальненою формулою трапецій (1).

В результаті отримаємо таку таблицю:

	A	B	C
25	h	s	I
26	0,2	5,493444	0,549344
27	0,1	11,27574	0,563787
28	0,05	22,69522	0,567381

Задача 2. Обчислити наближені значення функції $f(x) = e^x \sin x$ на відрізку [0;1] за узагальненою формулою Сімпсона з кроками інтегрування h = 0,5 0,25 0,125.

Розв'язання. Зауважимо, що кроки інтегрування h = 0,5 0,25 0,125 є найменшими можливими оскільки за узагальненою формулою Сімпсона (2) кількість відрізків $m = \frac{1}{h}$, на які вузли інтегрування ділять [0;1], обов'язково є парним. Надамо таких значень чарунками електронної таблиці:

	A	B
1	x	f(x)
2	0	= EXP(A2)*SIN(A2)
3	= A2 + h	↓
4	↓	↓

В результаті, наприклад, при h = 0,125 отримаємо таку таблицю:

	A	B
1	x	f(x)
2	0	0
3	0,125	0,141275
4	0,25	0,317673
5	0,375	0,532923
6	0,5	0,790439
7	0,625	1,093106
8	0,75	1,443029
9	0,875	1,841241
10	1	2,287355

У стовпці С до отриманої таблиці додамо відповідні коефіцієнти узагальненої формули Сімпсона (2):

	J	K	L
1	x	f(x)	к
2	0	0	1
3	0,125	0,141275	4
4	0,25	0,317673	2
5	0,375	0,532923	4
6	0,5	0,790439	2
7	0,625	1,093106	4
8	0,75	1,443029	2
9	0,875	1,841241	4
10	1	2,287355	1

Аналогічно з двома іншими таблицями:

	A	B	C
1	x	f(x)	к
2	0	0	1
3	0,5	0,790439	4
4	1	2,287355	1

	E	F	G
1	x	f(x)	к
2	0	0	1
3	0,25	0,317673	4
4	0,5	0,790439	2
5	0,75	1,443029	4
6	1	2,287355	1

На основі цих обчислень побудуємо таблицю для отримання відповідних наближень інтегралу функції $f(x) = e^{\sin x}\cos 2x$, ідентичну таблиці задачі 1:

	A	B	C
15	h	s	I
16	0,5	= СУММПРОИЗВ(B2:B4;C2:C4)	= A16*B16/3
17	0,25	= СУММПРОИЗВ(F2:F6;G2:G6)	↓
18	0,125	= СУММПРОИЗВ(K2:K10;L2:L10)	↓

Тут у стовпці С – наближення інтегралу згідно з узагальненою формулою Сімпсона (2).

В результаті отримаємо таку таблицю:

	A	B	C
15	h	s	I
16	0,5	5,449112	0,908185
17	0,25	10,91104	0,909254
18	0,125	21,82382	0,909326

Контрольні питання.

1. Чому не завжди для інтегрування функції можна скористатися формулою Ньютона – Лейбниця ?

2. Дайте визначення квадратурної формули, вузлів і коефіцієнтів квадратурної формули.

3. Доведіть квадратурну формулу трапецій.

4. Чому дорівнюють вузли і коефіцієнти квадратурної формули Сімпсона?

5. Що таке узагальнені квадратурні формули? Навіщо вони потрібні?

6. Чому дорівнюють вузли і коефіцієнти узагальненої квадратурної формули трапецій?

7. Чому дорівнюють вузли і коефіцієнти узагальненої квадратурної формули Сімпсона?

8. Яка відповідь задачі 1? задачі 2?

Завдання.

Задача. Обчисліть наближені значення наступної функції на відрізку $[0;1]$ за узагальненою формулою трапецій та узагальненою формулою Сімпсона з кроками інтегрування $h = 0{,}5 \ \ 0{,}25 \ \ 0{,}125$. Порівняйте отримані результати.

Варіант	Функція
1	$e^x \cos x$
2	$x^2 e^{-x}$
3	$x^2 \mathrm{arctg} x$
4	$e^{\sin x} \sin 2x$
5	$e^{\cos^2 x} \cos x$
6	$e^x/(1+x)$
7	$(1+x)^{3/2} e^{-x}$
8	$e^x/(3+2\cos x)$
9	$e^{\cos x}(1+x)$
10	$(1+x)\ln^2(1+x)$

Тема: **похибки чисельного інтегрування, метод кратного перерахунку.**

Мета: Отримати відомості про апостеріорні методи оцінки точності чисельного інтегрування та навчитися застосовувати ці методи до конкретних задач.

Теоретичні відомості.

Розглянемо квадратурну формулу $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$.

Означення 1. Різницю $R_n(f)$ між визначеним інтегралом і квадратурною сумою $R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ називають *залишковим членом* або *похибкою* квадратурної формули.

Точність квадратурної формули звичайно характеризують *порядком* її *залишкового члена* $R(f)$ стосовно степеня відстані між вузлами інтегрування h, тобто стосовно *кроку інтегрування.*

Означення 2. **З**алишковий член $R(f)$ квадратурної формули має порядок k (де k – натуральне число) відносно кроку інтегрування h, якщо існують такі сталі C, c > 0, що $ch^k \le |R(f)| \le Ch^k$ для всіх достатньо малих h.

Записують це так: $R(f) = O(h^k)$. Якщо крок h достатньо малий, то квадратурна формула тим точніша, чим більшим є порядок її залишкового члена.

Для будь – якої квадратурної формули і довільного натурального n можна побудувати на відрізку [a; b] відповідну *узагальнену квадратурну формулу*, поділивши [a; b] на n рівних відрізків і на кожному з них застосувавши дану квадратурну формулу. Залишковий член узагальненої квадратурної формули трапецій має другий порядок: $R_у(f) = O(h^2)$, а узагальненої квадратурної формули Сімпсона четвертий: $R_у(f) = O(h^4)$.

Застосуємо тут *апостеріорні* (тобто отримані після і в результаті розрахунків) методи оцінки точності квадратурних формул. Нехай залишковий член деякої узагальненої квадратурної формули має порядок p відносно кроку інтегрування h: $R(f) = O(h^p)$. Поділимо відрізок [a; b] на n рівних відрізків і на 2n рівних відрізків, нехай I_n та I_{2n} – наближені значення інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ за відповідними узагальненими квадратурними формулами, а $R_n(f)$ і $R_{2n}(f)$ – відповідні залишкові члени. Апостеріорний метод *подвійного перерахунку* ґрунтується на двох формулах.

1. $R_{2n}(f) \approx \dfrac{I_{2n} - I_n}{2^p - 1}$ (правило Рунге) (1)

2. $\int_a^b f(x)dx \approx I_{n,2n} = I_{2n} + \dfrac{I_{2n} - I_n}{2^p - 1}$ (формула екстраполяції за Річардсоном). (2)

Тут похибка $R_{2n}(f) = O(h^{p+1})$, $\int_a^b f(x)dx = I_{n,2n} + O(h^{p+1})$. Процес можна продовжити: поділити відрізок [a; b] ще на 4n рівних відрізків і дістати за правилом Рунге та формулою екстраполяції за Річардсоном $I_{2n,4n}$ і $R_{4n}(f)$, які є вже наближеннями порядку p + 2 і так далі, отримуючи наближення порядку p + 3, p + 4, … . Це складає апостеріорний метод *кратного перерахунку*, який є узагальненням методу подвійного перерахунку.

