

Тищенко Л. Н.

Ольшанский В. П.

Харьковский  
национальный  
технический  
университет  
сельского хозяйства  
им. П.Василенка

Ольшанский С. В.

Национальный  
технический  
университет  
«Харьковский  
политехнический  
институт»

УДК 631.362

## О КОЛЕБАНИЯХ СКОРОСТИ ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ НА ВИБРОРЕШЕТЕ

*Рух зернової суміші по поверхні нахиленого решета описано рівняннями потоку в'язкої рідини. Побудовано аналітичний розв'язок рівнянь гідродинаміки, одержано формули для розрахунку профілю швидкості, продуктивності решета та його питомого завантаження в усталеному режимі роботи.*

*The motion of a grain mix on inclined sieve is described the equation of current of a viscous liquid. The analytical solution of hydrodynamics is constructed, and also the formulas for account of a structure of velocity, productivity sieve and its specific loading are received.*

**Проблема.** Информация о скорости движения зерновой смеси по рабочей поверхности решета нужна для реализации его оптимальной загрузки. При медленной подаче зерна тонким слоем решето оказывается недогруженным, что снижает производительность процесса сепарирования. При быстрой подаче смеси на решето толстым слоем в ходе транспортирования возможно появление заторов, что ухудшает интенсивность сепарирования. Поэтому определение скорости движения слоя смеси на виброрешете, которая соответствует законам механики, относится к актуальным задачам.

**Обзор последних исследований и публикаций.** Много публикаций по рассматриваемой проблеме вошло в обзорную часть монографии [1]. Не останавливаясь на них подробно, выделим два основных подхода к теоретическому определению кинематических характеристик потока смеси на решете. Первый базируется на законах движения гранулированной сыпучей среды и связан с численным интегрированием систем нелинейных дифференциальных уравнений [2,3,4]. В основу второго подхода положена аналогия в движениях сыпучей смеси в условиях вибраций и вязкой жидкости [1,5]. Он более прост в математическом отношении,

позволяет в отдельных случаях построить аналитические решения и получить прикладные расчётные формулы [1,6,7]. Поэтому ему отдано предпочтение в данной работе.

Целью статьи является получение формул для вычисления скорости потока и других кинематических характеристик движения зернового слоя на плоском наклонном решете с учётом его продольных колебаний и отделения проходовой фракции от смеси на перфорированной поверхности. Без учёта отделения проходовой фракции от сходовой задача решалась в [8].

**Изложение основного содержания работы.** Исходим из уравнений Навье-Стокса [9], записанных в прямоугольной системе координат  $xOy$ , показанной на рис. 1:

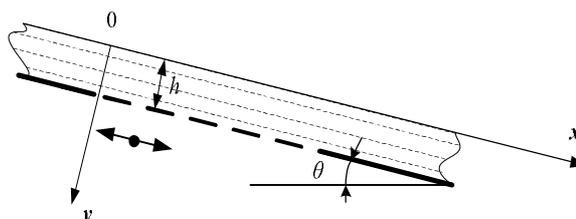
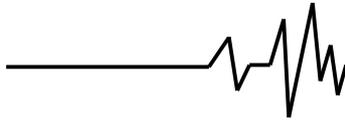


Рис. 1. Расчётная схема



$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \nabla^2 u \right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \nabla^2 v \right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ;  $u, v$  - проекции скорости потока на координатные оси  $ox$  и  $oy$  соответственно;  $g$  - ускорение свободного падения;  $\theta$  - угол наклона решета к горизонту;  $\rho, \mu$  - усреднённые плотность и коэффициент вязкости смеси;  $p$  - давление в зерновом слое;  $t$  - время.

Считаем, что гармонические колебания решета происходят в его плоскости с амплитудой  $A^*$  и частотой  $\omega$ .

Для таких вибраций решета решение уравнений (1), (2) будем строить при граничных условиях:

$$v(h) = v_{II}; \quad u(h) = A^* \omega \sin(\omega t) - \quad (3)$$

в плоскости  $y = h$  и

$$-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad (4)$$

в плоскости  $y = 0$ .

