МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Д.А. Найко, О.Ф. Шевчук

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

Вінниця - 2020

УДК: 519.21:519.22

ББК 22.17я73

Н 20

Рекомендовано Вченою радою Вінницького національного аграрного університету Міністерства освіти і науки України як навчальний посібник для вищих навчальних закладів ІІІ-IVступенів акредитації (протокол № 13 від 26 червня 2020 р.).

Найко Д.А. Шевчук О. Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. / Д.А. Найко, О.Ф. Шевчук – Вінниця: ВНАУ, 2020. – 382 с.

Рецензенти:

Ковтонюк М. М. − доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету

Михалевич В. М. − доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету

Польова О. Л. – доктор економічних наук, професор кафедри менеджменту зовнішньоекономічної діяльності, готельно-ресторанної справи та туризму Вінницького національного аграрного університету

Навчальний посібник «Теорія ймовірностей та математична статистика» містить теоретичні відомості всіх традиційних розділів (випадкові події, випадкові величини та їх розподіли, математична статистика) курсу теорії ймовірностей та математичної статистики, рекомендованих для економічних, технічних та технологічних спеціальностей вищих навчальних закладів України.

Викладання основних математичних фактів супроводжується значною кількістю прикладів розв'язування задач. Посібник містить біля 500 задач для самостійного розв'язування з відповідями та вказівками. Отже, його можна використовувати як збірник задач для організації самостійної та індивідуальної роботи студентів.

Посібник призначено для студентів економічних, технічних та технологічних спеціальностей, які навчаються за програмами підготовки бакалаврів та магістрів. Він може бути корисним для викладачів ВНЗ та коледжів, фінансистів, соціологів, менеджерів тощо.

ЗМІСТ

ВСТУП

У курсі елементарної математики та фізики зазвичай розглядаються лише такі задачі, у яких результат дій є однозначним. Проте існує велике коло задач, важливих для науки, техніки та господарських застосувань, у яких результат дій не визначений. Якщо, наприклад, підкидається монета, то не можна передбачити, якою стороною вона ляже догори – гербом чи цифрою. Тут результат наших дій неоднозначний. Але, якщо монету підкинути багато разів, то спостерігається така закономірність: приблизно у половині випадків випаде герб, а в іншій половині – цифра. А це вже певна закономірність. Подібного типу закономірності й вивчаються в теорії ймовірностей. Інакше кажучи, в теорії ймовірностей вивчаються закономірності масових явищ. Дослід з підкиданням монети є однією з найпростіших моделей, яка демонструє, що закономірності проявляються лише за умови багаторазового повторення досліду.

Відразу ж виникають й інші задачі, наприклад: скільки дослідів потрібно провести, щоб висновки з них були вірогідними? Якщо дослідів проведено мало, то їх результати можуть бути випадковими. Велика кількість дослідів збільшує надійність зроблених висновків, проте потребує й більше ресурсів на проведення таких дослідів, що інколи є невиправданим. В теорії ймовірностей є рекомендації, щодо обґрунтування необхідної кількості дослідів для отримання достатньо надійних висновків.

Багато ймовірнісних задач вимагають значної теоретичної підготовки. Тому спочатку доцільно розглядати простіші задачі (задачі ігрового характеру), де легше виявити основні закономірності, специфіку та розв’язок поставленої ймовірнісної задачі. Вже потім мова може йти про використання встановлених законів у розв’язуванні задач прикладного характеру – задач математичної статистики.

На практиці ми можемо лише досліджувати, одержувати та обробляти наближені результати, робити певні висновки та припущення, з урахуванням надійності цих результатів. У зв’язку з цим в практичних задачах виникає потреба в перевірці правильності таких припущень – гіпотез.

Посібник містить близько півтисячі задач, які можна використати для організації індивідуальної та самостійної роботи студентів. Складніші задачі позначено однією або більше зірочками. Для складання індивідуальних варіантів у організації самостійної роботи можна використати таблицю рівномірно розподілених випадкових чисел (додаток П).

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

У визначенні суті теорії ймовірностей як навчального предмета, необхідним є введення та пояснення таких понять, як: випадкова подія, ймовірність випадкової події, види випадкових подій, зв'язок між випадковими подіями, незалежність випадкових подій, випадкова величина, закон розподілу випадкової величини тощо. Коло питань, пов'язаних із цими та іншими поняттями, і вивчається в курсі теорії ймовірностей.

Теорія ймовірностей виникла і розвивалась у процесі розв'язування ігрових та прикладних задач. Перші відомості, які дійшли до нас, відносяться до XVI – XVII століть і пов'язані з розв'язуванням задач азартних ігор (Д. Кардано, Х. Гюйгенс, Б. Паскаль, П. Ферма та інші). Потім виникали і розвивались специфічні прикладні задачі, оформились перші означення та теореми. Першу з «граничних теорем» так званого «закону великих чисел», яка встановлює зв'язок між теорією та практикою, було доведено Я. Бернуллі (1654 – 1705) в кінці XVII-го століття. Значною мірою теорію ймовірностей було розвинено в роботах А. Муавра (1667 – 1754), П. Лапласа (1749 – 1827), К. Гаусса (1777 – 1855), С. Пуассона (1781 – 1840) і особливо в роботах російських математиків П. Л. Чебишева (1821 – 1894), А. А. Маркова (1856 –1922), А. М. Ляпунова (1857 –1918). Найбільший внесок у розвиток теорії ймовірностей у XX-му столітті зробили радянські вчені, особливо видатний математик А. М. Колмогоров (1903 – 1987). Значний внесок було зроблено також українськими математиками Б. В. Гнеденком (1912 –1995), А. В. Скороходом (1930 – 2011), В. С. Королюком (1925) та іншими.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1 Випадкова подія, частота та ймовірність випадкової події

Випадкова подія – одне з основних понять теорії ймовірностей.

О з н а ч е н н я 1. *Випадковою подією* називається така подія, яка за виконання деяких умов може відбутися, а може й не відбутися.

Поява герба під час підкидання монети, влучання в ціль у стрільбі, виграш автомобіля в лотерею – це приклади випадкових подій.

Умови, за яких задана випадкова подія може статися чи не статися, називатимемо *експериментом* або *випробуванням*.

Отже, кидання монети, стрільба, гра в лотерею – це випробування.

У теорії ймовірностей випадкові події прийнято позначати великими літерами $A, B, C, \ldots$.

О з н а ч е н н я 2. Нехай проводиться n^* однакових випробувань, у кожному з яких задана подія A може відбутися або не відбутися. Якщо в n^* випробуваннях подія A з'явилась m^* разів, то число m^* називається *частотою* події A, а число $\frac{m^*}{n^*}$ – *відносною частотою* події A і позначається

$$P^*(A) = \frac{m^*}{n^*}.$$

Приклад 1. Нехай експеримент – одне підкидання монети. Подія A = «з'явився герб».

1. Якщо в 5 киданнях герб з'явився 3 рази, то

$$n^* = 5,\ m^* = 3,\ P^*(A) = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

2. Якщо в 10 киданнях герб з'явився 4 рази, то

$$n^* = 10,\ m^* = 4,\ P^*(A) = \frac{4}{10} = 0{,}4.$$

3. Якщо в 50 киданнях герб з'явився 26 разів, то

$$n^* = 50,\ m^* = 26,\ P^*(A) = \frac{26}{50} = 0{,}52.$$

4. Якщо в 100 киданнях герб з'явився 49 разів, то

$$n^* = 100,\ m^* = 49,\ P^*(A) = \frac{49}{100} = 0{,}49.$$

Ми розглянули в цьому прикладі 4 серії з різним та зростаючим числом випробувань. Практичні спостереження показують, що коли проводяться серії з великим числом випробувань (n^*– велике), то відносні частоти випадкової події A в кожній із цих серій мало відрізнятимуться одна від одної. І чим більше n^* у кожній серії, тим менше відрізнятимуться одна від одної частоти $\frac{m^*}{n^*}$.

Іншими словами: при $n^* \to \infty$ відносна частота $\frac{m^*}{n^*}$ наближається до деякого числа, яке називається *ймовірністю події* A й позначається $P(A) = p$. Таким чином, за необмеженого зростання числа n^* (числа випробувань) частота події A прямує до ймовірності p появи цієї події:

$$\lim_{n^* \to 0} P^*(A) = \lim_{n^* \to 0} \frac{m^*}{n^*} = P(A) = p.$$

У попередньому прикладі, зокрема, $P\left(A\right) = \frac{1}{2}$.

Очевидно, що для будь-якої випадкової події A $0 \le P\left(A\right) \le 1$.

1.2 Класичне означення ймовірності

Зрозуміло, що обчислювати щоразу ймовірність події A як границю $\lim\limits_{n^* \to \infty} \frac{m^*}{n^*}$ було б незручно. На практиці здебільшого ймовірність обчислюють, виходячи лише з аналізу експерименту.

Приклад 1. Кубик, на гранях якого нанесено цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, називається *гральним кубиком* (або *гральною кістю*). Розглянемо експеримент – одне підкидання грального кубика.

Подія A_1 = «випала цифра 1». Знайдемо $P\left(A_1\right)$.

У результаті випробування можуть статися такі події: A_1 = «випала цифра 1», A_2 = «випала цифра 2», A_3 = «випала цифра 3», A_4 = «випала цифра 4», A_5 = «випала цифра 5», A_6 = «випала цифра 6».

Кубик симетричний, а тому всі ці події рівноможливі. У n випробуваннях (нехай n досить велике) кожна з цих подій з’явиться приблизно $\frac{n}{6}$ разів, що підтверджується практикою. Отже, відносна частота події A_1

$$P^*(A_1) \approx \frac{n/6}{n} = \frac{1}{6}.$$

Тому вважають, що ймовірність появи числа 1 на верхній грані кубика, як і будь-якого іншого числа від 1 до 6, дорівнює $\frac{1}{6}$. Тобто

$$P(A_1) = \frac{1}{6},\ P(A_2) = \frac{1}{6},\ P(A_3) = \frac{1}{6},\ P(A_4) = \frac{1}{6},\ P(A_5) = \frac{1}{6}, P(A_6) = \frac{1}{6}.$$

О з н а ч е н н я 1. Випадкові події A і B називаються *несумісними*, якщо вони не можуть статися обидві в одному й тому ж випробуванні. Якщо події можуть статися разом в одному випробуванні, то вони називаються *сумісними*.

О з н а ч е н н я 2. Кажуть, що випадкові події утворюють *повну групу подій*, якщо в кожному випробуванні може з'явитися будь-яка з них і не може з'явитися якась інша, несумісна з ними.

Легко бачити, що *коли випадкові події $A_1, A_2, \dots, A_n$ утворюють повну групу попарно несумісних подій, то сума їхніх ймовірностей дорівнює одиниці.*

О з н а ч е н н я 3. Події називаються *рівноможливими*, якщо є підстави вважати, що жодна з них не є можливішою за іншу.

О з н а ч е н н я 4. Якщо випадкові події утворюють повну групу, рівноможливі й несумісні, то їх називатимемо *випадками* або *наслідками* експерименту.

У прикладі 1 події $A_1, A_2, ..., A_6$ є *випадками* експерименту.

Приклад 2. Нехай експеримент – одне підкидання грального кубика. Події: A = «випало число 4», B = «випало парне число». Події A і B – сумісні.

Приклад 3. Нехай експеримент – одне підкидання грального кубика. Події: A = «випало число 3», B = «випало число $\neq$ 3». Події A і B утворюють повну групу подій, але вони не є випадками експерименту, оскільки $P^*\left(A\right) < P^*\left(B\right)$, а тому $P\left(A\right) \leq P\left(B\right)$. Це означає, що події A і B не рівноможливі.

О з н а ч е н н я 5. Випадок повної групи подій називається *сприятливим* для появи події A, якщо поява цього випадку означає, що подія A теж відбулася.

Приклад 4. Експеримент – одне підкидання грального кубика. Події: A = «випало парне число», H_1= «випало число 1», H_2 = «випало число 2», H_3 = «випало число 3», H_4= «випало число 4», H_5= «випало число 5», H_6= «випало число 6».

Події $H_1, H_2, ..., H_6$ – випадки експерименту. Події $A, H_1, H_2, ..., H_6$

теж утворюють повну групу, але це не є випадки експерименту, оскільки серед них є сумісні (A з H_2, A з H_4, A з H_6), до того ж, вони не всі рівноможливі, оскільки $P(A) > P(H_i)$, $i = 1, 2, ..., 6$.

Випадки H_2, H_4, H_6 є сприятливими для події A, оскільки поява події H_2 чи H_4 чи H_6 означатиме, що подія A теж відбулася.

Приклад 5. У скриньці – дві білі кульки з номерами 1 і 2 та одна синя кулька з номером 3. Експеримент – навмання беруть одну кульку. Події: A = «взято білу кульку», B = «взято кульку з номером 2». Подія B є сприятливою для події A, оскільки поява події B означає, що подія A теж відбулася.

О з н а ч е н н я 6. *Ймовірністю* випадкової події A називається відношення числа m сприятливих для неї випадків до числа n всіх можливих випадків експерименту, які утворюють повну групу рівноможливих несумісних подій. Тобто,

$$p = P(A) = \frac{\text{\textit{число сприятливих випадків}}}{\text{\textit{число всіх випадків}}} = \frac{m}{n}.$$

О з н а ч е н н я 7. Якщо деякій події сприяють всі n випадки експерименту, що утворюють повну групу рівноможливих несумісних подій, то така подія називається *вірогідною,* або *достовірною.* Ймовірність вірогідної події

$$p = \frac{n}{n} = 1.$$

Отже, *вірогідна* подія це така подія, яка обов'язково станеться в результаті експерименту.

О з н а ч е н н я 8. Подія, якій не сприяє жоден з n випадків експерименту, що утворюють повну групу рівноможливих несумісних подій, називається *неможливою*. Ймовірність *неможливої* події

$$p = \frac{0}{n} = 0.$$

Приклад 6. Нехай експеримент – одночасне підкидання двох монет. Знайти ймовірності подій A та B, якщо A = «з'явився хоча б один герб», B = «з'явився точно один герб».

Розв'язання. Можливі чотири випадки:

1. {Г Г}, 2. {Ц Ц}, 3. {Ц Г}, 4. {Г Ц}.

Всього випадків – 4, з них події A сприяють – 3, тому $P(A) = \frac{3}{4}$. Події B

сприяють два випадки, тому $P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

О з н а ч е н н я 9. Випадкова подія називається *елементарною*, якщо їй сприяє лише вона сама.

1.3 Геометричні ймовірності

Нехай відрізок l – частина деякого відрізка L. На відрізок L навмання ставиться точка. Якщо вважати, що ймовірність потрапляння точки на відрізок l пропорційна довжині цього відрізка і не залежить від його розташування відносно відрізка L, то ймовірність потрапляння точки на відрізок l визначається рівністю

$$p=\frac{\textit{довжина } l}{\textit{довжина } L}.$$

Нехай плоска фігура g є частиною плоскої фігури G. На фігуру G навмання кинуто точку. Якщо вважати, що ймовірність попадання кинутої точки на фігуру g пропорційна площі цієї фігури і не залежить ні від її розташування відносно G, ні від форми g, то ймовірність потрапляння точки на фігуру g визначається рівністю

$$p=\frac{\textit{площа } g}{\textit{площа } G}.$$

Аналогічно визначається ймовірність потрапляння точки в просторову фігуру v, яка є частиною фігури V:

$$p=\frac{\textit{об'єм } v}{\textit{об'єм } V.}$$

Приклад 1. Після буревію на ділянці між 40-м і 60-м кілометрами телефонної мережі відбувся розрив дроту. Яка ймовірність того, що розрив відбувся між 50-м та 55-м кілометрами мережі.

Розв'язання. Очевидно, що відрізок $l=55-50=5$км становить частину відрізка $L=70-40=30$ км. Тому шукана ймовірність

$$p=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

Приклад 2. Олександр та Юля домовилися про зустріч між 19-ю та 20-ю годинами. Яка ймовірність того, що жоден з них не чекатиме на іншого більше, ніж $\frac{1}{3}$ години, якщо прихід як одного, так й іншого рівноможливий у будь-який момент упродовж зазначеної години.

Розв'язання. Позначимо через x проміжок часу від 19-ї години до моменту приходу Олександра, а через y – проміжок часу від 19-ї години до моменту приходу Юлі. Очевидно, що x і y повинні задовольняти вимоги:

$$0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1.$$

Отже, множину всіх можливих наслідків випробування можна зобразити як множину точок квадрата (рис. 1.1) зі стороною, довжина якої дорівнює 1, причому всі наслідки випробувань треба вважати рівноможливими.

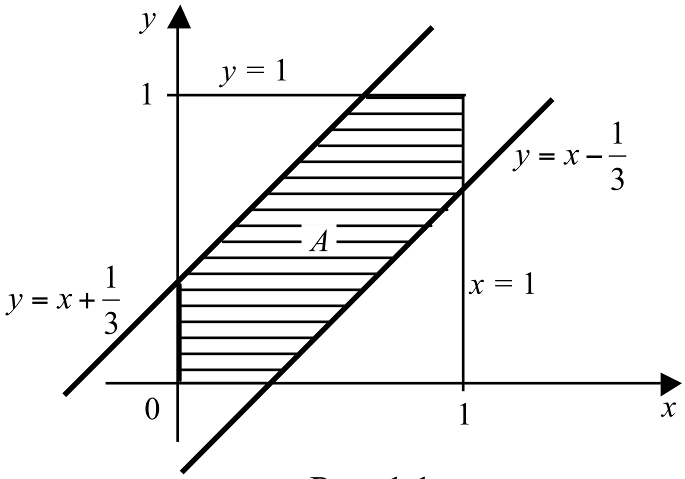


Рис. 1.1

Проміжок часу між моментами приходу обох буде не більший за $\frac{1}{3}$ години, за умови, що $\left|x - y\right| \le \frac{1}{3}$, яку можна записати у вигляді системи нерівностей:

$$\begin{cases} x - y \le \frac{1}{3} \\ x - y \ge -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y \ge x - \frac{1}{3} \\ y \le x + \frac{1}{3}. \end{cases}$$

На рис. 1.1 заштриховано множину s точок, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ y \ge x - 1/3 \\ y \le x + 1/3. \end{cases}$$

Тобто,

$$s=\left\{(x,y):0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1,\quad y\ge x-\frac{1}{3},\quad y\le x+\frac{1}{3}\right\}.$$

Множина s є підмножиною множини можливих наслідків випробування, що сприяють події A, яка полягає в тому, що проміжок часу між обома моментами приходу буде не більшим за $\frac{1}{3}$ год.

Очевидно, що $S=1$, $s=1-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$.

Отже, шукана ймовірність

$$P(A)=\frac{\textit{площа } s}{\textit{площа } S}=\frac{5}{9}.$$

1.4 Формули комбінаторики

У деяких задачах є потреба скористатися такими поняттями, як *перестановка, комбінація* та *розміщення.*

Розглянемо ці поняття.

Нехай деяка множина Ω складається з n елементів. Тоді будь-яка множина, що складається з цих n елементів, розташованих у певному порядку один за одним, називається *перестановкою* з n елементів.

Наприклад, множина $\Omega=\{a,b,c\}$ має 6 перестановок:

$$(a,b,c),\ (a,c,b)\ ,\ (b,c,a),\ (b,a,c),\ (c,b,a),\ (c,a,b).$$

Число перестановок з n елементів позначається P_n і дорівнює $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$. Тобто

$$P_n=n!.$$

Наприклад, $P_5=5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$.

Будь-яка підмножина, що складається з m елементів деякої n - елементної множини Ω $(m\le n)$, називається *комбінацією* з n елементів по m елементів.

Число комбінацій з n елементів по m елементів позначається символом C_n^m і дорівнює $\frac{n!}{m!(n-m)!}$. Тобто,

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Наприклад, $C_{10}^{3} = \dfrac{10!}{3!7!} = \dfrac{8 \cdot 9 \cdot 10}{3!} = 120$.

Наголошуємо, що в *комбінаціях* порядок розташування елементів до уваги не береться.

Для чисел C_n^m, що називаються *біноміальними коефіцієнтами*, виконуються такі тотожності, які є корисними при розв'язуванні задач:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \qquad \text{(властивість симетрії)},$$

$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}, \quad C_n^0 = 1 \quad \text{(рекурентне співвідношення)},$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n \quad \text{(наслідок біноміальної формули Ньютона)}.$$

Будь-яка підмножина, що складається з m елементів, розташованих у певному порядку, деякої n - елементної множини Ω, називається *розміщенням* з n елементів по m елементів.

Число розміщень з n елементів по m позначається символом A_n^m. Зрозуміло, що $A_n^m = C_n^m \cdot m!$. Тобто,

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Приклад 1. Із сукупності, що містить 10 виробів, серед яких є 3 бракованих, навмання беруть три вироби для контролю. Знайти ймовірність таких подій:

A = «серед взятих виробів є точно один бракований»;

B = «серед взятих виробів немає жодного бракованого».

Розв'язання. Пронумеруємо придатні вироби числами 1, 2, 3,…, 7, а браковані – числами 8, 9, 10.

Число випадків, що сприяють події A, дорівнює $m_1 = C_3^1 \cdot C_7^2 = 63$. Число випадків, що сприяють події B, дорівнює $m_2 = C_7^3 = 35$. Число всіх можливих випадків експерименту дорівнює $n = C_{10}^3 = 120$. Отже,

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{21}{40}, \quad P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{7}{24}.$$

Приклад 2. Деяка множина складається з 10 перших букв українського алфавіту. Експеримент полягає в тому, що з цієї множини навмання одну за одною беруть 4 букви і складають слово в порядку надходження букв. Скільки слів можна утворити в цьому випробуванні? Яка ймовірність того, що навмання складене слово закінчуватиметься на букву «**а**»?

Розв'язання. Число 4-буквених слів у цьому експерименті дорівнює числу 4-елементних впорядкованих підмножин 10-елементної множини, тобто дорівнює

$$A_{10}^{4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Нехай подія B = «навмання складене з 4 букв слово закінчується на букву «**а**». Число таких слів дорівнює числу способів розмістити на три місця, що залишилися, по одному символу з дев'яти (символ «**а»** не беремо до уваги, оскільки його місце вже визначено), тобто дорівнює

$$A_{9}^{3} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

Тому

$$P(B) = \frac{504}{5040} = \frac{1}{10}.$$

1.5 Аксіоматичне означення ймовірності події

Математична формалізація моделі випадкового експерименту включає в себе: 1) побудову множини Ω елементарних випадків експерименту; 2) опис поля подій для заданого експерименту; 3) визначення ймовірнісного розподілу на полі цих подій.

Під *множиною елементарних випадків* експерименту розуміють таку множину взаємовиключних випадків, що результатом експерименту завжди є один і тільки один випадок. *Будь-яку множину* Ω *можна інтерпретувати як подію.* Сукупність всіх подій, що розглядаються, утворює *поле подій* для заданого експерименту.

Множина Ω для заданого експерименту може бути дискретною, неперервною або мати складнішу структуру.

Кажуть, що подія A *відбулася*, якщо результатом експерименту є елементарний випадок ω, що належить A ($\omega \in A$). Подія, що збігається з порожньою множиною $\varnothing$, називається *неможливою подією*, а подія, яка збігається зі всією множиною Ω – *вірогідною подією*.

Дві події A і B називаються *сумісними (несумісними)*, якщо в результаті експерименту можливе (неможливе) їх сумісне здійснення. Інакше кажучи, події A і B сумісні, якщо відповідні множини A і B мають спільні елементи, і несумісні в іншому разі.

Якщо подія ототожнюється із множиною, то над подіями можна здійснювати всі операції, що виконуються над множинами. Зокрема, визначено такі операції та відношення між подіями:

$A \subset B$ (відношення включення множин) – *подія* A *спричиняє появу події* B, або A *включається у* B. Тобто подія B відбувається щоразу, коли відбувається подія A.

$A = B$ (відношення рівності множин) – *подія* A *тотожна події* B. Це можливо тоді й тільки тоді, коли одночасно $A \subset B$ і $B \subset A$.

$A + B$ (об'єднання множин) – *сума подій.* Ця подія полягає в тому, що відбулася хоча б одна з подій A або B. (Інше позначення об'єднання множин, а, отже, і суми подій: $A \cup B$).

AB (перетин множин) – *добуток подій*. Ця подія полягає в суміщенні подій A і B. Таким чином, події A і B несумісні, коли $AB = \varnothing$. (Інше, позначення перетину множин, а, отже, і добутку подій – $A \cap B$).

$A \setminus B$ (множина елементів що належать A, але не належать B) – *різниця подій*. Ця подія полягає в тому, що A відбувається, а B не відбувається.

$\overline{A} = \Omega \setminus A$ (доповнення множини A до множини Ω) – *протилежна подія*. Ця подія полягає в тому, що подія A не відбувається.

Система F підмножин множини Ω така, що в результаті застосування будь-яких з описаних операцій до будь-яких двох елементів системи F знову одержуємо елемент заданої системи, яка називається *алгеброю* (або *бульовою алгеброю* – на ім'я англійського математика Джорджа Буля (1815 – 1864)). Інакше кажучи, бульова алгебра – це система множин, *замкнена* відносно введених у ній операцій.

Якщо множина Ω *неперервна* або *зліченна* (множина називається *зліченною*, якщо між її елементами та між множиною натуральних чисел N можна встановити взаємно-однозначну відповідність), то будь-яка нескінченна система її підмножин, яка замкнена відносно введених алгебраїчних операцій над зліченним числом подій, називається *σ-алгеброю* або *борелівським полем подій*.

Наприклад, замкненість системи F відносно операції додавання подій над зліченним числом подій означає, що, коли

$$A_1 \subset F,\ A_2 \subset F,\ \ldots,\ A_n \subset F,\ \ldots,$$

то

$$(A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots) \subset F.$$

Нарешті подамо аксіоматичне означення ймовірності випадкової події.

О з н а ч е н н я 1. Нехай F – поле подій для заданого експерименту. *Ймовірністю* $P(A)$ випадкової події A називається числова функція, визначена для всіх $A \in F$, яка задовольняє три умови (три аксіоми ймовірностей):

1) $P(A) \geq 0$;

2) $P(\Omega) = 1$;

3) для будь-якої скінченної або нескінченної послідовності подій $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ таких, що $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$,

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n + ...) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) + ...$$

Трійку $\{\Omega, F, P\}$, де F – алгебра підмножин множини Ω, P – числова функція, що задовольняє аксіоми 1) – 3) називають *ймовірнісним простором* випадкового експерименту.

Аксіоматичну теорію ймовірностей в її сучасному вигляді було створено у 1933 році російським математиком Андрієм Миколайовичем Колмогоровим.

2. ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ПРОТИЛЕЖНІ ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

2.1 Сума подій

О з н а ч е н н я 1. *Сумою* двох подій A і B називається така подія C, яка полягає в появі хоча б однієї з цих двох подій A або B. Отже, C = «A *або* B» («або» не несе характеру виключення). Тобто, подія C станеться тоді, коли станеться або лише A, або лише B, або коли і A і B.

Суму подій A і B символічно позначають: $C = A + B$.

Теорема 1. Нехай у заданому випробуванні подія A може статися з імовірністю $P(A)$, а подія B – з імовірністю $P(B)$. Якщо події A і B *несумісні*, то ймовірність суми цих подій обчислюється за формулою:

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{2.1}$$

Доведення. Нехай $P(A) = \frac{m_1}{n}$, $P(B) = \frac{m_2}{n}$, де n – число всіх випадків експерименту; m_1 – число випадків, що сприяють події A, m_2 – число випадків, що сприяють події B. Оскільки A і B несумісні, то число випадків, сприятливих одночасно і для A і для B, дорівнює 0. У такому разі число випадків, що сприяють події «A *або* B», дорівнює $m_1 + m_2$. Тому

$$P(A+B) = P(A\ або\ B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B).$$

Теорему доведено.

Приклад 1. Нехай експеримент – одне підкидання грального кубика. Розглянемо події: A = «випало число 3», B = «випало парне число». Оскільки A і B несумісні, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

Приклад 2. Нехай експеримент – одне підкидання грального кубика. Розглянемо події: A_1 = «випало число 3», A_2 = «випало непарне число». Зрозуміло, що події A_1 та A_2 сумісні. $P(A_1) = \frac{1}{6}$, $P(A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, тому $P(A_1 + A_2) = P(A_2) = \frac{1}{2}$. Звідси бачимо, що $P(A_1 + A_2) \neq P(A_1) + P(A_2)$, бо події A_1 та A_2 сумісні.

Наслідок. Якщо $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несумісні, то

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

2.2 Протилежні події

О з н а ч е н н я 1. Дві події називаються *протилежними*, якщо вони несумісні й утворюють повну групу подій. Інакше кажучи: подія, яка полягає в нездійсненні події A, називається протилежною до події A і позначається через $\overline{A}$.