Хід роботи.

Задача 1. 1. Обчислити наближене значення інтеграла функції $f(x) = e^{\sin x} \cos 2x$ на відрізку [0;1] за узагальненою формулою трапецій з кроками інтегрування h = 0,2 0,1 0,05.

2. Уточнити значення інтеграла і оцінити його похибку методом кратного перерахунку.

Розв'язання. 1. Завдання 1. виконано уже в лабораторній роботі 15. Будемо спиратися далі на ці підрахунки.

3. Переформуємо дещо останню електронну таблицю задачі 1 лабораторної роботи 15 у таблицю кратного перерахунку. Надамо чарункам таких значень:

	A	B	C	D
24	№ перерахунку		1	
25	n	s	I	R
26	5	= СУММПРОИЗВ(B2:B7;C2:C7)	= 0,5/A26*B26	
27	10	= СУММПРОИЗВ(F2:F12;G2:G12)	↓	= 1/3*(C27-C26)
28	20	= СУММПРОИЗВ(K2:K22;L2:L22)	↓	↓

Тут у стовпці A n – кількість відрізків, на які вузли інтегрування ділять [0;1] (1/n = h), яка подвоюється згідно з методом кратного перерахунку. У стовпці B інтегральна сума, у стовпці C – відповідне наближене значення інтеграла згідно з узагальненою формулою трапецій. У стовпці D підрахунок оцінки похибки отриманого значення інтеграла згідно з правилом Рунге (1). Оскільки в узагальненої формули трапецій порядок p дорівнює 2, то тут ділимо на $3 = 2^p - 1$. В результаті маємо таку таблицю:

	A	B	C	D
24	№ перерахунку		1	
25	n	s	I	R
26	5	5,493444	0,549344	
27	10	11,27574	0,563787	0,004814
28	20	22,69522	0,567381	0,001198

З таблиці знаходимо $I_5 \approx 0{,}549344$, $I_{10} \approx 0{,}563787$, $I_{20} \approx 0{,}567381$; $R_{10}(f) \approx 0{,}004814$, $R_{20}(f) \approx 0{,}001198$. Як бачимо, із зростанням n, тобто зменшенням кроку h = 1/n значення $R(f)$ зменшується. Тепер розширимо попередню таблицю направо і проведемо в ній такі перерахунки. Надамо чарункам таких значень:

	A	B	C	D	E	F	G
24	№ перерахунку		1		2		3
25	n	s	I	R	I	R	I
26	5	*	*				
27	10	*	↓	*	= C27 + D27		
28	20	*	↓	↓	↓	= 1/7*(E28 – E27)	= E28 + F28

Символ * у чарунці цієї таблиці означає, що в ній залишилась та ж сама формула, що була до розширення. Далі у стовпці E знаходимо уточнені значення інтеграла по формулі екстраполяції за Річардсоном (2), тобто значення $I_{n,2n}$ та $I_{2n,4n}$ уже порядку 3. Цим започаткований другий перерахунок, а тому в чарунці F28 обчислюємо оцінку похибки знову за правилом Рунге (1): із зростанням кратності перерахунку на одиницю порядок p теж зростає на одиницю і отже при другому перерахунку $p = 3$, $2^p - 1 = 7$. Нарешті у чарунці G28 обчислюємо наближене значення інтегралу з залишковим членом порядку 4 за формулою Річардсона (2). В результаті обчислення в Excel дістаємо таблицю:

	A	B	C	D	E	F	G
24	№ перерахунку		1		2		3
25	n	s	I	R	I	R	I
26	5	5,493444	0,549344				
27	10	11,27574	0,563787	0,004814	0,568601		
28	20	22,69522	0,567381	0,001198	0,568578	-7,7E-06	0,568571

Як бачимо з чарунки F28, отримане значення похибки значно краще очікуваного для порядку 3: насправді метод гарантує лише не гірші результати. Отже, наближене значення інтеграла в G28 уже навіть порядку 5 (а не 4), як ми розраховували.

Задача 2. Обчислити наближене значення функції $f(x) = e^x \sin x$ на відрізку [0;1] за узагальненою формулою Сімпсона з точністю 10^{-8}, для оцінки похибки використавши метод кратного перерахунку.

Розв'язання. У задачі 2 лабораторної роботи 15 були вже обчислені наближені значення функції $f(x) = e^x \sin x$ на відрізку [0;1] за узагальненою формулою Сімпсона з кроками інтегрування h = 0,5 0,25 0,125. Будемо спиратися далі на ці підрахунки. Переформуємо дещо останню електронну таблицю задачі 2 лабораторної роботи 15 у таблицю кратного перерахунку. Надамо чарункам таких значень:

	A	B	C	D
14	№ перерахунку		1	
15	n	s	I	R

16	2	= СУММПРОИЗВ(B2:B4;C2:C4)	= B16/(3*A16)	
17	4	= СУММПРОИЗВ(F2:F6;G2:G6)	↓	= 1/15*(C17-C16)
18	8	= СУММПРОИЗВ(K2:K10;L2:L10)	↓	↓

Тут у стовпці A n – кількість відрізків, на які вузли інтегрування ділять [0;1] (1/n = h), яка подвоюється згідно з методом кратного перерахунку. У стовпці B інтегральна сума, у стовпці C – відповідне наближене значення інтеграла згідно з узагальненою формулою Сімпсона. У стовпці D підрахунок оцінки похибки отриманого значення інтеграла згідно з правилом Рунге (1). Оскільки в узагальненої формули Сімпсона порядок p дорівнює 4, то тут ділимо на $15 = 2^p - 1$. В результаті маємо таку таблицю:

	A	B	C	D
14	№ перерахунку		1	
15	n	s	I	R
16	2	5,449112	0,908185	
17	4	10,91104	0,909254	7,12176E-05
18	8	21,82382	0,909326	4,81561E-06

З таблиці знаходимо $I_2 \approx 0{,}908185$, $I_4 \approx 0{,}909254$, $I_8 \approx 0{,}909326$; $R_4(f) \approx$ 7,12176E-05, $R_8(f) \approx$ 4,81561E-06. Як бачимо, отримані наближені значення інтегралу є недостатньо точними. Тому розширимо попередню таблицю направо і проведемо у ній другий перерахунок:

	A	B	C	D	E	F
14	№ перерахунку		1		2	
15	n	s	I	R	I	R
16	2	*	*			
17	4	*	↓	*	= C17 + D17	
18	8	*	↓	↓	↓	= 1/31*(E18 – E17)

Символ * у чарунці цієї таблиці означає, як і раніше, що в ній залишилась та ж сама формула, що була до розширення. Далі у стовпці E знаходимо уточнені значення інтеграла за формулою (2), тобто значення $I_{n,2n}$ та $I_{2n,4n}$ наступного порядку, в чарунці F18 оцінку похибки знову за правилом Рунге (1). Отже, дістаємо таблицю:

	A	B	C	D	E	F
14	№ перерахунку		1		2	
15	n	s	I	R	I	R
16	2	5,449112	0,908185			
17	4	10,91104	0,909254	7,12176E-05	0,909325	

