Кузьо І. В.

Сокіл Б. І.

Андрухів А. І.

Сокіл М. Б.

Національний університет „Львівська політехніка”

УДК 534.111

АСИМПТОТИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ДОВГОМІРНИХ ТІЛАХ, ЯКІ ХАРАКТЕРИЗУЮТЬСЯ ПОЗДОВЖНІМ РУХОМ

Для исследования динамических процессов в длинномерных гибких телах, которые характеризуются продольным движением, развивається идея представления процесса в виде наложения волн разных длин одинаковых частот. Ее сочетание с основной идеей асимптотических методов Крилова-боголюбова-митропольского (КБМ) позволяет определить основные параметры процесса для нерезонансного и резонансного случаев.

For research of dynamic processes in довгомірних flexible bodies, which are characterized longitudinal motion, розвивиається idea of presentation of process as imposition of waves of different lengths of identical frequencies. Its combination with the basic idea of asymptotic methods of Krilova-bogolyubova-mitropol'skogo (KBM) allows to define the basic parameters of process for unresonance and resonance cases.

Актуальність і огляд основних результатів. Аналітичне дослідження динамічних процесів у довгомірних гнучких тілах, котрі характеризуються сталою чи змінною швидкостями руху зв’язано із значними труднощами в першу чергу через відсутність точних чи достатньо обґрунтованих наближених методів дослідження математичних моделей процесу. Навіть при розгляді найпростіших (лінійних) коливань цих систем не вдається застосувати такі класичні методи інтегрування відповідних рівнянь з частинними похідними як Фур’є та Д’Аламбера. В той же час, чисельні методи аналізу конкретних систем не можуть дати узагальнюючих результатів, які б слугували базою для широкопланових конструкторських робіт, а результати експериментальних досліджень показують на значний вплив швидкості руху, фізико-механічних властивостей матеріалу, періодичних сил на характер процесу. Пряме використання асимптотичних [1] чи інших методів для розгляду вказаного класу задач [2-6] (у тому числі і для випадку сильно нелінійних коливань) можливе в певній мірі за малих швидкостей поздовжнього руху, що значно обмежує коло прикладних задач. Розглянутий ж в [7] розвиток асимптотичних методів на дослідження динамічних процесів систем, що характеризуються поздовжньою складовою руху, простотою не відзначається, тому не набув широкого застосування. Метою даної роботи є узагальнення на більш складніші системи методики аналітичного дослідження динамічних процесів рухомих систем основна ідея котрої викладена у роботах [8,9]. Вона побудована на фізично обґрунтованій ідеї представлення динамічного процесу в одновимірних системах, які характеризуються поздовжнім рухом, у вигляді накладання хвиль різних довжин однакових частот та узагальненні, на цій основі, асимптотичного методу КБМ для нових класів динамічних систем.

Постановка задачі. Математичною моделлю динамічних процесів одновимірних систем, які характеризуються сталою швидкістю руху за умови найпростіших законів взаємодії із зовнішнім середовищем може служити диференціальне рівняння

$$u_{tt}+2Vu_{xt}-\left(\alpha^2-V^2\right)u_{xx}+\gamma u=\varepsilon f\left(u,u_x,u_t,\theta\right), \quad (1)$$

в якому $u(x,t)$- переміщення перерізу з координатою x в довільний момент часу t; α,γ - сталі, які виражаються через фізико-механічні параметри тіла і описують характер взаємодії із середовищем; V - швидкість поздовжнього руху; $f(u,u_x,u_t,\theta)$- 2π - періодична по $\theta=\mu t$ функція, яка враховує нелінійно пружні властивості матеріалу тіла, а також вплив сил опору, дисипативних, періодичних сил на динаміку процесу (ε - малий параметр, μ - частота періодичного збурення). Для вказаного рівняння будемо розглядати крайові умови

$$u(x,t)\big|_{x=0}=u(x,t)\big|_{x=l}=0, \quad (2а)$$

$$u_x(x,t)\big|_{x=0}=u_x(x,t)\big|_{x=l}=0, \quad (2б)$$

які еквівалентні умовам відсутності поперечних переміщень тіл у фіксованих його точках (крайові умови (2а)), чи способу входження у вказані точки (крайові умови (2б)).