Первое граничное условие в (3) описывает равномерное "просачивание" жидкости (просеивание зерна) через граничную поверхность с некоторой средней скоростью  $v_{II}$ . Так приближённо моделируем отделение проходовой фракции от смеси через отверстия на перфорированной поверхности решета.

Второе граничное условие в (3) известно в гидродинамике как условие "прилипания" жидкости к твёрдым стенкам [9]. Оно выражает совместные гармонические колебания решета и смеси в плоскости их контакта.

Граничные условия (4) обусловлены отсутствием нормальных и касательных напряжений на свободной поверхности слоя толщиной  $h$ .

Вследствие отделения проходовой фракции, толщина слоя  $h$  будет зависеть от  $x$ , но этой зависимостью далее пренебрегаем, что приемлемо когда объём отделившейся

фракции мал по сравнению с общим объёмом смеси на решете.

Ограничимся рассмотрением установившегося потока смеси с независимой от  $x$  проекцией скорости  $u$ . Для такого режима движения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (5)$$

Поэтому уравнение (2) и первое граничное условие в (3) будут выполнены, когда

$$v(x, y, t) = v_{II} = const. \quad (6)$$

Учитывая (5) и (6) систему (1) преобразуем к упрощённому виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_{II} \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \cos \theta. \quad (8)$$

Интегрируя (8) по  $y$ , с точностью до произвольной функции  $f_1(x)$ , получаем:

$$p = \rho g \cos \theta y + f_1(x).$$

Согласно (6)  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$  и из первого

граничного условия в (4) следует, что  $f_1(x) = 0$ . Поэтому

$$p = \rho g \cos \theta y; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

и уравнение (7) принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_{II} \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \theta + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (9)$$

Учитывая линейность (9), представим его решение суммой

$$u(y, t) = u_1(y) + u_2(y, t), \quad (10)$$

слагаемые которой удовлетворяют уравнениям:

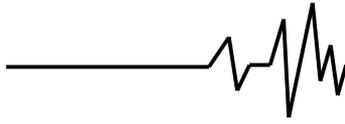
$$v_{II} \frac{\partial u_1}{\partial y} = g \sin \theta + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}; \quad (11)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + v_{II} \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}. \quad (12)$$

Второе граничное условие в (3) будет выполнено, когда

$$u_1(h) = 0; \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad (13)$$

$$u_2(h) = A^* \omega \sin(\omega t); \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \quad (14)$$



Краевая задача, представленная выражениями (11) и (13), имеет решение:

$$u_1(y) = \frac{g \sin \theta}{\nu_{II}} \left\{ y - h + \frac{\mu}{\rho \nu_{II}} \left[ \exp\left(\frac{\rho}{\mu} \nu_{II} h\right) - \exp\left(\frac{\rho}{\mu} \nu_{II} y\right) \right] \right\}. \quad (15)$$

В нём появляется неопределённость вида  $\left| \frac{0}{0} \right|$  при  $\nu_{II} \rightarrow 0$ . Раскрыв её, из (15) получаем известную формулу установившейся скорости течения вязкой жидкости по наклонному лотку [7,9]:

$$u_1(y) = \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} (h^2 - y^2).$$

Решение уравнения (12) ищем в комплексной форме:

$$u_2(y, t) = \text{Im}[w(y) \exp(i\omega t)], \quad i = \sqrt{-1}. \quad (16)$$

Оно удовлетворяет граничным условиям (14), если

$$\text{Re } w(h) = A\omega; \quad \text{Im } w(h) = 0. \quad (17)$$

Подставив (16) в (12), получаем линейное дифференциальное уравнение

$$i\omega w + \nu_{II} \frac{dw}{dy} = \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 w}{dy^2}.$$