18	8	21,82382	0,909326	4,81561E-06	0,909331	1,88137E-07

Отже, похибка ≈ 1,88137E-07. Порядок похибки зріс на одиницю, проте отримані наближені значення інтегралу все ще є недостатньо точними. Порядок зростає як із зростанням кількості перерахунків, так і із зростанням n. Оскільки всі можливості збільшення кількості перерахунків вичерпані при даних n, то треба покласти n = 16 і провести відповідні додаткові обчислення. При h = 1/16 = 0,0625 отримуємо:

	N	O	P
1	x	*f*(x)	к
2	0	0	1
3	0,0625	0,066488	4
4	0,125	0,141275	2
5	0,1875	0,224845	4
6	0,25	0,317673	2
7	0,3125	0,420219	4
8	0,375	0,532923	2
9	0,4375	0,656203	4
10	0,5	0,790439	2
11	0,5625	0,935975	4
12	0,625	1,093106	2
13	0,6875	1,262067	4
14	0,75	1,443029	2
15	0,8125	1,636086	4
16	0,875	1,841241	2
17	0,9375	2,0584	4
18	1	2,287355	1

Додамо отримані дані у попередню таблицю кратного перерахунку. Маємо:

	A	B	C	D	E	F
14	№ перерахунку		1		2	
15	n	s	I	R	I	R
16	2	5,449112	0,908185			
17	4	10,91104	0,909254	7,12176E-05	0,909325	
18	8	21,82382	0,909326	4,81561E-06	0,909331	1,88137E-07
19	16	43,64786	0,90933	3,0651E-07	0,909331	2,85653E-09

Отже, нарешті ми отримали оцінку похибки належного порядку у чарунці F19, задача розв’язана. Це оцінка похибки наближеного значення інтегралу, що міститься у чарунці E19 і ≈ 0,909330672 (таке значення було отримане після розширення стовпця цієї чарунки в Excel). Насправді отриманий порядок знову більший на одиницю гарантованого методом кратного перерахунку. Ми можемо тепер провести ще третій перерахунок і подивитись на порядок третього уточненого значення:

	A	B	C	D	E	F	G	H
14	№ перерахунку		1		2		3	
15	n	s	I	R	I	R	I	R
16	2	*	*					
17	4	*	↓	*	*			
18	8	*	↓	↓	↓	*	= E18 + F18	
19	16	*	↓	↓	↓	↓	↓	= 1/63*(G19 – G18)

Тут $p = 6$, $2^p - 1 = 63$. В результаті дістаємо:

	A	B	E	F	G	H
14	№ перерахунку		2		3	
15	n	s	I	R	I	R
16	2	5,449112				
17	4	10,91104	0,909325			
18	8	21,82382	0,909331	1,88137E-07	0,909331	
19	16	43,64786	0,909331	2,85653E-09	0,909331	-1,53536E-09

Порядок похибки третього уточненого значення не зріс: насправді можна довести, що при зростанні порядку у деякому перерахунку вище гарантованого у наступному перерахунку зростання у наступному, як правило, не відбудеться.

Контрольні питання.

1. Що називають залишковим членом квадратурної формули ?
2. Що означає число 10 у позначенні похибки квадратурної формули R10(f) ?
3. Чим вимірюють звичайно точність квадратурної формули ?
4. Якщо залишковий член квадратурної формули $|R(f)| \le Chk$ для кроку інтегрування h, то чи означає це, що $R(f) = O(hk)$.
5. Чи завжди квадратурна формула тим точніша, чим більшим є порядок її залишкового члена ?
6. Який порядок має залишковий член узагальненої квадратурної формули трапецій ? Узагальненої квадратурної формули Сімпсона ?
7. На яких формулах ґрунтується метод подвійного перерахунку ? Випишіть їх.
8. На яке число треба поділити I2n – In згідно з правилом Рунге, якщо порядок $p = 5$?
9. Який порядок має похибка, отримана методом подвійного перерахунку, якщо порядок методу $p = 5$?
10. Який порядок має похибка, отримана методом кратного перерахунку в результаті k перерахунків, якщо порядок методу $p = 6$?

Завдання.

Задача 1. Уточнити наближене значення інтеграла функції, отримане в лабораторній роботі 15 за узагальненою формулою трапецій, і оцінити його похибку методом кратного перерахунку.

Задача 2. Обчислити наближене значення функції $f(x)$ з лабораторної роботи 15 за узагальненою формулою Сімпсона з точністю 10^{-7}, для оцінки похибки використавши метод кратного перерахунку.

Лабораторна робота 17

Тема: **чисельні методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь.**

Мета: Отримати відомості про чисельні методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь та навчитися застосовувати ці методи до конкретних задач.

Теоретичні відомості.

Означення 1. 1. *Звичайним диференціальним рівнянням* називають таке рівняння, що зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y(x)$ і її похідні $y', y'', \dots , y^{(n)}$.

2. *Порядок* рівняння – це порядок вищої похідної, що входить до нього.

3. *Задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку*

$$y' = f(x, y); \qquad y(x_0) = y_0 \qquad (1)$$

полягає в тому, щоб знайти розв'язок $y(x)$ цього рівняння, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$.

Означення 2. 1. Розв'язати задачу Коші (1) чисельно означає для заданої послідовності $x_0, x_1, \dots , x_n$ значень незалежної змінної x і числа y_0 знайти числову послідовність $y_0, y_1, \dots, y_n$ так, щоб y_k з заданою точністю наближав $y(x_k)$ для всіх $k = 1, 2, \dots, n$, де $y(x)$ – єдиний розв'язок задачі Коші з початковою умовою $y(x_0) = y_0$.

2. Різницю $y_k – y(x_k)$ називають *похибкою наближеного значення* y_k *в точці* x_k.

3. Якщо всі точки $x_0, x_1, \dots , x_n$ рівновіддалені: $x_k = x_0 + kh$, то величину h називають *кроком інтегрування* диференціального рівняння.

Означення 3. Метод Ейлера є чисельний метод розв'язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, рекурентна формула якого має вигляд:

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad y_{k+1} = y_k + f(x_k; y_k)h \qquad (k = 0, 1, 2, \dots , n – 1). \ (2)$$

Метод Ейлера – це найстаріший та найпростіший метод чисельного інтегрування. Дещо модифікований алгоритм називають *удосконаленим методом Ейлера*.

Означення 4. Удосконалений метод Ейлера визначається рекурентною формулою

$$y_{k+½} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k; y_k); \quad y_{k+1} = y_k + f(x_k + \frac{h}{2}; y_{k+½})h \quad (k = 0, 1, 2, \dots , n-1). \tag{3}$$

Виявляється, що похибка чисельного інтегрування на відрізку завдовжки одиниця для удосконаленого методу Ейлера є величиною порядку h^2 на відміну від h для методу Ейлера.

<u>**Хід роботи**</u>.

Задача 1) Знайти чисельні розв’язки задачі Коші $y'(x) = 2y + \frac{1}{2}\sin(3x - y)$, $y(0) = 1$ на відрізку $[0; 1]$ з кроками інтегрування $h = 0{,}2 \quad 0{,}1 \quad 0{,}05 \quad 0{,}025$ методом Ейлера.

2) Знайти удосконаленим методом Ейлера чисельні розв’язки тої ж задачі Коші з тими ж кроками інтегрування. Порівняти отримані результати.

