Сметанкіна Н. В.

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

УДК 539.3:534.1

НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ БАГАТОШАРОВИХ ОРТОТРОПНИХ ОБОЛОНОК НЕКАНОНІЧНОЇ ФОРМИ

На основе приема расширения заданной области разработан метод исследования колебаний многослойных цилиндрических ортотропных оболочек с неканонической формой плана при импульсном нагружении. Колебания оболочек исследуются в рамках теории первого порядка, учитывающей деформации поперечного сдвига, обжатия по толщине и инерции вращения нормального элемента. Приведен пример расчета колебаний пятислойной оболочки.

An approach to solution of the problem about non-stationary vibrations of multilayer cylindrical orthotropic shells with a non-canonical shape in plan view is developed on the basis of the method of the given domain expansion. Vibrations of shells are investigated within the framework of the first order theory accounting to transverse shear strains, compression on width and normal element rotation inertia in each layer. The example of calculation of vibrations of a five-layer shell is presented.

Розробка і застосування нових конструкційних матеріалів, а саме композиційних матеріалів, є характерною тенденцією розвитку сучасної техніки [1, 2]. Багатошарові оболонки з композиційних матеріалів є одними з основних конструктивних елементів різноманітних конструкцій та приладів, які можуть піддаватися інтенсивним динамічним навантаженням [1-3]. Найпоширенішими методами дослідження динамічної поведінки багатошарових оболонок неканонічної форми є чисельні методи, наприклад, методи скінчених та граничних елементів. Теоретичні методи менш розроблені, що пов'язано зі складністю математичних моделей, які описують процес деформування таких оболонок при інтенсивних короткочасних впливах. Для розрахунку напружено-деформованого стану оболонок неканонічної форми у плані також застосовуються методи, засновані на прийомі використання відомих аналітичних розв'язків у простих областях для одержання розв'язків в областях більш складних конфігурацій: метод фіктивних канонічних областей [4], метод розширення заданої області [5], метод компенсуючих навантажень [6], метод геометричного занурення [7]. Але найчастіше за допомогою зазначених методів розглядаються задачі про статичне деформування однорідних елементів конструкцій або задачі про їх вільні коливання. Питання нестаціонарної динаміки багатошарових композитних оболонок залишаються недостатньо вивченими, що потребує подальшого розвитку та удосконалення методів розрахунку таких оболонок.

У даній роботі на основі прийому розширення заданої області запропоновано метод розв'язання задачі про нестаціонарні коливання багатошарових ортотропних оболонок з неканонічною формою плану, який дає можливість подати розв'язок задачі в аналітичному вигляді.

Розглядається незамкнена багатошарова циліндрична оболонка радіуса R. Оболонка складається з I ортотропних шарів постійної товщини h_i та займає на координатній поверхні (зовнішня поверхня першого шару) область Ω, що обмежена контуром Γ: $x_\Gamma = x(s)$, $y_\Gamma = y(s)$ (s – поточна довжина дуги). На оболонку діють імпульсні навантаження $\mathbf{P} = \{p_j(x, y, t)\}$ $\left(j = \overline{1, 3I+3}\right)$. Координата x змінюється вздовж твірної, координата y – вздовж дуги поперечного перерізу оболонки. Додатний напрям осі Oz збігається з напрямом зовнішньої нормалі до координатної поверхні.

Динамічна поведінка оболонки описується на основі кінематичних гіпотез, які враховують деформації поперечного зсуву, обтиснення по товщині й інерції обертання нормального елемента у межах кожного шару:

$$u_k^i = u_k + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+l(k-1)+j} + (z-\delta_{i-1}) u_{3+l(k-1)+i}, \quad (1)$$

де $k = 1,2,3,\ i = \overline{1,l}$; $\delta_i = \sum_{j=1}^{i} h_j,\ \delta_{i-1} \le z \le \delta_i$; $u_k = u_k(x,y,t)\ (k = 1,2,3)$ – переміщення точки координатної поверхні в напрямку координатних осей; $u_{3+l(k-1)+i} = u_{3+l(k-1)+i}(x,y,t)$ $(k = 1,2)$ – кути повороту нормального елемента в i-му шарі навколо координатних осей Ox і Oy; $u_{3+2l+i} = u_{3+2l+i}(x,y,t)$ – обтиснення нормального елемента в i-му шарі; t – час.