Зауважимо, що хвильові процеси середовищ значних довжин, які описуються рівнянням (1) чи більш складнішим його аналогом без урахування поздовжнього руху ($V=0$) вивчались у [10,11]. Однак, саме наявність у лівій його частині доданку із мішаною похідною створює основні труднощі аналітичного дослідження процесів систем, які описуються цим рівнянням.

Методика дослідження. З урахуванням того, що рівняння (1) є рівнянням із малою нелінійністю для його аналітичного дослідження використаємо основну ідею методів збурень [12], відповідно до якої першочерговим завданням є описати процес у відповідній незбуреній ($\varepsilon=0$) системі.

Незбурене рівняння. Подібним чиом, як і в [7,8], покажемо, що динамічний процес у випадку лінійного аналогу системи можна трактувати як накладання хвиль лізних довжин однакових частот, тобто

$$u_0(x,t)=a\cos(\kappa x+\omega t+\varphi)+b\cos(\chi x-\omega t+\psi) \quad (3)$$

де $a, b, \varphi, \psi, \kappa, \chi, \omega$ - відповідно амплітуди, початкові фази, хвильові числа і частота відбитої і прямої хвиль. Для встановлення зв'язку між цими параметрами отримуються дисперсійні співвідношення

$$\begin{gathered}\left(\alpha^2-V^2\right)\kappa^2-\omega^2-2V\kappa\omega+\gamma=0,\\ \left(\alpha^2-V^2\right)\chi^2-\omega^2+2V\chi\omega+\gamma=0,\end{gathered} \quad (4)$$

які разом із крайовими умовами (2а) або (2б) визначають основні характеристики хвиль

$$\begin{gathered}\kappa=\frac{k\pi}{l}+\frac{V}{\alpha l}\sqrt{k^2\pi^2+\frac{l^2\gamma}{\alpha^2-V^2}},\\ \chi=\frac{k\pi}{l}-\frac{V}{\alpha l}\sqrt{k^2\pi^2+\frac{l^2\gamma}{\alpha^2-V^2}},\\ \omega=\frac{\alpha^2-V^2}{\alpha l}\sqrt{k^2\pi^2+\frac{l^2\gamma}{\alpha^2-V^2}},\end{gathered} \quad (5)$$

та $\varphi=-\psi$, $a=-b$ - для крайових умов (2а) і $b=\dfrac{\kappa}{\chi}a$ - для крайових умов (2б). Таким чином, одночастотний хвильовий процес у лінійній моделі середовища можна описати залежністю

$$\begin{gathered}u_0(x,t)=a\left\{\cos\left[\frac{k\pi}{l}x+\rho\left(Vx+\left(\alpha^2-V^2\right)t\right)+\varphi\right]+\right.\\ \left.+\delta\cos\left[\frac{k\pi}{l}x-\rho\left(Vx+\left(\alpha^2-V^2\right)t\right)-\varphi\right]\right\}\end{gathered} \quad (6)$$

де $\rho=\dfrac{1}{\alpha l}\sqrt{k^2\pi^2+\dfrac{l^2\gamma}{\alpha^2-V^2}}$, $\delta=-1$ - для крайових умов (2а) та $\delta=\dfrac{\kappa}{\chi}$ - для крайових умов (2б).

Нижче на рис. 1, рис. 2 представлені залежності частоти коливань та хвильових чисел від швидкості руху і параметру γ.