Розв’язання. 1) Кроки інтегрування задамо у чарунках H1 : H4 так, що H1 = 0,2, а H4 = 0,025. Побудуємо електронну таблицю для чисельного розв’язання даної задачі Коші з кроком інтегрування 0,2 методом Ейлера. Надамо чарункам таких значень:

	A	B	C
1	x	y	Dy
2	0	1	= $H$1*(2*B2+0,5*SIN(3*A2-B2))
3	= A2+$H$1	= B2+C2	↓
4	↓	↓	↓

Тут у чарунках A2:B2 координати початкової точки, у чарунці C2 підраховується кутовий коефіцієнт $f(x_0; y_0)$, помножений на крок інтегрування, у стовпці A отримуються значення x_k з кроком 0,2 на відрізку [0; 1]. Тоді у стовпці B будуть обчислені відповідні значення $y(x_k)$ згідно з рекурентною формулою (1). Символ ↓ означає копіювання попередніх чарунок. В результаті отримаємо таку таблицю:

	A	B	C
1	x	y	Dy
2	0	1	0,315853
3	0,2	1,315853	0,460715
4	0,4	1,776568	0,656112
5	0,6	2,43268	0,913941
6	0,8	3,346621	1,257504
7	1	4,604125	1,741706

Звичайно, стовпець A копіюємо лише до чарунки із значенням 1, в даному випадку до A7. Звідси, наприклад, $y(0{,}2) \approx 1{,}315853$, $y(1) \approx 4{,}604125$. Для отримання аналогічної таблиці з кроком інтегрування 0,1 можна скопіювати попередні формули, наприклад, у діапазон E1:G3, а потім у чарунках E3 і G2 у $H$1 замінити 1 на 2. отримуємо таку таблицю:

	E	F	G
1	x	y	Dy
2	0	1	= $H$2*(2*F2+0,5*SIN(3*E2-F2))
3	= E2+$H$2	= B2+C2	↓
4	↓	↓	↓

І тоді в результаті обчислень дістанемо:

	E	F	G
1	x	y	Dy
2	0	1	0,157926
3	0,1	1,157926	0,193761
4	0,2	1,351687	0,236194
5	0,3	1,587881	0,285831
6	0,4	1,873712	0,343548
7	0,5	2,21726	0,410586
8	0,6	2,627846	0,488745
9	0,7	3,116592	0,580802
10	0,8	3,697394	0,691336
11	0,9	4,38873	0,828093
12	1	5,216823	1,003441

Так само скопіюємо формули у два нових вільних діапазони, (скажімо у A9:C11 та J1:L3), і замінимо у відповідних чарунках в $H$1 1 відповідно на 3 і 4. В результаті (деякі рядки в наступних таблицях випущені) дістанемо:

	J	K	L
1	x	y	Dy
2	0	1	0,039482
3	0,025	1,039482	0,041702
4	0,05	1,081184	0,04403
5	0,075	1,125214	0,046467
6	0,1	1,171681	0,049016
7	0,125	1,220698	0,051679
8	0,15	1,272377	0,054459
9	0,175	1,326836	0,057359
10	0,2	1,384195	0,060382
36	0,85	4,432428	0,209723
37	0,875	4,642152	0,220832
38	0,9	4,862984	0,232778
39	0,925	5,095762	0,245642
40	0,95	5,341404	0,259503
41	0,975	5,600907	0,274432
42	1	5,875339	0,290478

	A	B	C
9	x	y	Dy
10	0	1	0,078963
11	0,05	1,078963	0,087871
12	0,1	1,166835	0,097626
13	0,15	1,264461	0,108262
14	0,2	1,372723	0,11982
15	0,25	1,492543	0,13235
21	0,55	2,513612	0,232356
22	0,6	2,745968	0,25432
23	0,65	3,000288	0,27834
24	0,7	3,278628	0,304761
25	0,75	3,583389	0,33404
26	0,8	3,917429	0,366778
27	0,85	4,284207	0,403754
28	0,9	4,687961	0,44594
29	0,95	5,133901	0,494482
30	1	5,628383	0,550564

2) Тепер побудуємо електронну таблицю для чисельного розв'язання даної задачі Коші з кроком 0,2 удосконаленим методом Ейлера. Надамо чарункам таких значень:

	A	B	C
1	x	y	Dy
2	0	1	= $H$1*(2*B2+0,5*SIN(3*A2-B2))
3	= A2 + $H$1	= B2 + F2	↓
4	↓	↓	↓
	D	E	F
1	x1	y1	Dy1
2	= A2 + 0,5*$H$1	= B2 + 0,5*C2	= $H$1*(2*E2+0,5*SIN(3*D2-E2))
3	↓	↓	↓
4	↓	↓	↓

Формули у стовпцях A, B, C майже ідентичні відповідним формулам таблиці методу Ейлера, лише чарунці B3 надана формула = B2 + F2 замість = B2+C2 у методі Ейлера. Але в цьому й врахована відмінність цих методів: у стовпці B обраховуються значення згідно з (2) $y_{k+1} = y_k + f(x_k + \frac{h}{2}; y_{k+½})h$, а доданок $f(x_k + \frac{h}{2}; y_{k+½})h$ підраховується в стовпці F. Його аргументи $x_k + \frac{h}{2}$ і $y_{k+½} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k; y_k)$ обраховуються відповідно у стовпцях D і E. Формулу у чарунці F2 можна просто скопіювати з чарунки C2. В результаті обрахунків за попередньою таблицею дістанемо:

	A	B	C	D	E	F
1	x	y	Dy	x1	y1	Dy1
2	0	1	0,315853	0,1	1,157926	0,387522
3	0,2	1,387522	0,484148	0,3	1,629596	0,585181
4	0,4	1,972703	0,719274	0,5	2,33234	0,858985
5	0,6	2,831688	1,046859	0,7	3,355118	1,246989
6	0,8	4,078677	1,532052	0,9	4,844703	1,853903
7	1	5,93258	2,352282	1,1	7,108721	2,905362

Далі можна, як і в методі Ейлера, скопіювати попередні формули, наприклад у діапазон J1:O3, а потім у чарунках A3, C2, D2, F2 у $H$1 замінити 1 на 2, звідки дістанемо:

	J	K	L
1	x	y	Dy
2	0	1	= $H$2*(2*K2+0,5*SIN(3*J2-K2))
3	= J2 + $H$2	= K2 + O2	↓
4	↓	↓	↓
	M	N	O
1	x1	y1	Dy1
2	= J2 + 0,5*$H$2	= K2 + 0,5*L2	= $H$2*(2*N2+0,5*SIN(3*M2-N2))
3	↓	↓	↓
4	↓	↓	↓

І тоді (деякі проміжні рядки в наступній таблиці випущені) дістанемо:

	J	K	L	M	N	O
1	x	y	Dy	x1	y1	Dy1
2	0	1	0,157926	0,05	1,078963	0,175743
3	0,1	1,175743	0,196748	0,15	1,274116	0,218126
4	0,2	1,393869	0,24312	0,25	1,515429	0,268443
5	0,3	1,662312	0,297933	0,35	1,811278	0,327763
6	0,4	1,990075	0,362495	0,45	2,171323	0,397662
10	0,8	4,152523	0,781328	0,85	4,543187	0,863032
11	0,9	5,015555	0,966349	0,95	5,49873	1,076088
12	1	6,091644	1,215832	1,05	6,69956	1,359749

Так само скопіюємо попередні формули у два нових вільних діапазони, а потім замінимо в $H$1 1 відповідно на 3 і 4 у відповідних чарунках. В результаті отримуємо таблиці:

	A	B	C	D	E	F
10	x	y	Dy	x1	y1	Dy1
11	0	1	0,078963	0,025	1,039482	0,083404
12	0,05	1,083404	0,088249	0,075	1,127529	0,09313
13	0,1	1,176535	0,09844	0,125	1,225755	0,103781
14	0,15	1,280316	0,109578	0,175	1,335105	0,115401
15	0,2	1,395717	0,121713	0,225	1,456574	0,128047
29	0,9	5,048251	0,487008	0,925	5,291755	0,514551
30	0,95	5,562803	0,545886	0,975	5,835746	0,577854
31	1	6,140657	0,614042	1,025	6,447678	0,650494

та

	J	K	L	M	N	O
15	x	y	Dy	x1	y1	Dy1
16	0	1	0,039482	0,0125	1,019741	0,04059
17	0,025	1,04059	0,04175	0,0375	1,061465	0,042913
18	0,05	1,083503	0,044129	0,0625	1,105568	0,045348
19	0,075	1,128851	0,046621	0,0875	1,152162	0,047897
20	0,1	1,176749	0,049229	0,1125	1,201363	0,050564

54	0,95	5,573824	0,27362	0,9625	5,710634	0,281618
55	0,975	5,855442	0,290152	0,9875	6,000518	0,298734
56	1	6,154175	0,307866	1,0125	6,308108	0,317014

Найбільшою є похибка у кінцевій точці 1. Порівняємо наближені значення розв'язку задачі Коші, отримані в задачі методом Ейлера та удосконаленим методом Ейлера у цій точці за допомогою наступної таблиці.

	Метод Ейлера		**Удосконалений метод Ейлера**	
h	$\tilde{y}_h(1)$	$\Delta\tilde{y}_h(1)$	$\tilde{y}_h(1)$	$\Delta\tilde{y}_h(1)$
0,2	4,604125		5,93258	
0,1	5,216823	0,612698	6,091644	0,159064
0,05	5,628383	0,41156	6,140657	0,049013
0,025	5,875339	0,246957	6,154175	0,013518

Тут у стовпці h використані в задачі кроки інтегрування диференціального рівняння; $\tilde{y}_h(1)$ – це наближене значення розв'язку задачі Коші в точці 1, отримане методом Ейлера або удосконаленим методом Ейлера з кроком h і взяте із відповідної попередньої таблиці. $\Delta\tilde{y}_h(1)$ – це $\tilde{y}_h(1)$ – $\tilde{y}_{2h}(1)$, наприклад, для методу Ейлера $\Delta\tilde{y}_{0,1}(1)$ = $\tilde{y}_{0,1}(1)$ – $\tilde{y}_{0,2}(1)$ = 5,216823 – 4,604125 = 0,612698. З таблиці відразу видно, що значення $\Delta\tilde{y}_h(1)$ для удосконаленого методу Ейлера відчутно менші відповідних значень методу Ейлера, тобто збіжність удосконаленого методу Ейлера значно швидша.

Контрольні питання.

1. Що таке звичайне диференціальне рівняння, що таке порядок диференціального рівняння?
2. Як ставиться задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку?
3. Що означає чисельно розв'язати задачу Коші?
4. Що називають похибкою наближеного значення yk в точці xk? Що називають кроком інтегрування?
5. Яка рекурентна формула визначає метод Ейлера?
6. Яка рекурентна формула визначає удосконалений метод Ейлера?

7. Чи значно відрізняються похибки методу Ейлера і удосконаленого методу Ейлера?

8. Як пов'язані між собою величина похибки методу та його збіжність?

Завдання.

Задача. 1) Знайти чисельні розв'язки наступної задачі Коші на відрізку [0; 1] з кроками інтегрування h = 0,2 0,1 0,05 0,025 методом Ейлера.

2) Знайти удосконаленим методом Ейлера чисельні розв'язки тої ж задачі Коші з тими ж кроками інтегрування.

3) Порівняти отримані результати.

Варіант	Диференціальне рівняння	Початкова умова
1	$y' = e^x \cos x$	$y(-1) = 1$
2	$y' = x^2 e^{-x}$	$y(1) = 5$
3	$y' = x^2 \operatorname{arctg} x$	$y(1) = 3$
4	$y' = e^{\sin x} \sin 2x$	$y(1) = -1$
5	$y' = e^{\cos^2 x} \cos x$	$y(5) = 10$
6	$y' = e^x/(1+x)$	$y(0) = 4$
7	$y' = (1+x)^{3/2} e^{-x}$	$y(1) = 0,5$
8	$y' = e^x/(3+2\cos x)$	$y(0) = 2$
9	$y' = e^{\cos x}(1+x)$	$y(-1) = 0$
10	$y' = (1+x)\ln^2(1+x)$	$y(0) = 1$

Лабораторна робота 18

Тема: **методи Рунге – Кутта, кратний перерахунок методів Рунге – Кутта.**

Мета: Отримати відомості про методи Рунге – Кутта другого порядку точності, про апостеріорні методи оцінки точності методів Рунге – Кутта та навчитися застосовувати ці методи до конкретних задач.

Теоретичні відомості.

Нехай $\varphi_k(h) = y_k - y(x_k)$ – це похибка наближеного значення y_k в точці x_k для розв'язку задачі Коші $y(x)$ даним методом інтегрування ($k = 1, 2, \ldots, n$). Тоді

Означення 1. *Порядок точності* методу інтегрування диференціального рівняння відносно його кроку h дорівнює натуральному числу s, якщо $ch^{s+1} \le |\varphi_k(h)| \le Ch^{s+1}$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, n$ і всіх достатньо малих h при деяких сталих $C, c > 0$.

Збіжність методу буде тим швидшою, чим більшим є порядок його точності. Так порядок точності методу Ейлера дорівнює одиниці, а порядок точності удосконаленого методу Ейлера дорівнює двом.

Означення 2. *Методи Рунге – Кутта другого порядку точності* визначаються рекурентними формулами

$$y_{k+1} = y_k + p_1 h f(x_k, y_k) + p_2 h f(\bar{x}_k, \bar{y}_k), \qquad (1)$$

де

$$\bar{x}_k = x_k + \alpha_2 h, \qquad \bar{y}_k = y_k + \beta_{21} h f(x_k, y_k), \qquad (2)$$

за умови, що чотири параметри: $p_1, p_2, \alpha_2, \beta_{21}$ зв'язані системою алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1 \\ p_2 \cdot \alpha_2 = \dfrac{1}{2} \\ p_2 \cdot \beta_{21} = \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Очевидно, $p_2 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, $\beta_{21} \neq 0$, $\alpha_2 = \beta_{21}$. Наприклад, якщо $p_2 = 1$, то звідси $p_1 = 0$, $\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2}$, $y_{k+1} = y_k + h f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$, де $\bar{x}_k = x_k + \frac{1}{2}h$, $\bar{y}_k = y_k + \frac{1}{2}h f(x_k, y_k)$.

Це рекурентна формула удосконаленого методу Ейлера (формула (3) з лабораторної роботи 17: тут $y_{k+½} = \bar{y}_k$).

Застосуємо далі *апостеріорні* (тобто отримані після і в результаті розрахунків) методи оцінки похибок чисельних наближень y_k до точних значень розв'язків $y(x_k)$ в заданих точках x_k.