Его характеристическое уравнение -

$$\lambda^2 - 2 \frac{\rho \nu_{II}}{2\mu} \lambda - i \frac{\rho \omega}{\mu} = 0$$

имеет комплексные корни:

$$\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta; \quad \lambda_2 = \alpha_2 - i\beta,$$

причём  $\alpha_{1,2} = \rho_* \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\rho_*^4 + \left(\frac{\rho\omega}{\mu}\right)^2} + \rho_*^2;$

$$\rho_* = \frac{\rho \nu_{II}}{2\mu}; \quad (18)$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\rho_*^4 + \left(\frac{\rho\omega}{\mu}\right)^2} - \rho_*^2.$$

Для таких корней:

$$w(y) = (c_1 + ic_2) \exp[(\alpha_1 + i\beta)y] + (c_3 + ic_4) \exp[(\alpha_2 - i\beta)y] \quad (19)$$

Здесь  $c_1, c_2, c_3, c_4$  - произвольные постоянные.

Константы находим с помощью граничных условий (14) и (17). Подставив (19) в (17) и (14), получаем систему четырёх алгебраических уравнений:

$$c_1\beta + c_2\alpha_1 - c_3\beta + c_4\alpha_2 = 0;$$

$$c_1\alpha_1 - c_2\beta + c_3\alpha_2 + c_4\beta = 0;$$

$$c_1 \sin(\beta h) + c_2 \cos(\beta h) - [c_3 \sin(\beta h) - c_4 \cos(\beta h)] \times \exp[(\alpha_2 - \alpha_1)h] = 0;$$

$$c_1 \cos(\beta h) - c_2 \sin(\beta h) + [c_3 \cos(\beta h) + c_4 \sin(\beta h)] \times \exp[(\alpha_2 - \alpha_1)h] = A^* \omega \exp(-\alpha_1 h).$$

Из неё следует, что

$$c_1 = c(a_3 b_4 - a_4 b_3); \quad c_2 = -c(a_4 b_4 + a_3 b_3); \quad (20)$$

$$c_3 = c b_4; \quad c_4 = -c b_3.$$

Здесь  $c = \frac{A^* \omega}{b_3^2 + b_4^2} \exp(-\alpha_1 h);$

$$a_3 = \frac{\beta^2 - \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1^2 + \beta^2}; \quad a_4 = -\frac{\beta(\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_1^2 + \beta^2};$$

$$b_3 = a_3 \sin(\beta h) - a_4 \cos(\beta h) - \sin(\beta h) \exp[(\alpha_2 - \alpha_1)h];$$

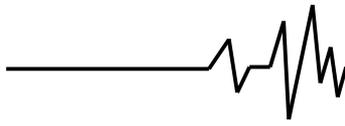
$$b_4 = a_4 \sin(\beta h) + a_3 \cos(\beta h) + \cos(\beta h) \exp[(\alpha_2 - \alpha_1)h]$$

В итоге решение краевой задачи, представленной выражениями (12), (14), принимает вид:

$$u_2(y, t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \exp(\alpha_1 y) \sin(\omega t + \beta y + \varphi_1) + \sqrt{c_3^2 + c_4^2} \exp(\alpha_2 y) \sin(\omega t - \beta y + \varphi_2), \quad (22)$$

где  $\varphi_1 = \text{arctg} \frac{c_2}{c_1}; \quad \varphi_2 = \text{arctg} \frac{c_4}{c_3}.$

Таким образом, согласно (10), продольная проекция скорости потока состоит из двух слагаемых. Первое (15) не зависит от времени и описывает усреднённое за период колебаний значение продольной скорости по высоте слоя. Второе (22) зависит от времени и представляет колебания скорости, вызванные продольными вибрациями решета.



В соответствии с принятыми допущениями общая производительность решета по проходовой фракции  $Q_{II}$  не зависит от времени. Её легко вычислить по формуле:

$$Q_{II} = v_{II} l H,$$

в которой  $l, H$  - соответственно длина и ширина сепарирующей плоскости решета.