Нехай $P(A) = p$, а $P(\overline{A}) = q$. У результаті випробування одна з подій A чи $\overline{A}$ обов'язково станеться, тому $A + \overline{A}$ – вірогідна подія. А отже, на підставі попередньої теореми, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, тобто $p + q = 1$. (Позначення: «$\overline{A}$» читається як: «не A».)

Таким чином, *сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці*.

Приклад 1. Ймовірність влучання в мішень дорівнює $p = 0,3$. Здійснюється один постріл по мішені. Знайти ймовірність промаху.

Розв'язання. Якщо подія A = «влучання в мішень», то $P(A) = p = 0,3$. Тоді $\overline{A}$ = «промах», звідки $P(\overline{A}) + 0,3 = 1 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 0,7$.

Зрозуміло, що *коли випадкові події* $A_1, A_2, ..., A_n$ *утворюють повну групу попарно несумісних подій, то справедлива рівність*:

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

2.3 Добуток подій

О з н а ч е н н я 1. Подія, яка полягає в здійсненні і події A, і події B називається *добутком* або *суміщенням* подій A і B і позначається:

$$A i B = A \cdot B = AB.$$

Теорема 1. Ймовірність суми *сумісних* подій A і B обчислюється за формулою:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (2.2)$$

Доведення. Нехай у результаті випробування може статись n різних випадків. Нехай із них події A сприяють m_1 випадків, а події B сприяють m_2

випадків. Оскільки A і B сумісні, то знайдеться m_3 випадків, що сприяють одночасній появі подій A і B, тобто добутку $A \cdot B$.

Зі схеми (рис. 2.1) бачимо, що подія $A+B$ має $m_1 + m_2 - m_3$ сприятливих випадків.

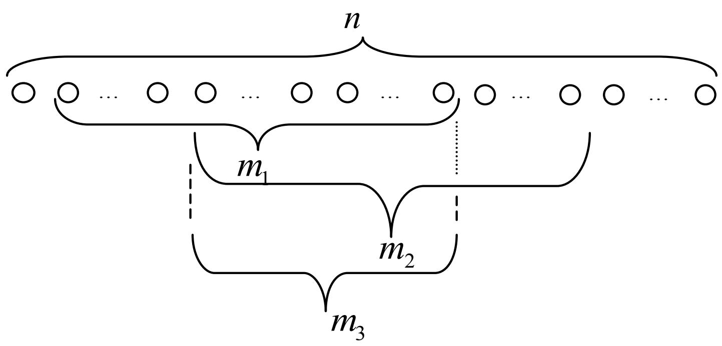


Рис. 2.1

Отже,

$$P(A) = \frac{m_1}{n},\ P(B) = \frac{m_2}{n},\ P(AB) = \frac{m_3}{n}.$$

$$P(A+B) = \frac{m_1 + m_2 - m_3}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m_3}{n} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Зауваження. Якщо A і B несумісні, то $P(AB) = 0$ і з (2.2) випливає рівність: $P(A+B) = P(A) + P(B)$, що встановлено в теоремі 1.

Приклад 1. Випробування – одне підкидання грального кубика. A = «випало парне число або число 1», B = «випало парне число, що не ділиться на 3». Знайти $P(A+B)$.

Розв'язання. Оскільки A і B – сумісні події, то подія AB можлива.

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};\quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};\quad P(AB) = P(A\, i\, B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Тут AB = «випало парне число, не кратне 3», $A+B$ = «випало парне число або число 1».

За теоремою 1

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Безпосередньо за класичним означенням ймовірності

$$P(A+B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

2.4 Ймовірність добутку незалежних подій

О з н а ч е н н я 1. Подія A називається *незалежною* від події B, якщо ймовірність появи події A не залежить від того, відбулася подія B чи не відбулася.

Якщо A не залежить від B, а B не залежить від A, то події A і B називаються *незалежними*.

Теорема 1. Якщо випадкові події A і B незалежні, то ймовірність добутку цих подій дорівнює добутку їхніх ймовірностей:

$$P(AB) = P(A\,i\,B) = P(A)\cdot P(B). \tag{2.3}$$

Доведення. Проведемо доведення за так званою схемою двох скриньок. Нехай у першій скриньці є n_1 кульок, з яких m_1 чорних, а решта − білі.

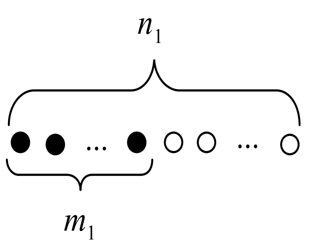


Рис. 2.2

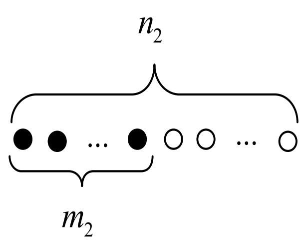


Рис. 2.3

Нехай у другій скриньці є n_2 кульок, з яких m_2 чорних, а решта − білі.

Розглянемо події: A = «виймання чорної кульки з першої скриньки», де

$$P(A) = \frac{m_1}{n_1},$$

та B = «виймання чорної кульки з другої скриньки», де

$$P(B) = \frac{m_2}{n_2}.$$

Всього різних випадків вийняти одночасно по одній кульці з кожної із скриньок буде $n_1 n_2$. Число випадків, що сприяють появі двох чорних кульок з різних скриньок, дорівнює $m_1 m_2$. Тоді

$$P(AB) = P(A\,i\,B) = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2} = P(A)\cdot P(B).$$

Наслідок. Якщо маємо n попарно незалежних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то, міркуючи аналогічно, одержуємо, що

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n) = P(A_1\;i\;A_2\;i\;\ldots\;i\;A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

Зауваження. Поняття незалежності подій можна ввести, використовуючи рівність (2.2). А саме: випадкові події A і B називаються *незалежними*, якщо

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Треба зазначити, що *коли випадкові події A і B незалежні, то незалежними будуть також і протилежні події $\overline{A}$ та $\overline{B}$.*

Приклад 1. Безвідмовна робота приладу визначається безвідмовною роботою кожного з трьох його вузлів. Ймовірність відмови за добу першого вузла дорівнює 0,4, другого – 0,3, третього – 0,1. Знайти ймовірність безвідмовної роботи приладу за добу.

Розв'язання. Розглянемо події: A = «прилад не відмовить», A_1 = «перший вузол не відмовить», A_2 = «другий вузол не відмовить», A_3 = «третій вузол не відмовить». Тоді зрозуміло, що $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Тому $P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) =$ $= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,378$, оскільки $A_1,\ A_2,\ A_3$ незалежні.

Випадкові події $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються *незалежними сукупно*, якщо для будь-якого набору з m подій (m = 2, 3,..., n) виконується рівність:

$$P(A_{k_1} \cdot A_{k_2} \cdot ... \cdot A_{k_m}) = P(A_{k_1}) \cdot P(A_{k_2}) \cdot ... \cdot P(A_{k_m}), \quad k_m \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Очевидно, що *коли події $A_1, A_2, ... A_n$ незалежні сукупно, то вони є і попарно незалежними.*

1.5 Ймовірність добутку залежних подій. Умовна ймовірність

О з н а ч е н н я 1. Подія A називається *залежною* від події B, якщо ймовірність події A залежить від того, відбулася подія B чи не відбулася.

О з н а ч е н н я 2. Ймовірність події A, за умови, що подія B уже відбулася, називається *умовною ймовірністю* події A за умови B і позначається $P_B\left(A\right)$ або $P(A|B)$.

З огляду на це, ймовірність $P(A)$ називають *безумовною ймовірністю* події A.

Запис: «$P_B\left(A\right)$» читають: «ймовірність A за умови B».

Приклад 1. У скриньці три білих і чотири червоних кульки. Із скриньки виймають одну кульку, а потім ще одну. Якщо подія A = «поява білої кульки за першого виймання», подія B = «поява білої кульки за другого виймання», то $P_A\left(B\right) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Теорема 1. Ймовірність добутку (суміщення) двох *залежних* подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на ймовірність іншої, за умови, що перша подія вже відбулася

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Доведення. Нехай у скриньці є n кульок, з яких n_1 білих. Нехай серед n_1 білих є m кульок із зірочкою. Зі скриньки виймають одну кульку. Подія A = «поява білої кульки», подія B = «поява білої кульки із зірочкою». Тоді $P(A) = \frac{n_1}{n}$, $P_A(B) = \frac{m}{n_1}$. Ймовірність появи білої кульки з зірочкою дорівнює $P(AB)$. Тоді очевидно, що $P(AB) = \frac{m}{n}$, а тому

$$P(AB) = \frac{m}{n} = \frac{m}{n_1} \cdot \frac{n_1}{n} = P(A) \cdot P_A(B)$$

(див. рис. 2.4).

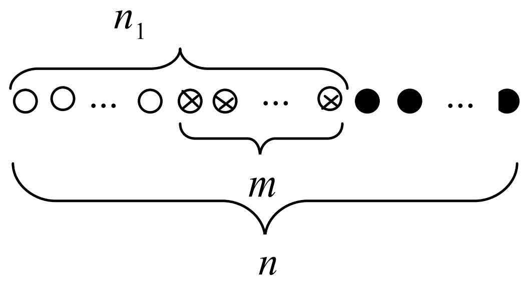


Рис. 2.4

У попередньому прикладі $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$.

Наслідок. Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ залежні, то

$$P(A_1, A_2 ... A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot ... \cdot P_{A_1 A_2 ... A_{n-1}}(A_n).$$

Зокрема, для трьох залежних подій A, B, C

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$$

Приклад 2. У скриньці є 5 білих, 4 чорних та 3 синіх кульки. Кожне випробування полягає в тому, що навмання виймають одну кульку, не повертаючи її в скриньку. Знайти ймовірність того, що в першому випробуванні з'явиться біла кулька (подія A), у другому – чорна (подія B), у третьому – синя (подія C).

Розв'язання. Ймовірність появи білої кульки в першому випробуванні

$$P(A) = \frac{5}{12}.$$

Ймовірність появи чорної кульки у другому випробуванні, за умови, що перша кулька біла, дорівнює

$$P_A(B) = \frac{4}{11}.$$

Ймовірність появи синьої кульки у третьому випробуванні, за умови, що перша кулька біла, а друга – чорна, дорівнює

$$P_{AB}(C) = \frac{3}{10}.$$

Шукана ймовірність

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}.$$

Зауваження 1. Оскільки $A \cdot B = B \cdot A$, то

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Зауваження 2. Зрозуміло, що випадкові події A і B незалежні тоді й тільки тоді, коли їхні *умовні ймовірності* збігаються з їхніми *безумовними ймовірностями*, тобто коли $P_B(A) = P(A)$, $P_A(B) = P(B)$.

Зауваження 3. З рівності $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$ випливає рівність:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)},$$

яку можна прийняти за означення умовної ймовірності події B.

3. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛА БЕЙЄСА

3.1 Повна ймовірність

Теорема 1. Якщо подія A може статися лише при настанні події H_1 *або* H_2 *або ... або* H_n, де H_i утворюють повну групу попарно несумісних подій, то ймовірність події A обчислюється за формулою:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + .. + P(H_n)\cdot P_{H_n}(A). \quad (3.1)$$

Ця рівність називається *формулою повної* (або *цілковитої*) *ймовірності*, а події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ називаються *гіпотезами* по відношенню до події A.

Доведення. Подія A відбудеться тоді, коли відбудеться одна з подій: $A\cdot H_1$, або $A\cdot H_2$, або … або $A\cdot H_n$, які є несумісними. Тому за теоремами про ймовірність суми несумісних подій та про ймовірність добутку залежних подій:

$$P(A) = P(A\cdot H_1) + P(A\cdot H_2) + \ldots + P(A\cdot H_n) =$$

$$= P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) \ldots + P(H_n)\cdot P_{H_n}(A).$$

Приклад 1. По цілі зроблено два постріли. Ймовірність влучання в першому пострілі дорівнює $p_1 = 0{,}3$, у другому – $p_2 = 0{,}4$. Ймовірність того, що за одного влучання об'єкт буде знищено, дорівнює $\lambda_1 = 0{,}8$, за двох влучань – $\lambda_2 = 0{,}9$. Знайти ймовірність того, що об'єкт буде знищено у двох пострілах.

Розв'язання. Розглянемо повну групу подій: H_1 = «одне влучання у двох пострілах», H_2 = «два влучання у двох пострілах», H_3 = «жодного влучання у двох пострілах». Потрібно знайти ймовірність події A = «об'єкт знищено».

Очевидно, що

$$A = (A\cdot H_1) + (A\cdot H_2) + (A\cdot H_3).$$

Звідси

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + P(H_3)\cdot p_{H_3}(A).$$

$$P(H_1) = p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1) = 0{,}46,\ P(H_2) = p_1\cdot p_2 = 0{,}12,$$

$$P(H_3) = (1-p_1)\cdot(1-p_2) = 0{,}42;$$

$$P_{H_1}(A) = 0{,}8,\ P_{H_2}(A) = 0{,}9,\ P_{H_3}(A) = 0.$$

$$P(A) = 0{,}46\cdot 0{,}8 + 0{,}12\cdot 0{,}9 + 0{,}42\cdot 0 = 0{,}368 + 0{,}108 = 0{,}476.$$

3.2 Формула Бейєса

У деяких задачах доводиться переоцінювати ймовірності гіпотез H_i після того, як подія A вже відбулася. Тобто, доводиться знаходити ймовірності $P_A\left(H_i\right), \quad i=1,2,...,n.$

Розглянемо одну з таких задач.

Приклад 1. У піраміді встановлено 10 гвинтівок, 4 з яких мають оптичний приціл. Ймовірність враження мішені з гвинтівки з оптичним прицілом дорівнює 0,95, а з гвинтівки без оптичного прицілу – 0,8. Стрілець вразив мішень із гвинтівки, взятої навмання. Що ймовірніше: було взято гвинтівку з оптичним прицілом чи без нього?

Ця задача приводить нас до такої загальної ситуації.

Нехай $H_1, H_2, ..., H_n$ – повна група несумісних подій з імовірностями відповідно $P\left(H_1\right), P\left(H_2\right), ..., P\left(H_n\right)$. І нехай подія A може відбутися лише разом із будь-якою з гіпотез $H_1, H_2, ..., H_n$.

За формулою повної ймовірності

$$P\left(A\right)=P\left(H_1\right)\cdot P_{H_1}\left(A\right)+P\left(H_2\right)\cdot P_{H_2}\left(A\right)+\ ...+P\left(H_n\right)\cdot P_{H_n}\left(A\right).$$

Якщо подія A вже сталася, то це призводить до зміни ймовірностей гіпотез (бо A та H_i, $i=1,2,...n$, взагалі кажучи, можуть бути залежними). Знайдемо умовні ймовірності гіпотез за умови, що подія A відбулася. Тобто, знайдемо ймовірності $P_A\left(H_1\right), P_A\left(H_2\right), ..., P_A\left(H_n\right)$.

За теоремою про ймовірність добутку залежних подій

$$P\left(H_i\cdot A\right)=P\left(H_i\right)\cdot P_{H_i}\left(A\right), \quad P\left(A\cdot H_i\right)=P\left(A\right)\cdot P_A\left(H_i\right),$$

$$P\left(H_i\right)\cdot P_{H_i}\left(A\right)=P\left(A\right)\cdot P_A\left(H_i\right),$$

звідки

$$P_A\left(H_i\right)=\frac{P\left(H_i\right)\cdot P_{H_i}\left(A\right)}{P\left(A\right)}=$$

$$=\frac{P\left(H_i\right)\cdot P_{H_i}\left(A\right)}{P\left(H_1\right)\cdot P_{H_1}\left(A\right)+P\left(H_2\right)\cdot P_{H_2}\left(A\right)+...+P\left(H_n\right)\cdot P_{H_n}\left(A\right)}$$

або

$$P_A\left(H_i\right)=\frac{P\left(H_i\right)\cdot P_{H_i}\left(A\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P\left(H_k\right)\cdot P_{H_k}\left(A\right)}. \qquad (3.2)$$

Рівність (3.2) називається *формулою Бейєса*.

Тепер розв'яжемо попередню задачу. Розглянемо події: H_1 = «взято гвинтівку з оптичним прицілом», H_2 = «взято гвинтівку без оптичного прицілу», A = «стрілець влучив у ціль». Тоді

$$A = A \cdot H_1 + A \cdot H_2, \quad P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A).$$

$$P(H_1) = 0,4, \quad P(H_2) = 0,6, \quad P_{H_1}(A) = 0,95, \quad P_{H_2}(A) = 0,8,$$

$$P(A) = 0,4 \cdot 0,95 + 0,6 \cdot 0,8 = 0,38 + 0,48 = 0,86.$$

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,38}{0,86}, \quad P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{0,48}{0,86}.$$

Отже, ймовірніше, що було взято гвинтівку без оптичного прицілу.

Приклад 2. На склад надходять вироби з чотирьох заводів. 15 % – із першого заводу, 25 % – із другого заводу, 40 % – із третього заводу, 20 % – із четвертого заводу. За час контролю якості продукції, яка надходить на склад, встановлено, що в середньому брак від першого заводу становить – 3 %, від другого – 5 %, від третього – 8 % і четвертого – 1 %. Навмання взятий зі складу виріб виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його виготовив другий завод.

Розв'язання. Розглянемо гіпотези: H_1= «навмання взятий виріб виготовлено першим заводом», H_2= «навмання взятий виріб виготовлено другим заводом», H_3= «навмання взятий виріб виготовлено третім заводом», H_4= «навмання взятий виріб виготовлено четвертим заводом». Ці гіпотези попарно несумісні й утворюють повну групу подій. Нехай подія $A =$«навмання взятий зі складу виріб виявився бракованим».

За умовою задачі ймовірності гіпотез $P(H_1) = 0,15,\ P(H_2) = 0,25,$ $P(H_3) = 0,4,\ P(H_1) = 0,2.$ Умовні ймовірності $P_{H_1}(A) = 0,03,$ $P_{H_2}(A) = 0,05,\ P_{H_3}(A) = 0,08,\ P_{H_4}(A) = 0,01.$

За формулою Бейєса

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A) + P(H_4)P_{H_4}(A)} =$$

$$= \frac{0,25 \cdot 0,05}{0,15 \cdot 0,03 + 0,25 \cdot 0,05 + 0,4 \cdot 0,08 + 0,2 \cdot 0.01} = \frac{25}{102}.$$

4. СХЕМА ВИПРОБУВАНЬ БЕРНУЛЛІ. ТЕОРЕМА БЕРНУЛЛІ. ФОРМУЛИ МУАВРА-ЛАПЛАСА

4.1 Формула Бернуллі

Розглянемо такий приклад.

Приклад. Студент у кожній з 8 склянок посіяв по одній зернині насіння огірків. Знайти ймовірність $P_8(3)$ того, що з восьми зернин зійде рівно 3, якщо відомо, що зернина сходить з імовірністю $p = 0,6$.

Розв'язання. Будемо вважати, що стакани пронумеровано. Позначимо імовірність несходу зернини $q = 1 - p = 1 - 0,6 = 0,4$.

Можливі випадки зображаємо картинками:

1-й випадок. Зерна зійдуть у стаканах № 1, № 2 і № 3 (рис. 4.1)

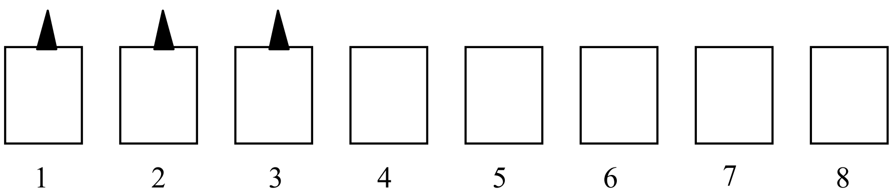


Рис. 4.1

2-й випадок. Зерна зійдуть у стаканах № 2, № 5 і № 7 (рис. 4.2)

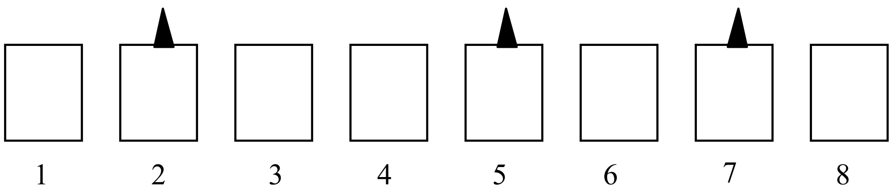


Рис. 4.2

І так далі.

Очевидно, що число таких випадків дорівнює числу комбінацій з $8 = n$ по $3 = k$. Тобто, число таких випадків дорівнює $C_n^k = C_8^3$.

Проте ймовірність першого випадку дорівнює

$$0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = (0,6)^3 (0,4)^5 = p^k q^{n-k}.$$

Ймовірність другого випадку дорівнює

$$0,4\cdot 0,6\cdot 0,4\cdot 0,4\cdot 0,6\cdot 0,4\cdot 0,6\cdot 0,4=\left(0,6\right)^3\left(0,4\right)^5=p^k q^{n-k}.$$

Аналогічна ситуація з третім і так далі випадками.

Оскільки всіх випадків є C_8^3, а ймовірність кожного з них дорівнює $\left(0,6\right)^3\left(0,4\right)^5$, то ймовірність того, що з 8 зернин зійде рівно 3, дорівнює

$$P_8\left(3\right)=C_8^3\left(0,6\right)^3\left(0,4\right)^5.$$

Тобто,

$$P_n\left(k\right)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Загальна ситуація. Нехай в одному випробуванні деяка випадкова подія A може статися з імовірністю $p=P\left(A\right)$. Тоді $q=1-p=P(\overline{A})$ – ймовірність події, протилежної відносно A. Легко зрозуміти, що ймовірність появи події A в n незалежних випробуваннях рівно k раз (позначимо цю ймовірність через $P_n(k)$) обчислюється за формулою:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{4.1}$$

Рівність (4.1) називається *формулою Бернуллі*.

Приклад 1. Яка ймовірність того, що в 10 киданнях грального кубика два рази випаде три очки?

Розв'язання. Нехай подія A = «випало три очки». Тут $n=10$; $k=2$; $p=\dfrac{1}{6}$; $q=\dfrac{5}{6}$. Тоді

$$P_{10}(2)=C_{10}^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^8=\frac{10!}{2!\cdot 8!}\cdot\frac{1}{6^2}\cdot\frac{5^8}{6^8}=\frac{9\cdot 5\cdot 5^8}{6^{10}}=\frac{9\cdot 5^9}{6^{10}}\approx 0,29.$$

О з н а ч е н н я 1. Число k_0 $\left(0\le k_0\le n\right)$, для якого ймовірність $P_n(k_0)$ є найбільшою, називають *найімовірнішим числом* настання події A. Встановлено, що число k_0 задовольняє нерівність:

$$np-q\le k_0\le np+p. \tag{4.2}$$

Коли $(np-q)$ – дробове, то число k_0 єдине, проте коли $(np-q)$ – ціле, то число k_0, як ціле число, набуває двох сусідніх значень.

Приклад 2. Відомо, що 90 % висіяних у ґрунт зерен насіння огірків сходить. Визначити найімовірніше число зерен, що зійдуть, коли в пакеті є 70 зернин.

Розв'язання. Використовуючи подвійну нерівність (2), маємо

$$70 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le k_0 \le 70 \cdot 0{,}9 + 0{,}9$$

або

$$62{,}9 \le k_0 \le 63{,}9.$$

Оскільки k_0 – ціле число, то в інтервалі (62,9; 63,9) є лише одне таке число 63. Таким чином, k_0 = 63.

Зауваження. У деяких задачах потрібно знаходити ймовірність того, що в n випробуваннях подія A з'явиться хоча б один раз. Тобто, потрібно знайти ймовірність події $B = B_{1,n} + B_{2,n} + B_{3,n} + B + \ldots + B_{n,n}$, де $B_{k,n}$ = «подія A в n випробуваннях станеться рівно k раз». У такому разі

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(B_{0,n}) = 1 - q^n.$$

Приклад 3. Гральний кубик підкидають 4 рази. Яка ймовірність того, що число очок, кратне 3, випаде хоча б один раз?

Розв'язання. Введемо подію B = «число очок, кратне 3, випаде хоча б один раз». Тоді $\overline{B}$ = «число очок, кратне 3, не випаде жодного разу». Оскільки в одному випробуванні число, кратне 3, випадає з імовірністю $\frac{1}{3}$ і не випадає з імовірністю $\frac{2}{3}$, то $P(\overline{B}) = \left(\frac{2}{3}\right)^4$. Тому $P(B) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}.$

4.2 Локальна теорема Муавра-Лапласа

Якщо в схемі випробувань Бернуллі n – велике, то формулою Бернуллі користуватися незручно. У такому разі використовують відому наближену формулу:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{4.3}$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – *диференціальна функція Лапласа*, значення якої знаходять за таблицею додатка 1.

Рівність (4.3) випливає з формули Бернуллі при $n \to \infty$ і називається *локальною теоремою* (*формулою*) *Муавра-Лапласа* (її подаємо без доведення).

Приклад 1. Гральний кубик підкидають 800 разів. Яка ймовірність того, що число очок, кратне трьом, випаде 267 разів?

Розв'язання. Потрібно знайти $P_{800}(267)$. Тут $p=\frac{1}{3}$; $q=\frac{2}{3}$.

Тому $P_{800}(267)\approx\dfrac{1}{\sqrt{800\cdot\frac{1\cdot 2}{3\cdot 3}}}\cdot\varphi\left(\dfrac{267-800\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{800\cdot\frac{1\cdot 2}{3\cdot 3}}}\right)=\dfrac{3}{40}\cdot\varphi\left(\dfrac{1}{40}\right)\approx 0{,}03$.

(За таблицею $\varphi\left(\frac{1}{40}\right)=\varphi(0{,}025)\approx 0{,}398812$.)

Зауваження. Оскільки функція $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(x)=\varphi(-x)$, тому таблицю значень функції $\varphi(x)$ задано лише для $x\geq 0$. Крім того, при зростанні x функція $\varphi(x)$ дуже швидко прямує до нуля. Тому вважають, що вже для всіх $x>4$, значення $\varphi(x)=0$ з точністю до 0,0001.

4.3 Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Нехай потрібно знайти ймовірність того, що в n випробуваннях деяка подія з'явиться не більше як k_1 і не менше як k_2 раз.

Позначимо цю ймовірність через $P_n(k_1,k_2)$. Зрозуміло, що

$$P_n(k_1,k_2)=P_n(k_1)+P_n(k_1+1)+P_n(k_1+2)+\ldots+P_n(k_2).$$

Але, коли різниця (k_2-k_1) велика, то користуватися цією рівністю незручно. У такому разі використовують *інтегральну теорему* (*формулу*) *Муавра-Лапласа*:

$$P_n(k_1,k_2)=\Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

де

$$\Phi(x)=\int_0^x\varphi(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\ -$$

інтегральна функція Лапласа, значення якої теж подають таблицею (додаток 2).

Приклад 1. Гральний кубик підкидають 800 разів. Яка ймовірність того, що число очок, кратне трьом, випаде не менше ніж 260 і не більше ніж 274 рази?

Розв'язання. $n = 800,\ p = \dfrac{1}{3},\ q = \dfrac{2}{3};$

$$P_{800}(260, 274) = \Phi\left(\frac{274 - 800\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{800\cdot\frac{1\cdot 2}{3\cdot 3}}}\right) - \Phi\left(\frac{260 - 800\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{800\cdot\frac{1\cdot 2}{3\cdot 3}}}\right) =$$

$$= \Phi\left(0,55\right) - \Phi\left(-0,5\right) = \Phi\left(0,55\right) + \Phi\left(0,5\right) =$$

$$= 0,208840 + 0,191462 \approx 0,4.$$

Значення $\Phi\left(0,55\right) = 0,208840,\ \Phi(0,5) = 0,1914202$ знайдено за таблицею (додаток 2).

Зауваження. Оскільки функція $\Phi(x)$ непарна, то $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Тому таблицю значень функції $\Phi(x)$ складено лише для $x \geq 0$. Крім того, для всіх $x > 4$ значення $\Phi(x) = 0,5$ з точністю до 0,0001.

Графіки диференціальної та інтегральної функцій Лапласа схематично зображено на рисунках 4.3 та 4.4 відповідно.