Нехай задані послідовність $x_0, x_1, \ldots, x_n$ рівновіддалених точок ($x_k = x_0 + kh$) з кроком інтегрування диференціального рівняння h, задача Коші $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ та її чисельний розв'язок $y_0, y_1, \ldots, y_n$ у заданих точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, отриманий деяким методом порядку точності s.

Нехай ще задані послідовність точок $\breve{x}_0, \breve{x}_1, \ldots, \breve{x}_{2n}$ з кроком $h/2$ так, що $\breve{x}_{2k} = x_k$ ($k = 0, 1, \ldots, n$), та ж задача Коші $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ та її чисельний розв'язок $\breve{y}_0, \breve{y}_1, \ldots, \breve{y}_{2n}$ у заданих точках $\breve{x}_0, \breve{x}_1, \ldots, \breve{x}_{2n}$, отриманий тим самим методом порядку точності s.

Метод подвійного перерахунку для методів Рунге – Кутта є узагальненням такого методу для інтегрування функцій і ґрунтується на двох аналогічних формулах.

1. $$\varepsilon = \frac{\breve{y}_{2k} - y_k}{2^s - 1} \qquad (\textit{правило Рунге}) \qquad (4)$$

2. $$y(x_k) \approx \breve{y}_{2k} + \varepsilon = \breve{y}_{2k} + \frac{\breve{y}_{2k} - y_k}{2^s - 1}$$ (*формула екстраполяції за Річардсоном*). (5)

Тут ε – це оцінка похибки наближеного значення y_k в точці x_k, $\breve{y}_{2k} + \varepsilon$ – таке нове наближення до точного значення розв'язку $y(x_k)$, порядок точності якого вже $s+1$. Процес можна продовжити і далі, отримуючи наближення порядку s + 2, s + 3, … . Це складає апостеріорний метод *кратного перерахунку*, який є узагальненням методу подвійного перерахунку.

<u>**Хід роботи**</u>.

Задача 1. Знайти чисельні розв'язки задачі Коші $y' = 2x + 3\sin y^2,\ y(1) = 0$ на відрізку [1; 2] з кроками інтегрування h = 0,1 0,05 методом Рунге – Кутта другого порядку точності по формулам $y_{k+1} = y_k + p_1 hf(x_k, y_k) + p_2 hf(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$, де $\bar{x}_k = x_k + \frac{1}{2}h$, і оцінити похибку отриманого розв'язку методом подвійного перерахунку.

Розв'язання. Згідно з означенням 2, задана рекурентна формула визначає метод Рунге – Кутта другого порядку точності за умови, що його параметри задовольняють (3). Тут $\bar{x}_k = x_k + \frac{1}{2}h$, тож $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, звідки $\beta_{21} = \frac{1}{2}$, $p_2 = 1$, $p_1 = 0$. Отже, $y_{k+1} = y_k + hf(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$, де $\bar{x}_k = x_k + \frac{1}{2}h$, $\bar{y}_k = y_k + \frac{1}{2}h\, f(x_k, y_k)$. Це удосконалений метод Ейлера. Кроки інтегрування задамо у чарунках H1, H2: тут H1 = 0,1, H2 = 0,05. Побудуємо електронну таблицю для чисельного розв'язання даної задачі Коші з кроком інтегрування 0,1 по таким формулам. Надамо чарункам таких значень:

	A	B	C
1	x	y	w1
2	1	0	= $H$1*(2*A2+3*SIN(B2^2))
3	= A2 + $H$1	= B2 + F2	↓
4	↓	↓	↓
	D	E	F
1	x1	y1	w2
2	= A2 + 0,5*$H$1	= B2 + 0,5*C2	=$H$1*(2*D2+3*SIN(E2^2))
3	↓	↓	↓
4	↓	↓	↓

Тут у стовпці C значення $w_1(h) = h\, f(x_k, y_k)$, у стовпці F значення $w_2(h) = h\, f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$.

Формулу у чарунці F2 можна просто скопіювати з чарунки C2. В результаті дістанемо:

	A	B	C	D	E	F
1	x	y	w1	x1	y1	w2
2	1	0	0,2	1,05	0,1	0,213
3	1,1	0,213	0,233606	1,15	0,329803	0,262567
4	1,2	0,475567	0,307272	1,25	0,629203	0,365691
5	1,3	0,841257	0,455029	1,35	1,068772	0,542874
6	1,4	1,384131	0,56232	1,45	1,665291	0,398036
7	1,5	1,782167	0,289644	1,55	1,926989	0,147683
8	1,6	1,92985	0,154909	1,65	2,007304	0,097318
9	1,7	2,027167	0,092905	1,75	2,07362	0,075162
10	1,8	2,10233	0,072751	1,85	2,138705	0,072866
11	1,9	2,175195	0,080055	1,95	2,215223	0,095675
12	2	2,270871	0,129148	2,05	2,335445	0,188847

Як і в лабораторній роботі 1, можна скопіювати попередні формули, наприклад, у діапазон J1:O3, а потім у чарунках A3, C2, D2, F2 у $H$1 замінити 1 на 2, звідки дістанемо:

	J	K	L
1	x	y	w1
2	1	0	= $H$2*(2*J2+3*SIN(K2^2))
3	= J2 + $H$2	= K2 + O2	↓
4	↓	↓	↓
	M	N	O
1	x1	y1	w2
2	= J2 + 0,5*$H$2	= K2 + 0,5*L2	= $H$2*(2*M2+3*SIN(N2^2))
3	↓	↓	↓
4	↓	↓	↓

В результаті обчислень (деякі рядки в наступній таблиці випущені) дістанемо:

	J	K	L	M	N	O
1	x	y	w1	x1	y1	w2
2	1	0	0,1	1,025	0,05	0,102875
3	1,05	0,102875	0,106587	1,075	0,156169	0,111158
4	1,1	0,214033	0,116869	1,125	0,272467	0,123626
5	1,15	0,337658	0,132065	1,175	0,403691	0,141837
20	1,9	2,196925	0,040975	1,925	2,217413	0,045627
21	1,95	2,242552	0,052457	1,975	2,268781	0,061468
22	2	2,30402	0,075872	2,025	2,341956	0,095061

Порівняємо отримані наближені значення розв'язку задачі Коші у кінцевій точці 2 за допомогою наступної таблиці подвійного перерахунку:

	A	B	C	D
15	h	y(2)	ε	y(2) уточн.
16	0,1	2,270871		
17	0,05	2,30402	= (B17 – B16)/3	= B17 + C17

Тут у стовпці A крок інтегрування, у стовпці B наближені значення в точці 2, отримані у попередніх таблицях з відповідним кроком. У C17 підраховується за правилом Рунге (4) похибка ε, у чарунці D17 уточнене наближення для y(2) за формулою (5). Дістанемо:

	A	B	C	D
15	h	y(2)	ε	y(2) уточн.
16	0,1	2,270871		
17	0,05	2,30402	0,01105	2,31507

Ця таблиця і є відповіддю задачі 1.

Задача 2. Знайти чисельний розв'язок задачі Коші $y' = \sin(0{,}5x + 2y^2) + 1{,}5y,\ \ y(0) = 1$ на відрізку [0; 1] методом Рунге – Кутта другого порядку точності за формулою $y_{k+1} = y_k + p_1 hf(x_k, y_k) + p_2 hf(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$, де $\bar{x}_k = x_k + {}^2\!/_3 h$ з точністю 10^{-4}, оціненою методом кратного перерахунку.