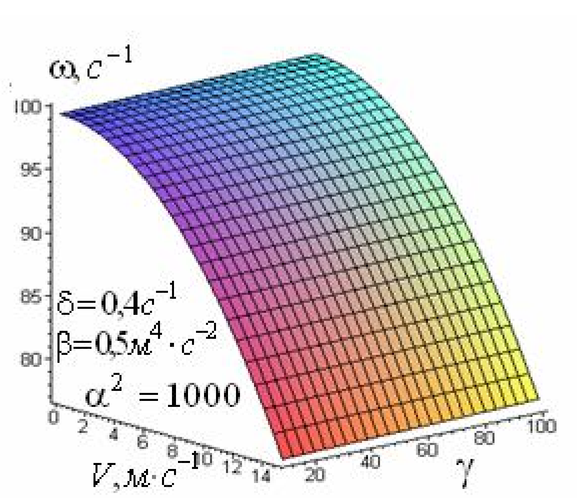

Рис. 1. Залежність частоти коливань від швидкості і параметру γ

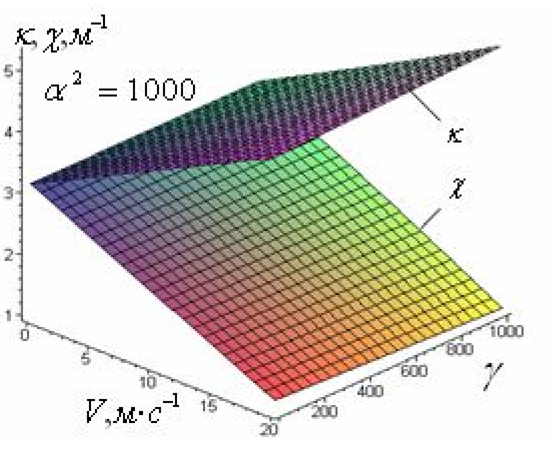

Рис. 2. Залежність хвильових чисел прямої та відбитої хвиль тіла від швидкості і параметру γ

Збурене рівняння. Якщо для незбуреного випадку параметри a і φ є сталі, то сил, аналітичну апроксимацію котрих виражає функція $f(u,u_x,u_t,\theta)$, призводять до того, що параметри a і φ стають змінними величинами. Нижче вважатимемо, що нелінійні і періодичні сили спричиняють зміни вказаних параметрів тільки в часі. До того ж, на закон зміни параметра a суттєво впливає співвідношення між частотами ω і μ: якщо між останніми існує зв'язок $m\omega \approx n\mu$ (m,n - взаємно прості числа), то динамічний процес характерний стрімким зростанням параметру a (резонансний випадок). Спочатку розглянемо більш простий нерезонансний випадок $m\omega \neq n\mu$. Відповідно до основної ідеї асимптотичних методів КБМ [1,13] закони зміни в часі параметрів a і φ можна задавати за допомогою диференціальних рівнянь

$$\dot{a} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots,$$

$$\dot{\varphi} = \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots . \qquad (7)$$

Крім цього, що нелінійні і періодичні сили є причиною зміни параметрів a і φ, вони у певній мірі і спотворюють форму самих хвиль. Таким чином функцію $u(x,t)$, яка є асимптотичним розв'язком крайових задач для рівняння (1) будемо шукати у вигляді ряду

$$u(x,t) = a\{\cos(\kappa x + \phi) + \delta \cos(\chi x - \phi)\} + \sum_{i=1} \varepsilon^i U_i(a,x,\phi,\theta), \quad (8)$$

де $\phi = \omega t + \varphi$, $U_i(a,x,\phi,\theta)$ - невідомі 2π - періодичні по ϕ і θ функції, які знаходяться таким чином, щоб асимптотичне представлення розв'язку (8) з врахуванням (7) з необхідним степенем точності задовольняло вихідному рівнянню (1). Диференціюючи (8), з урахуванням наведеного вище, отримуємо

$$L(U_1(a,x,\phi,\theta)) =$$
$$= f_1(a,x,\phi) + \Delta_1(x)(A_1(a)\cos\phi - aB_1 \sin\phi) +$$
$$+ \Delta_2(x)(A_1(a)\sin\phi + aB_1 \sin\phi), \qquad (10)$$