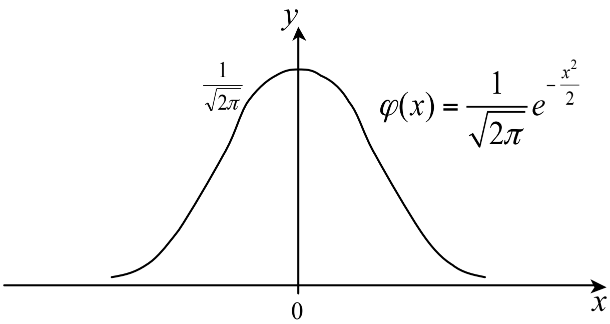


Рис. 4.3

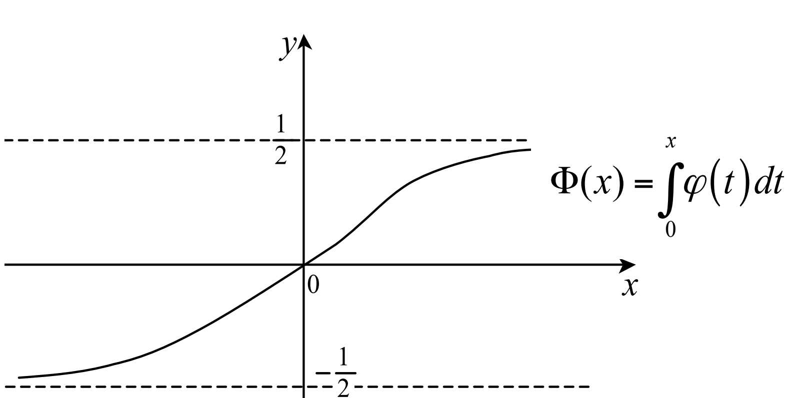


Рис. 4.4

5. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

5.1 Означення дискретної випадкової величини

О з н а ч е н н я 1. Змінна величина X, яка в результаті випробування набуває одного зі значень $x_1, x_2, ..., x_k$ скінченної числової послідовності або одного зі значень $x_1, x_2, ..., x_k ...$ нескінченної числової послідовності, називається *дискретною* (*розривною*) *випадковою величиною*, якщо кожному значенню x_i випадкової величини X поставлено у відповідність певну ймовірність p_i події ($X = x_i$), $i = 1, 2, ..., k$. Тобто, $p_i = P(X = x_i)$. Таблиця вигляду:

Можливі значення випадкової величини X	x_1	x_2	...	x_k	...
Ймовірності цих значень	p_1	p_2	...	p_k	...

називається *законом розподілу* або *рядом розподілу* дискретної випадкової величини X.

Закон розподілу може бути заданий *аналітично* (за допомогою формули):

$$p_i = f(x_i),$$

або *графічно* у вигляді *многокутника розподілу* ймовірностей (рис 5.1):

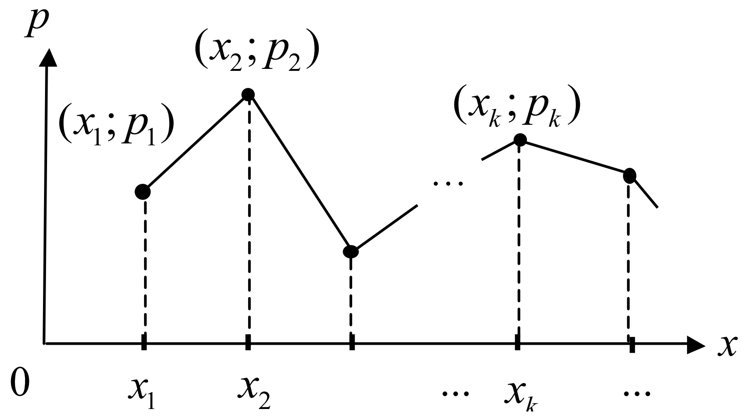


Рис. 5.1.

Те, що випадкова величина X в результаті випробування набуде одного із своїх можливих значень $x_1, x_2, ..., x_k$ є вірогідною подією, а тому $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$, коли X набуває скінченного числа значень. Аналогічно

$p_1 + p_2 + \ldots + p_k + \ldots = 1$, коли X набуває нескінченного числа значень.

Значення x_i випадкової величини X, яке має найбільшу ймовірність, називається *модою* випадкової величини X.

Зауваження. Для зручності викладення надалі вважатимемо, що дискретна випадкова величина набуває скінченного числа значень.

Приклад 1. Нехай випадкова величина X – число появ герба за одного підкидання двох монет. Тоді ряд розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	0	1	2
$p = P(X = x_k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Приклад 2. Якщо X – число очок, що може випасти в одному підкиданні грального кубика, то ряд розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Приклад 3. У грошовій лотереї випущено 100 квитків. Розігрується три виграші по 150 грн. та два виграші по 800 грн. Якщо X – вартість можливого виграшу для власника одного лотерейного квитка, то закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	0	150	800
P	0,95	0,03	0,02

5.2 Математичне сподівання випадкової величини

Нехай випадкову величину X задано законом розподілу:

X	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
$p = P(X = x_k)$	p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

(5.1)

О з н а ч е н н я 1. *Математичним сподіванням* випадкової величини X, яке позначається через $M(X)$ або m_X, називається сума добутків усіх можливих значень випадкової величини на ймовірності цих значень

$$M(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i .$$

Нагадуємо, що $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Коли значення випадкової величини утворюють нескінченну послідовність, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_ix_i .$$

(Якщо ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_ix_i$ розбіжний, то кажуть, що математичне сподівання випадкової величини X не існує.)

Покажемо, що середнє арифметичне експериментальних значень випадкової величини, за необмеженого зростання числа випробувань, прямує до її математичного сподівання.

Нехай проводиться N незалежних випробувань.

Припустимо, що

значення x_1 з'явилося n_1 разів,

значення x_2 з'явилося n_2 разів,

. . .

значення x_k з'явилося n_k разів.

Знайдемо середнє арифметичне дослідних значень, яке позначимо через $\bar{m}_X$:

$$\bar{m}_X = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + ... + x_kn_k}{N} = x_1\frac{n_1}{N} + x_2\frac{n_2}{N} + ... + x_k\frac{n_k}{N} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} x_i\frac{n_i}{N} \approx \sum_{i=1}^{k} x_ip_i = m_X ,$$

оскільки при $N \to \infty$ частота $\frac{n_i}{N}$ прямує до ймовірності p_i появи значення x_i.

Приклад 1. Знайти математичне сподівання випадкової величини X – числа влучань в 3-х пострілах, якщо ймовірність влучання в одному пострілі дорівнює $p = 0,4$.

Розв'язання. Випадкова величина X може набувати значень 0, 1, 2 і 3. Ймовірності кожного із значень випадкової величини X

$$p_1 = P(X=0) = C_3^0 p^0 q^3 = C_3^0 \cdot (0,6)^3 = 0,216,$$
$$p_2 = P(X=1) = C_3^1 p^1 q^2 = 0,432,$$
$$p_3 = P(X=2) = C_3^2 p^2 q^1 = 0,288,$$
$$p_4 = P(X=3) = C_3^3 p^3 q^0 = 0,064.$$

Отже, ряд розподілу набуває вигляду:

X	0	1	2	3
$p_k = P(X = x_k)$	0,216	0,432	0,228	0,064

$m_X = 0 \cdot 0,216 + 1 \cdot 0,432 + 2 \cdot 0,288 + 3 \cdot 0,064 = 1,2$ влучання.

Зауваження. Якщо випадкова величина X – це число появ деякої події A в n випробуваннях (схема випробувань Бернуллі), де $p = P(A)$ – ймовірність появи події A в одному випробуванні, $q = 1 - p$, то ряд розподілу випадкової величини X матиме вигляд:

X	0	1	2	...	k	...	n
P	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

Такий закон розподілу ймовірностей називається *біноміальним законом розподілу*. Назва закону розподілу зумовлена тим, що ймовірності дорівнюють членам розкладання за *формулою бінома* виразу

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Як і варто очікувати, сума ймовірностей всіх значень випадкової величини X дорівнює одиниці:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

Можна показати, що для *біноміального* розподілу

$$M(X) = np.$$

Зокрема у попередньому прикладі $n = 3$, $p = 0,4$, тому $M(X) = 3 \cdot 0,4 = 1,2$.

Приклад 2 (задача про витрату снарядів). Ймовірність влучання в ціль в одному пострілі дорівнює $p = 0,3$. Визначити витрату снарядів, яка забезпечить математичне сподівання числа влучань, що дорівнюватиме 6.

Розв'язання. Оскільки

$$M(X) = np, \text{ то } n = \frac{M(X)}{p} = \frac{6}{0,3} = 20.$$

Це означає, що потрібно витратити 20 снарядів.

5.3 Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання сталої величини C дорівнює сталій величині C.

$$M(C) = C.$$

2. Якщо X, Y – випадкові величини, то для випадкової величини $Z = X + Y$

$$M(Z) = M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

3. Якщо a – стала, X – випадкова величина, то

$$M(aX) = aM(X).$$

4. Якщо X – випадкова величина, a, b – сталі, то з властивостей 2 і 3 маємо

$$M(aX + b) = aM(X) + b.$$

5. Випадкова величина $X - m_X$ називається *відхиленням.* Очевидно, що її математичне сподівання дорівнює нулеві

$$M(X - m_X) = 0.$$

Усі наведені властивості можна довести безпосередньо, виходячи з означення математичного сподівання. Якщо, наприклад, ряд розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	x_1	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
P	p_1	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

то ряд розподілу випадкової величини $Y = aX + b$ такий:

Y	$ax_1 + b$	$\dots$	$ax_i + b$	$\dots$	$ax_n + b$
P	p_1	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

Справді,

$$M(Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i + b) = a\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \sum_{i=1}^{n} p_i b = aM(X) + b,$$

що й доводить властивість 4.

6. Якщо випадкові величини X та Y набувають своїх значень незалежно одна від одної, то вони називаються *незалежними*. (Точне означення незалежних дискретних випадкових величин подається у підрозділі 9.1. Його суть полягає у тому, що випадкові величини X та Y є незалежними тоді, коли події ($X = x_i$) та ($Y = y_i$) є незалежними).

Якщо X, Y *незалежні* випадкові величини, то для випадкової величини $X \cdot Y$ виконується рівність:

$$M\left(X \cdot Y\right) = M\left(X\right) \cdot M\left(Y\right).$$

5.4 Дисперсія та середнє квадратичне відхилення

Спочатку розглянемо такий приклад.

Приклад 1. Нехай випадкову величини X задано рядом розподілу:

X	1	99
P	0,5	0,5

Тоді математичне сподівання $M\left(X\right) = 50$.

Нехай випадкову величину Y задано таким рядом:

Y	49	51
P	0,5	0,5

Тоді $M\left(Y\right) = 50$.

Математичні сподівання випадкових величин X, Y однакові, проте розподілені величини X та Y по-різному.

Це означає, що математичне сподівання не відображає факту відхилень значень випадкової величини від її математичного сподівання.

Отже, якщо математичне сподівання випадкової величини є її «*середнім значенням*», то така числова характеристика, як дисперсія вводиться як «*показник ступеня розсіювання*» випадкової величини навколо її «*середнього значення*».

Термін «*дисперсія»* означає «*розсіювання».*

О з н а ч е н н я 1. *Дисперсією* випадкової величини X називається число

$$D(X) = M\left[(X - m_X)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} (x - m_x)^2 p_i.$$

Тут $(X - m_X)^2$– випадкова величина, яка набуває значень

$$(x_1 - m_X)^2,\ (x_2 - m_X)^2, \dots ,\ (x_n - m_X)^2.$$

Зауважимо, що коли випадкова величина X розподілена за законом (5.1), то випадкова величина X^2 розподіляється за законом:

X^2	x_1^2	x_2^2	...	x_n^2
P	p_1	p_2	...	p_n

на будь-якому проміжку монотонності функції $y = x^2$ (див. далі підрозділ 5.6).

У попередньому прикладі

$$D(X) = \sum_{i=1}^{2} p_i \left(x_i - m_X\right)^2 = 0{,}5 \cdot \left(1 - 50\right)^2 + 0{,}5 \cdot \left(99 - 50\right)^2 = 49^2 = 2401;$$

$$D\left(Y\right) = 0{,}5 \cdot \left(49 - 50\right)^2 + 0{,}5 \cdot \left(51 - 50\right)^2 = 1.$$

Отже, у цьому прикладі випадкова величина X розсіюється значно більше, ніж величина Y.

Зауваження 1. Може виникати запитання: чому за означення дисперсії не можна взяти, наприклад, рівність: $D(X) = M\left[(X - m_X)\right]$? Але така характеристика не відображатиме факту розсіювання випадкової величини X. Дійсно, в попередньому прикладі $M\left[(X - m_X)\right] = 0$, тоді, як відхилення значень X від m_X дорівнюють (– 49) і 49.

Окрім дисперсії розглядають також і таку числову характеристику випадкової величини, як *середнє квадратичне відхилення.*

О з н а ч е н н я 2. *Середнім квадратичним відхиленням* $\sigma(X) = \sigma_X$ випадкової величини X називається корінь квадратний з дисперсії $D(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_X)^2 p_i}\ .$$

Зауваження 2. Величина σ вимірюється в тих самих одиницях, що й величина X,тоді як дисперсія $D(X)$вимірюється у квадратних одиницях.

Зауваження 3. Для обчислення дисперсії використовується також і така *розрахункова формула*:

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2.$$

Дійсно,

$$D(X) = M\left[(X - m_X)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - m_X)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i^2 - 2x_i m_X + m_X^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - 2m_X \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + m_X^2 \sum_{i=1}^{n} p_i = M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) =$$

$$= M(X^2) - M^2(X).$$

Приклад 2. Нехай розподіл випадкової величини X має вигляд

X	2	3	4
$p = P(X = x_k)$	0,3	0,4	0,3

Знайдемо числові характеристики $M(X)$, $D(X)$ та $\sigma(X)$.

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 = 3,\ M^2(X) = 9,$$

$$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}4 + 16 \cdot 0{,}3 = 9{,}6,$$

$$D(X) = 9{,}6 - 9{,}0 = 0{,}6,\ \ \sigma(X) = 0{,}77.$$

5.5 Властивості дисперсії

1. Дисперсія сталої величини C дорівнює нулеві. Тобто,

$$D\left(C\right) = M\left[\left(C - C\right)^2\right] = M\left(0\right) = 0.$$

2. Дисперсія суми двох *незалежних* (див. далі підрозділ 9.1) випадкових величин X та Y дорівнює сумі дисперсій цих величин, тобто

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Дійсно,

$$D(X+Y) = M\{[(X+Y) - M(X+Y)]^2\} =$$

$$= M\{[(X - M(X)) + (Y - M(Y))]^2\} =$$

$$= M\{[X - M(X)]^2\} + M\{[Y - M(Y)]^2\} +$$

$$+2M\{[X - M(X)] \cdot [Y - M(Y)]\} =$$

$$= D(X) + D(Y) + 2K(X,Y),$$

де

$$K(X,Y)=M\{[X-M(X)]\cdot[Y-M(Y)]\}\,-$$

так званий *кореляційний момент* величин X та Y. Відомо, що $K(X,Y)=0$, коли X, Y – незалежні, отже, $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

3. Якщо C – стала величина, X – випадкова величина, то

$$D(X+C)=D(X).$$

Це випливає з властивостей 1 та 3.

4. Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, піднісши його до квадрату:

$$D(CX)=C^2D(X).$$

Справді,

$$D(CX)=M(C^2X^2)-[M(CX)]^2=C^2M(X^2)-C^2[M(X)]^2=C^2D(X).$$

5. Дисперсія різниці двох *незалежних* випадкових величин X та Y дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Справді на підставі властивостей 2 і 4

$$D(X-Y)=D[X+(-Y)]=D(X)+D(-Y)=$$
$$=D(X)+(-1)^2\cdot D(Y)=D(X)+D(Y).$$

5.6 Функція від дискретної випадкової величини

Нехай X – дискретна випадкова величина, φ – функція, тоді $\varphi(X)$ – теж дискретна випадкова величина.

Якщо ряд розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

(5.2)

то знайдемо розподіл ймовірностей значень функції $Y=\varphi(X)$ від дискретної випадкової величини X, за умови, що для різних можливих значень x_i величини X значення функції $\varphi(x_i)$ теж різні (тобто φ – цілком монотонна). Можливими значеннями випадкової величини Y будуть числа $\varphi(x_i)$, причому величина Y набуває значення $\varphi(x_i)$ тоді і тільки тоді, коли величина X набуває значення x_i. Тому ймовірності подій $(Y=\varphi(x_i))$ та $(X=x_i)$ однакові:

$$P(Y = \varphi(x_i)) = P(X = x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Таким чином, розподіл випадкової величини Y набуде вигляду:

Y	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	...	$\varphi(x_n)$
P	p_1	p_2	...	p_n

(5.3)

Отже, розподіли випадкових величин X та $Y = \varphi(X)$ відрізняються лише верхнім рядком – рядком можливих значень.

Зрозуміло, що математичне сподівання функції $Y = \varphi(X)$ обчислюється за формулою

$$M(Y) = M(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i,$$

а дисперсія

$$D(Y) = D(\varphi(x)) = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi(x_i) - M(\varphi(x_i))\right)^2 p_i.$$

Приклад 1. Випадкова величина X розподілена так:

X	0	1	2
P	$1/2$	$1/3$	$1/6$

Знайти розподіли ймовірностей випадкових величин $X-1$, X^2 та $(X-1)^2$.

Розв'язання. Функції $X-1$ та X^2 набувають в точках $X = 0, 1, 2$ різних значень, тому їхні закони розподілу є такими:

$X-1$	-1	0	1
P	$1/2$	$1/3$	$1/6$

X^2	0	1	2
P	$1/2$	$1/3$	$1/6$

Функція $(X-1)^2$ набуває рівних значень у точках $X=0$ та $X=2$, тому подія $(X-1)^2=1$ є сумою двох подій $\left(X=0\right)$ та $\left(X=2\right)$. За теоремою про додавання ймовірностей, маємо

$$P\left((X-1)^2=1\right)=P(X=0)+P(X=2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.$$

Закон розподілу випадкової величини $(X-1)^2$ буде таким:

$(X-1)^2$	0	1
P	$1/3$	$2/3$

Висновок: з розподілу (5.2) отримаємо розподіл (5.3) за умови, що

$$x_i \neq x_k \Rightarrow \varphi\left(x_i\right) \neq \varphi\left(x_k\right). \tag{5.4}$$

Але, якщо функція φ цілком зростаюча або цілком спадна, то умова (5.4) виконується. Тому, для *цілком монотонної* функції $y=\varphi\left(x\right)$, маючи розподіл (5.2) випадкової величини X, легко знаходимо розподіл (5.3) нової випадкової величини $Y=\varphi\left(X\right)$.

Приклад 2. Два гральні кубики підкидають одночасно. Знайти розподіл суми очок, що випали на їхніх верхніх гранях.

Розв'язання. Число очок, що випадають на верхніх гранях першого та другого кубиків є випадковими величинами X_1 та X_2, які набувають своїх значень незалежно одна від одної й мають однакові закони розподілу:

X_1	1	2	3	4	5	6
P	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

X_2	1	2	3	4	5	6
P	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Сума $X_1 + X_2$ може набувати значень від 2 до 12, але деяких значень вона набуває за різних наборів значень X_1та X_2, наприклад, подія $(X_1 + X_2 = 4)$ може відбутися, коли $(X_1 = 1)$ і $(X_2 = 3)$, або коли $(X_1 = 2)$ і $(X_2 = 2)$, або коли $(X_1 = 3)$ і $(X_2 = 1)$.

Тобто,

$$P(X_1 + X_2) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 3) + P(X_1 = 2) \cdot P(X_2 = 2) +$$
$$+ P(X_1 = 3) \cdot P(X_2 = 1),$$

враховуючи теорему про додавання ймовірностей, звідки маємо такий закон розподілу випадкової величини $X_1 + X_2$:

$X_1 + X_2$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Тут корисно зауважити, що хоч розподіли величин X_1та X_2однакові, проте розподіл їхньої суми $X_1 + X_2$ помітно відрізняється від розподілу подвоєної випадкової величини $2X_1 = X_1 + X_1$:

$2X_1 = X_1 + X_2$	2	4	6	8	10	12
P	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

6. НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

6.1 Функція розподілу випадкової величини

О з н а ч е н н я 1. Якщо значення випадкової величини (в. в.) цілком заповнюють деякий інтервал (скінченний чи нескінченний), то така випадкова величина називається *неперервною*.

Прикладом неперервної випадкової величини є, зокрема, результат вимірювання, зважування тощо.

Розглядаючи дискретні випадкові величини, ми користуємося їхніми законами розподілу, за якими кожному значенню x_i в. в. X відповідає певна ймовірність $p_i = P(X = x_i)$. Для неперервної випадкової величини виписати її закон розподілу подібним чином неможливо. Тому при вивченні неперервних випадкових величин потрібен інший підхід. Це реалізується через поняття *функції розподілу* випадкової величини (функція розподілу придатна також і для вивчення дискретних випадкових величин).

О з н а ч е н н я 2. Якщо X – випадкова величина (неперервна або дискретна), а x – довільне число, то нерівність ($X < x$) є випадковою подією. Її ймовірність $P(X < x)$ залежить від x. Тоді функція

$$F(x) = P(X < x) \tag{6.1}$$

називається *функцією розподілу* випадкової величини X.

Спочатку розглянемо приклад функції розподілу *дискретної* випадкової величини X.

Приклад 1. Знайти функцію розподілу дискретної випадкової величини X, заданої таким законом розподілу:

X	–1	0	2	2,5
P	0,2	0,3	0,4	0,1

Розв'язання. Значення випадкової величини X розбивають всю числову вісь на 5 проміжків (рис. 6.1).

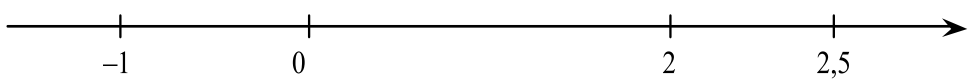


Рис. 6.1

Якщо $x \le 1$, то $F(x) = P(X < x) = 0$.

Якщо $-1 < x \le 0$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = -1) = 0,2$.

Якщо $0 < x \le 2$, то

$$F(x) = P(X < x) = P((X = -1) \text{ або } (X = 0)) =$$
$$= 0,2 + 0,3 = 0,5.$$

Якщо $2 < x \le 2,5$, то

$$F(x) = P(X < x) = P((X = -1) \text{ або } (X = 0) \text{ або } (X = 2)) =$$
$$= 0,2 + 0,3 + 0,4 = 0,9.$$

Якщо $x > 2,5$, то $F(x) = 1$.

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 1; \\ 0,2 & при \quad -1 < x \le 0; \\ 0,5 & при \quad 0 < x \le 2; \\ 0,9 & при \quad 2 < x \le 2,5; \\ 1 & при \quad 2,5 < x. \end{cases}$$

Будуємо графік функції $F(x)$ (рис. 6.2).

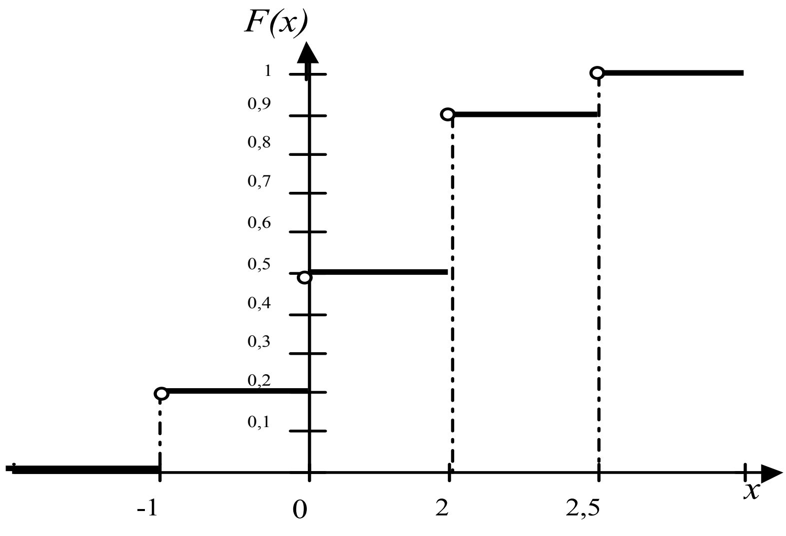


Рис. 6.2

Звідси бачимо, що за заданою функцією розподілу дискретної випадкової величини X, можна встановити її закон розподілу і навпаки. Абсциса точки розриву функції $y = F(x)$ – це значення, якого набуває дискретна випадкова величина X, а величина стрибка в цій точці дорівнює ймовірності цього значення.

З рис. 6.2 бачимо, що $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$. Виявляється, що ці властивості є загальними. Вони мають місце для функції розподілу будь-якої випадкової величини.

Основні властивості функції розподілу:

1. Якщо $F(x)$– функція розподілу, то $0 \le F(x) \le 1$ для будь-якого x. Це випливає з (6.1).

2. Функція розподілу неспадна і

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

*Доведення***.** Нехай $x_1 < x_2$– довільні числа. Тоді

$$(X < x_2) = (X < x_1) \text{ або } (x_1 \le X < x_2).$$

Тому
$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2) \quad \Rightarrow$$
$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \tag{6.2}$$

З (6.2) випливає, що $F(x_2) \ge F(x_1)$, коли $x_2 \ge x_1$. Отже, $F(x)$ – неспадна.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Доведення. $F(x)$ – монотонна, обмежена і зверху, і знизу (див. властивість 1). Тому обидві ці границі існують. Але $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$– це ймовірність того, що випадкова величина X набуде якогось значення. Тому $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$– це ймовірність того, що випадкова величина X не набуде жодного значення. Тому $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

4. Якщо x_0– точка неперервності функції розподілу $y = F(x)$ випадкової величини X, то $P(X = x_0) = 0$.

*Доведення***.** Із властивості 2 та рис. 6.3 випливає, що

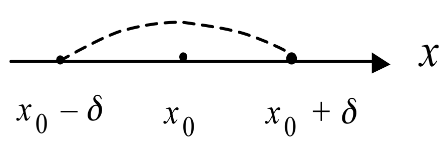


Рис. 6.3

$$P(X = x_0) \le P(x_0 - \delta \le X < x_0 + \delta) = F(x_0 + \delta) - F(x_0 - \delta).$$

Переходячи у цій нерівності до границі, за умови $\delta \to 0$, маємо

$$0 \le P(X = x_0) \le \lim_{\delta \to 0} F(x_0 + \delta) - \lim_{\delta \to 0} F(x_0 - \delta) = F(x_0) - F(x_0) = 0.$$

Звідки $0 \le P(X = x_0) \le 0 \Rightarrow P(X = x_0) = 0$.

Наслідок. Якщо x_1, x_2 – точки неперервності функції $F(x)$, то

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 \le X \le x_2) =$$
$$= P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Отже, кінці інтервалу, у який потрапляє випадкова величина X, можна включати або не включати при обчисленні ймовірності, якщо ці кінці є точками неперервності функції розподілу $F(x)$.

Зауваження. З поняттям функції розподілу $F(x)$ пов'язане поняття характеристичної функції розподілу випадкової величини X.

Нехай $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця. Тоді характеристичною функцією $E_x(t)$ *дискретної* випадкової величини X називається функція дійсного аргументу t, що визначається рівністю

$$E_x(t) = M\left(e^{itx}\right) = \sum_k e^{itx_k} P\left(X = x_k\right).$$

Якщо X – *неперервна* випадкова величина, то

$$E_x(t) = M\left(e^{itx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx,$$

де $f(x) = F'(x)$ – диференціальна функція розподілу випадкової величини X (див. підрозділ 6.2).

За характеристичною функцією $E_x(t)$ можна однозначно відновити функцію розподілу $F(x)$. До того ж, коли X – неперервна випадкова величина, то за функцією $E_x(t)$ можна знайти функцію $F(x)$.

6.2 Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини

О з н а ч е н н я 1. Якщо функція розподілу F випадкової величини X диференційовна, то *щільністю розподілу ймовірностей* або *диференціальною функцією розподілу* називається функція

$$f(x) = F'(x). \tag{6.3}$$

Наведемо властивості функції розподілу $f(x)$.

1. $f(x) \geq 0$ для будь-якого x, як похідна неспадної функції $F(x)$.

2. $P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

Доведення. Оскільки $F(x)$ неспадна, то $F'(x) = f(x) \geq 0$. З формули Ньютона-Лейбніца випливає, що

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt.$$

Геометричне тлумачення: *ймовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал $(x_1;x_2)$ дорівнює площі заштрихованої криволінійної трапеції* (рис. 6.4).