Розв'язання. Згідно з означенням 2, задана рекурентна формула визначає метод Рунге – Кутта другого порядку точності за умови, що його параметри задовольняють (3). За умовою тут $\alpha_2 = \frac{2}{3}$, звідки $\beta_{21} = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{3}{4}$, $p_1 = \frac{1}{4}$. Отже,

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{4} hf(x_k, y_k) + \frac{3}{4} hf(\bar{x}_k, \bar{y}_k), \quad \text{де} \quad \bar{x}_k = x_k + \frac{2}{3} h, \quad \bar{y}_k = y_k + \frac{2}{3} h f(x_k, y_k).$$

Спочатку задамо кроки інтегрування 0,2 0,1 0,05 0,025 у чарунках H1:H4, знайдемо чисельні розв'язки для таких кроків і оцінимо їх методом кратного перерахунку. Якщо потрібна точність не буде досягнута, то крок буде зменшено. Надамо чарункам таких значень (аналогічно задачі 1):

	A	B	C
1	x	y	w1
2	0	1	= $H$1*(SIN(0,5*A2+2*B2^2)+1,5*B2)
3	= A2 + $H$1	= B2 + 1/4*C2 + 3/4*F2	↓
4	↓	↓	↓
	D	E	F
1	x1	y1	w2
2	= A2 + 2/3*$H$1	= B2 + 2/3*C2	= $H$1*(SIN(0,5*D2+2*E2^2)+1,5*E2)
3	↓	↓	↓
4	↓	↓	↓

В результаті дістанемо:

	A	B	C	D	E	F
1	x	y	w1	x1	y1	w2
2	0	1	0,481859	0,133333	1,32124	0,315474
3	0,2	1,35707	0,287412	0,333333	1,548678	0,270875
6	0,8	3,114989	1,097962	0,933333	3,846964	0,958901
7	1	4,108655	1,290827	1,133333	4,969206	1,429217

Скопіюємо A2:F3 у будь – які вільні від інформації діапазони, а потім у відповідних чарунках у $H$1 замінимо 1 на 2, 3 або 4. За цими обрахунками створимо наступну електронну таблицю кратного перерахунку. у кінцевій точці 1 (оскільки саме в ній слід очікувати найбільшу похибку):

	H	I	J	K	L
34	№ перерахунку	1		2	
35	h	y(1)	ε	y(1)	ε
36	0,2	4,108655			
37	0,1	3,971733	= 1/3*(I37–I36)	= I37+J37	
38	0,05	4,056332	↓	↓	= 1/7*(K38–K37)
39	0,025	4,051298	↓	↓	↓

Тут у стовпці H крок інтегрування, у стовпці I наближені значення в точці 1, отримані при попередніх підрахунках з відповідним кроком, у стовпці J похибка ε, підрахована за правилом Рунге (4) $\varepsilon \approx \dfrac{\breve{y}_{2k} - y_k}{2^s - 1}$, де s – порядок точності методу. В даному разі $2^s - 1 = 3$, бо $s = 2$. На цьому закінчився перший перерахунок. У стовпці K знаходимо уточнені наближення порядку точності 3 за формулою (5), у стовпці L їх оцінки ε знову за правилом Рунге, але тепер $2^s - 1 = 7$, бо $s = 3$. У сукупності це другий перерахунок. Далі аналогічно проводимо третій перерахунок: із зростанням номеру перерахунку N на одиницю порядок точності методу s теж зростає на одиницю, отже тут $s = 4$, $2^s - 1 = 15$:

	M	N	O	P
34	1		2	
35	y(1)	ε	y(1)	ε
36				
37				
38	= K38 + L38			
39	↓	= 1/15*(M39 – M38)	= M39 + N39	

В результаті отримаємо таку трикутну таблицю (матрицю):

	H	I	J	K	L	M	N	O
34	№	1		2		3		4
35	h	y(1)	ε	y(1)	ε	y(1)	ε	y(1)
36	0,2	4,108655						
37	0,1	3,971733	-0,04564	3,926093				
38	0,05	4,056332	0,0282	4,084532	0,022634	4,107166		
39	0,025	4,051298	-0,00168	4,04962	-0,00499	4,044633	-0,00417	4,040464

Згідно з отриманими апостеріорними оцінками тут всі наближення мають якнайбільше три значущих цифри, що є недостатньою точністю за умовою задачі. Отже, знайдемо чисельний розв’язок даної задачі Коші з кроком інтегрування $h = 0{,}0125$ і додамо до таблиці кратного перерахунку отримане значення $y(1)$. За підрахунками:

	H	I	J	K	L	M
45	x	y	w1	x1	y1	w2
46	0	1	0,030116	0,008333	1,020077	0,030008
47	0,0125	1,030035	0,029921	0,020833	1,049983	0,029679
124	0,975	3,90607	0,068214	0,983333	3,951547	0,077847
125	0,9875	3,981509	0,083468	0,995833	4,037155	0,088123
126	1	4,068469	0,086471	1,008333	4,126116	0,077411

Отже, достатньо занести отримане значення $y(1) = 4{,}068469$ у чарунку I40 поряд з відповідним значенням кроку $h = 0{,}0125$ у чарунці H40, решту формул у стовпцях J:O можна просто скопіювати:

	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
34	№	1		2		3		4		5	
35	h	y(1)	ε	y(1)	ε	y(1)	ε	y(1)	ε	y(1)	ε
36	0,2	4,108655									
37	0,1	3,971733	*	*							
38	0,05	4,056332	↓	↓	*	*					

39	0,025	4,051298	↓	↓	↓	↓	*	*			
40	0,0125	4,068469	↓	↓	↓	↓	↓	↓	=(O40-O39)/31	=O40+P40	

Тут символ * означає, що у відповідній чарунці знаходиться та ж сама формула, що й у попередній таблиці. Для N = 4 s = 5, $2^s - 1 = 31$, тому P40 = (O40 – O39)/31. В результаті отримаємо таку трикутну таблицю:

	H	I	J	K	L
34	№	1		2	
35	h	y(1)	ε	y(1)	ε
36	0,2	4,108655			
37	0,1	3,971733	-0,04564	3,926093	
38	0,05	4,056332	0,0282	4,084532	0,022634
39	0,025	4,051298	-0,00168	4,04962	-0,00499
40	0,0125	4,068469	0,005724	4,074192	0,00351
	M	N	O	P	Q
34	3		4		5
35	y(1)	ε	y(1)	ε	y(1)
36					
37					
38	4,107166				
39	4,044633	-0,00417	4,040464		
40	4,077703	0,002205	4,079907	0,001272	4,08118

На четвертому перерахунку наближення досягло вже чотирьох значущих цифр, проте точності 10^{-4}, яку вимагає умова задачі, ще не досягнуто. Тому знайдемо ще й чисельний розв'язок даної задачі Коші з кроком інтегрування h = 0,0125 і отримане значення y(1) додамо до таблиці кратного перерахунку. За підрахунками:

	A	B	C	D	E	F
205	x	y	w1	x1	y1	w2
206	0,9625	3,846446	0,02997	0,966667	3,866426	0,030876
207	0,96875	3,877096	0,03158	0,972917	3,898149	0,033341
208	0,975	3,909996	0,0345	0,979167	3,932996	0,036938
209	0,98125	3,946325	0,038371	0,985417	3,971905	0,040913
210	0,9875	3,986602	0,042126	0,991667	4,014686	0,043685
211	0,99375	4,029897	0,04403	0,997917	4,05925	0,043635
212	1	4,073631	0,042962	1,004167	4,102272	0,040882