де

$$f_1(a,x,\phi,\theta) = f(u,u_x,u_t,\theta)\Big|_{\substack{u=a(\cos(\kappa x+\phi)-\cos(\chi x-\phi)),\\ u_x=-a(\kappa \sin(\kappa x+\phi)-\chi \sin(\chi x-\phi)),\\ u_t=-a\omega(\sin(\kappa x+\phi)+\sin(\chi x-\phi)).}}$$

$$L(U_1(a,x,\phi,\theta)) = \left(\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\mu^2 + \omega\mu \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} + \right.$$
$$\left. + 2V\left(\mu \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial x} + \omega \frac{\partial^2}{\partial\phi\partial x}\right) - (\alpha^2 - V^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma\right) U_1(a,x,\phi,\theta),$$

$$\Delta_1(x) = (\omega + \kappa V)\sin\kappa x + (\omega - \chi V)\sin\chi x\,,$$
$$\Delta_2(x) = (\omega + \kappa V)\cos\kappa x - (\omega - \chi V)\cos\chi x\ \text{-}$$

для крайових умов (2а) і

$$\Delta_1(x) = (\omega + \kappa V)\sin\kappa x + \kappa\left(V - \frac{\omega}{\chi}\right)\sin\chi x\,,$$

$$\Delta_2(x) = (\omega + \kappa V)\cos\kappa x - \kappa\left(V - \frac{\omega}{\chi}\right)\cos\chi x\ \text{-}$$

для крайових умов (2б).

Подібного вигляду отримуються і рівняння для другого і наступних наближень з тією лише різницею, що функції $f_2(a,x,\phi)$, $f_3(a,x,\phi)$, ... мають більш складний вигляд. Для однозначного визначення функцій, які описують закони зміни в часі параметрів a та ϕ, тобто $A_1(a), A_2(a),\ldots,$ $B_1(a), B_2(a),\ldots$ накладемо на $U_1(a,x,\phi,\theta)$, $U_2(a,x,\phi,\theta)$,... додаткові умови, а саме

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} U_i(a,x,\phi,\theta)\begin{Bmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{Bmatrix} d\phi d\theta = 0. \qquad (11)$$

Умови (11) еквівалентні відсутності у розкладах функцій $U_i(a,x,\phi,\theta)$ доданків пропорційних головним гармонікам ϕ. Із асимптотичного представлення розв'язку (8) та умов (11) випливає, що параметр a є одночасно амплітудою прямої відбитої хвиль збуреного рівняння для крайових умов (2а), та відповідно a і $\frac{\kappa}{\chi}a$ - для крайових умов (2б). Із диференціального рівняння (10), враховуючи (11), отримуємо залежності, які визначають закони зміни амплітудно-частотної характеристики

$$A_1(a)=\frac{\varepsilon}{4\pi^2 l\left[(\omega+\kappa V)^2+(\omega-\chi V)^2\right]}\times$$
$$\times\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(a,x,\phi,\theta)\{\Delta_1(x)\cos\phi+\Delta_2(x)\sin\phi\}d\phi d\theta dx,$$

$$B_1(a)=\frac{\varepsilon}{a4\pi^2 l\left[(\omega+\kappa V)^2+(\omega-\chi V)^2\right]}\times$$
$$\times\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(a,x,\phi,\theta)\{\Delta_1(x)\sin\phi-\Delta_2(x)\cos\phi\}d\phi d\theta dx \qquad (12)$$

Для визначення невідомої функції $U_1(a,x,\phi,\theta)$, достатньо її, а також відому функцію $f_1(a,x,\phi,\theta)$ розкласти у ряди так, щоб виконувались крайові умови (2а) чи (2б) і зрівняти коефіцієнти при однакових гармоніках у правій і лівій частинах виразу, який при цьому утворюється із (10).