Деформації оболонки мають вигляд

$$\varepsilon_x^i = u_{1,x}^i,\ \varepsilon_y^i = \frac{1}{1+z/R}\left(u_{2,y}^i + \frac{1}{R}u_3^i\right),\ \varepsilon_z^i = u_{3,z}^i,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{1+z/R}u_{1,y}^i + u_{2,x}^i,\quad \gamma_{xz}^i = u_{1,z}^i + u_{3,x}^i,$$

$$\gamma_{yz} = u_{2,z}^i + \frac{1}{1+z/R}u_{3,y}^i - \frac{1}{R(1+z/R)}u_2^i,\ i = \overline{1,l}. \quad (2)$$

Напруження і деформації в i-му шарі зв'язані законом Гука для ортотропного тіла [2, 8]

$$\sigma_x^i = B_{11}^i\,\varepsilon_x^i + B_{12}^i\,\varepsilon_y^i + B_{13}^i\,\varepsilon_z^i,$$

$$\sigma_y^i = B_{12}^i\,\varepsilon_x^i + B_{22}^i\,\varepsilon_y^i + B_{23}^i\,\varepsilon_z^i,$$

$$\sigma_z^i = B_{13}^i\,\varepsilon_x^i + B_{23}^i\,\varepsilon_y^i + B_{33}^i\,\varepsilon_z^i,$$

$$\tau_{yz}^i = B_{44}^i\,\gamma_{yz}^i,\ \tau_{xz}^i = B_{55}^i\,\gamma_{xz}^i,$$

$$\tau_{xy}^i = B_{66}^i\,\gamma_{xy}^i,\ i = \overline{1,l}. \quad (3)$$

З урахуванням співвідношень (1)–(3) з варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона [9] одержимо рівняння руху оболонки під впливом навантажень $\mathbf{P}$

$$\left[\mathbf{\Omega}^{\rho}\right]\mathbf{U}_{,tt} - [\mathbf{\Lambda}]\,\mathbf{U} = \mathbf{P},\ (x,y)\in\Omega;$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{,t} = 0,\ t = 0, \quad (4)$$

і систему граничних умов на контурі Γ

$$\left[\mathbf{B}^{\Gamma}\right]\mathbf{U} = \mathbf{P}^{\Gamma},\quad (x,y)\in\Gamma, \quad (5)$$

де

$$\mathbf{U} = \{u_j(x,y,t)\},\ j = \overline{1,3l+3};$$

$$B_{ij}^{\Gamma} = \chi_i^1 B_{ij}^u + \chi_i^2 B_{ij}^{\sigma},\ i,j = \overline{1,3l+3},$$

$\left[\mathbf{\Omega}^{\rho}\right]$ та $[\mathbf{\Lambda}]$ – симетричні матриці.

Вигляд елементів матриці $\left[\mathbf{B}^{\Gamma}\right]$ та вектора граничних навантажень $\mathbf{P}^{\Gamma}$ залежить від граничних умов на контурі оболонки. Надаючи різних значень коефіцієнтам χ_i^1 та χ_i^2 (5), можна змоделювати необхідні граничні умови на контурі оболонки. Наприклад, при вільному опиранні по контуру ці коефіцієнти набувають значень:

$$\chi_1^1 = \chi_2^1 = \chi_{3+i}^1 = \chi_{3+l+i}^1 = \chi_{3+2l+i}^1 = 0,\quad \chi_3^1 = 1,$$

$$\chi_1^2 = \chi_2^2 = \chi_{3+i}^2 = \chi_{3+l+i}^2 = \chi_{3+2l+i}^2 = 1,\quad \chi_3^2 = 0,$$

$$i = \overline{1,l}.$$

Метод розв'язання поставленої задачі (4), (5) заснований на прийомі розширення заданої області [5, 10]. Вихідна багатошарова оболонка розширюється до допоміжної багатошарової оболонки з тим же пакетом шарів. Форма і граничні умови допоміжної оболонки обираються таким чином, щоб розв'язок задачі можна було б одержати досить просто. Найбільш простий вигляд розв'язку можна одержати, якщо обрати як допоміжну прямокутну в плані шарнірно оперту оболонку. Це дозволяє подати розв'язок вихідної задачі у вигляді розвинень у тригонометричні ряди по функціях, що задовольняють граничні умови шарнірного опирання.