Отже, отримане значення y(1) = 4,068469 заносимо до таблиці кратного перерахунку. В результаті отримаємо таку таблицю:

	H	I	J	K	L
34	№	1		2	
35	h	y(1)	ε	y(1)	ε
36	0,2	4,108655			
37	0,1	3,971733	-0,04564	3,926093	
38	0,05	4,056332	0,0282	4,084532	0,022634
39	0,025	4,051298	-0,00168	4,04962	-0,00499
40	0,0125	4,068469	0,005724	4,074192	0,00351
41	0,00625	4,073631	0,001721	4,075352	0,000166

	M	N	O	P	Q	R	S
34	3		4		5		6
35	y(1)	ε	y(1)	ε	y(1)	ε	y(1)
36							
37							
38	4,107166						
39	4,044633	-0,00417	4,040464				
40	4,077703	0,002205	4,079907	0,001272	4,08118		
41	4,075518	-0,00015	4,075372	-0,00015	4,075226	-9,45052E-05	4,075131

Як бачимо, тепер необхідна точність досягнута вже на другому перерахунку. На п’ятому перерахунку досягнуто ще більшої точності.

Відповідь: y(1) = 4,075131 ± 9,45052E-05.

Контрольні питання.

1. Визначте порядок точності методу інтегрування диференціального рівняння.
2. Як впливає порядок точності методу інтегрування на його збіжність?
3. Чи залежить порядок точності методу інтегрування диференціального рівняння від вибору задачі Коші?
4. Чому дорівнює порядок точності методу Ейлера, удосконаленого методу Ейлера?
5. Яка рекурентна формула визначає методи Рунге – Кутта другого порядку точності? Якій умові повинні задовольняти параметри методу?
6. За якої умови рекурентна формула методу Рунге – Кутта перетворюється на рекурентну формулу удосконаленого методу Ейлера?

7. Які апостеріорні методи оцінки похибок ви знаєте?

8. На яких формулах ґрунтується метод подвійного перерахунку? Випишіть їх.

9. На яке число треба поділити $\breve{y}_{2k}$ – yk за правилом Рунге, якщо порядок s = 5?

10. Який порядок має похибка, отримана методом подвійного перерахунку, якщо порядок методу s = 5?

11. Який порядок має похибка, отримана методом кратного перерахунку в результаті k перерахунків, якщо порядок методу s = 8?

Завдання.

Задача 1. Оцінити похибку розв'язку, отриманого в лабораторній роботі 17, методом подвійного перерахунку.

Задача 2. Знайти чисельний розв'язок задачі Коші з лабораторної роботи 17 на відрізку [0; 1] методом Рунге – Кутта другого порядку точності з точністю 10^{-3}, оціненою методом кратного перерахунку, якщо

Варіант	Параметр
1	$\beta_{21} = \frac{2}{3}$
2	$p_2 = \frac{3}{4}$
3	$p_1 = \frac{1}{4}$
4	$\alpha_2 = \frac{1}{3}$
5	$\beta_{21} = \frac{1}{3}$
6	$p_2 = 1$
7	$\alpha_2 = \frac{1}{2}$
8	$\beta_{21} = \frac{1}{2}$
9	$p_1 = \frac{1}{2}$
10	$p_1 = 0$

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Амосов А. А., Дубинський Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы для инженеров : учебн. пособ. М. : Высшая школа, 1994. 544 с.

2. Барахнин В. Б., Шапеев В. П. Введение в численный анализ. Новосибирск, 1997. 112 с.

3. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Бином, 2007. 636 с.

4. Волков Е. А. Численные методы. М. : Высшая школа, 1987. 312 с.

5. Демидович Б. П. Основы вычислительной. М. : Наука, 1994. 664 с.

6. Дзісь В.Г.,Левчук О.В., Дячинська О.М. Прикладна математика на основі MathCAD: Навчальний посібник. Вінниця: ВНАУ, 2020. 378с.

7. Задачин В.М., Конюшенко І.Г. Чисельні методи: Навчальний посібник. Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. 180 с.

8. Калиткин Н. Н. Численные методы. М. : Наука, 1978. - 512 с.

9. Копча-Горячкіна Г.Е. Чисельні методи в інформатиці. Навчально-методичний посібник. Частина 1. Ужгород: Видавництво Закарпатського державного університету. 2011. 76 с.

10. Лаазарєв Ю.Ф. Моделювання на ЕОМ. Навчальний посібник. К.: Політехніка, 2007. 290с.

11. Ляшенко Б.М., Кривонос О.М., Вакалюк Т.А. Методи обчислень: навчально-методичний посібник. Житомир: идавництво ДЖУ, 2014. 228 с.

12. Лященко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи: Підручник. К.:Либідь. 1996. 288с.

13. Ортега Дж., Пул У.. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1986. 56 с.

14. Ракитин В. И. ,Первушин В. Е. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров. М.: Высшая школа, 1998. 384 с.

15. Самарский А. А. Введение в численные методы. М. : Наука, 1997. 240 с.

16. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М. : Наука, 1989. 432 с.

17. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. М. : Мир, 1985. 16 с.

18. Турчак Л. И. Основы численных методов. М.: Наука, 1997. 320 с.

19. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці. К. : Видавнича група BHV, 2006. 480 с.

20. Фурунжиев Р. И., Бабушкин Ф. М., Варавко В. В. Применение математических методов и ЭВМ. Практикум : учебн. пособ. для вузов. Мн. : Вышейшая школа, 1988. - 192 с.

21. Шевчук О. Ф., Найко Д.А. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. Вінниця: ВНАУ, 2020. 382 с.

22. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: практическое руководство : учебн. изд. пер. с англ. М. : Мир, 1982. 237 с.

23. Everitt B. A Hothorn T. Everitt B.Hndbook of statistical analyses using. 2-nd ed. Chapman and HALLICRC, 2009. 376 p.

24. Shumway R. H., Stoffer D. S. Time series analyses and its applications: With R examples. 3-rd ed. New York : Springer, 2011. 596 p.

Ресурси мережі Інтернет

25. Quick-R [Electronic resource]. - Access mode : http:IIwww.stat- methods. netIindex. html.

26. R Site Search [Electronic resource]. - Access mode : http:IIfinzi.psych. upenn.eduInmz.html.

27. Rtips. Revival 2014! [Electronic resource]. - Access mode : http:IIpj.freefaculty.orgIRIRtips.html.

28. Statistics with R [Electronic resource]. - Access mode : http:IIzoonek2. free.frIUNIXI48_RIall.html.

29. The Comprehensive R Archive Network [Electronic resource]. - Access mode : http:IIcran.r-project.org.

Науково-методичне видання

Л.О.Волонтир, Зелінська О.В., Н.А. Потапова, І.А.Чіков

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

Навчальний посібник

У авторській редакції
Технічний редактор ***О.В.Зелінська***
Комп'ютерне верстання ***Л.О.Волонтир***

Формат $60х84^{1}/_{16}$.
Умовн. друк. арк. 18,6 .
Тираж 300. Зам. №

Вінницький національний аграрний університет
вул. Соняшна, 3, м. Вінниця, 21050