Зависимой от времени оказывается объёмная производительность решета по сходовой фракции  $Q_c$ . Она, как и продольная скорость потока, состоит из постоянной и переменной составляющих

$$Q_c = Q_{1c} + Q_{2c}(t).$$

Первое слагаемое имеет компактный вид:

$$Q_{1c} = H \int_0^h u_1(y) dy = \frac{hH}{v_{II}} g \sin \theta \left[ \frac{\mu}{\rho v_{II}} \left( 1 - \frac{\mu}{\rho h v_{II}} \right) \times \exp \left( \frac{\rho}{\mu} h v_{II} \right) - \frac{h}{2} + \frac{1}{h} \left( \frac{\mu}{\rho v_{II}} \right)^2 \right], \quad (23)$$

а второе является более сложным выражением:

$$Q_{2c}(t) = H \operatorname{Im} \left\{ \exp(i \omega t) \left[ \frac{(c_1 + i c_2)(\alpha_1 - i \beta)}{\alpha_1^2 + \beta^2} \times (\exp(\alpha_1 + i \beta) h - 1) + \frac{(c_3 + i c_4)(\alpha_2 + i \beta)}{\alpha_2^2 + \beta^2} \times (\exp(\alpha_2 - i \beta) h - 1) \right] \right\}, \quad (24)$$

Изменение производительности решета происходит во времени по гармоническому закону.

Формула (23) непригодна для вычислений  $Q_{1c}$  при  $v_{II} = 0$ , так как в ней

возникает неопределённость вида  $\left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|$ .

Предельный переход в (23) при  $v_{II} \rightarrow 0$  даёт

$$Q_{1c} = \frac{\rho g H h^3}{3 \mu} \sin \theta,$$

что согласуется с известными результатами [7,9].

Упростим далее выражения (22) и (24) для высокочастотных вибраций решета, когда выполняются неравенства:

$$1 \ll h \sqrt{\rho \omega / (2 \mu)}; \quad \rho_* \ll \sqrt{\rho \omega / (2 \mu)}.$$

В силу этих неравенств и выражений (18), (20) и (21) имеют место соотношения:

$$\alpha_1 \approx -\alpha_2 \approx \beta \approx \sqrt{\rho \omega / (2 \mu)}; \quad \alpha_3 \approx 1; \quad \alpha_4 \approx 0; \\ b_3 \approx \sin \beta h;$$

$$b_4 \approx \cos \beta h; \quad c_1 \approx c_3 \approx A^* \omega \exp(-\beta h) \cos \beta h; \\ c_2 \approx c_4 \approx -A^* \omega \exp(-\beta h) \sin \beta h.$$

Учитывая их, вместо (22) и (24) получаем приближения:

$$u_2(y, t) \approx A^* \omega \left[ \exp \beta (y - h) \sin(\omega t + \beta y - \beta h) + \exp(-\beta (y + h)) \sin(\omega t - \beta y - \beta h) \right];$$

$$Q_{2c}(t) \approx \frac{H A^* \omega}{2 \beta} (\sin \omega t - \cos \omega t).$$

Из этих выражений следует, что в высокочастотном режиме вибраций решета амплитуды колебаний продольной скорости слоя на его поверхности  $y = 0$  очень малы. Они возрастают с глубиной и максимальны у поверхности решета  $y = h$ . Амплитуды колебаний производительности оказываются пропорциональными не  $\omega$ , а  $\sqrt{\omega}$ . Они также пропорциональны квадратному корню из коэффициента вибровязкости смеси.

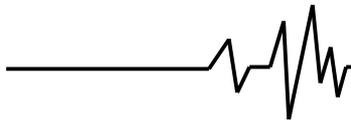
Анализ результатов расчёта. Расчёт среднего значения толщины слоя движущейся смеси проводили по приближённой формуле:

$$h = \sqrt[3]{h_0^3 - \frac{3 \mu v_{II} l}{\rho g \sin \theta}},$$

в которой  $h_0$  - толщина слоя, с которой он подаётся на решето.