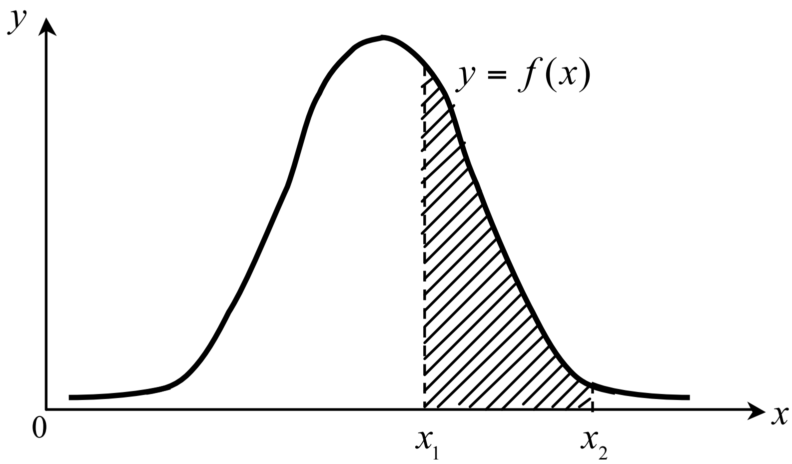


Рис. 6.4

Величина $f\left(x\right)dx$ називається *елементом ймовірності* або *елементарною ймовірністю*. Якщо x – незалежна змінна, то $dx = \Delta x$, а тому величина $f\left(x\right)dx = f\left(x\right)\Delta x$ за досить малих значень Δx приблизно дорівнює ймовірності потрапляння випадкової величини X в *елементарний* інтервал довжиною Δx (рис. 6.5).

За досить малих значень Δx площа криволінійної трапеції $ABDC$ приблизно дорівнює площі прямокутника $ABFC$ (рис. 6.5).

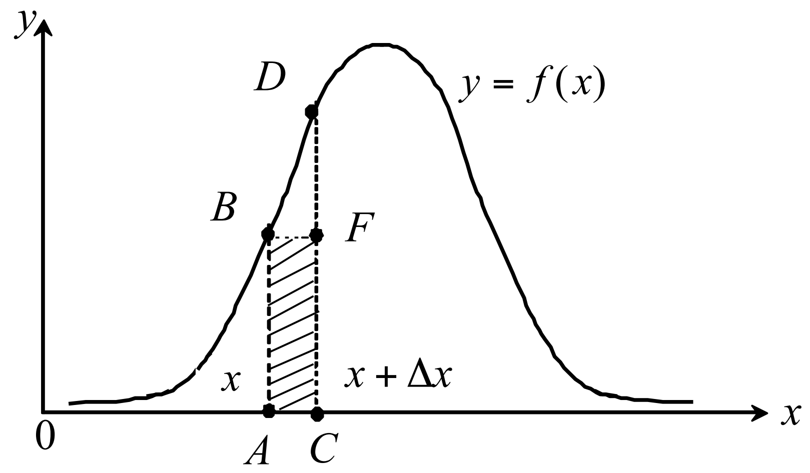


Рис. 6.5

Зауваження 1. З огляду на те, що функцію $f(x)$ називають *диференціальною* функцією розподілу, функцію $F(x)$ називають *інтегральною* функцією розподілу.

3. Якщо $f(x)$ − щільність розподілу ймовірностей, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Доведення

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}} F(x)\Big|_a^b = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}} (F(b) - F(a)) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a) = 1 - 0 = 1.$$

Геометрично це означає, що площа, обмежена кривою $y = f(x)$ та віссю Ox, дорівнює 1. Це одна з найважливіших властивостей функції (6.3).

4. Якщо $f(x)$ − щільність розподілу ймовірностей, а $F(x)$ − функція розподілу випадкової величини X, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt. \tag{6.4}$$

Доведення

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \lim_{b\to-\infty} \left[\int\limits_{b}^{x} f(t)dt \right] = \lim_{b\to-\infty} \big[F(x) - F(b) \big] = F(x) - 0 = F(x).$$

Зауваження 2. Можна було б спочатку ввести поняття щільності ймовірностей, тобто функцію $f(x)$, а потім за допомогою рівності (6.4) ввести поняття інтегральної функції розподілу $F(x)$.

Приклад 1. Випадкова величина X має щільність розподілу ймовірностей $f(x)=\dfrac{a}{1+x^2}$. Визначити параметр a та знайти функцію розподілу $F(x)$.

Розв'язання. Оскільки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{a}{1+x^2}dx =$

$$= a \cdot arctg\, x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = a\frac{\pi}{2} - a\left(-\frac{\pi}{2}\right) = a\pi = 1.$$

Таким чином, $\pi a = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{\pi}$, а тому

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi} arctg\, t\Big|_{-\infty}^{x} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(arctg\, x - arctg(-\infty)\right) = \frac{1}{\pi} arctg\, x + \frac{1}{2}.$$

Графіки цих функцій зображено на рис. 6.6 та 6.7.

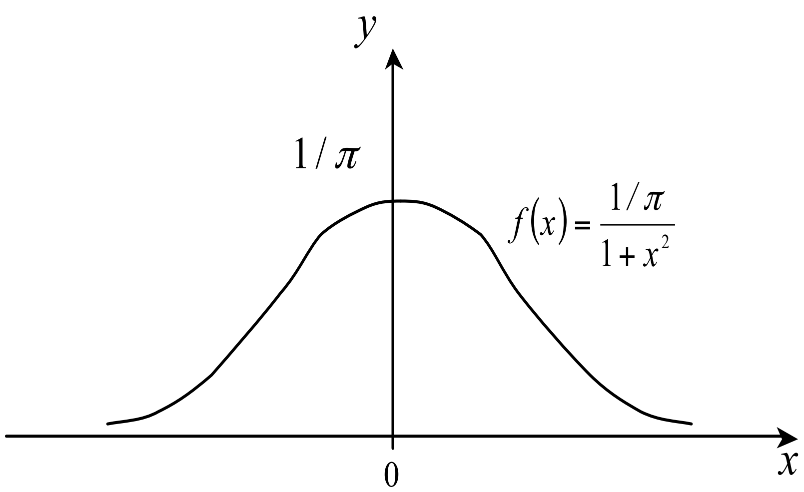


Рис. 6.6

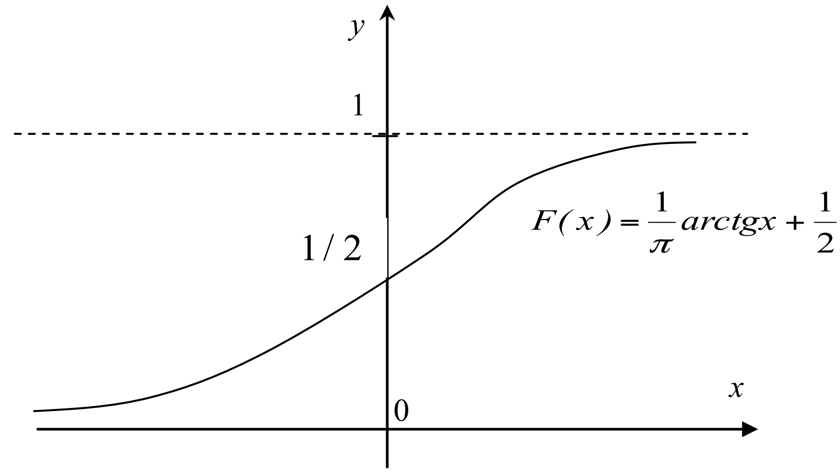


Рис. 6.7

6.3 Математичне сподівання та дисперсія неперервної випадкової величини. Мода та медіана. Моменти випадкових величин

О з н а ч е н н я 1. Якщо $f(x)$ − щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X, то число

$$M(X) = m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx \tag{6.5}$$

називається *математичним сподіванням* випадкової величини X, а число

$$D(X) = M(X - m_X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f(x)dx \tag{6.6}$$

дисперсією випадкової величини X.

Математичне сподівання m_X є центром розподілу ймовірностей випадкової величини X (рис. 6.8).

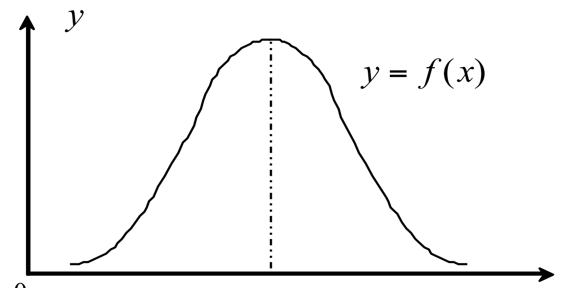


Рис. 6.8

Якщо $f(x)$ – парна, то $xf(x)$ – непарна (як добуток непарної на парну), а тому $m_X = 0$ (рис. 6.9).

Усі властивості математичного сподівання та дисперсії, розглянуті у випадку дискретних випадкових величин, зберігаються й у випадку неперервних випадкових величин (див. підрозділи 5.3, 5.5).

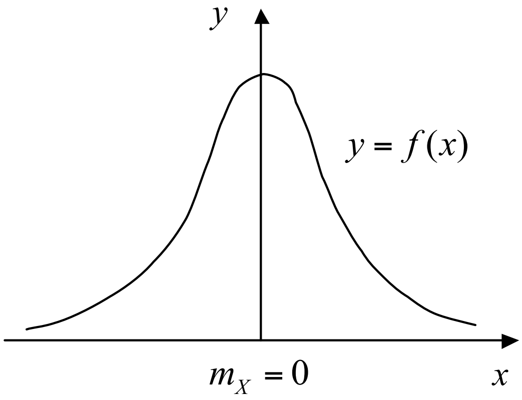


Рис. 6.9

О з н а ч е н н я 2. *Модою* $M_o(X)$ неперервної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає локальний максимум диференціальної функції розподілу $f(x)$.

О з н а ч е н н я 3. *Медіаною* $M_e(X) = h$ неперервної випадкової величини X називають те її можливе значення, яке визначається рівністю:

$$P\big(x < M_e(X)\big) = P\big(x > M_e(X)\big).$$

Зрозуміло, що вертикальна пряма $x = M_e(X)$ ділить площу, обмежену кривою розподілу $f(x)$, на дві рівні частини (рис. 6.10).

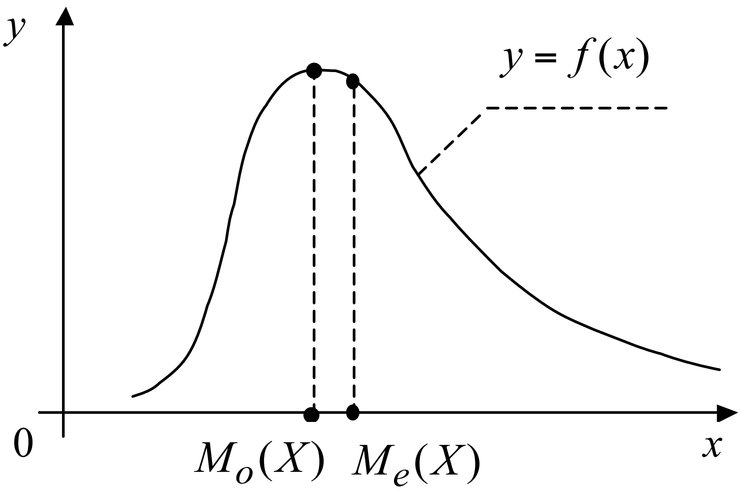


Рис. 6.10

У цілому ряді задач недостатньо знати математичне сподівання та дисперсію випадкової величини. У деяких із них звертаються до *початкових* та *центральних моментів* випадкової величини (як неперервної, так і дискретної).

Початковим моментом k-го порядку випадкової величини X називається число

$$\nu_k = M(X^k). \tag{6.7}$$

Центральним моментом k-го порядку випадкової величини X називається число

$$\mu_k = M((x - m_X)^k). \tag{6.8}$$

Як бачимо з (6.7) при $k = 1$ початковий момент ν_1 є математичним сподіванням випадкової величини X, а з (6.8) при $k = 2$ випливає, що центральний момент μ_2 є дисперсією випадкової величини X.

Можна сказати, що моменти є узагальненням таких понять, як математичне сподівання та дисперсія.

6.4 Квантиль та критична точка розподілу

О з н а ч е н н я 1. *Квантилем* порядку p розподілу неперервної величини X називається дійсне число t_p, яке задовольняє рівняння:

$$P\left(X < t_p\right) = p.$$

Симетричним квантилем порядку p розподілу неперервної величини X називається дійсне число $\tilde{t}_p$, яке задовольняє рівняння:

$$P\left(\left|X\right| < \tilde{t}_p\right) = p.$$

О з н а ч е н н я 2. *Критичною точкою* порядку p розподілу неперервної величини X називається дійсне число x_p, яке задовольняє рівняння:

$$P\left(X \ge x_p\right) = p.$$

Симетричною критичною точкою порядку p розподілу неперервної величини X називається дійсне число $\tilde{x}_p$, яке задовольняє рівняння:

$$P\left(\left|X\right| \ge \tilde{x}_p\right) = p.$$

Квантиль та критична точка одного й того самого розподілу пов'язані такою рівністю: $x_p = t_{1-p}$, а в симетричному випадку рівністю: $\tilde{x}_p = \tilde{t}_{1-p}$.

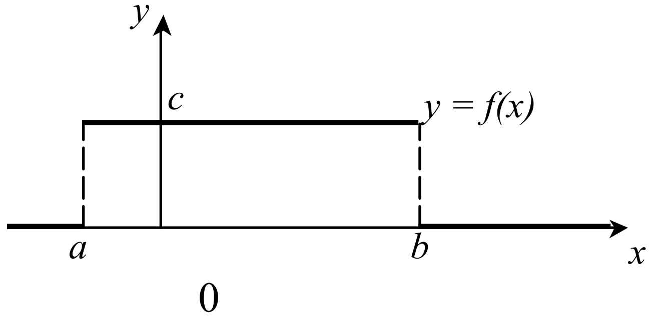
Очевидно, що коли h_X – медіана неперервної випадкової величини X, то $h_X = t_{0,5}$.

Поняття квантилю та критичної точки широко використовуються в математичній статистиці, про що мова йтиме далі.

7. ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

7.1 Рівномірний розподіл

О з н а ч е н н я 1. Якщо щільність розподілу ймовірностей випадкової величини є сталою на деякому відрізку і дорівнює нулеві поза ним (рис. 7.1), то випадкова величина X називається рівномірно розподіленою на цьому відрізку.



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ c, & a < x < b; \\ 0, & x \ge b. \end{cases}$$

Рис. 7.1

Оскільки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, то $\int\limits_{a}^{b} cdx = 1$, а тому $c = \dfrac{1}{b-a}$. Таким чином щільність розподілу ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b; \\ 0, & x \ge b. \end{cases}$$

Математичне сподівання рівномірного розподілу

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_{a}^{b} x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Якщо $F(x)-$ функція розподілу, то для $x \le a$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Коли $a < x < b$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int\limits_{a}^{x} f(t)dt = \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{x} dt = \frac{x-a}{b-a}.$$

У випадку, коли $x \ge b,\ F(x) = 1.$

Отже,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b;\\ 1, & x\ge b.\end{cases}$$

Графік функції $y = F(x)$ зображено на рис. 7.2:

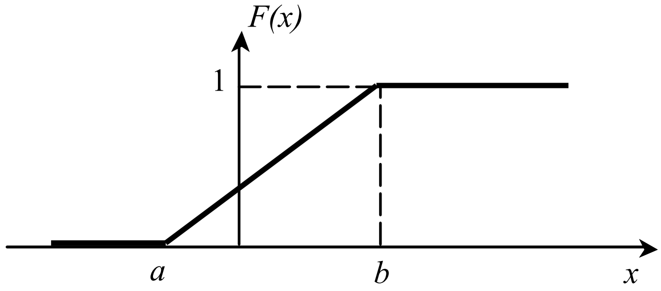


Рис. 7.2

Легко довести, що дисперсія рівномірно розподіленої випадкової величини X дорівнює

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}, \text{ звідки } \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Приклад 1. Ціна поділки шкали амперметра дорівнює $0{,}1\ A$. Покази заокруглюють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що під час вимірювання буде зроблено помилку, яка перевищуватиме $0{,}02\ A$.

Розв'язання. Помилку заокруглення можна розглядати як випадкову величину X, що розподілена рівномірно в інтервалі між двома сусідніми поділками. Величина X набуває значень з інтервалу $(0;0{,}1)$, довжина якого дорівнює $b-a=0{,}1-0=0{,}1$. Тому $f(x)=\dfrac{1}{b-a}=10$, коли $X\in(0;0{,}1)$ і $f(x)=0$, коли $X\notin(0;0{,}1)$. Зрозуміло, що помилка перевищуватиме $0{,}02$, коли $0{,}02<X<0{,}08$. Тому

$$P(a<X<b)=P(0{,}02<X<0{,}08)=\int_a^b f(x)dx=\int_{0{,}02}^{0{,}08}10dx=0{,}6.$$

Приклад 2. Автобуси деякого маршруту йдуть чітко за розкладом. Інтервал руху – 5 хвилин. Знайти ймовірність того, що студент, який підійшов до зупинки, чекатиме наступного автобуса менше ніж три хвилини.

Розв'язання. Нехай випадкова величина $X-$ час очікування автобуса. Вона набуває значень з інтервалу $(0;5)$. Студент чекатиме наступного автобуса менше ніж три хвилини, коли відбудеться подія: $(0 < X < 3)$. Отже

$$P(0 < X < 3) = \int_0^3 \frac{1}{5-0}\,dx = \frac{3}{5}.$$

Зауваження. Якщо $Z-$ час, що минув після відходу попереднього автобуса, то $Z-$ теж випадкова величина, розподілена рівномірно на інтервалі $(0;5)$. Очевидно, що $P(0 < X < 3) = P(2 < Z < 5) = \int_2^5 \frac{1}{5-0}dz = \frac{3}{5}$.

7.2 Біноміальний розподіл

О з н а ч е н н я 1. Якщо дискретна випадкова величина X, набуває лише цілих невід'ємних значень k (тобто $k = 1, 2, ..., n$) з імовірностями

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (p + q = 1,\ p > 0,\ q > 0),$$

то кажуть, що вона розподілена за *біноміальним законом*.

Можна довести, що для біноміально розподіленої випадкової величини X $M(X) = np$, $D(X) = npq$, звідки $\sigma_X = \sqrt{npq}$.

Ряд розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$	n
$P(X=k)$	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\ldots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\ldots$	$C_n^n p^n q^0$

Такий розподіл уже розглядався в підрозділі 5.2.

Приклад 1. Пристрій складається з трьох елементів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови кожного з елементів в одному випробуванні дорівнює $0,1$. Тоді закон розподілу випадкової величини $X-$ числа елементів, що відмовили в одному випробуванні, має вигляд:

X	0	1	2	3
P	$0,729$	$0,243$	$0,027$	$0,001$

Тут $M(X) = np = 0,4$, $D(X) = npq = 0,36$.

6.3 Розподіл Пуассона. Найпростіший потік подій

О з н а ч е н н я 1. Дискретна випадкова величина X, яка може набувати лише цілих невід'ємних значень k з імовірностями

$$P(X = k) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0,1,2,..., \quad a > 0, \tag{7.1}$$

називається розподіленою *за законом Пуассона з параметром* a.

Такий розподіл ми одержуємо в схемі повторних випробувань Бернуллі, якщо $n \to \infty$, $p \to 0$, але при цьому $np \to a = \text{const}$. У такому разі розподіл Пуассона інтерпретується як *закон «рідкісних» явищ,* і за досить малих p та великих n формула (7.1) використовується як наближення замість точної формули Бернуллі.

Отже, формула (7.1) виражає розподіл ймовірностей масових (n – велике) рідкісних (p – мале) подій.

Математичне сподівання

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{a^k \cdot e^{-a}}{k!} = a \cdot e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = a \cdot e^{-a} \cdot e^{a} = a.$$

Характерною особливістю розподілу Пуассона є збіг математичного сподівання та дисперсії. Оскільки за досить малих p, число q дуже близьке до 1, тому $a = M(X) = np \approx npq = D(X)$. Тобто,

$$M(X) = D(X) = a.$$

Крім того, сума незалежних випадкових величин, розподілених за законом Пуассона, також розподілена за законом Пуассона.

Приклад 1. На факультеті нараховується 500 студентів. Яка ймовірність того, що 1 вересня народилися одночасно k студентів цього факультету? Розглянути випадки, коли k = 0, 1, 2, 3.

Розв'язання. Оскільки n = 500 досить велике, а $p = \frac{1}{365}$ досить мале, то можна вважати, що випадкова величина X (число студентів, що народилися 1 вересня), підлягає закону розподілу Пуассона з параметром $a = np$ = 1,36986. За формулою (7.1)

$$P(X = 0) \approx 0{,}2541, \; P(X = 1) \approx 0{,}3481, \; P(X = 2) \approx 0{,}2585,$$

$$P(X = 3) \approx 0{,}1089.$$

За точною формулою Бернуллі

$P(X=0)\approx 0{,}2537,\ P(X=1)\approx 0{,}3485,\ P(X=2)\approx 0{,}2389,$
$P(X=3)\approx 0{,}1089.$

Потоком подій називають послідовність подій, які настають у випадкові моменти часу.

Серед властивостей, характерних для потоків подій, можна виділити, насамперед, властивості *стаціонарності, ординарності* та *відсутності наслідку.*

Якщо ймовірність появи k подій упродовж проміжку часу тривалістю t є функцією, яка залежить лише від t та k і не залежить від початку відліку часу, то кажуть, що потік подій має властивість *стаціонарності*.

Властивість *відсутності наслідку* означає, що ймовірність появи k подій на будь-якому проміжку часу не залежить від того, з'являлися чи не з'являлися події раніше до початку відліку цього проміжку часу.

Іншими словами, якщо потік подій має властивість відсутності наслідку, то має місце взаємно незалежна поява того чи іншого числа подій, що відбулися в різні проміжки часу, які не перетинаються.

Властивість *ординарності* проявляється в тому, що поява двох і більше подій за досить малий проміжок часу практично неможлива.

Іншими словами, якщо потік подій має властивість ординарності, то за достатньо малий проміжок часу може статися не більше ніж одна подія.

О з н а ч е н н я 2. Потік подій називається *пуассонівським* (*найпростішим*), якщо він має властивості *стаціонарності*, *ординарності* та *відсутності наслідку*.

О з н а ч е н н я 3. Число λ, що дорівнює середньому числу подій, які відбуваються за одиницю часу, називається *інтенсивністю* потоку.

Можна довести, що коли інтенсивність потоку є відомою і сталою, то ймовірність появи k подій найпростішого потоку упродовж часу t визначається за формулою Пуассона

$$P_t(k)=\frac{(\lambda t)^k\cdot e^{-\lambda t}}{k!}. \tag{7.2}$$

Ця формула виражає всі властивості найпростішого потоку, тому її вважають математичною моделлю найпростішого потоку подій.

Приклад 2. Середнє число викликів таксі, що надходять до диспетчерського пункту за одну хвилину, дорівнює трьом. Знайти ймовірність того, що за 2 хвилини надійде:

1) чотири виклики;

2) менше ніж чотири виклики;

3) не менше ніж чотири виклики.

Розв'язання. За умовою задачі $\lambda = 3,\ t = 2,\ k = 4.$ Скористаємося формулою (7.2).

1. $P_2(4) = \dfrac{(6)^4 \cdot e^{-6}}{4!} = \dfrac{1296 \cdot 0{,}0025}{24} = 0{,}135.$

2. $P_2(k < 4) = P_2(3) + P_2(2) + P_2(1) + P_2(0) =$

$$= \frac{(6)^3 \cdot e^{-6}}{3!} + \frac{(6)^2 \cdot e^{-6}}{2!} + \frac{(6)^1 \cdot e^{-6}}{1!} + e^{-6} =$$
$$= e^{-6}(36 + 18 + 6 + 1) = 0{,}0025 \cdot 61 = 0{,}1525.$$

3. $P_2(k \ge 4) = 1 - P_2(k < 4) = 1 - 0{,}1525 = 0{,}8475.$

7.4 Показниковий розподіл

О з н а ч е н н я 1. Кажуть, що випадкова величина X розподілена за *показниковим законом*, якщо її щільність ймовірностей задається функцією

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & при\ x \ge 0; \\ 0 & при\ x < 0. \end{cases} \quad (\lambda \text{ – деякий параметр})$$

(рис. 7.3).

Виявляється, що $M(X) = \dfrac{1}{\lambda},\ D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$, а інтегральна функція розподілу

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

якщо скористатися формулою інтегрування частинами (рис. 7.4).

Як бачимо, показниковий розподіл визначається лише одним параметром λ. Ця особливість вказує на перевагу цього розподілу перед тими розподілами, які визначаються багатьма параметрами.

Приклад 1. Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом, для якого диференціальна функція розподілу має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 5e^{-5x} & при\ x \ge 0; \\ 0 & при\ x < 0. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення в. в. X та $P(0<X<1)$.

Розв'язання. За умовою задачі $\lambda = 5$. Тому

$$M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{5}=0,2. \quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{5^2}=0,04.$$

Оскільки

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-5x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

то

$$P(0<X<1)=F(1)-F(0)=e^0-e^{-5}=1-0,0067=0,9933.$$

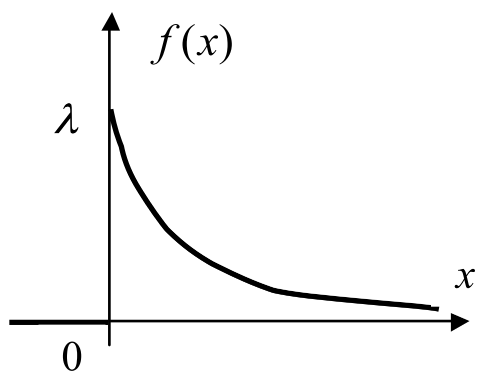


Рис. 7.3

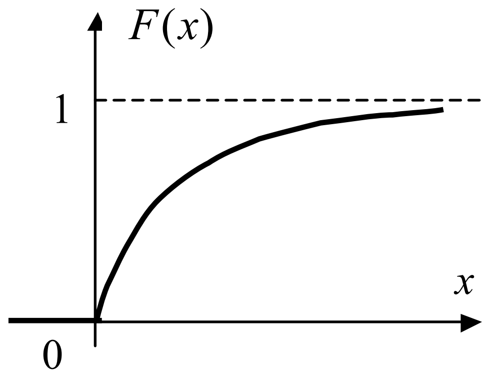


Рис. 7.4

7.5 Нормальний розподіл

Розглянемо найважливіший із усіх розподілів – нормальний розподіл.

Багато випадкових величин, наприклад, помилки у вимірюваннях, відхилення під час стрільби та інші мають щільність імовірностей, що виражається формулою:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{7.3}$$

де a, σ – деякі параметри, до того ж $\sigma>0$.

Тоді кажуть, що випадкова величина X підпорядкована *нормальному законові розподілу* (рис. 7.5).

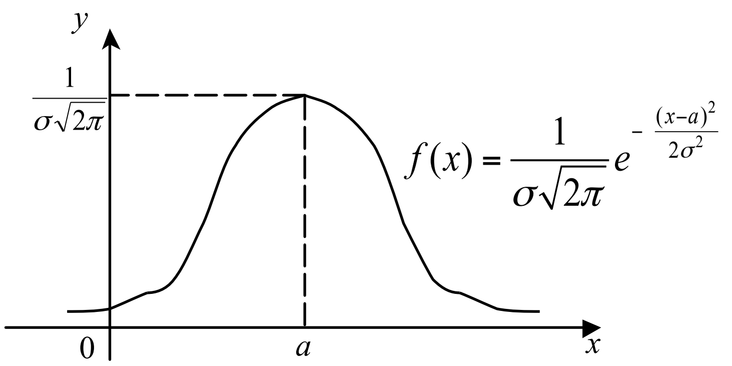


Рис. 7.5

Нормальний закон з'являється в схемі випробувань Бернуллі за великого числа випробувань і визначається лише двома параметрами: a та σ.

Якщо $a=0$, $\sigma=1$, то функція $f(x)$ збігається із функцією $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, яка є диференціальною функцією Лапласа (рис. 7.6).

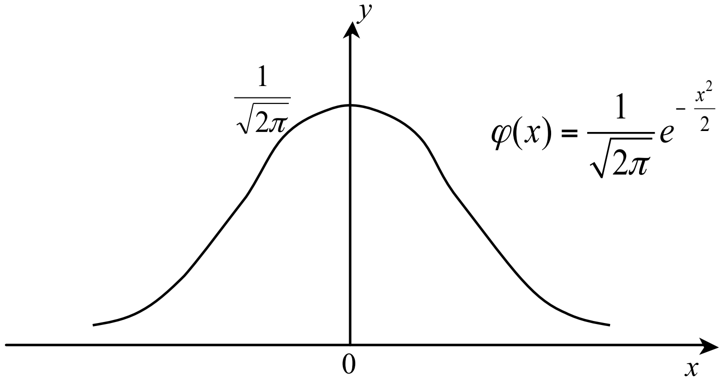


Рис. 7.6

Неважко довести, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Покажемо, що для нормального розподілу

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = a,\ \ D(X)=\sigma^2,$$

отже, в (7.3) a *– математичне сподівання*, а σ^2 *– дисперсія нормально розподіленої випадкової величини* X.