Щоб забезпечити виконання вихідних граничних умов (5), до допоміжної оболонки додаються додаткові компенсуючі навантаження $\mathbf{Q}^{\text{comp}} = \left\{q_j^{\text{comp}}(x,y,t)\right\}$ $\left(j = \overline{1,3l+3}\right)$, неперервно розподілені по контуру Γ. Таким чином, задача про коливання оболонки неканонічної форми з довільними граничними умовами зводиться до задачі про коливання прямокутної в плані шарнірно опертої оболонки. Компенсуючі навантаження входять у рівняння руху допоміжної оболонки у вигляді таких інтегральних співвідношень:

$$p_j^{\text{comp}}(x,y,t) = \sum_{k=1}^{3l+3}\oint_{\Gamma}\varsigma_{jk}\,q_k^{\text{comp}}(s,t)\,\delta(x-x_{\Gamma},y-y_{\Gamma})\,ds,$$

$$j,k = \overline{1,3l+3},$$

де $\delta(x-x_{\Gamma},y-y_{\Gamma})$ – двовимірна δ-функція.

Ненульові елементи матриці ζ_{jk} мають вигляд

$$\zeta_{11} = \zeta_{22} = \zeta_{3+i\ 3+i} = \zeta_{3+l+i\ 3+l+i} = l_x,$$

$$\zeta_{33} = \zeta_{3+2l+i\ 3+2l+i} = 1,\ \zeta_{12} = \zeta_{3+i\ 3+l+i} = -l_y,$$

$$\zeta_{21} = \zeta_{3+l+i\ 3+i} = l_y,$$

або, з урахуванням параметризації контуру,

$$\zeta_{11} = \zeta_{22} = \zeta_{3+i\ 3+i} = \zeta_{3+l+i\ 3+l+i} = y'_{\Gamma},$$

$$\zeta_{33} = \zeta_{3+2l+i\,3+2l+i} = 1,\ \zeta_{12} = \zeta_{3+i\ 3+l+i} = x'_{\Gamma},$$

$$\zeta_{21} = \zeta_{3+l+i\ 3+i} = -x'_{\Gamma},\ i = \overline{1,l},$$

де l_x та l_y – напрямні косинуси нормалі до контуру Γ, $x'_\Gamma = \dfrac{dx_\Gamma}{ds}$, $y'_\Gamma = \dfrac{dy_\Gamma}{ds}$.

З умови задоволення вихідним граничним умовам на контурі Γ (5) формується система інтегральних рівнянь, з якої визначаються невідомі інтенсивності компенсуючих навантажень:

$$\left[\mathbf{B}^{\Gamma}\right]\mathbf{U}\left[\mathbf{Q}^{\text{comp}}(x,y,t)\right]=\mathbf{P}^{\Gamma},\quad (x,y)\in\Gamma. \qquad (6)$$

Метод розв'язання системи (6) полягає в тому, що функції переміщень (1), заданих і компенсуючих навантажень розвиваються в подвійні тригонометричні ряди по функціях, що задовольняють граничні умови допоміжної оболонки:

$$u_j(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{jmn}(t)C_{jmn}(x,y),$$

$$p_j(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}p_{jmn}(t)C_{jmn}(x,y),$$

$$p_j^{\text{comp}}(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}p_{jmn}^{\text{comp}}(t)C_{jmn}(x,y),$$

$$j=\overline{1,3l+3},$$

де

$$C_{1mn}=\cos\frac{m\pi x}{A}\sin\frac{n\pi y}{B},\ C_{2mn}=\sin\frac{m\pi x}{A}\cos\frac{n\pi y}{B},$$

$$C_{3mn}=\sin\frac{m\pi x}{A}\sin\frac{n\pi y}{B},$$

$$C_{3+i\,mn}=C_{1mn},\quad C_{3+l+i\ mn}=C_{2mn},$$

$$C_{3+2l+i\ mn}=C_{3mn},\quad i=\overline{1,l};$$

$$p_{jmn}(t)=\frac{4}{AB}\int_0^A\int_0^B p_j(t)C_{jmn}(x,y)dxdy,$$

$$p_{jmn}^{\text{comp}}(t)=\frac{4}{AB}\sum_{k=1}^{3l+3}\oint_\Gamma L_{jk}\,q_k^{\text{comp}}(s,t)C_{jmn}(x_\Gamma,y_\Gamma)\mathrm{d}s,$$

$$j=\overline{1,3l+3};$$

A – довжина твірної допоміжної оболонки, B – довжина дуги цієї оболонки.