Набагато цікавішим і одночасно складнішим для дослідження є *резонансний випадок*. У резонансному випадку динамічний процес суттєво залежить від різниці фаз власних і вимушених коливань. Отже, як і в [1,13], при переході через резонанс амплітудно-частотна характеристика задається диференціальними рівняннями

$$\dot a=\varepsilon A_1(a,\vartheta)+\varepsilon^2 A_2(a,\vartheta)+\ldots,\ \vartheta=\phi-\frac{n}{m}\theta,$$
$$\dot\vartheta=\omega-\frac{n}{m}\mu+\varepsilon B_1(a,\vartheta)+\varepsilon^2 B_2(a,\vartheta)+\ldots.. \qquad (13)$$

Подібним чином, як і для нерезонансного випадку, для знаходження правих частин рівняння (13) отримується диференціальне рівняння

$$\bar L(U_i)=f_i(a,x,\phi,\theta)+\rho(x,\phi)A_i(a,\vartheta)+ah(x,\phi)B_i(a,\vartheta)+$$
$$+\left[\wp(x,\phi)\frac{\partial A_i(a,\vartheta)}{\partial\vartheta}+a\hbar(x,\phi)\frac{\partial B_i(a,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right]\left(\omega-\frac{n}{m}\mu\right) \qquad (14)$$

де

$$\rho(x,\phi)=2[(\omega+\kappa V)\sin(\kappa x+\phi)+(\omega-\chi V)\sin(\chi x-\phi)],$$
$$h(x,\phi)=2[(\omega+\kappa V)\cos(\kappa x+\phi)-(\omega-\chi V)\cos(\chi x-\phi)],$$
$$\wp(x,\phi)=-(\cos(\kappa x+\phi)-\cos(\chi x-\phi)),$$
$$\hbar(x,\phi)=\sin(\kappa x+\phi)+\sin(\chi x-\phi)\ -$$

для крайових умов (2а) і

$$\rho(x,\phi)=2\left[(\omega+\kappa V)\sin(\kappa x+\phi)+\kappa\left(V-\frac{\omega}{\chi}\right)\sin(\chi x-\phi)\right]$$
$$h(x,\phi)=2\left[(\omega+\kappa V)\cos(\kappa x+\phi)-\kappa\left(V-\frac{\omega}{\chi}\right)\cos(\chi x-\phi)\right]$$
$$\wp(x,\phi)=-\left(\cos(\kappa x+\phi)+\frac{\kappa}{\chi}\cos(\chi x-\phi)\right),$$
$$\hbar(x,\phi)=\sin(\kappa x+\phi)-\frac{\kappa}{\chi}\sin(\chi x-\phi)\ -$$

для крайових умов (2б).

Як і для нерезонансного випадку, диференціальні рівняння (14) визначають, з врахуванням (11), праві частини співвідношень (13). Зокрема на, рис. 3 представлені значення амплітуди хвиль при переході через головний резонанс за наступного вигляду правої частини рівняння (1)

$$f(u,u_x,u_t,\theta)=\delta u_t+\Delta u_x^2 u_{xx}+h\sin\mu t, \qquad (15)$$

де δ,Δ,h - сталі.

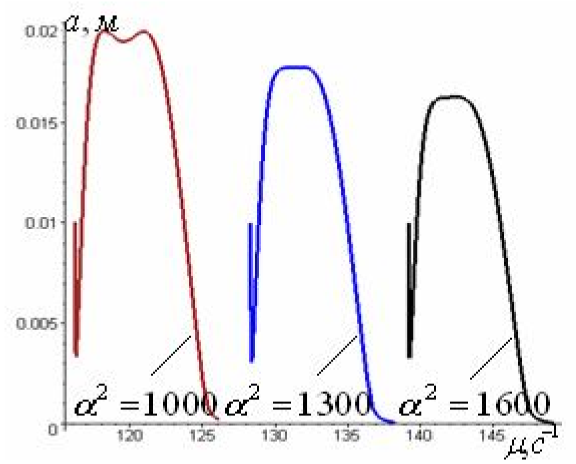

Рис. 3. Закон зміни в часі амплітуди коливань при переході через головний резонанс

Отримані розрахункові формули та представлені графічні залежності показую, що: по-перше, амплітудно-частотна характеристика коливань суттєво залежить як від нелінійних сил, так і швидкості поздовжнього руху; по-друге, за швидкості поздовжнього руху $V=\alpha$ проходить зрив коливань у лінійній моделі процесу; по-третє, значення критичної швидкості за якої проходить зрив коливань у нелінійній моделі процесу залежить не тільки від фізико-механічних характеристик системи, але і амплітуди коливань; по-четверте, явище резонансу за більших швидкостей поздовжнього руху має місце за менших частот змушуючої сили, по-п'яте, величина резонансного значення амплітуди залежить від швидкості поздовжнього руху і при зростанні її вона спочатку збільшується, а при наближенні швидкості до критичного значення – зменшується.