Запишемо, насамперед, деякі допоміжні рівності.

Функцію $f(x)$ через функцію Лапласа $\varphi(x)$ можна виразити так:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \tag{7.4}$$

Відомо, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi} \tag{7.5}$$

(інтеграл (3) відомий у літературі як інтеграл Пуассона). Отже,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx=1. \tag{7.6}$$

Оскільки $x\varphi(x)-$ непарна функція, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\varphi(x)dx=0. \tag{7.7}$$

Використовуючи інтегрування частинами, можна легко довести, що

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2\varphi(x)dx=1. \tag{7.8}$$

З рівностей (7.4 – 7.8) випливає, що математичне сподівання $M(X)$ для нормально розподіленої випадкової величини X зі щільністю ймовірностей (7.3), дорівнює параметру a, тобто $M(X)=a$, а дисперсія $D(X)=\sigma^2$.

Справді, за означенням математичного сподівання,

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sigma}\varphi\frac{(x-a)}{\sigma}dx=\int_{-\infty}^{\infty}x\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)d\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x-a}{\sigma}=t,\ x=\sigma t+a,\\ dx=\sigma dt\end{array}\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+a)\varphi(t)dt=$$

$$=\sigma\int_{-\infty}^{\infty}t\varphi(t)dt+a\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt=a.$$

Отже, $M(X)=a$.

За означенням дисперсії

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2 f(x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)d\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\left\{\frac{x-a}{\sigma}=t\right\}=\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}t^2\varphi(t)dt=\sigma^2 .$$

Отже, $D(X)=\sigma^2$.

Знайдемо інтегральну функцію нормального розподілу, коли щільність розподілу ймовірностей має вигляд (7.3).

Розглянемо функцію

$$\Phi(x)=\int_0^x\varphi(t)dt$$

(див. підрозділ 4.3) та відзначимо деякі її властивості.
Насамперед, $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, оскільки

$$\Phi(-x)=\int_0^{-x}\varphi(t)dt=-\int_0^{x}\varphi(-z)dz=-\int_0^{x}\varphi(z)dz=-\Phi(x).$$

Крім того, $\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(x)=\frac{1}{2}$, оскільки

$$\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=\lim_{x\to\infty}\int_0^x\varphi(t)dt=\int_0^{+\infty}\varphi(t)dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt=\frac{1}{2}.$$

Функція розподілу $F(x)$ нормально розподіленої випадкової величини X

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)dt=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{t-a}{\sigma}=z,\ t=\sigma z+a,\\ dt=\sigma dz,\\ t=x,\quad z=\dfrac{x-a}{\sigma}\end{array}\right\}=$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} \varphi(z)dz = \int_{-\infty}^{0} \varphi(z)dz + \int_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}} \varphi(z)dz = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)dz + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Отже, *інтегральна функція нормального розподілу* має вигляд:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \qquad (7.9)$$

де $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(z)dz -$ інтегральна функція Лапласа.

Ймовірність потрапляння нормально розподіленої випадкової величини X *в інтервал* $(x_1; x_2)$

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) =$$

$$= \left[\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)\right] - \left[\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right)\right] = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right).$$

Тобто,

$$P\left(x_1 < X < x_2\right) = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right). \qquad (7.10)$$

Для функції щільності ймовірностей нормально розподіленої випадкової величини характерно, що зі зменшенням σ її графік витягується вздовж прямої $x = a$ (рис. 7.7), а зміна інтегральної функції наведено на рис. 7.8.

Нормальний розподіл відіграє особливу роль у теорії ймовірностей. Причину цього буде з'ясовано далі.

Особливо важливим у практичних застосуваннях є «*правило трьох сигм*»:

$$P(|X - m_X| \geq 3\sigma) = 0{,}0027 \quad <=> \quad P(|X - m_X| < 3\sigma) = 0{,}9973.$$

Це означає, що ймовірність відхилення нормально розподіленої випадкової величини від її математичного сподівання більше ніж на 3σ

дорівнює приблизно $\frac{1}{4}\%$. Така подія вважається практично *неможливою*.

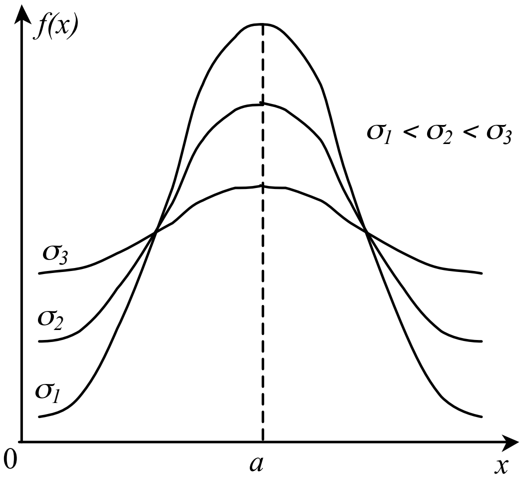


Рис. 7.7

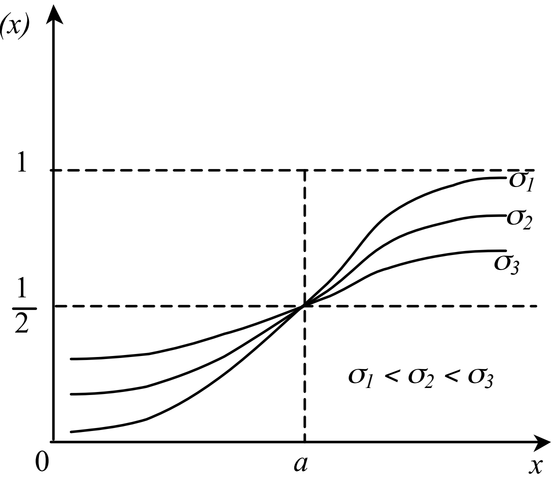


Рис. 7.8

Приклад 1. Для нормально розподіленої випадкової величини X знайти $P(12 < X < 14)$ і $P(8 < X < 12)$, якщо $M(X) = a = 10$, $D(X) = \sigma^2 = 4$.

Розв'язання. Навіть без обчислень, у силу графічних міркувань, легко оцінюємо, що $P(12 < X < 14) < P(8 < X < 12)$, бо $a = 10$ – центр розподілу ймовірностей і є серединою інтервалу $(8;12)$. З рівності (7.8) випливає, що

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-10}{2}\right),$$

де $\Phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)dt$. Тоді

$$P\left(12 < X < 14\right) = F(14) - F(12) = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(1) = 0,477250 - 0,341345 = 0,135905.$$

Аналогічно

$$P\left(8 < X < 12\right) = F(12) - F(8) = \Phi(1) + \Phi(1) = 0,68269.$$

Приклад 2. Під час вимірювання деталей припускаємося помилок, розподілених за нормальним законом із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 10$ мм. Знайти ймовірність того, що вимірювання буде виконано з помилкою ≤ 15мм.

Розв'язання. Зрозуміло, що $a = 0$, тому з рівності (7.10) маємо

$$P(|X| < 15) = P(-15 < X < 15) = \Phi\left(\frac{15-0}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-15-0}{10}\right) =$$

$$= \Phi(1,5) - \Phi(-1,5) = 2\Phi(1,5) = 2 \cdot 0,433193 = 0,866386.$$

Приклад 3. Помилка під час зважування розподілена за нормальним законом із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 20$г. Знайти ймовірність того, що зважування буде виконано з помилкою ≤ 10г.

Розв'язання.

$$P(|X| < 10) = P(-10 < X < 10) = \Phi\left(\frac{10-0}{20}\right) - \Phi\left(\frac{-10-0}{20}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0,382924.$$

Приклад 4. Верстат-автомат виготовляє підшипники, які вважаються придатними, якщо відхилення X від проектного розміру не перевищує 0,77 мм. Яке найімовірніше число придатних підшипників зі ста, якщо випадкова величина X розподілена з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 0,4$мм?

Розв'язання. Оскільки

$$P(|X| < 0,77) = 2\Phi\left(\frac{0,77-0}{0,4}\right) = 2\Phi(1,9) = 2 \cdot 0,471283 = 0,942566,$$

то найімовірніше число таких підшипників дорівнює 94.

Зауваження 1. Часто виникає потреба знайти ймовірність того, що відхилення $X - a$ нормально розподіленої випадкової величини X за абсолютною величиною менше за задане число δ, тобто потрібно обчислити ймовірність виконання нерівності $|X - a| < \delta$.

Враховуючи, що

$$P\left(|X - a| < \delta\right) = P\left(a - \delta < X < a + \delta\right),$$

властивості функції Лапласа $\Phi(x)$ та (7.10), легко знаходимо, що

$$P\left(|X - a| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{7.11}$$

Зокрема при $a = 0$

$$P\left(|X| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Приклад 5. Випадкова величина X розподілена нормально. Математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення X відповідно дорівнюють 20 та 10. Знайти ймовірність того, що відхилення $(X - a)$ за абсолютною величиною буде меншим за 3.

Розв'язання. За умовою $\delta = 3$, $a = 20$, $\sigma = 10$. За формулою (7.11),

$$P\left(|X - 20| < 3\right) = 2\Phi\left(\frac{3}{10}\right) = 2\Phi\left(0{,}3\right).$$

За таблицею значень функції $\Phi(x)$ (додаток 2) знаходимо, що $\Phi\left(0{,}3\right) = 0{,}1179$. Тоді ймовірність

$$P\left(|X - 20| < 3\right) = 0{,}2358.$$

Зауваження 2. Якщо випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподівання m та середнім квадратичним відхиленням σ, то коротко цей розподіл позначатимемо через $N(m;\sigma)$.

7.6 Розподіли спеціально побудованих випадкових величин: *розподіл* χ^2 (*«хі-квадрат»*), *розподіл Стьюдента* (*t-розподіл*), *розподіл Фішера-Снедекора* (*F-розподіл*)

Під час розв'язування деяких ймовірнісних та статистичних задач використовуються спеціально побудовані випадкові величини. З деякими з них ми вже ознайомлені. Наприклад, якщо X – довільна випадкова величина, m_X – її математичне сподівання, а σ_X – середнє квадратичне відхилення, то випадкова величина $X^0 = X - m_X$ (відхилення випадкової величини X) має ту особливість, що $M\left(X^0\right) = 0$.

Для випадкової величини

$$U = \frac{X - m_X}{\sigma_X}$$

характерно те, що $M\left(U\right) = 0$, $D\left(U\right) = 1$, незважаючи на довільність випадкової величини X. Випадкова величина U називається *стандартизованою* або *нормованою*.

Якщо для незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$ математичні сподівання $M(X_1) = M(X_2) = ... = M(X_n) = m$, а дисперсії
$D(X_1) = D(X_2) = ... = D(X_n) = \sigma^2$, то їх середнє арифметичне

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

є випадковою величиною, для якої $M\left(\bar{X}\right) = m$, а $D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ (див. далі 7.9).

Розглянемо найважливіші спеціально побудовані випадкові величини, що мають широке застосування в математичній статистиці.

1. **Розподіл** χ^2

О з н а ч е н н я 1. Нехай $X_1, X_2, \ ... \ , X_n$ – *незалежні*, нормально розподілені випадкові величини, для яких $M\left(X_i\right) = 0, \quad \sigma_{X_i} = 1 \quad \left(i = 1, 2, ..., n\right).$
Тоді кажуть, що випадкова величина

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 =: \chi^2$$

розподілена за *законом* χ^2 («*хі-квадрат*») з n степенями вільності.

Якщо випадкові величини $X_i \; i = 1, 2, ..., n$ пов'язані лише одним лінійним співвідношенням, то число степенів вільності дорівнює $k = n - 1$ (бо в такому разі одна з випадкових величин може бути лінійно виражена через решту випадкових величин, яких є $n-1$ і які вже є незалежні одна від одної).

Якщо ж випадкові величини $X_1, X_2, \ ... \ , X_n$ пов'язані r лінійними співвідношеннями, то число степенів вільності дорівнює $k = n - r$, оскільки незалежних випадкових величин є $n - r$.

Диференціальна функція розподілу χ^2 має вигляд:

$$f\left(x\right) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2} - 1}, & \text{якщо } x > 0, \end{cases}$$

де $\Gamma\left(x\right) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ – відома гамма-функція, для якої, зокрема, $\Gamma\left(n+1\right) = n!$.

Звідси бачимо, що розподіл «хі-квадрат» визначається лише одним параметром k – числом степенів вільності.

Під час збільшення числа степенів вільності цей розподіл повільно наближається до нормального.

2. **Розподіл Стьюдента**

О з н а ч е н н я 2. Нехай Z – нормально розподілена випадкова величина, $M(Z)=0$, $\sigma(Z)=1$, а V – незалежна від Z випадкова величина, розподілена за законом χ^2 з k степенями вільності. Тоді величина $T = Z/\sqrt{V/k}$ має розподіл, який називають t-*розподілом* або *розподілом Стьюдента* (Стьюдент – псевдонім англійського статиста В. Госсета) з k степенями вільності.

Щільність ймовірностей розподілу Стьюдента

$$f(t) = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma(k/2)}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}, \qquad t \in (-\infty; +\infty),$$

залежить лише від одного параметра k – числа степенів вільності й не залежить від інших параметрів. У цьому є велика перевага даного розподілу.

Під час збільшення числа степенів вільності t- розподіл швидко наближається до нормального розподілу.

3. **Розподіл Фішера**

О з н а ч е н н я 3. Якщо незалежні випадкові величини U та V розподілені за законом χ^2 із степенями вільності відповідно k_1 та k_2, то випадкова величина

$$F = \frac{U/k_1}{V/k_2}$$

розподілена за законом, який називають F-*розподілом* або *розподілом Фішера-Снедекора і*з степенями вільності k_1 та k_2. (Часто цей розподіл позначають через V^2).

Диференціальна функція цього розподілу

$$f(x)=\begin{cases} 0, & якщо\ x \le 0; \\ \dfrac{\Gamma\left((k_1+k_2)/2\right)\cdot k_1^{\frac{k_1}{2}}\cdot k_2^{\frac{k_2}{2}}\cdot x^{\frac{k_1-2}{2}}}{\Gamma\left(k_1/2\right)\cdot\Gamma\left(k_2/2\right)\left(k_2+k_1x\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, & якщо\ x>0. \end{cases}$$

Очевидно, що розподіл Фішера визначається двома параметрами k_1 та k_2 – числами степенів вільності.

Випадкові величини типу $X^0, U=\dfrac{X-m_X}{\sigma_X}, \overline{X}, \chi^2, T$ та F мають широке використання в розв'язуванні задач математичної статистики.

Цілий ряд інших спеціально побудованих випадкових величин розглядатимуться нами далі в задачах для самостійного розв'язування.

7.7 Наближення теоретичних розподілів до нормального. Асиметрія та ексцес

О з н а ч е н н я 1. *Емпіричним* розподілом називають розподіл відносних частот. Такі розподіли вивчає математична статистика.

О з н а ч е н н я 2. *Теоретичним* розподілом називають розподіл ймовірностей. Такі розподіли вивчає теорія ймовірностей.

У цьому підрозділі нами розглядаються теоретичні розподіли.

Під час вивчення розподілів, відмінних від нормального, виникає потреба оцінити наближеність того чи іншого розподілу до нормального. Для цього вводяться такі характеристики, як *асиметрія* та *ексцес*. Для нормального розподілу обидві ці характеристики дорівнюють нулеві. А тому якщо для якогось розподілу асиметрія та ексцес близькі до нуля, то можна вважати такий розподіл близьким до нормального (за їх однакових математичних сподівань та однакових дисперсій).

О з н а ч е н н я 3. Якщо крива розподілу випадкової величини X симетрична відносно вертикальної прямої $x=M(X)$, то розподіл називається *симетричним*.

Для симетричних розподілів всі центральні моменти (див. підрозділ 6.3) непарних порядків дорівнюють нулеві. Для несиметричних розподілів всі центральні моменти непарних порядків відмінні від нуля. Тому оцінкою асиметрії розподілу може слугувати будь-який з центральних моментів μ_k непарного порядку k (крім моменту першого порядку, котрий дорівнює нулеві для всіх розподілів). Для простоти вибирають момент μ_3.

Для того, щоб характеристика асиметрії не залежала від одиниць вимірювання випадкової величини X (а моменти залежать), момент μ_3 ділять на куб середнього квадратичного відхилення σ.

О з н а ч е н н я 4. *Асиметрією* теоретичного розподілу називають відношення центрального моменту третього порядку μ_3 до куба середнього квадратичного відхилення:

$$A_c = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Коли $A_c > 0$, то крива розподілу має вигляд, показаний на рис. 7.9.

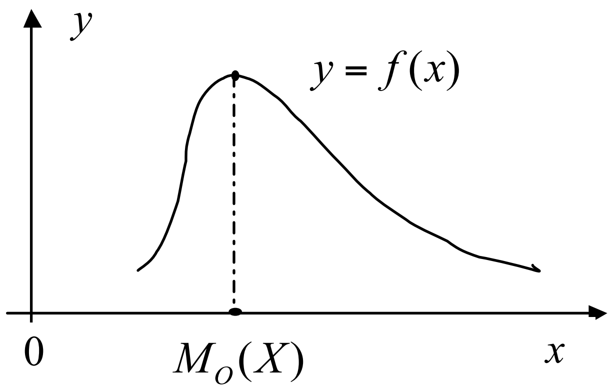


Рис. 7.9

Коли $A_c < 0$, то крива розподілу має вигляд, показаний на рис. 7.10.

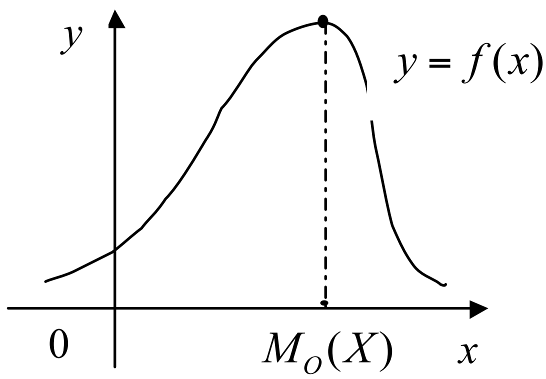


Рис. 7.10

Практично знак асиметрії визначається за розташуванням кривої розподілу відносно моди M_O (точки максимуму диференціальної функції).

Для оцінки «стрімкості» кривої теоретичного розподілу порівняно з кривою нормального розподілу, використовують таку характеристику, як *ексцес*.

О з н а ч е н н я 5. *Ексцесом* теоретичного розподілу називають характеристику, яка визначається рівністю:

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3,$$

де μ_4 – центральний момент четвертого порядку.

Для нормального розподілу $E_k = 0$, оскільки для нього $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$. Тому, коли для деякого розподілу ексцес $E_k \neq 0$, то такий розподіл відрізняється від нормального.

Якщо для деякого розподілу $E_k > 0$, то крива розподілу має вищу і «гострішу» вершину, ніж крива нормального розподілу (рис. 7.11).

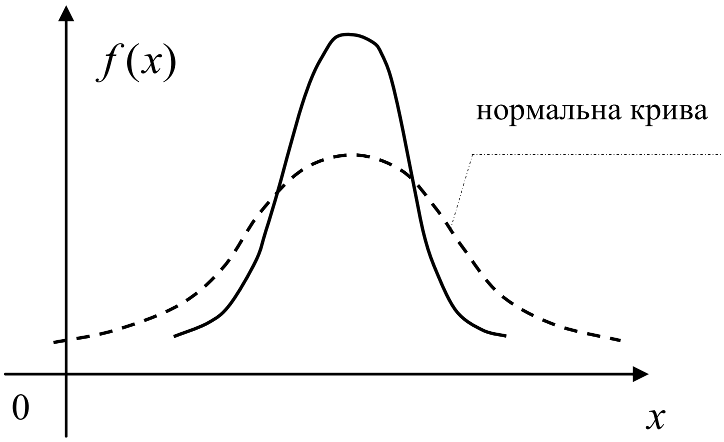


Рис. 7.11

Якщо ексцес $E_k < 0$, то крива розподілу має нижчу й «приплюснуту» вершину порівняно з нормальною кривою (рис. 7.12).

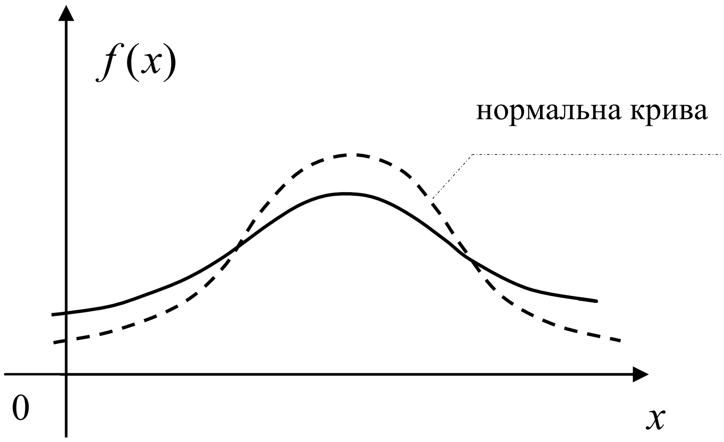


Рис. 7.12

Під час порівняння розподілів вважаємо, що теоретичний і нормальний розподіли мають однакові математичні сподівання та дисперсії.

7.8 Функція від неперервної випадкової величини

Нехай X – неперервна випадкова величина, $f\left(x\right)$ – її диференціальна функція розподілу. Крім того, нехай $y=\varphi\left(x\right)$ – цілком зростаюча або цілком спадна диференційовна функція, а $x=\psi\left(y\right)$ – її обернена.

Встановлено, що в цьому випадку диференціальна функція $g(y)$ випадкової величини $Y=\varphi\left(X\right)$ (функції від випадкової величини X) має вигляд:

$$g\left(y\right)=f\left[\psi\left(y\right)\right]\left|\psi'\left(y\right)\right|. \tag{7.12}$$

Приклад 1. Випадкова величина X розподілена нормально, а її математичне сподівання $a=0$. Знайти розподіл випадкової величини $Y=\sqrt[3]{X}$.

*Розв'язання***.** За умовою для випадкової величини X диференціальна функція розподілу $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Для функції $y=\varphi\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$ оберненою є функція $x=\psi\left(y\right)=y^3$. Тому $f\left[\psi\left(y\right)\right]=f\left(y^3\right)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^6}{2\sigma^2}}$.

Похідна оберненої функції по змінній y має вигляд $\psi'\left(y\right)=\left(y^3\right)_y'=3y^2$.

Отже, диференціальна функція випадкової величини $Y=\varphi\left(X\right)=\sqrt[3]{X}$ має вигляд:

$$g\left(y\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^6}{2\sigma^2}}\cdot 3y^2=\frac{3y^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^6}{2\sigma^2}}.$$

Очевидно, що для функції $Y=\varphi(X)$

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}yg(y)dy$$

або

$$M(\varphi(X))=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx,$$

коли $g(y)$ невідома.

Потрібно зауважити, що коли X розподілена нормально, $M(X)=a$, то випадкова величина $Y=AX+B$ ($A, B -$ сталі) теж розподілена нормально. Її математичне сподівання $M(Y)=A\cdot M(X)+B=Aa+B$, а середнє квадратичне відхилення $\sigma(Y)=|A|\cdot\sigma(X)$.

Приклад 2. Випадкова величина X розподілена нормально, $m_X=3$, $\sigma=0,2$. Знайти $g(y)$, якщо $Y=2X+4$.

*Розв'язання***.** Оскільки $M(Y)=2\cdot 3+4=10$, а $\sigma(Y)=2\cdot 0,2=0,4$, то диференціальна функція $g(y)$ має вигляд: $g(y)=\dfrac{1}{0,4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-10)^2}{2(0,4)^2}}$.

Для функції (випадкової величини) $Y=\varphi(X)$ математичне сподівання $M(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} yg(y)dy$, яке можна знайти й безпосередньо за формулою:

$$M(\varphi(X))=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx.$$

7.9 Однаково розподілені випадкові величини

Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ однаково розподілені випадкові величини, а отже, вони мають однакові відповідні числові характеристики (математичні сподівання та дисперсії). Найбільший інтерес становить середнє арифметичне

$$\bar{X}=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$$

цих випадкових величин, яке своєю чергою теж є випадковою величиною.

Знайдемо числові характеристики величини $\bar{X}$ у випадку, коли X_1, X_2, $\ldots, X_n$ *однаково розподілені* і *взаємно незалежні*. Використовуючи властивості математичного сподівання, маємо

$$M(\bar{X})=M\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}.$$

Якщо позначити $M\left(X_i\right)=m,\ i=1,2,\ldots,n$, то звідси $M\left(\bar{X}\right)=\dfrac{n\cdot m}{n}=m$.

Отже, *математичне сподівання середнього арифметичного однаково розподілених взаємно незалежних випадкових величин дорівнює математичному сподіванню* m *кожної з них*:

$$M\left(\bar{X}\right)=m. \tag{7.13}$$

Нехай $D-$дисперсія кожної з величин $X_1,X_2,\ldots,X_n$. Тоді, враховуючи властивості дисперсії, маємо

$$D\left(\bar{X}\right)=D\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}D\left(X_1+X_2+\ldots+X_n\right)=$$

$$=\frac{1}{n^2}(D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n))=\frac{1}{n^2}\left(D+D+\ldots+D\right)=$$

$$=\frac{1}{n^2}nD=\frac{D}{n}.$$

Таким чином, *дисперсія середнього арифметичного* n *однаково розподілених взаємно незалежних випадкових величин у* n *раз менша від дисперсії* D *кожної з цих величин*

$$D\left(\bar{X}\right)=\frac{D}{n}. \tag{7.14}$$

Нехай $\sigma-$середнє квадратичне відхилення кожної з величин $X_1,X_2,\ldots,X_n$. Тоді

$$\sigma\left(\bar{X}\right)=\sqrt{D\left(\bar{X}\right)}=\sqrt{\frac{D}{n}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{7.15}$$

Отже, *середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного* n *однаково розподілених випадкових величин у* $\sqrt{n}$ *раз менша від середнього квадратичного відхилення* σ *кожної* з *цих величин:* $\sigma\left(\bar{X}\right)=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

З рівностей (7.14) та (7.15) випливає, що середнє арифметичне досить великого числа взаємно незалежних випадкових величин має значно менше розсіювання (навколо математичного сподівання), аніж кожна окрема випадкова величина.

8. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

Розглянемо групу теорем, які встановлюють зв'язок між викладеною теорією та практикою. З найпростішими з них, такими як теорема Бернуллі та теореми Муавра-Лапласа ми вже ознайомлені. Розглянемо загальніші теореми.

8.1 Нерівності Чебишева

Теорема 1 (перша нерівність Чебишева). Нехай випадкова величина X набуває лише невід'ємних значень, а її математичне сподівання $M(X)$ існує.

Тоді за будь-якого $a > 0$

$$P(X \geq a) \leq \frac{M(X)}{a}. \tag{1}$$

Доведення. Розглянемо величину η таку, що $\eta = 0$, коли $X < a$ і $\eta = a$, коли $X \geq a$. Звідси $X \geq \eta$ і, отже $M(X) \geq M(\eta)$. Величина η має два значення: 0 та a, тому

$$M(\eta) = a \cdot p(\eta = a) + 0 \cdot p(\eta \neq a) = a \cdot p(\eta = a) =.$$
$$= a \cdot p(X \geq a) \leq M(X).$$

Звідси $P(X \geq a) \leq \dfrac{M(X)}{a}$.

Нерівність (8.1) називається *першою нерівністю Чебишева*. Використавши її, легко довести наступну теорему.

Теорема 2 (друга нерівність Чебишева). Для будь-якого числа $a > 0$ і випадкової величини X

$$P(|X - M(X)| \geq a) \leq \frac{D(X)}{a^2}. \tag{8.2}$$

Доведення. Розглянемо випадкову величину $Y = (X - M(X))^2$.

Тоді $M(Y) = M\left[(X - M(X))^2\right] = D(X)$. Отже,

$$P(|X - M(X)| \geq a) = P[(X - M(X))^2 \geq a^2] =$$
$$= P(Y \geq a^2) \leq \frac{M(Y)}{a^2} = \frac{D(X)}{a^2},$$

якщо скористатися нерівністю (8.1).

Нерівність (8.2) називається *другою нерівністю Чебишева*.

Приклад 1. Нехай випадкова величина X має дисперсію $D(X) =$ $= 0{,}001$. Яка ймовірність того, що випадкова величина X відхилиться від свого математичного сподівання більше ніж на $0{,}1$?