Функції компенсуючих навантажень розвиваються в ряд уздовж контуру Γ:

$$q_j^{\text{comp}}(s,t)=\sum_{\alpha=1,2}\sum_{\mu=0}^{\infty}q_{j\alpha\mu}(t)b_{\alpha\mu}(s),\ \ j=\overline{1,3l+3}, \qquad (7)$$

де

$$b_{1\mu}=\sin[\mu\gamma(s)],\ b_{2\mu}=\cos[\mu\gamma(s)],$$

$$\gamma(s)=2\pi\int_0^s\mathrm{d}\tilde{s}\Big/\oint_\Gamma\mathrm{d}\tilde{s},\ 0\le\gamma(s)\le2\pi,\ \mu=\overline{0,\mu^*}.$$

Граничні функції, що входять у вихідні граничні умови на контурі Γ (5), також розвиваються в ряд уздовж контуру Γ. У результаті система (6) на кожному кроці за часом перетворюється на систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів розвинення компенсуючих навантажень у ряд уздовж контуру Γ. Порядок одержаної системи залежить від числа шарів в оболонці і кількості членів ряду у розвиненні (7). Система рівнянь руху (4) перетворюється на систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яка інтегрується методом розвинення розв'язку в ряд Тейлора [9, 10]. Таким чином, після обчислення компенсуючих навантажень розв'язок задачі набуває вигляду:

$$u_j(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{AB}\sum_{k=1}^{3l+3}\pi_{jk}^{mn}\sum_{l=1}^{3l+3}\sum_{\alpha=1,2}\sum_{\mu=0}^{\infty}\theta_{kl\alpha\mu}^{mn}q_{l\alpha\mu}(t)+\right.$$
$$\left.+\varepsilon_{jmn}(t)\right)C_{jmn}(x,y),$$

де π_{jk}^{mn}, $\theta_{kl\alpha\mu}^{mn}$, ε_{jmn} – елементи матриць, отриманих у результаті чисельних перетворень.

Після обчислення компенсуючих навантажень, визначаються переміщення (1), деформації (2) і напруження (3) у шарах вихідної оболонки.

Як приклад розглядається вільно оперта п'ятишарова циліндрична оболонка під впливом поперечного імпульсного навантаження

$$p(x,y,t)=0{,}25\,p_0\,[1+\text{sgn}(\tau-t)]\left(1-\cos\frac{2\pi t}{\tau}\right),$$

де

$$p_0=0{,}1\ \text{МПа},\ \tau=5\ \text{мс}.$$

Навантаження рівномірно розподілене по круговій площині радіусом $r_0=0{,}1$ м. Контур оболонки складений з відрізків прямих і сполучених з ними дуг кіл. Форма плану оболонки та область навантаження Ω_p наведені на рис. 1.

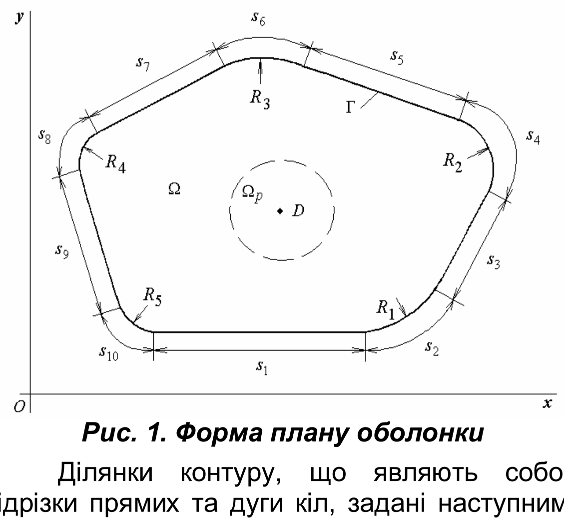

Рис. 1. Форма плану оболонки

Ділянки контуру, що являють собою відрізки прямих та дуги кіл, задані наступними рівняннями:

$$x = x_{2k-1} + \left(S - S_{2(k-1)}\right)\cos\alpha_{2k-1},$$

$$y = y_{2k-1} + \left(S - S_{2(k-1)}\right)\sin\alpha_{2k-1}, \quad k = \overline{1,K},$$

$$x = x_{2k} + R_k\left[\sin\left(\frac{S - S_{2k-1}}{R_k} + \alpha_{2k-1}\right) - \sin\alpha_{2k-1}\right],$$

$$y = y_{2k} - R_k\left[\cos\left(\frac{S - S_{2k-1}}{R_k} + \alpha_{2k-1}\right) - \cos\alpha_{2k-1}\right],$$

$$k = \overline{1,K},$$

де α_{2k-1} – кут між $(2k-1)$-м відрізком прямої на контурі і додатним напрямком осі Ox; S – довжина ділянки контуру від початку відліку до поточної точки на даній ділянці контуру; $S_k = \sum_{i=1}^{k} s_i$, $S_0 = 0$; $K = 5$, $s_1 = 0{,}5$ м, $s_3 = 0{,}23$ м, $s_5 = 0{,}44$ м, $s_7 = 0{,}34$ м, $s_9 = 0{,}31$ м; $R_1 = 0{,}25$ м, $R_2 = 0{,}12$ м, $R_3 = 0{,}27$ м, $R_4 = 0{,}08$ м, $R_5 = 0{,}11$ м; $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_3 = 60^\circ$, $\alpha_5 = 160^\circ$, $\alpha_7 = 205^\circ$, $\alpha_9 = 285^\circ$.