Записанная формула выражает в среднем равенство объёмов смеси, которые поступают и сходят с решета за единицу времени.

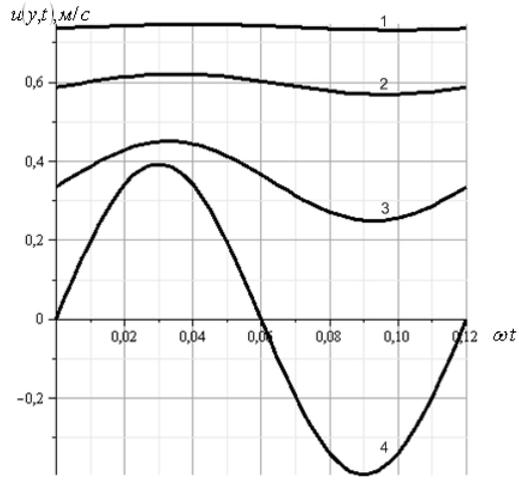
Вычисления проводили при следующих исходных данных:  $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$ ;  $h_0 = 0,008 \text{ м}$ ;  $\theta = 8^\circ$ ;  $l = 0,79 \text{ м}$ ;  $A^* = 0,0075 \text{ м}$ ;  $\omega = \omega_1 = 41,86 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega = \omega_2 = 52,33 \text{ с}^{-1}$ ;  $v_{II} = 0,001; 0,003 \text{ м/с}$ . Коэффициент вибровязкости смеси  $\mu$  полагали зависящим от  $\omega$ . При  $\omega = \omega_1$   $\mu = 0,0520 \text{ Па}\cdot\text{с}$ , а при  $\omega = \omega_2$   $\mu = 0,0385 \text{ Па}\cdot\text{с}$



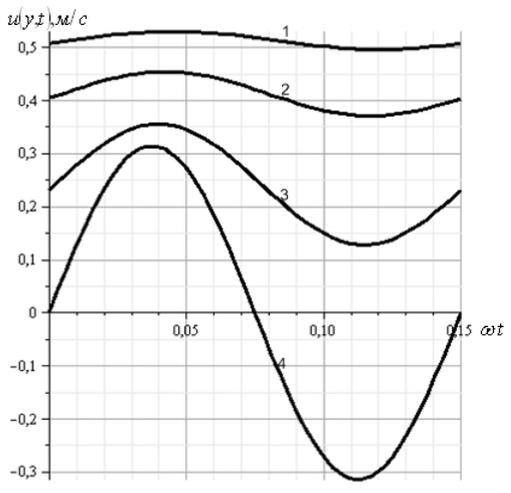
Вычисленные по (10) значения  $u(y,t)$  при различных  $y$  графически показаны на рис. 2, где цифрами 1,2,3,4 отмечены линии, соответствующие  $yh^{-1} = 0,25; 0,5; 0,75; 1$ .

**Выводы.** С увеличением глубины частицы в слое уменьшается средняя скорость движения, но возрастает амплитуда её колебаний. Такие же изменения  $u(y,t)$  проходят по мере возрастания скорости отделения проходовой фракции от сходовой на перфорированной поверхности решета.

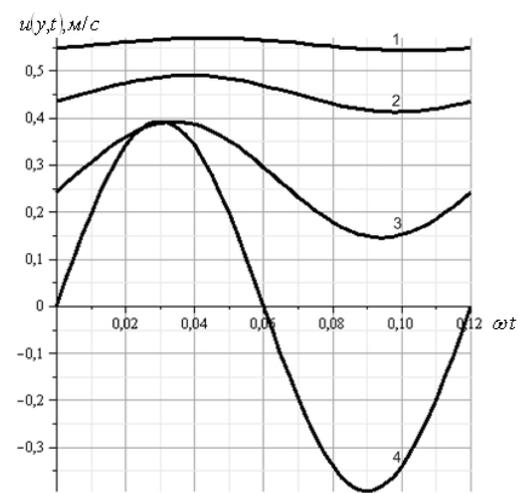
Полученные зависимости колебаний скорости зерновой смеси устанавливают закономерности нелинейной динамики её слоёв для управления процессом решётного вибросепарирования.