Розв'язання.

$$P\left(\left|X - m_x\right| \geq 0{,}1\right) \leq \frac{D(X)}{(0{,}1)^2} = \frac{0{,}001}{0{,}01} = \frac{1}{10}.$$

Використовуючи нерівність Чебишева, можна довести теорему Бернуллі, яку зараз нагадуємо:

Нехай A – випадкова подія, $P(A) = p$. Проведено серію з n випробувань, у якій подія A сталася m разів. Тоді для будь-якого числа $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq a\right) = 0.$$

Зауваження. Друга нерівність Чебишева, яка дає змогу знаходити ймовірність відхилення значень випадкової величини від її математичного сподівання, може бути записана й у такому вигляді:

$$P\left(\left| X - M(X)\right| < a\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{a^2}.$$

8.2 Теорема Чебишева

Наступна теорема Чебишева є узагальненням теореми Бернуллі.

Теорема 1. Якщо випадкові величини $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ попарно незалежні і їх дисперсії обмежені, тобто $D(X_k) \leq C$ $(C -$стала$)$ для всіх k, то за будь-якого $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| \geq a\right) = 0.$$

Доведення. Введемо випадкову величину $Y_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$.

Тоді

$$M(Y_n) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n} M\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} M(X_k).$$

З попарної незалежності випадкових величин випливає, що

$$D(Y_n) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\big(D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)\big) \le \frac{1}{n^2}\cdot C\cdot n = \frac{C}{n}.$$

Якщо до випадкової величини Y_n застосувати нерівність Чебишева, то одержимо, що

$$P\big(|\,Y_n - M(Y_n)\,| \ge a\big) \le \frac{D(Y_n)}{a^2}.$$

Отже,

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| \ge a\right) =$$

$$= P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - M\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right)\right| \ge a\right) =$$

$$= P\big(|\,Y_n - M(Y_n)\,| \ge a\big) \le \frac{D(Y_n)}{a^2} \le \frac{C}{a^2 n}.$$

Але

$$0 \le P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| \ge a\right) \le \frac{C}{a^2 n}. \qquad (8.3)$$

Переходячи в (8.3) до границі за умови $n \to \infty$, матимемо

$$\lim_{n\to\infty} 0 \le \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| \ge a\right) \le \lim_{n\to\infty}\frac{C}{a^2 n} \Rightarrow$$

$$0 \le \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| \ge a\right) \le 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| \ge a\right) = 0.$$

Теорему доведено.

Зміст цієї теореми полягає в тому, що за досить великих n нерівність

$$\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| \ge a$$

має малу ймовірність, а нерівність

$$\left| \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + \ldots + M(X_n)}{n} \right| < a \qquad (8.4)$$

має ймовірність близьку до одиниці.

На практиці доводиться нехтувати не лише неможливими подіями, але й подіями, ймовірність яких дуже мала. Якщо в міркуваннях ми ігноруємо події-ми, ймовірність яких, наприклад, менша за 0,02, то кажуть, що міркування прийняте з надійністю 0,98 або 98 %.

Про події, якими ігнорують, кажуть, що вони *практично неможливі*. Події, протилежні для них, називають *практично вірогідними*.

Оскільки в теоремі Чебишева параметр $a > 0$ довільний, тому він може бути й дуже малим числом. Отже, з (8.4) випливає, що за досить великих n наближена рівність:

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \approx \frac{M(X_1) + \ldots + M(X_n)}{n} \qquad (8.5)$$

є практично вірогідною.

Приклад 1. Скільки доданків треба взяти в теоремі Чебишева, щоб з надійністю 96 % і точністю до 0,01 виконувалася наближена рівність (8.5), вважаючи, що $C = 1$.

Розв'язання. Число $a = 0{,}01$– це задана точність наближеної рівності (8.5). Тому

$$P\left(\left| \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + \ldots + M(X_n)}{n} \right| \ge 0{,}01 \right) \le \frac{C}{(0{,}01)^2 n} \le 0{,}04.$$

Таким чином, $\dfrac{1}{(0{,}01)^2 n} \le 0{,}04 \;\Rightarrow\; n \ge \dfrac{1}{0{,}04 \cdot (0{,}01)^2} = 250000,$

де n – число доданків, що забезпечує наближену рівність (8.5) у даних умовах.

Отже, за надійності 96 % і точності $0{,}01$ в рівності (8.5) потрібно взяти досить велику кількість доданків.

8.3 Зв'язок між надійністю, точністю та числом наближених вимірювань

Нехай n раз вимірюється деталь довжиною l. Вважаємо, що помилок під час вимірювань не уникнути, але вони не є систематичними. Дістанемо n випадкових значень, тобто випадкових величин:

$X_1, X_2, ..., X_n$. Очевидно, що

$$M\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{M(X_1) + ... + M(X_n)}{n} = \frac{nl}{n} = l,$$

тому

$$P\left(\left|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - l\right| \geq a\right) \leq \frac{C}{a^2 n}. \qquad (8.6)$$

Остання нерівність дає змогу оцінити похибку наближеної рівності:

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \approx l.$$

Приклад 1. Скільки вимірювань потрібно виконати, щоб середнє арифметичне дало вимірювану величину з точністю до $0{,}05$ і надійністю 90 %, якщо дисперсії випадкових величин (результатів вимірювань) не перевищують $0{,}2$?

Розв'язання. Використовуючи нерівність (8.6), маємо:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - l\right| < 0{,}05\right) \geq 1 - \frac{0{,}2}{(0{,}05)^2 n} > 0{,}9$$

або в рівносильній формі:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - l\right| \geq 0{,}05\right) \leq \frac{0{,}2}{(0{,}05)^2 n} < 0{,}1.$$

Звідси

$$n > \frac{0{,}2}{(0{,}05)^2 0{,}1} = 2 \cdot \frac{10000}{25} = 800.$$

Отже, потрібно зробити не менше ніж 800 вимірювань.

У нерівності (8.6) ймовірність P, яка оцінюється зверху нерівністю $P \leq \frac{C}{a^2 n}$, це ***надійність***, з якою невідомий параметр l можна замінити на середнє арифметичне $\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ експериментально отриманих значень $X_1, X_2, ..., X_n$, де $n -$ ***число вимірювань***. При цьому ***точність*** такої заміни дорівнює числу a.

8.4 Центральна гранична теорема

Неодноразово відзначалося, що ймовірнісні закономірності явищ проявляються за великого числа повторних випробувань. Це продемонстровано, наприклад, у теоремах Бернуллі та Чебишева.

Підкреслюючи основну роль великого числа випробувань, ряд теорем, пов'язаних з великим числом випробувань, називають *законом великих чисел*.

Наводимо без доведення теорему, яка уточнює згадані вище теореми й відкриває особливу роль нормального закону розподілу.

Теорема 1 (*центральна гранична теорема*). Якщо послідовність попарно незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$ задовольняє умову:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} M\left|X_k - M\left(X_k\right)\right|^3}{\left(\sum_{k=1}^{n} D\left(X_k\right)\right)^{\frac{3}{2}}} = 0\,, \tag{8.7}$$

то для будь-якого числового інтервалу $(a;b)$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} M\left(X_k\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} D\left(X_k\right)}} < b \right) = \Phi\left(b\right) - \Phi\left(a\right)\,. \tag{8.8}$$

Умову (8.7) сформульовано російським академіком А.А. Ляпуновим. Тому подану теорему називають *центральною граничною теоремою у формі Ляпунова*.

Зміст рівності (8.7) такий: *у сумі* $\sum_{k=1}^{n} X_k$ *жоден з доданків не домінує*, тобто, внесок у суму кожного доданка не переважає внеску інших доданків.

Зміст рівності (8.8) такий: за великих n випадкова величина

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} M\left(X_k\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} D\left(X_k\right)}}$$

розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням *нуль* і дисперсією *одиниця*. Це дуже важливий факт: *не зважаючи на те, що про доданки ми не знаємо майже нічого, проте про їх «суму»* Y_n *ми знаємо майже все*!

Потрібно зазначити, що з центральної граничної теореми можна отримати точніші оцінки, аніж з теорем Чебишева.

Наслідок. Нехай випадкові величини в центральній граничній теоремі мають рівні математичні сподівання та дисперсії: $M\left(X_k\right)=m$, $D\left(X_k\right)=\sigma^2$ при всіх k. Тоді за великих n (див. рівності 7.11 та 7.14)

$$P\left(\left|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-m\right|\geq a\right)\approx 1-2\Phi\left(\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right),\ a>0. \qquad (8.9)$$

Приклад 1. Скільки доданків у прикладі 1 (сторінка 83) потрібно взяти, щоб з надійністю 96 % і точністю $a=0,01$ для $\sigma=1$ виконувалася наближена рівність:

$$\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\approx m, \text{ де } m=M(X_k),\ k=1,2,\ldots,n.$$

Розв'язання. Потрібно підібрати таке натуральне число n, щоб виконувалась нерівність: $1-2\Phi\left(a\sqrt{n}/\sigma\right)<0,04$. Звідси $\Phi\left(a\sqrt{n}/\sigma\right)>0,48$. За таблицею знаходимо, що $\Phi\left(2,06\right)=0,48031$. Тому $a\sqrt{n}/\sigma=2,06 \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad n=\left(206\right)^2\approx 40000.$

Отже, тут число n у 6 разів менше, ніж у прикладі 1 на ст. 83. Це означає, що оцінка (8.9) точніша за нерівність Чебишева.

Приклад 2. Визначити, з якою надійністю середнє арифметичне вимірювань дає вимірювану величину, якщо точність вимірювання дорівнює 0,1, виконано 500 вимірювань, а дисперсії випадкових величин (результатів вимірювань) дорівнюють 0,3.

Розв'язання. Тут $n=500$, $a=0,1$, $\sigma^2=0,3$. Тоді

$$P\left(\left|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-m\right|\geq 0,1\right)\approx 1-2\Phi\left(\frac{0,1\sqrt{500}}{\sqrt{0,3}}\right)=1-2\Phi\left(\frac{0,1\cdot 22,36}{0,55}\right)=$$

$$=1-2\Phi(4,06)=1-2\cdot 0,499968=1-0,999936=0,000036.$$

Отже,

$$P\left(\left|(X_1+\ldots+X_n)/n-m\right|<0,1\right)\approx 0,999936=99,994\% -$$

надійність того, що $\dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}=m.$

9. ЗАЛЕЖНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КОРЕЛЯЦІЇ. СУМІСНІ РОЗПОДІЛИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

9.1 Незалежні випадкові величини

Фундаментальну роль у теорії ймовірностей та її застосуваннях відіграє поняття незалежності випадкових величин. Розглянемо це поняття в дискретному та неперервному випадках окремо.

Дискретний випадок. Нехай задано ряди розподілів випадкових величин X_1 та X_2:

X_1	...	a_i	...
$P(X_1 = a_i)$	...	p_i	...

X_2	...	b_j	...
$P(X_2 = b_j)$	...	p'_j	...

О з н а ч е н н я 1. Дискретні випадкові величини X_1 та X_2 називаються *незалежними*, якщо за будь-яких $i \in N$ та $j \in N$ виконується рівність:

$$P\Big(\big(X_1 = a_i\big)\cdot\big(X_2 = b_j\big)\Big) = P\big(X_1 = a_i\big)\cdot P\big(X_2 = b_j\big),$$

де a_i, b_j – числа.

Інакше кажучи, випадкові величини X_1 та X_2 незалежні тоді й тільки тоді, коли випадкові події $(X_1 = a_i)$ та $(X_2 = b_j)$ незалежні для довільних чисел a_i та b_j.

Приклад 1. Підкинуто два гральних кубики – синій та червоний. Число очок, що випало на синьому кубику – випадкова величина X_1, число очок, що випало на червоному – X_2. Довести, що X_1 та X_2 – незалежні випадкові величини.

Розв'язання. Закони розподілів цих величин є такими:

X_1	1	2	3	4	5	6
P	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

X_2	1	2	3	4	5	6
P	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

З досліду зрозуміло, що значення, якого набуває одна з цих величин, не залежить від того, якого значення набуває інша випадкова величина. А з погляду означення 1, за будь-яких i, j =1, 2, 3, 4, 5, 6 виконується рівність:

$$P\left(\left(X_1 = i\right)\cdot\left(X_2 = j\right)\right) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = P\left(X_1 = i\right)\cdot P\left(X_2 = j\right),$$

а тому X_1, X_2– незалежні випадкові величини. Сумісний закон розподілу величин X_1 та X_2 має вигляд:

X_2 \ X_1	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Надзвичайно важливим є наступне твердження.

Теорема 1. Якщо X_1, X_2– незалежні випадкові величини, то

$$M\left(X_1X_2\right) = M\left(X_1\right)M\left(X_2\right). \tag{9.1}$$

Доведення. Дійсно, з таблиці:

$X_2 \backslash X_1$	a_1	…	a_i	…
b_1'	$p_1 p_1'$	…	$p_i p_1'$	…
…	…	…	…	…
b_j'	$p_1 p_j'$	…	$p_i p_j'$	…
…	…	…	…	…

де $p_i p_j' = P\Big(\big(X_1 = a_i\big)\cdot\big(X_2 = b_j'\big)\Big)$, випливає, що закон розподілу випадкової величини $X_1 X_2$ запишеться у вигляді:

$X_1 X_2$	…	$a_i b_j$	…
P	…	$p_i\, p_j'$	…

де $\sum_i \sum_j p_i p_j' = 1$. Тому $M\left(X_1 X_2\right) = \sum_{i,j}\left(a_i b_j\right)\left(p_i p_j'\right) =$

$$= a_1 p_1 \sum_j b_j p_j' + a_2 p_2 \sum_j b_j p_j' + \ldots = a_1 p_1 M\left(X_2\right) + a_2 p_2 M\left(X_2\right) + \ldots =$$

$$= M\left(X_2\right)\left(a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots\right) = M\left(X_1\right) M\left(X_2\right).$$

У прикладі 1 $M\left(X_1\right) = \left(1 + 2 + \ldots + 6\right)/6 = 21/6$, $M\left(X_2\right) = 21/6$, а випадкові величини X_1, X_2 – незалежні, тому з (9.1) маємо

$$M\left(X_1 X_2\right) = M\left(X_1\right) M\left(X_2\right) = (21/6)\cdot(21/6) = 441/36.$$

Приклад 2. Нехай сумісний закон розподілу випадкових величин X_1 та X_2 має вигляд:

$X_2 \backslash X_1$	–2	0	1	3
–1	0,03	0,02	0,04	0,01
2	0,18	0,12	0,24	0,06
4	0,09	0,06	0,12	0,03

Довести незалежність випадкових величин та перевірити виконання теореми 1. (Пояснюємо, що в цій таблиці ймовірність, яка стоїть на перетині стовпця $X_1 = a_i$ $(i = 1,2,3,4)$ та рядка $X_2 = b_j$ $(j = 1,2,3)$ – це ймовірність добутку подій $(X_1 = a_i) \cdot (X_2 = b_j)$. Наприклад, $P\{(X_1 = -2) \cdot (X_2 = 2)\} = 0{,}18$.)

Розв'язання. Знаходимо розподіли випадкових величин X_1 та X_2.

Розподіл величини X_1 має вигляд:

X_1	–2	0	1	3
P	0,3	0,2	0,4	0,1

Розподіл в. в. X_2 такий:

X_2	–1	2	4
P	0,1	0,6	0,3

Це випливає з сумісного розподілу величин X_1 та X_2, оскільки, наприклад,

$P(X_1 = -2) = P\{(X_1 = -2) \cdot (X_2 = -1)$ або $(X_1 = -2) \cdot (X_2 = 2)$ або $(X_1 = -2) \cdot (X_2 = 4)\} = 0{,}03 + 0{,}18 + 0{,}09 = 0{,}3$. Звідси $M(X_2) = 2{,}3$.

Методом безпосередньої перевірки, використовуючи розподіли випадкових величин X_1, X_2 та їхній сумісний розподіл, переконуємося, що рівність (9.1) виконується. Отже, величини X_1 та X_2 незалежні.

Знайдемо $M\left(X_1 X_2\right)$. Для цього складаємо таблицю значень величини $X_1 X_2$:

X_2 \ X_1	–2	0	1	3
–1	2	0	–1	–3
2	–4	0	2	6
4	–8	0	4	12

При знаходженні ряду розподілу випадкової величини $X_1 X_2$ враховуємо, що коли значення цієї величини, наприклад $X_1 X_2 = 6$, зустрічається в таблиці один раз, то

$$P\left(X_1 \cdot X_2 = 6\right) = P\left(\left(X_1 = 3\right) i \left(X_2 = 2\right)\right) =$$

$$= P(X_1 = 3) \cdot P(X_2 = 2) = 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}06.$$

Якщо ж деяке значення випадкової величини $X_1 \cdot X_2$, наприклад $X_1 \cdot X_2 = 2$, зустрічається в таблиці декілька разів, то його ймовірність дорівнює сумі відповідних імовірностей:

$$P(X_1X_2 = 2) = P\{(X_1 = -2 \; i \; X_2 = -1\;) \text{ або } (X_1 = 1 \; i \; X_2 = 2)\} =$$
$$= P\{(X_1 = -2)\cdot(X_2 = -1) + (X_1 = 1)\cdot(X_2 = 2)\} =$$
$$= P\{(X_1 = -2)\cdot(X_2 = -1)\} + P\{(X_1 = 1)\cdot(X_2 = 2)\} =$$
$$= P(X_1 = -2)\cdot P(X_2 = -1) + P(X_1 = 1)\cdot P(X_2 = 2) =$$
$$= 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}27.$$

Таким чином, ряд розподілу в. в. X_1X_2 набуде вигляду:

X_1X_2	–8	–4	–3	–1	0	2	4	6	12
P	0,09	0,18	0,01	0,04	0,2	0,27	0,12	0,06	0,03

Звідси, $M(X_1X_2) = 0{,}23$.

Оскільки математичні сподівання $M(X_1) = 0{,}1$, $M(X_2) = 2{,}3$, то $M(X_1X_2) = M(X_1)M(X_2)$ і теорема 1 виконується.

Теорема 2. Для *попарно незалежних* випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i). \qquad (9.2)$$

Доведення. Доведемо рівність (9.2) для випадку двох випадкових величин.

$$D(X_1 + X_2) = M(X_1 + X_2 - M(X_1 + X_2))^2 =$$
$$= M(X_1 + X_2 - M(X_1) - M(X_2))^2 =$$
$$= M((X_1 - M(X_1)) + (X_2 - M(X_2)))^2 = M[(X_1 - M(X_1))^2 +$$
$$+2(X_1 - M(X_1))(X_2 - M(X_2)) + (X_2 - M(X_2))^2] =$$
$$= M[(X_1 - M(X_1))^2] + M[(X_2 - M(X_2))^2] +$$

$$+2M[(X_1 - M(X_1))(X_2 - M(X_2))] =$$
$$= M[(X_1 - M(X_1))^2] + M[(X_2 - M(X_2))^2] +$$
$$+2M[X_1X_2 - X_1M(X_2) - X_2M(X_1) + M(X_1)M(X_2)] =$$
$$= D(X_1) + D(X_2) + 2[M(X_1)M(X_2) - M(X_1)M(X_2) -$$
$$-M(X_2)M(X_1) + M(X_1)M(X_2)] = D(X_1) + D(X_2).$$

Неперервний випадок. Для неперервних випадкових величин імовірність набути певного значення дорівнює нулеві. Тому означення незалежності неперервних випадкових величин відрізняється від означення незалежності в дискретному випадку.

О з н а ч е н н я 2. Неперервні випадкові величини X_1та X_2називаються *незалежними*, якщо для будь-якої пари числових проміжків I_1, I_2 події $(X_1 \in I_1)$ та $(X_2 \in I_2)$ незалежні, тобто

$$P((X_1 \in I_1) \cdot (X_2 \in I_2)) = P(X_1 \in I_1) \cdot P(X_2 \in I_2).$$

Як і в дискретному випадку, тут мають місце такі твердження:

Теорема 3. Якщо випадкові величини X_2, X_2 незалежні, то

$$M(X_1 \cdot X_2) = M(X_1) \cdot M(X_2).$$

Для попарно незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot ... \cdot M(X_n).$$

Теорема 4. Для попарно незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ... X_n$ дисперсія їх суми дорівнює сумі їх дисперсій, тобто $D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i)$.

Доведення цих теорем виходять за межі поданого курсу.

9.2 Види залежностей між випадковими величинами

У цьому підрозділі розглядатиметься різна залежність між двома випадковими величинами.

О з н а ч е н н я 1. Випадкові величини, які не є незалежними, називаются *залежними*.

О з н а ч е н н я 2. Залежність між випадковими величинами X та Y є *функціональною*, якщо кожному значенню x_i випадкової величини X відповідає *одне й тільки одне* значення y_i випадкової величини Y.

Функціональна залежність може бути задана таблично, графічно чи аналітично (за допомогою формули $Y = f(X)$).

Наприклад, залежність, задана у вигляді таблиці:

X	–2	0	1	2	3	6
Y	4	0	1	4	9	36

задається також формулою $Y = X^2$. Це приклад функціональної залежності.

О з н а ч е н н я 3. Залежність між випадковими величинами X та Y називають *статистичною*, якщо кожному значенню x змінної величини X відповідає певний розподіл змінної величини Y.

Наприклад, наступна таблиця 9.1:

Таблиця 9.1

X \ Y	1	3	4	7	8	9
1	2	1	3			
2		1		2	3	
4			3	2	2	
5				1	1	4

задає статистичну залежність між X та Y.

Значенню $X = 1$ відповідає такий розподіл величини Y:

Y	1	3	4
n_i	2	1	3

(9.3)

(n_i – частоти значень величини Y); значенню $X = 2$ відповідає такий розподіл величини Y:

Y	3	7	8
n_i	1	2	3

(9.4)

значенню $X = 4$ відповідає такий розподіл величини Y:

Y	4	7	8
n_i	3	2	2

(9.5)

значенню $X = 5$ відповідає такий розподіл величини Y:

Y	7	8	9
n_i	1	1	4

(9.6)

Розподіли (9.3 – 9.6) називаються *умовними* розподілами випадкової величини Y.

Математичні сподівання таких розподілів теж називаються *умовними* (див. наступний розділ). Наприклад, для розподілу (9.3)

$$M_{x=1}(Y) = \bar{y}_{x=1} = \frac{1}{6}(1\cdot 2 + 3\cdot 1 + 4\cdot 3) = \frac{17}{6}.$$

Відповідно для рядів (9.4 – 9.6)

$$\bar{y}_{x=2} = \frac{1}{6}(3\cdot 1 + 7\cdot 2 + 8\cdot 3) = \frac{41}{6},$$

$$\bar{y}_{x=4} = \frac{1}{7}(4\cdot 3 + 7\cdot 2 + 8\cdot 2) = \frac{42}{7},$$

$$\bar{y}_{x=5} = \frac{1}{6}(7\cdot 1 + 8\cdot 1 + 9\cdot 4) = \frac{51}{6}.$$

Залежність середнього значення $\bar{y}$ випадкової величини Y від змінних значень x випадкової величини X вже є функціональною й може бути задана таблицею:

x	1	2	4	5
$\bar{y}_x$	$\frac{17}{6}$	$\frac{41}{6}$	$\frac{42}{7}$	$\frac{51}{6}$

а можливо й формулою: $\overline{y}_x = f(x)$. Знаходження таких формул – одна з головних задач теорії кореляції, про що мова йтиме у розділі 9.

Зауважимо , що залежність між X та Y, яку задано таблицею:

$Y \backslash X$	2	3	4	9
4	2	3	1	4
5	2	3	1	4
6	2	3	1	4

не є статистичною, бо кожному значенню величини X відповідає один і той самий розподіл величини Y.

Таблицю 9.1 варто доповнити, порахувавши частоти кожного із значень x_i та y_i.

Таблиця 9.2

$X \backslash Y$	1	3	4	7	8	9	n_x
1	2	1	3				6
2		1		2	3		6
4			3	2	2		7
5				1	1	4	6
n_y	2	2	6	5	6	4	$n = 25$

Таблиці типу 9.2 називаються *кореляційними*. Потреба в таких таблицях продиктована тим, що залежність між двома випадковими величинами X, Y може бути зумовлена багатьма факторами, і цю залежність неможливо описати однією функцією.

Приклад 1. Нехай розподіл на 100 га орної землі випадкової величини X – центнерів внесених мінеральних добрив та випадкової величини Y – урожайності подається таблицею 9.3.

У ній п’ятий стовпець, наприклад, означає, що на тих 24 гектарах, на кожному з яких внесено від 30 до 40 центнерів мінеральних добрив, урожайність розподілилася так: на одному гектарі – від 32 до 34 центнерів; на десяти гектарах – від 34 до 36 центнерів з гектара; на дванадцяти гектарах – від 36 до 38 центнерів з гектара; на одному – від 38 до 40 центнерів.

Таблиця 9.3

$Y \backslash X$	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	n_y
28–30	6	1				7
30–32	3	7	2			12
32–34	1	5	4	1		11
34–36		1	15	10	8	34
36–38			2	12	15	29
38–40				1	6	7
n_x	10	14	23	24	29	$n=100$

У таблиці 9.3 кожен з інтервалів можна подати його *серединним* значенням. Наприклад, інтервал 0 – 10 подаємо числом 5, інтервал 10 – 20 подаємо числом 15, інтервал 28 – 30 подаємо числом 29 і т. д.

У результаті таблиця 9.3 набуває вигляду:

Таблиця 9.4

$Y \backslash X$	5	15	25	35	45	n_y
29	6	1				7
31	3	7	2			12
33	1	5	4	1		11
35		1	15	10	8	34
37			2	12	15	29
39				1	6	7
n_x	10	14	23	24	29	$n=100$

Таблиця 9.5 – це загальний вигляд кореляційної таблиці. У ній $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, $\sum_{j=1}^{m} n'_j = n$; n_i– частота значення x_i, n'_j– частота значення y_j, n_{ij}– частота, з якою зустрічається пара $(x_i; y_j)$; $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij} = n$, $n_i = \sum_{j=1}^{m} n_{ij}$, $n'_j = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}$.

Числа x_i, y_j – середини відповідних інтервалів, якщо вибірку одержано у вигляді інтервалів.

Таблиця 9.5

$X \backslash Y$	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m	n_x
x_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1j}	…	n_{1m}	n_1
x_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2j}	…	n_{2m}	n_2
…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	n_{i1}	n_{i2}	…	n_{ij}	…	n_{im}	n_i
…	…	…	…	…	…	…	…
x_k	n_{k1}	n_{k2}	…	n_{kj}	…	n_{km}	n_k
n_y	n'_1	n'_2	…	n'_j	…	n'_m	n

Очевидно, що за умови $X = x_1$ випадкова величина Y має такий розподіл:

$Y_{x=x_1}$	y_1	y_2	…	y_1	…	y_m
Частоти	n_{11}	n_{12}	…	n_{1j}	…	n_{1m}

Середнє значення величини Y, за умови $X = x_1$, дорівнює

$$\bar{y}_{x_1} = \frac{y_1 n_{11} + y_2 n_{12} + \ldots + y_m n_{1m}}{n_1}.$$

За умови $X = x_2$ випадкова величина Y має розподіл:

$Y_{x=x_1}$	y_1	y_2	…	y_1	…	y_m
Частоти	n_{21}	n_{22}	…	n_{2j}	…	n_{2m}

Середнє значення величини Y, за умови $X = x_2$, дорівнює

$$\bar{y}_{x_2} = \frac{y_1 n_{21} + y_2 n_{22} + \ldots + y_m n_{2m}}{n_2}.$$

За умови $X = x_i$ випадкова величина Y має розподіл:

$Y_{x=x_i}$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_m
Частоти	n_{i1}	n_{i2}	$\cdots$	n_{ij}	$\cdots$	n_{im}

Середнє значення величини Y, за умови $X = x_i$, дорівнює

$$\overline{y}_{x_i} = \frac{y_1 n_{i1} + y_2 n_{i2} + \ldots + y_m n_{im}}{n_i}.$$

Тоді залежність умовних середніх $\overline{y}_{x_i}$ від значень x_i є функціональною, яка записується у вигляді таблиці:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_k
$\overline{y}_x$	$\overline{y}_{x_1}$	$\overline{y}_{x_2}$	$\cdots$	$\overline{y}_{x_i}$	$\cdots$	$\overline{y}_{x_k}$

або у вигляді формули:

$$\overline{y}_x = f(x), \tag{5}$$

де $x -$довільне значення.