Оболонка має радіус кривини $R = 5$ м і такі товщини шарів – $h_i = 0{,}01$ м. Шари оболонки виготовлені з епоксидного вуглепластику T300/5208 [11, 12] з наступними механічними характеристиками: $E_1^i = 132{,}5$ ГПа, $E_2^i = 10{,}8$ ГПа (модулі пружності), $G_{12}^i = G_{13}^i = 5{,}7$ ГПа, $G_{23}^i = 3{,}4$ ГПа (модулі зсуву), $\nu_1^i = 0{,}24$ (коефіцієнти Пуассона), $\theta_1 = \theta_3 = \theta_5 = 0^\circ$, $\theta_2 = \theta_4 = 90^\circ$ (кути армирування у шарах); $\rho_i = 1500$ кг/м^3 (густина матеріалу).

На рис. 2 наведена залежність напруження σ_x^5 від часу у точці D (рис. 1) на зовнішній поверхні п'ятого шару.

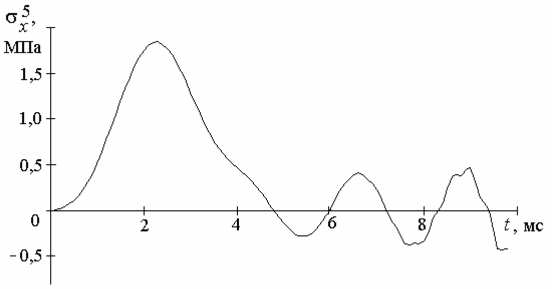

Рис. 2. Змінення у часі напруження σ_x^5 у п'ятишаровій оболонці

Таким чином, розроблено метод дослідження нестаціонарних коливань багатошарових ортотропних циліндричних оболонок з неканонічною формою плану. Запропонований метод може бути застосований до розрахунку оболонок різної геометрії з різними граничними умовами при широкому діапазоні змінення фізико-механічних властивостей шарів. Отримані результати можуть бути використані при проектуванні оболонкових елементів енергетичних, транспортних і будівельних конструкцій.

Література

1. Librescu L., Hause T. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey // Composite Structures.– 2000.– V. 48.– P. 1–17.

2. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов.– М.: Мир, 1982.–334 с.

3. Carrera E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells // Appl. Mech. Rev.– 2003.– V. 56, N 3.– P. 287–308.

4. Гладкий С.Л., Степанов Н.А., Ясницкий Л.Н. Интеллектуальное моделирование физических проблем.– Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. – 200 с.

5. Безухов Н.И., Лужин О.В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач.– М.: Высшая школа, 1974.– 200 с.

6. Баженов В.А., Чан Дык Тинь. Анализ гармонических колебаний цилиндрических оболочек методом компенсирующих нагрузок // Опір матеріалів і теорія споруд.– 2003.– Вип. 72.– С. 28–40.

7. Шардаков И.Н., Труфанов Н.А., Матвеенко В.П. Метод геометрического погружения в теории упругости.– Екатеринбург: УрО РАН, 1999.– 298 с.

8. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек.– М.: Наука, 1974.– 448 с.

9. Шупиков А.Н., Бузько Я.П., Сметанкина Н.В., Угримов С.В. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация. – Харьков: Изд. ХНЭУ, 2004.– 252 с.

10. Smetankina N.V., Shupikov A.N., Sotrikhin S.Yu., Yareschenko V.G. A noncanonically shape laminated plate subjected to impact loading: Theory and experiment // Trans. ASME. – Journal of Applied Mechanics.– 2008.– V. 75, № 5.– P. 051004-1–051004-9.

11. Kam T.Y., Lai F.M., Liao S.C. Minimum weight design of laminated composite plates subject to strength constraint // AIAA J. – 1996. – V. 34, № 8. – P. 1699–1708.

12. Композиционные материалы: в 8-ми т.– Т. 7. Анализ и проектирование конструкций. Ч. 1 / Под. ред. К. Чамиса.– М.: Машиностроение, 1978.– 300 с.