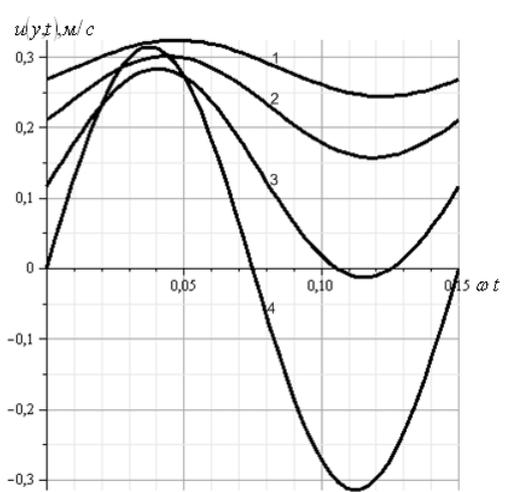
е)



а)



е)



б)

**Рис. 2. Зависимости колебаний скорости зерновой смеси по высоте слоя:**

1,2,3,4 –  $y/h = 0,25; 0,5; 0,75; 1$ ;

а) -  $v_{II} = 0,001$  м/с;  $\omega = 41,86$  с<sup>-1</sup>;

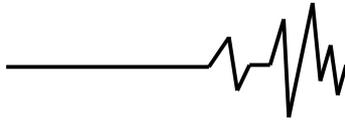
б) -  $v_{II} = 0,003$  м/с;  $\omega = 41,86$  с<sup>-1</sup>;

в) -  $v_{II} = 0,001$  м/с;  $\omega = 52,33$  с<sup>-1</sup>;

г) -  $v_{II} = 0,003$  м/с;  $\omega = 52,33$  с<sup>-1</sup>

**Литература**

1. Тищенко Л.Н. Интенсификация сепарирования зерна. – Харьков: Основа, 2004. – 224с.  
2. Тищенко Л.Н., Пивень М.В. К исследованию динамики зернового потока на наклонном решете // Підвищення надійності відновлюємих деталей машин: Вісник ХДТУСГ. Харків: ХДТУСГ, 2001. Вип. 8. Т. 1. С. 198-205.



3. Тищенко Л.Н., Пивень М.В. К исследованию движения зерновой смеси на решете под действием вибрации // *Научный вестник НАУ*. К.: НАУ, 2002. Вип. 49. С. 329-336.

4. Тищенко Л.Н., Миняйло А.В., Пивень М.В., Харченко С.А. Исследование послойного движения зерновых смесей на плоских вибрационных решётах // *Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник ХНТУСГ*. Харків: ХНТУСГ, 2007. Вип. 59. Т. 1. С. 69-76.

5. Захаров Н.М. Об аналогах вибрируемого слоя с вязкой жидкостью: Доклады МИИСП. М., 1966. Т. 111. Вып. 1. С. 201-210.

6. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П. Решения упрощённых уравнений гидродинамики при моделировании движения зерновой смеси по наклонному плоскому

решету // *Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв. Вісник ХНТУСГ*. – Харків: ХНТУСГ, 2008. – Вип. 74. – С. 306–312.

7. Тищенко Л.Н., Кучеренко С.И., Ольшанский В.П., Зайцев О.Б. Модель однослойного движения зерновой смеси по наклонному рифлёному решету // *Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв. Вісник ХНТУСГ*. – Харків: ХНТУСГ, 2008. – Вип. 74. – С. 28–39.

8. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. К расчёту движения зерновой смеси на вибрирующем плоском наклонном решете // *Вібрації в техніці та технологіях*, № 1, 2009. – С. 109-113.

9. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. – М.: Наука, 1973. – 847 с.