Користуючись кореляційною таблицею 9.5, аналогічно знаходимо, що за умови $Y = y_1$ розподіл величини X має вигляд:

$X_{y=y_1}$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_k
Частоти	n_{11}	n_{21}	$\cdots$	n_{i1}	$\cdots$	n_{k1}

Тоді середнє значення випадкової величини X за умови $Y = y_1$ дорівнює

$$\overline{x}_{y_1} = \frac{x_1 n_{11} + x_2 n_{21} + \ldots + x_i n_{i1} + \ldots + x_k n_{k1}}{n_1'}.$$

За умови $Y = y_j$ розподіл величини X набуває вигляду:

$X_{y=y_j}$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_k
Частоти	n_{1j}	n_{2j}	$\cdots$	n_{ij}	$\cdots$	n_{kj}

Середнє значення випадкової величини X за умови $Y = y_j$ дорівнює

$$\bar{x}_{y_j} = \frac{x_1 n_{1j} + x_2 n_{2j} + \ldots + x_i n_{ij} + \ldots + x_k n_{kj}}{n'_j}.$$

Тоді залежність умовних середніх $\bar{x}_{y_j}$ від значення y_j є функціональною, яка записується у вигляді таблиці:

Y	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m
$\bar{x}_y$	$\bar{x}_{y_1}$	$\bar{x}_{y_2}$	...	$\bar{x}_{y_j}$	...	$\bar{x}_{y_m}$

або у вигляді деякої формули:

$$\bar{x}_y = \varphi(y), \tag{9.6}$$

де y – довільна змінна.

О з н а ч е н н я 4. Величина $\bar{y}_x$ називається *умовним середнім значенням* випадкової величини Y, що відповідає значенню $X = x$.

О з н а ч е н н я 5. Функціональну залежність умовної середньої $\bar{y}_x$ від x у вигляді (9.5) називають *кореляційною залежністю* Y від X.

О з н а ч е н н я 6. Рівняння (9.5) називають *рівнянням регресії* Y на X; функцію $f(x)$ називають *регресією* Y *на* X.

О з н а ч е н н я 7. Величина $\bar{x}_y$ називається *умовним середнім значенням* випадкової величини X, що відповідає значенню $Y = y$.

О з н а ч е н н я 8. Функціональну залежність умовної середньої $\bar{x}_y$ від y у вигляді (9.6) називають *кореляційною залежністю* X від Y.

О з н а ч е н н я 9. Рівняння (9.6) називають *рівнянням регресії* X на Y; функцію $\varphi(y)$ називають регресією X на Y, а її графік – *лінією регресії* X *на* Y.

У теорії кореляції є дві основні задачі:

1) за даними кореляційної таблиці встановити функції $\bar{y}_x = f(x)$ чи $\bar{x}_y = \varphi(y)$, тобто встановити форму кореляційного зв'язку;

2) оцінити тісноту кореляційного зв'язку – міру розсіювання значень величини Y навколо умовної середньої $\bar{y}_x$ (чи X навколо $\bar{x}_y$).

При значних розсіюваннях кореляційна залежність між X та Y є слабкою. У такому разі, одному й тому ж значенню x в. в. X можуть відповідати дуже відмінні одне від одного значення в. в. Y. При незначних розсіюваннях залежність між X та Y близька до певної функціональної.

9.3 Метод найменших квадратів

Нехай експериментально отриману функціональну залежність між деякими змінними x та y задано таблицею 9.6:

Таблиця 9.6

x_1	x_2	...	x_i	...	x_k
y_1	y_2	...	y_i	...	y_k

(кожному значенню змінної x відповідає одне й тільки одне значення змінної y).

На координатній площині побудуємо ламану з вершинами $\left(x_1; y_1\right)$, $\left(x_2; y_2\right), ..., \left(x_i; y_i\right), ..., \left(x_k; y_k\right)$. За розташуванням ламаної можна (і потрібно) передбачати лінію (криву) з найменшими відхиленнями від цих вершин. Така операція називається *вирівнюванням* експериментальних даних. Прогнозована крива називається *теоретичною лінією* залежності y від x. Виникає запитання: як знайти її рівняння?

Якщо з розташування вершин ламаної видно, що теоретична крива є прямою лінією, то для знаходження її рівняння:

$$y = ax + b \tag{9.7}$$

потрібно знайти числа a та b.

Розглянемо числа: $\tilde{y}_1 = ax_1 + b$, $\tilde{y}_2 = ax_2 + b$, … , $\tilde{y}_i = ax_i + b$, … , $\tilde{y}_k = ax_k + b$.

Відхилення $\tilde{y}_1 - y_1$, $\tilde{y}_2 - y_2, ...,$ $\tilde{y}_i - y_i, ...,$ $\tilde{y}_k - y_k$ дослідних значень y_1, y_2, …, y_i, …, y_k функціональної залежності від теоретичних значень $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$, …, $\tilde{y}_i$, …, $\tilde{y}_k$ функціональної залежності можуть бути як додатними, так і від'ємними.

Розглянемо квадрати цих відхилень

$$\left(\tilde{y}_1 - y_1\right)^2,\ \left(\tilde{y}_2 - y_2\right)^2,\ \ldots,\ \left(\tilde{y}_i - y_i\right)^2, \ldots,\ \left(\tilde{y}_k - y_k\right)^2,$$

які є невід'ємними. Сума цих доданків

$$\left(\tilde{y}_1 - y_1\right)^2 + \left(\tilde{y}_2 - y_2\right)^2 + \ldots + \left(\tilde{y}_i - y_i\right)^2 + \ldots + \left(\tilde{y}_k - y_k\right)^2 =$$
$$\left(ax_1 + b - y_1\right)^2 + \left(ax_2 + b - y_2\right)^2 + \ldots + \left(ax_i + b - y_i\right)^2 + \ldots +$$
$$+\left(ax_k + b - y_k\right)^2 = S\left(a_1; b\right)$$

є невід'ємною і містить два невідомих параметри a і b.

Для знаходження рівняння прямої (9.7) треба знайти такі значення a і b, щоб сума $S\left(a;b\right)$ квадратів відхилень була найменшою. У цьому суть методу найменших квадратів. Критичні точки функції $S\left(a;b\right)$ визначають з умови:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0. \end{cases} \tag{9.8}$$

Система (9.8) приводить до системи двох рівнянь із двома невідомими a та b:

$$\begin{cases} a \cdot \sum\limits_{i=1}^{k} x_i + b \cdot k = \sum\limits_{i=1}^{k} y_i, \\ a \cdot \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{k} x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} y_i x_i. \end{cases} \tag{9.9}$$

Звідси

$$\begin{cases} a = \dfrac{k \cdot \sum\limits_{i=1}^{k} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{k} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{k} y_i}{k \cdot \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{k} x_i\right)^2}, \\ b = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} y_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum\limits_{i=1}^{k} x_i y_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{k} x_i}{k \cdot \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{k} x_i\right)^2}. \end{cases} \tag{9.10}$$

Якщо в системі (9.10) чисельники й знаменники кожного з дробів поділити на k^2, то, враховуючи означення середнього арифметичного, маємо

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}, \quad b = \frac{\overline{y} \cdot \overline{x^2} - \overline{xy} \cdot \overline{x}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2} = \overline{y} - a\overline{x}. \tag{9.11}$$

У позначеннях з таблиці 9.6 рівняння (9.7) запишеться:

$$y-\overline{y}=a\left(x-\overline{x}\right) \qquad (9.12)$$

або $y=ax+b$, де $b=\overline{y}-a\overline{x}$.

Якби ми розшукували залежність x від y у вигляді

$$x=cy+d, \qquad (9.13)$$

то, міркуючи аналогічно, з'ясували б, що

$$c=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{y^2}-\left(\overline{y}\right)^2}, \quad d=\overline{x}-c\overline{y}. \qquad (9.14)$$

Тоді рівняння прямої (9.13) можна переписати у вигляді

$$x-\overline{x}=c\left(y-\overline{y}\right). \qquad (9.15)$$

Зауваження 1. Методом найменших квадратів можна користуватися не лише під час знаходження лінійної залежності, а й тоді, коли залежність є криволінійною. Наприклад, коли теоретична крива має вигляд $y=ax^2+bx+c$, то знаходження її параметрів a, b, c приводить до розв'язування системи трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими a, b, c (див. підрозділ 9.5).

Зауваження 2. Знаходження параметрів a і b такої теоретичної кривої як, наприклад, $y=ab^x$, теж приводить до системи двох рівнянь з невідомими a і b, але ці рівняння є нелінійними. Проте в деяких випадках нелінійну функціональну залежність методом введення нових змінних можна звести до лінійної залежності. Наприклад:

1. Якщо $y=ax^b,\ x>0,\ a>0,\ b>0$, то, логарифмуючи $\ln y=b\ln x+\ln a$ і позначаючи $X=\ln x,\ Y=\ln y,\ B=\ln a,\ b=A,$ приходимо до лінійної залежності:

$$Y=AX+B. \qquad (9.16)$$

2. Якщо $y=ab^x$, то $\ln y=x\ln b+\ln a$, і, позначаючи $Y=\ln y,\ A=\ln b,\ B=\ln a,\ X=x$, приходимо до лінійної залежності (9.16).

3. Якщо $y=a\ln x+b$, то при $a=A,\ \ln x=X,\ b=B$ приходимо до лінійної залежності (9.16).

4. Якщо $y=\dfrac{a}{x}+b$, то при $a=A,\ X=\dfrac{1}{x},\ b=B$ приходимо до лінійної залежності (9.16).

5. Якщо $y=\dfrac{1}{ax+b}$, то при $Y=\dfrac{1}{y},\ X=x,\ A=a,\ B=b$ приходимо до

лінійної залежності (9.16).

6. Якщо $y = \dfrac{x}{ax+b}$, то при $Y = \dfrac{1}{y},\ X = \dfrac{1}{x},\ A = b,\ B = a$ приходимо до лінійної залежності (9.16).

9.4 Лінійна залежність випадкових величин. Коефіцієнт кореляції

Нехай функціональна залежність випадкових величин X та Y задається таблицею:

Таблиця 9.7

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
Y	y_1	y_2	...	y_j	...	y_n

Може виявитися, що точки $(x_1; y_1), (x_2; y_2), ..., (x_i; y_i), ..., (x_n; y_n)$ площини Oxy лежать на деякій прямій

$$y = ax + b,$$

де $a = const,\ b = const$. Тоді кажуть, що залежність між випадковими величинами X та Y є *лінійною* (*прямолінійною*), і пишуть $Y = aX + b$.

Може виявитися, що точки $(x_i; y_i),\ i = 1, 2, ..., n$, лежать дуже близько до деякої прямої. Тоді залежність між X та Y є близькою до лінійної (рис. 9.1).

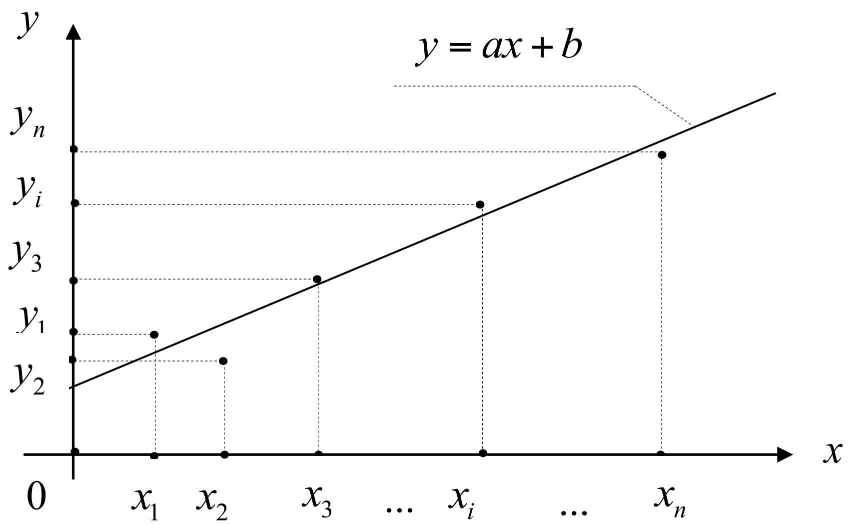


Рис. 9.1

Якщо випадкові величини X та Y функціонально залежні, то бажано мати характеристику, яка показує, наскільки ця залежність близька до лінійної. Такою мірою лінійної залежності є *коефіцієнт кореляції*.

О з н а ч е н н я 1. *Коефіцієнтом кореляції* випадкових величин X та Y

називається число

$$\rho(X,Y)=\frac{M\left(X\cdot Y\right)-M\left(X\right)\cdot M\left(Y\right)}{\sqrt{D\left(X\right)\cdot D\left(Y\right)}}. \qquad (9.17)$$

О з н а ч е н н я 2. *Кореляційним моментом* випадкових величин X та Y називається число

$$K\left(X,Y\right)=M\left(XY\right)-M\left(X\right)M\left(Y\right). \qquad (9.18)$$

Отже,

$$\rho\left(X,Y\right)=\frac{K\left(X,Y\right)}{\sqrt{D\left(X\right)}\cdot\sqrt{D\left(Y\right)}}=\frac{K\left(X,Y\right)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}.$$

Якщо випадкові величини X,Y незалежні, то $M\left(X\cdot Y\right)=M\left(X\right)\cdot M\left(Y\right)$, а тому з (9.17) випливає, що $\rho\left(X,Y\right)=0$.

Тобто, *для незалежних випадкових величин* X,Y *коефіцієнт кореляції*

$$\rho\left(X,Y\right)=0. \qquad (9.19)$$

Обернене твердження хибне: з рівності (9.19) не випливає, що випадкові величини X,Y незалежні.

О з н а ч е н н я 3. Якщо $\rho\left(X,Y\right)=0$, то випадкові величини X,Y називаються *некорельованими*.

З попередніх міркувань випливає, що *коли випадкові величини* X,Y *незалежні, то вони й некорельовані*, але не навпаки.

Легко бачити, що для знаходження кореляційного моменту можна використовувати формулу:

$$K\left(X,Y\right)=M\left[\left(X-M\left(X\right)\right)\left(Y-M\left(Y\right)\right)\right]. \qquad (9.20)$$

Дійсно,

$$M\left[\left(X-M\left(X\right)\right)\left(Y-M\left(Y\right)\right)\right]=M\left[XY-XM\left(Y\right)-YM(X)+\right.$$
$$\left.+M(X)\cdot M(Y)\right]=M\left(XY\right)-M\left(X\right)\cdot M\left(Y\right)-M\left(Y\right)\cdot M\left(X\right)+$$
$$+M\left(X\right)\cdot M\left(Y\right)=M\left(XY\right)-M\left(X\right)\cdot M\left(Y\right)=K\left(X,Y\right).$$

Крім того, легко довести, що для довільних випадкових величин

$X_1, X_2, ..., X_n$

$$D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i<j} K(X_i; X_j). \qquad (9.21)$$

Для попарно некорельованих випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$ з (9.21) одержуємо зазначену вище рівність (9.2).

Наведемо деякі властивості коефіцієнта кореляції.

Теорема 1. Для будь-яких випадкових величин X, Y має місце нерівність:

$$|\rho(X,Y)| \le 1.$$

Доведення. Зрозуміло, що коли випадкова величина $Z \ge 0$, то $M(Z) \ge 0$. Нехай $Z = \left[Y - M(Y) + c(X - M(X))\right]^2$, де c – довільне число. Тоді, враховуючи що $Z \ge 0$, маємо

$$0 \le M(Z) = M\left(\left[Y - M(Y) + c(X - M(X))\right]^2\right) =$$

$$= M\left((Y - M(Y))^2 + c^2(X - M(X))^2 + 2c(Y - M(Y))(X - M(X))\right) =$$

$$= M\left((Y - M(Y))^2\right) + c^2 M\left((X - M(X))^2\right) +$$

$$+2cM\left((Y - M(Y))(X - M(X))\right) = D(X) + 2cK(X,Y) + c^2 D(Y).$$

Таким чином,

$$0 \le D(X) + 2cK(X,Y) + c^2 D(Y) \qquad (9.22)$$

для довільних випадкових величин X, Y та довільного числа c.

Квадратний тричлен відносно c у нерівності (9.22) невід'ємний, тому його дискримінант не додатний. Тобто,

$$K^2(X,Y) - D(X)D(Y) \le 0 \quad \Rightarrow \quad K^2(X,Y) \le D(X) \cdot D(Y).$$

Звідси

$$\frac{K^2(X,Y)}{D(X)D(Y)} \le 1 \;\Rightarrow\; |\rho(X,Y)| \le 1,$$

що і потрібно було довести.

Теорема 2. Якщо $Y = aX + b$, де a, b – сталі, то $|\rho(X,Y)| = 1$. При цьому $\rho(X,Y) = 1$, коли $a > 0$ і $\rho(X,Y) = -1$, коли $a < 0$.

Доведення. Оскільки

$$K(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = M\big(X(aX+b)\big) -$$

$$-M(X)M(aX+b) = aM\left(X^2\right) + bM(X) - a\big(M(X)\big)^2 - bM(X) =$$

$$= aM\left(X^2\right) - a\big(M(X)\big)^2 = aD(X),$$

то

$$\rho(X,Y) = \frac{aD(X)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{aD(X)}{\sqrt{D(X)a^2D(X)}} = \frac{aD(X)}{D(X)\sqrt{a^2}} =$$

$$= \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, & при\, a > 0; \\ -1, & при\, a < 0. \end{cases}$$

(Тут ми скористалися рівністю: $D(aX+b) = a^2D(X)$.)

Теорема 3 (обернена до теореми 2). Якщо $|\rho(X,Y)| = 1$, то $Y = aX + b$.

Доведення. Зрозуміло, що коли $M\left(Z^2\right) = 0$, то $Z = 0$, оскільки з умови $M(Z) = 0 = \sum_{i=1}^{n} p_i z_i^2$ випливає, що всі значення $z_i = 0$. Якщо $|\rho(X,Y)| = 1$, то $K^2(X,Y) = D(X)D(Y)$ або $K^2(X,Y) - D(X)D(Y) = 0$. Але це дискримінант квадратного тричлена. Тому квадратний тричлен $M\Big[\big(Y - M(Y)\big) + c\big(X - M(X)\big)\Big]^2$ відносно c має єдиний корінь, який позначимо через $c = -a$. Тоді $\big(Y - M(Y)\big) - a\big(X - M(X)\big) = 0$ або $Y - M(Y) = a\big(X - M(X)\big)$, звідки

$$Y = aX + \big(M(Y) - aM(X)\big) = aX + b,$$

де $b = M(Y) - aM(X)$.

Отже, $Y = aX + b$.

Висновок. *Для лінійної залежності випадкових величин* X та Y *необхідно й достатньо, щоб* $|\rho(X,Y)| = 1$.

Приклад 1. Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин X та Y, сумісний розподіл яких задано таблицею:

X	–1	0	2
Y	5	3	–1
p_i	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Розв'язання. $M(X)=\frac{1}{3}(-1+0+2)=\frac{1}{3}$, $M(Y)=\frac{1}{3}(5+3-1)=\frac{7}{3}$,

$$M(X^2)=\frac{1}{3}(1+0+4)=\frac{5}{3}, \qquad M(Y^2)=\frac{1}{3}(25+9+1)=\frac{35}{3},$$

$$[M(X)]^2=\frac{1}{9},\ [M(Y)]^2=\frac{49}{9}, \qquad M(XY)=\frac{1}{3}(-5+0-2)=-\frac{7}{3},$$

$$D(X)=\frac{14}{9}, \qquad D(Y)=\frac{56}{9},$$

$$\rho(X,Y)=\frac{-\frac{7}{3}-\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{14}{9}}\cdot\sqrt{\frac{56}{9}}}=\frac{-\frac{21}{9}-\frac{7}{9}}{\sqrt{\frac{2\cdot7\cdot8\cdot7}{81}}}=\frac{-28}{7\cdot4}=-1.$$

Отже, випадкові величини X та Y лінійно залежні. Дійсно, легко переконатися, що $Y=-2X+3$.

Приклад 2. Якість продукції контролюється за наявністю в ній дефектів двох видів X та Y. Ці дефекти є випадковими величинами, що мають такий сумісний закон розподілу:

$X \backslash Y$	1	2	4	6
–7	0,1	0,1	0,05	0
–6	0,2	0,15	0,15	0
–4	0,1	0,1	0	0,05

Знайти коефіцієнт кореляції дефектів та з'ясувати залежні вони чи ні.

Розв'язання. Знаходимо розподіли випадкових величин X та Y.

Розподіл величини X має вигляд:

X	–7	–6	–4
P	0,25	0,5	0,25

Це випливає з сумісного розподілу величин X та Y, оскільки

$$P(X=-7)=0,1+0,1+0,05+0=0,25;$$

$$P(X=-6)=0,2+0,15+0,15+0=0,5;$$

$$P(X=-4)=0,1+0,1+0+0,05=0,25.$$

Звідси $M(X)=-5,75$, $D(X)=1,19$, $\sigma_X=\sqrt{D(X)}=1,09$.

Аналогічно знаходимо розподіл випадкової величини Y:

Y	1	2	4	6
P	0,4	0,35	0,2	0,05

Звідси $M(Y)=2,2$, $D(Y)=1,96$, $\sigma_Y=\sqrt{D(Y)}=1,4$.

Складаємо таблицю добутків XY:

$X \backslash Y$	1	2	4	6
–7	–7	–14	–28	–42
–6	–6	–12	–24	–36
–4	–4	–8	–16	–24

Звідси маємо розподіл випадкової величини XY:

XY	–42	–36	–28	–24	–16	–14	–12	–8	–7	–6	–4
P	0	0	0,05	0,2	0	0,1	0,15	0,1	0,1	0,2	0,1

Тоді математичне сподівання $M(XY) = -12,5$.

Оскільки кореляційний момент

$$K\left(X,Y\right) = M\left(XY\right) - M\left(X\right)M\left(Y\right) = -12,5 + 12,65 = 0,15,$$

то коефіцієнт кореляції

$$\rho(X,Y) = \frac{0,15}{1,09 \cdot 1,4} = 0,09.$$

З огляду на те, що $\rho(X,Y) \approx 0$, то випадкові величини X,Y практично некорельовані, а можлива залежність між X та Y дуже далека від лінійної.

Оскільки з незалежності випадкових величин випливає їх некорельованість, то відмінність коефіцієнта кореляції від нуля свідчить про наявність залежності між величинами.

Як виявляється, *коефіцієнт кореляції є мірою лінійної залежності між випадковими величинами.* Пояснимо це детальніше.

Нехай величини X та Y – залежні. Випадкову величину Y подамо у вигляді суми деякої лінійної функції від X та залишку Z:

$$Y = \left(A\left(X - m_X\right) + B\right) + Z.$$

Залишок $Z = Y - \left(A\left(X - m_X\right) + B\right)$ можна розглядати як помилку при наближенні випадкової величини Y лінійною функцією.

Доведемо, що *завжди існує лінійна функція найкращого середньоквадратичного наближення*, для якої $M\left(Z^2\right)$ набуває найменшого значення, і що для такої лінійної функції відношення залишкової дисперсії $\sigma^2\left(Z\right)$ до дисперсії $\sigma^2\left(Y\right)$ залежить лише від коефіцієнта кореляції $\rho\left(X,Y\right)$.

Дійсно,

$$M\left(Z^2\right) = M\left(\left(\left(Y - m_Y\right) - A\left(X - m_X\right) + \left(m_Y - B\right)\right)^2\right) =$$

$$= M\left(\left(Y - m_Y\right)^2\right) + A^2 M\left(\left(X - m_X\right)^2\right) + \left(m_Y - B\right)^2 -$$

$$-2AM\left(Y - m_Y\right)\left(X - m_X\right),$$

враховуючи, що $M\left(Y - m_Y\right) = 0$, $M\left(X - m_X\right) = 0$. Виходячи з того, що $M(X - m_X)(Y - m_Y) = \mu_{1,1} = \rho\sigma_X\sigma_Y$, маємо

$$M\left(Z^2\right) = \sigma_Y^2 + A^2\sigma_X^2 + \left(m_Y - B\right)^2 - 2A\rho\sigma_X\sigma_Y =$$
$$= \sigma_Y^2\left(1-\rho^2\right) + \left(A\sigma_X - \rho\sigma_Y\right)^2 + \left(m_Y - B\right)^2. \tag{9.23}$$

З рівності (9.23) бачимо, що $M\left(Z^2\right)$ набуває найменшого значення при $A\sigma_X - \rho\sigma_Y = 0$ та $\sigma_Y - B = 0$, звідки $A = \rho\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$, а $B = \sigma_Y$.

Таким чином, *лінійна функція найкращого середньоквадратичного наближення є*

$$\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(X - m_X\right) + m_Y.$$

Очевидно, що її математичне сподівання

$$M\left(\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(X - m_X\right) + m_Y\right) = m_Y,$$

тому математичне сподівання залишку Z дорівнює нулеві:

$$M\left(Z\right) = M\left(Y - m_Y - \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(X - m_X\right)\right) = 0.$$

З рівності (9.23) видно, що при $A = \rho\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$, $B = \sigma_Y$ залишкова дисперсія дорівнює $D\left(Z\right) = M\left(Z^2\right) = \sigma_Y^2\left(1-\rho^2\right)$. Звідси $\dfrac{\sigma^2\left(Z\right)}{\sigma^2\left(Y\right)} = 1 - \rho^2 \quad \Rightarrow$

$\dfrac{\sigma^2\left(Z\right)}{\sigma^2\left(Y\right)} = 1 - \rho^2 \;\; \Rightarrow \;\; 1 - \rho^2 \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; -1 \leq \rho \leq 1$, що збігається з теоремою 1.

Аналізуючи рівність

$$\frac{\sigma^2\left(Z\right)}{\sigma^2\left(Y\right)} = 1 - \rho^2,$$

відзначаємо, що коли $\left|\rho\right|$ наближається до 1, зменшується відносна величина $\dfrac{\sigma\left(Z\right)}{\sigma\left(Y\right)}$ залишкової дисперсії; чим тісніша лінійна залежність між X і Y, тим краще можна наблизити величину Y лінійною функцією від величини X.

Якщо $\rho = \pm 1$, то $\sigma^2(Z) = 0$. Це означає, що (з ймовірністю 1) залишок $Z = 0$, отже, Y є лінійною функцією від X, що збігається з теоремою 2.

Аналогічно можна показати, що *лінійна функція найкращого середньо-квадратичного наближення залежності випадкової величини* X *від величини* Y *є*

$$\rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\left(Y - m_Y\right) + m_X .$$

9.5 Криволінійна кореляція. Кореляційне відношення

Функціональна залежність між змінними x та y, яку задано таблицею,

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

може бути криволінійною або близькою до криволінійної. Іншими словами, точки $(x_1; y_1), (x_2; y_2), ..., (x_i; y_i), ..., (x_n; y_n)$ можуть належати деякій кривій, наприклад, кривій

$$y = ax^2 + bx + c \tag{9.24}$$

або бути дуже близько до неї. Рівняння самої кривої знаходять методом найменших квадратів, розв'язуючи відповідну систему рівнянь. Наприклад, у випадку залежності (1) параметри a, b, c знаходять із системи:

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,4}\right)a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,3}\right)b + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right)c = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^{\,2}, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,3}\right)a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right)b + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)c = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right)a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)b + n \cdot c = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i . \end{cases} \tag{9.25}$$

Нехай статистичну залежність між випадковими величинами X та Y задано таблицею 9.5. Тоді кореляційна залежність Y від X (функціональна залежність $\overline{y}_x$ від значення x випадкової величини X) може виявитися як лінійною, так і криволінійною.

Оскільки для оцінки тісноти лінійного кореляційного зв'язку використовують коефіцієнт кореляції, то виникає запитання: *як оцінити тісноту довільного кореляційного зв'язку*, зокрема криволінійного?

Як приклад розглянемо наступну таблицю.

Таблиця 9.8

$Y \backslash X$	8	9
3	4	13
5	6	7
n_x	10	20
$\overline{y}_x$	4,2	3,7

До першої групи віднесемо ті 10 значень Y (4 рази спостерігається $y_1 = 3$ і 6 раз $y_2 = 5$), які відповідають значенню $x_1 = 8$.

До другої групи віднесемо ті 20 значень Y (13 разів спостерігається $y_1 = 3$ і 7 раз $y_2 = 5$), які відповідають значенню $x_2 = 9$.

Умовні середні назвемо *груповими середніми*: групова середня першої групи

$$\overline{y}_8 = \frac{4 \cdot 3 + 6 \cdot 5}{10} = 4,2;$$

групова середня другої групи

$$\overline{y}_9 = \frac{13 \cdot 3 + 7 \cdot 5}{20} = 3,7.$$

О з н а ч е н н я 1. *Груповою дисперсією* називають дисперсію значень випадкової величини, що належать заданій групі, відносно групового середнього.

О з н а ч е н н я 2. *Внутрігруповою дисперсією* $D_{внгр}$ називають середнє арифметичне групових дисперсій.

О з н а ч е н н я 3. *Міжгруповою дисперсією* $D_{міжгр}$ називають дисперсію групових середніх відносно загального середнього.