Подібні властивості простежуються і для іншого вигляду нелінійних сил.

Висновки. Розроблена методика дослідження динамічних процесів тіл, які характеризуються сталою швидкістю подовжнього руху, в основі котрої лежить хвильова теорія руху та отримані розрахункові формули може служити базою для дослідження динамічних процесів ширкого класу елементів машин. Її можна застосовувати (після нескладних доопрацювань) і для дослідження коливань сипких середовищ при їх вібротанспортуванні чи сепарації [14]. Достовірність методики та отриманих розраункових формул легко перевірити граничним переходом $V \to 0, \gamma \to 0$ із якого отримуються відомі із літературних джерел результати.

Література

1. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных.- К: Вища школа.- 1976.- 584 с.
2. Ковревский А.П. Свободные колебания консольной балки, несущей поток массы//Сб. «Динамика и прочность иашин», в.2, Изд-во Харковск. Ун-та, 1965, с. 38-42.
3. Сліпчук А. М. Нелінійні поперечні коливання пружного рухомого канату і методи їх дослідження. //Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість. – Львів.: в. №28. – 2003, – 89-94 с.
4. Сліпчук А.М. Нелінійні поперечні коливання пружної рухомої балки// "Вісник" Національний університет "Львівська політехніка" "Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні" –Львів.: в. №515, – 2004. – С. 47-51.
5. Сокіл Б.І., Ліщинська Х.І, Ціж Б.Р. Резонансні явища у сильно нелінійних системах, які характеризуються поздовжнім рухом // Науковий вісник: Зб. науково-технічних праць. - Львів: УкрДЛТУ. 2006.в. 16.7. - С. 75-80
6. Сокіл Б. І., Ліщинська Х. І. Асимптотичні методи і періодичні Ateb-функії у дослідженні коливних процесів рухомих нелінійно пружних одновимірних систем // Вісник НУ "ЛП" "Динаміка, міцність та проектування машин і приладів", №556, 2006.- С. 57-64.
7. Калиняк М.І., Барвінський А.Ф. Вільні поперечні коливання одного класу систем з урахуванням недосконалої пружності матеріалу.- Доп. АН УРСР.- 1977.- №5.- С.435-439.
8. Мартинців М.П., Сокіл М.Б. Одне узагальнення методу Д'Аламбера для систем, які характеризуються поздовжнім рухом // Зб. ауково-технічних праць УДЛТУ.- Львів.- 2003.- в.13.4.- С.64-67.
9. Мартинців М.П., Сокіл Б.І., Сокіл М.Б. Хвильові процеси в однорідних нелінійно-пружних системах і методи їх дослідження // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість.- Львів: УДЛТУ.- 2003.- в. 28.- С.81-89.
10. Митропольский Ю.А. О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Клейна - Гордона // Укр. мат. журн.- 1995.- 47, №9.- С. 1209 - 1216.
11. Митропольський Ю. О., Сокіл Б. І. Про застосування Ateb-функцій для побудови асимптотичного розв'язку збуреного нелінійного рівняння Клейна-Гордона // Укр. мат. журн.- 1998.- 50, №5.- С. 665 - 670.
12. Nayfe A.H. Perturbation Methods, New York: John Wiley and Sons, 1973.- 425 p.
13. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.- М.: Наука.- 1974.- 501 с.
14. Stotsko Z., Sokil B., Topilnytskiy V. Complex mathematical model and optimization of vibration volumetric treatment for surfaces of machine parts //Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineerin.- 2007.- 24.- p. 283-290.