О з н а ч е н н я 4. *Загальною дисперсією* $D_{заг}$ називають дисперсію значень випадкової величини відносно загального середнього.

Легко довести, що завжди

$$D_{заг} = D_{внгр} + D_{міжгр}. \tag{9.26}$$

Зрозуміло, що коли залежність випадкової величини Y від випадкової величини X функціональна, то кожному значенню X відповідає одне й тільки одне значення Y, бо в кожній групі є лише одне значення Y, а тому всі групові дисперсії дорівнюють нулеві. Отже, $D_{внгр} = 0$ і з (9.26) маємо

$$D_{міжгр} = D_{заг}$$

або

$$\frac{D_{міжгр}}{D_{заг}} = 1. \qquad (9.27)$$

Якщо залежність випадкової величини Y від випадкової величини X статистична, то не всі групові дисперсії дорівнюють нулеві, а тоді $D_{внгр} \neq 0$. З рівності (9.26) маємо

$$1 = \frac{D_{внгр}}{D_{заг}} + \frac{D_{міжгр}}{D_{заг}} \quad \Rightarrow \quad \frac{D_{міжгр}}{D_{заг}} = 1 - \frac{D_{внгр}}{D_{заг}}.$$

Оскільки $\frac{D_{внгр}}{D_{заг}} > 0$, то

$$\frac{D_{міжгр}}{D_{заг}} < 1. \qquad (9.28)$$

Таким чином, у випадку функціональної залежності Y від X виконується рівність (9.27). У випадку кореляційної залежності Y від X виконується нерівність (9.28).

З попередніх міркувань випливає, що коли $D_{внгр} \to 0$, то $\frac{D_{міжгр}}{D_{заг}} \to 1$, тому доцільно як міру тісноти кореляційної залежності брати відношення $\frac{D_{міжгр}}{D_{заг}} < 1$ або, замінивши дисперсії на середні квадратичні відхилення, $\frac{\sigma_{міжгр}}{\sigma_{заг}}$. Тобто в інших позначеннях $\frac{\sigma_{міжгр}}{\sigma_{заг}} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y}$.

О з н а ч е н н я 5. *Кореляційним відношенням* Y до X називається число

$$\eta_{y/x} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y}. \qquad (9.29)$$

Тут

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{\frac{\sum n_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2}{n}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y (y - \bar{y})^2}{n}},$$

де n_x – частота значення x випадкової величини X;

n_y – частота значення y випадкової величини Y;

n – сума всіх частот;

$\bar{y}$ – середнє значення випадкової величини Y;

$\bar{y}_x$ – умовне середнє значення випадкової величини Y.

Аналогічно визначається кореляційне відношення X до Y

$$\eta_{x/y} = \frac{\sigma_{\bar{x}_y}}{\sigma_x}.$$

Приклад 1. Знайти кореляційне відношення $\eta_{y/x}$ за даними такої кореляційної таблиці:

$Y \backslash X$	10	20	30	n_y
15	4	28	6	38
25	6	–	6	12
n_x	10	28	12	$n = 50$
$\bar{y}_x$	21	15	20	

Розв'язання. Знаходимо загальне середнє

$$\bar{y} = \frac{\sum n_y y}{n} = \frac{38 \cdot 15 + 12 \cdot 25}{50} = 17,4.$$

Тоді

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y (y - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{38(15 - 17,4)^2 + 12(25 - 17,4)^2}{50}} = 4,27.$$

Міжгрупове середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{\frac{\sum n_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{10(21 - 17,4)^2 + 28(15 - 17,4)^2 + 12(20 - 17,4)^2}{50}} = 2,73.$$

Кореляційне відношення

$$\eta_{y/x} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y} = \frac{2,73}{4,27} = 0,64.$$

Легко переконатися, що кореляційне відношення η (η – одне з відношень $\eta_{x/y}$ чи $\eta_{y/x}$) має такі властивості:

1. $0 \le \eta \le 1$.

2. Якщо $\eta = 0$, то випадкові величини X та Y кореляційною залежністю не пов'язані.

3. Якщо випадкові величини X та Y не пов'язані кореляційною залежністю, то $\eta = 0$.

4. Якщо $\eta = 1$, то випадкові величини X та Y пов'язані функціональною залежністю.

5. Якщо випадкові величини X та Y пов'язані функціональною залежністю, то $\eta = 1$.

6. Кореляційне відношення не менше за абсолютне значення коефіцієнта кореляції: $\eta \ge |\rho(X,Y)|$.

7. Якщо $\eta = |\rho(X,Y)|$, то між випадковими величинами X та Y існує лінійна кореляційна залежність.

Кореляційне відношення η є мірою тісноти залежності між X,Y як лінійної, так і криволінійної форми. У цьому полягає перевага кореляційного відношення перед коефіцієнтом кореляції. Але недолік кореляційного відношення в тому, що воно не показує, наскільки точки $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, ..., що отримані експериментально, близько розташовані до певної кривої (гіперболи, параболи тощо), яку можна знайти методом найменших квадратів.

9.6 Розподіл n - вимірного випадкового вектора

Нехай X,Y – дискретні випадкові величини.

О з н а ч е н н я 1. Наступну таблицю 9.9 називають *законом розподілу двовимірної дискретної випадкової величини* $\{X,Y\}$.

У ній $p(x_i, y_j)$ – ймовірність того, що $X = x_i$ і $Y = y_j$, тобто

$$P\big((X = x_i) i (Y = y_j)\big) = p(x_i, y_j).$$

Таблиця 9.9

$Y \backslash X$	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_2,y_1)$	...	$p(x_i,y_1)$	...	$p(x_n,y_1)$
y_2	$p(x_1,y_2)$	$p(x_2,y_2)$	...	$p(x_i,y_2)$	...	$p(x_n,y_2)$
...	...	...	...	...	...	...
y_j	$p(x_1,y_j)$	$p(x_2,y_j)$	...	$p(x_i,y_j)$	...	$p(x_n,y_j)$
...	...	...	...	...	...	...
y_m	$p(x_1,y_m)$	$p(x_2,y_m)$	...	$p(x_i,y_m)$	...	$p(x_n,y_m)$

Знаючи закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини $\{X,Y\}$, можна знайти розподіл кожної з величин X та Y. Наприклад, з цієї таблиці бачимо, що

$$P\left(X=x_2\right)=P\left((X=x_2)\, i\, (Y=y_1)\right) \text{ або } P\left((X=x_2)\, i\, (Y=y_2)\right) \text{ або } \ldots \text{ або}$$
$$P\left((X=x_2)\, i\, (Y=y_m)\right)=p\left(x_2,y_1\right)+p\left(x_2,y_2\right)+\ldots+p\left(x_2,y_m\right).$$

Приклад 1. Знайти закони розподілу випадкових величин X та Y, якщо закон розподілу двовимірної випадкової величини $\{X,Y\}$ має вигляд:

$Y \backslash X$	x_1	x_2
y_1	0,6	0,02
y_2	0,13	0,04
y_3	0,06	0,15

Розв'язання. Оскільки

$$P\left(X=x_1\right)=0,6+0,13+0,06=0,79,$$
$$P\left(X=x_2\right)=0,02+0,04+0,15=0,21,$$

то ряд розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	x_1	x_2
$P(X = x_i)$	0,79	0,21

Аналогічно знаходимо, що

$$P(Y = y_1) = 0{,}62,\ P(Y = y_2) = 0{,}17,\ P(Y = y_3) = 0{,}21,$$

тоді випадкова величина Y розподілена за законом:

Y	y_1	y_2	y_3
$P(Y = y_j)$	0,62	0,17	0,21

Означення 2. *Функцією розподілу n - вимірного випадкового вектора*

$$\vec{X} = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$$

або *функцією сумісного розподілу* випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$ називається функція n дійсних змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, що визначається як імовірність сумісного виконання n нерівностей:

$$F = (x_1, x_2, ..., x_n) = P((X_1 < x_1) i (X_2 < x_2) i \dots i (X_n < x_n)) =$$

$$= P((X_1 < x_1) \cdot (X_2 < x_2) \cdot \ldots \cdot (X_n < x_n)) = P(X_1 < x_1,\ X_2 < x_2, ..., X_n < x_n).$$

Якщо позначити $\vec{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, то

$$F = (x_1, x_2, ..., x_n) = F(\vec{x}) = P(X_1 < x_1,\ X_2 < x_2, ..., X_n < x_n).$$

Для двовимірного випадкового вектора $\{X, Y\}$, де X, Y – випадкові величини, за даним означенням маємо

$$F = (x, y) = P(X < x,\ Y < y).$$

Функція сумісного розподілу кількох випадкових величин має властивості, подібні до властивостей функції розподілу $F(x)$ випадкової величини X в одновимірному випадку. Наприклад, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$,

$\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x, y) = F(y)$, $\lim\limits_{y \to +\infty} F(x, y) = F(x)$, де $F(x)$ –

функція розподілу випадкової величини $X, F(y)$– функція розподілу випадкової величини Y, $F(x,y)$– неспадна функція своїх аргументів x та y.

Ймовірність потрапляння випадкової точки (X,Y) у прямокутник $\{(x,y): x_1 \le x < x_2;\ y_1 \le y < y_2\}$ обчислюється за допомогою функції розподілу й дорівнює

$$P(\ x_1 \le X < x_2,\ y_1 \le Y < y_2) = F(x_1,y_1) + F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1).$$

О з н а ч е н н я 3. Якщо X, Y – дискретні випадкові величини, то випадковий вектор $\{X,Y\}$ називається *дискретним*.

О з н а ч е н н я 4. Якщо X, Y – неперервні випадкові величини, то випадковий вектор $\{X,Y\}$ називається *неперервним*. Тоді *щільність розподілу ймовірностей* $f(x,y)$ визначається рівністю:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} ds \int_{-\infty}^{y} f(s,t)\,dt.$$

Властивості диференціальної функції розподілу $f(x,y)$ подібні до властивостей диференціальної функції розподілу в одновимірному випадку.

Зокрема,

$$f(x,y) \ge 0,$$

де (x,y)– довільна точка площини.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)\,dt = 1.$$

Якщо (x,y)– точка неперервності функції $f(x,y)$, то

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y}.$$

Крім того,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy, \quad f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx,$$

де $f(x)$– диференціальна функція розподілу компоненти X випадкового вектора $\{X,Y\}$, а $f(y)$– диференціальна функція розподілу компоненти Y.

Означення 5. Випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n$ називаються *незалежними сукупно*, якщо для будь-якого набору подій $(X_i \in J_i)$,

$i = 1, 2, ..., n$, де $J_1, J_2, ..., J_n$– підмножини числової прямої, виконується рівність:

$$P(X_1 \in J_1, X_2 \in J_2, ..., X_n \in J_n) = P(X_1 \in J_1) \cdot P(X_2 \in J_2) \cdot ... \cdot P(X_n \in J_n).$$

Справедливою є наступна теорема.

Теорема. *Випадкові величини* $X_1, X_2, ..., X_n$ *незалежні тоді й тільки тоді, коли для будь-якої точки* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *виконується рівність*:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot ... \cdot F_{X_n}(x_n).$$

Зауваження. Останню рівність можна замінити на рівносильну рівність:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot ... \cdot f_{X_n}(x_n).$$

Якщо $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ – дискретний випадковий вектор, то умова незалежності його компонент записується у вигляді:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot ... \cdot P(X_n = x_n),$$

де $(x_1, x_2, ..., x_n)$– довільна точка n-вимірного простору.

Означення 6. *Початковим моментом порядку* $k+s$ випадкового вектора $\{X,Y\}$ називається дійсне число $v_{k,s}$, що визначається рівністю:

$$v_{k,s} = M\left(X^k Y^s\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x,y)\,dx\,dy,$$

коли $\{X,Y\}$– неперервний випадковий вектор і

$$v_{k,s} = M\left(X^k Y^s\right) = \sum_i \sum_j x_i^k\, y_j^s\, p_{ij}, \quad p_{ij} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right),$$

коли $\{X,Y\}$– дискретний випадковий вектор.

Означення 7. Вектор $\{m_x, m_y\} = \{v_{1,0}, v_{0,1}\}$

називається *математичним сподіванням* випадкового вектора $\{X,Y\}$.

Означення 8. Якщо $\{X,Y\}$– дискретний випадковий вектор, то *центральним моментом порядку* $k+s$ цього вектора називається число

$$\mu_{k,s}=\sum_i\sum_j\left(x_i-m_x\right)^k\left(y_i-m_y\right)^s p_{ij}.$$

Означення 9. Якщо $\{X,Y\}$– неперервний випадковий вектор, то *центральним моментом порядку* $k+s$ називається число

$$\mu_{k,s}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-m_x\right)^k\left(y-m_y\right)^s f\left(x,y\right)dx\,dy.$$

Зокрема, $\mu_{2,0}=D\left(X\right)$, $\mu_{0,2}=D\left(Y\right)$.

Означення 10. Центральний момент $\mu_{1,1}$ називається *коваріацією,* або *кореляційним моментом,* і позначається K_{XY}. Тобто

$$K_{XY}=\mu_{1,1}=M\left(\left(X-m_x\right)\left(Y-m_y\right)\right)=M\left(XY\right)-m_x m_y.$$

Означення 11. Нормована коваріація $\rho_{XY}=\dfrac{K_{XY}}{\sigma_X\,\sigma_Y}$ називається *коефіцієнтом кореляції* двох випадкових компонент X та Y випадкового вектора $\{X,Y\}$.

Означення 12. У n- вимірному випадку аналогом коваріації є *коваріаційна матриця* K n- вимірного випадкового вектора $\{X_1,X_2,...,X_n\}$, елементи якої є коваріаціями відповідних пар компонент:

$$K=\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ & & \dots & \\ & & & K_{nn}\end{pmatrix},$$

$K_{ij}=M\left(\left(X_i-m_{X_i}\right)\left(X_j-m_{X_j}\right)\right)$ – коваріація i- ї та j- ї компонент.

Означення 13. *Кореляційною матрицею* n- вимірного випадкового вектора називається нормована коваріаційна матриця

$$
R=\begin{pmatrix}
1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1n} \\
 & 1 & \rho_{23} & \dots & \rho_{2n} \\
 & & 1 & \dots & \rho_{3n} \\
 & & & \dots & \\
 & & & & 1
\end{pmatrix},
$$

де $\rho_{ij} = \dfrac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$ – коефіцієнт кореляції i - ї та j - ї компонент.

Наведемо приклади двовимірних аналогів відомих одновимірних розподілів.

О з н а ч е н н я 14. Кажуть, що неперервний випадковий вектор $\{X, Y\}$ *розподілений рівномірно* в області G площини, якщо щільність розподілу ймовірностей цього вектора має вигляд:

$$
f(x,y)=\begin{cases} 0, & \textit{коли } (x,y)\notin G, \\ \dfrac{1}{S(G)}, & \textit{коли } (x,y)\in G, \end{cases}
$$

де $S(G)$ – площа області G.

Іншим прикладом є нормальний закон розподілу на площині.

О з н а ч е н н я 15. Двовимірний випадковий вектор $\{X, Y\}$ розподілений за *нормальним законом*, якщо сумісна щільність розподілу ймовірностей випадкових компонент має вигляд:

$$
f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho_{XY}^2\right)}\left(\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-\right.\right.
$$

$$
\left.\left.-\frac{2\rho_{XY}(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right\},
$$

де $\{m_X, m_Y\}$ – математичне сподівання вектора $\{X, Y\}$; σ_X, σ_Y – середні квадратичні відхилення випадкових компонент X, Y вектора $\{X, Y\}$; ρ_{XY} – коефіцієнт кореляції.

Для нормального розподілу справедливе таке правило:

Якщо компоненти X та Y нормально розподіленого випадкового вектора $\{X, Y\}$ *некорельовані* $(\rho_{XY} = 0)$, *то вони й незалежні*, оскільки в такому разі

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp\left\{-\left(\frac{(x - m_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y - m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right\} = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Як бачимо, навіть у двовимірному випадку зв'язок інтегральної функції $F(x, y)$ та диференціальної функції $f(x, y)$ з інтегральними та диференціальними функціями компонент вектора $\{X, Y\}$ не є простим. Проте коли випадкові величини X та Y незалежні, то деякі задачі розв'язуються досить просто.

Приклад 2. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X має вигляд:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & коли \quad -1 \le x \le 2; \\ 0, & коли \quad x < -1 \quad і \quad x > 2. \end{cases}$$

Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини Y має вигляд:

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & коли \quad 2 \le y \le 7; \\ 0, & коли \quad y < 2 \quad і \quad y > 7. \end{cases}$$

Випадкові величини X, Y незалежні. Знайти ймовірність того, що випадкова точка (X, Y) потрапила у прямокутник $\prod = \{(x; y): \ -2 \le x \le 1, \ \ 3 \le y \le 5\}$.

Випадкова точка (X, Y) потрапить у прямокутник $\prod$ (рис. 9.2), коли одночасно станутъся події $(-2 \le X \le 1)$ і $(3 \le Y \le 5)$, тобто

$$((X, Y) \in \prod) = (-2 \le X \le 1) \cdot (3 \le Y \le 5).$$

Тому, враховуючи незалежність величин X та Y,

$$P((X, Y) \in \prod) = P(-2 \le X \le 1) \cdot P(3 \le Y \le 5).$$

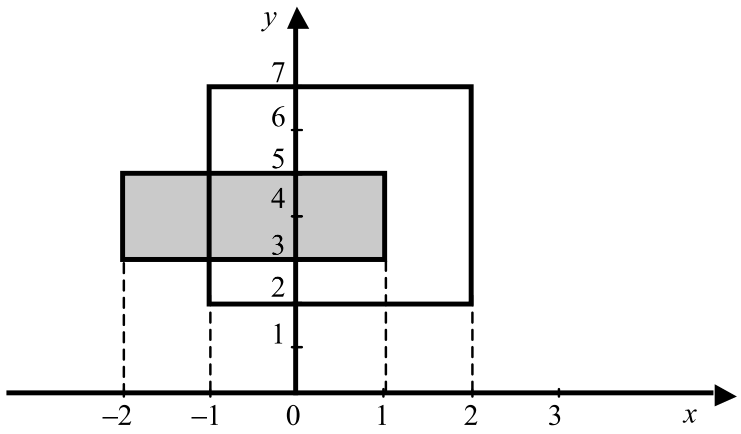


Рис. 9.2

А оскільки $P\left(-2\le X\le 1\right)=\int\limits_{-2}^{1} f_1\left(x\right)dx=\int\limits_{-2}^{1}\frac{1}{3}dx=1,\ P\left(3\le Y\le 5\right)=$

$$=\int\limits_{3}^{5} f_2\left(y\right)dy=\int\limits_{3}^{5}\frac{1}{5}dy=\frac{2}{5},\text{ то }P\left(\left(X,Y\right)\in\prod\right)=1\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}.$$

10. УМОВНІ РОЗПОДІЛИ ТА РЕГРЕСІЇ

10.1 Умовні розподіли ймовірностей

Ми часто зустрічаємося з випадковими величинами, які не є незалежними, але й не пов'язані функціонально. За приклад може слугувати залежність між опадами та урожаєм. У цьому випадку ми виходимо з того, що випадкові величини мають певний сумісний розподіл ймовірностей.

Розглянемо систему двох випадкових величин X та Y. Фіксуючи значення однієї з них, ми визначаємо закон умовного розподілу іншої, подібно до того, як визначалися умовні ймовірності випадкових подій.

Частково це питання було порушено у підрозділах 9.2 та 9.6.

Нехай $\{X,Y\}$ – дискретний випадковий вектор, а (x_i, y_j)– точка площини. Позначимо ймовірності (див. підрозділ 9.6):

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j),\ \ i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,m.$$

Тоді ймовірність p_{ij} можна подати у вигляді добутку ймовірностей:

$$p_{ij} = P\Big(\big(X = x_i\big)i\big(Y = y_j\big)\Big) = P\big(X = x_i\big)\cdot P\big(Y = y_j \big| X = x_i\big) =$$

$$= P\big(X = x_i\big)\cdot P_{X=x_i}\big(Y = y_j\big),$$

де $P\big(X = x_i\big) = p_{i1} + p_{i2} + ... + p_{im} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_i.$

Виходячи з цього, можна ввести поняття *умовного розподілу ймовірностей*, коли X та Y – *дискретні* випадкові величини.

О з н а ч е н н я 1. *Умовними ймовірностями* називаються такі ймовірності:

$$P_{X=x_i}\big(Y = y_j\big) = \frac{p_{ij}}{p_{i1} + p_{i2} + ... + p_{im}} = \frac{p_{ij}}{p_i} \quad \big(i = 1,2,...,n\big),$$

які визначають *умовний розподіл ймовірностей* випадкової величини Y, за умови, що $X = x_i \ \ \big(i = 1,2,...,m\big)$.

Аналогічно вводиться поняття умовного розподілу у неперервному випадку.

О з н а ч е н н я 2. Якщо $\{X,Y\}$– неперервний випадковий вектор з диференціальною функцією розподілу $f\big(x,y\big)$, то *диференціальна функція умовного розподілу ймовірностей* (*щільність умовного розподілу*) випадкової величини Y за умови $X = x$ визначається за формулою:

$$f_{X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f(x)} \quad \left(f(x) \neq 0\right),$$

де $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$.

Аналогічно вводиться поняття щільності умовного розподілу випадкової величини X за умови $Y = y$:

$$f_{Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx} \quad \left(f(y) \neq 0\right).$$

Аналогом правила множення ймовірностей (теорема 1, ст. 26) для неперервних випадкових величин є рівність:

$$f(x,y) = f(x) \cdot f_{X=x}(y) = f(y) \cdot f_{Y=y}(x).$$

10.2 Умовні математичні сподівання. Регресії та їхні основні властивості

Нехай випадкові величини X та Y є неперервними.

О з н а ч е н н я 1. *Умовним математичним сподіванням* випадкової величини Y за умови $X = x$ називається вираз

$$M_x(Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_{X=x}(y)dy,$$

де $f_{X=x}(y)$ – щільність умовного розподілу ймовірностей випадкової величини Y за умови, що $X = x$.

Умовне математичне сподівання $M_x(Y)$ є функцією від x, яка називається *регресією величини* Y *на величину* X (або *функцією регресії*). Її позначимо як

$$\psi(x) = M_x(Y).$$

О з н а ч е н н я 2. Рівняння

$$y = \psi(x)$$

називається *рівнянням регресії* Y *на* X, а графік функції регресії – *лінією регресії*. Лінія регресії Y на X показує, як у *середньому* змінюється величина Y при зміні величини X.

Цілком аналогічно визначається регресія величини X на величину Y:

$$g(y) = M_y(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{Y=y}(x)dx.$$

Зауважимо, що функції $\psi(x)$ та $g(y)$, взагалі кажучи, не є взаємно оберненими.

Основна властивість регресії величини Y на величину X:

Якщо $\psi(x)$ є функція регресії величин Y на величину X, то математичне сподівання квадрата відхилення величин Y від функції $\psi(X)$ менше ніж від будь-якої іншої функції $h(X)$:

$$M\left(\left(Y-\psi(X)\right)^2\right) \le M\left(\left(Y-h(X)\right)^2\right). \qquad (10.1)$$

Для доведення нерівності (1) спочатку покажемо, що для довільної функції $u(X)$

$$M\left(u(X)\cdot Y\right) = M\left(u(X)\cdot\psi(X)\right). \qquad (10.2)$$

Справді, оскільки

$$M\left(u(X)Y\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)yf(x,y)dxdy,$$

то враховуючи, що

$$f(x,y) = f_X(x)\cdot f_{X=x}(y),$$

одержуємо

$$M\left(u(X)Y\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} yf_{X=x}(y)dy\right)u(x)f_X(x)dx.$$

Але

$$\int_{-\infty}^{\infty} yf_{X=x}(y)dy = M_x(Y) = \psi(x).$$

Тому

$$M\left(u(X)Y\right) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\psi(x)f_X(x)dx = M\left(u(X)\psi(X)\right)$$

і рівність (10.2) доведено.

Зокрема, якщо в (10.2) покласти $u(X)=1$, то

$$M\left(Y\right)=M\left(\psi\left(X\right)\right), \qquad (10.3)$$

тобто математичне сподівання випадкової величини Y збігається з математичним сподіванням функції $\psi\left(X\right)$.

Тепер доведемо рівність (1).

$$M\left(\left(Y-h\left(X\right)\right)^2\right)=M\left(\left(Y-\psi\left(X\right)+\psi\left(X\right)-h\left(X\right)\right)^2\right)=$$

$$=M\left(\left(Y-\psi\left(X\right)\right)^2\right)+M\left(\left(\psi\left(X\right)-h\left(X\right)\right)^2\right)+$$

$$+2M\left[\left(\left(Y-\psi\left(X\right)\right)\left(\psi\left(X\right)-h\left(X\right)\right)^2\right)\right].$$

Але, якщо в (10.2) покласти $u\left(X\right)=\psi\left(X\right)-h\left(X\right)$, то

$$M\left[\left(Y-\psi\left(X\right)\right)\left(\psi\left(X\right)-h\left(X\right)\right)\right]=M\left(Yu\left(X\right)\right)-M\left(\psi\left(X\right)u\left(X\right)\right)=0.$$

А тому

$$M\left(\left(Y-h\left(X\right)\right)^2\right)=M\left(\left(Y-\psi\left(X\right)^2\right)\right)+M\left(\left(\psi\left(X\right)-h\left(X\right)\right)^2\right), \qquad (10.4)$$

що й доводить основну властивість регресії Y на X, бо

$$M\left(\left(\psi\left(X\right)-h\left(X\right)\right)^2\geq 0\right).$$

Аналогічно формулюється й основна властивість регресії X на Y:

$$M\left(X-g\left(Y\right)\right)\leq M\left(X-h\left(X\right)^2\right).$$

Зауважимо, що з рівності (10.4) можна одержати деякі важливі наслідки. Наприклад, якщо покласти $h\left(X\right)=M\left(\psi\left(X\right)\right)=m_Y$, то

$$M\left(\left(Y-m_Y\right)^2\right)=M\left(\left(Y-\psi\left(X\right)\right)^2\right)+M\left(\left(\psi\left(X\right)-m_Y\right)^2\right),$$

Тобто

$$D\left(Y\right)=D\left(\psi\left(X\right)\right)+M\left(\left(Y-\psi\left(X\right)\right)^2\right). \qquad (10.5)$$

Рівність (10.5) пов’язує дисперсії випадкової величини Y та функції регресії $\psi\left(X\right)$.

З (10.5) бачимо, зокрема, що $D\left(Y\right)\geq D\left(\psi\left(X\right)\right)$, хоча центри розподілів величини Y та функції $\psi\left(X\right)$ однакові: $M\left(Y\right)=M\left(\psi\left(X\right)\right)$. Коли в (10.2) покласти $h\left(X\right)=X$, то

$$M(XY)=M(X\psi(X)).$$

Звідси випливає, що коли функція регресії $\psi(X)$є сталою, тобто коли умовне математичне сподівання $M_x(Y)$не залежить від змінної xі, отже, збігається з математичним сподіванням $M(Y)=m_Y$, то $\psi(x)=m_Y$ і

$$M(XY)=M(X\psi(X))=M(Xm_Y)=m_YM(X)=M(X)\cdot M(Y).$$

Ми розглянули випадок, коли X,Y – неперервні випадкові величини.

О з н а ч е н н я 3. Якщо X,Y – дискретні випадкові величини, то *умовним математичним сподіванням* випадкової величини Yпри $X=x$, (x – певне можливе значення випадкової величини X), називається добуток можливих значень Yна їхні умовні ймовірності:

$$M_{X=x}(Y)=M(Y|X=x)=\sum_{j=1}^{m}y_j p_{X=x}(y_j).$$

Усі наведені в цьому параграфі міркування відносяться й до дискретних випадкових величин.

Найпростішим випадком є той, коли обидві функції регресії $\psi(x)=M_x(Y)$ та $g(y)=M_y(Y)$ є лінійними. У цьому випадку обидві лінії регресії будуть прямими лініями і називаються *прямими регресії*.

Проаналізуємо рівняння прямих регресії.

Позначимо центри розподілів (математичні сподівання) випадкових величин X та Y через $a=M(X)$ та $b=M(Y)$, а дисперсії – через ${\sigma_X}^2=D(X)$ та ${\sigma_Y}^2=D(Y)$. Тоді кореляційний момент

$$K(X,Y)=M((X-a)(Y-b))=\mu_{1,1}.$$

Шукатимемо параметри A і B лінійної прогресії Yна Xу вигляді:

$$\psi(x)=A(x-a)+B.$$

Підставляючи функцію $\psi(x)=A(x-a)+B$ у формули (10.2) та (10.3) і враховуючи, що $M(x-a)=0$, знайдемо

$$b=M(Y)=M(\psi(X))=B,$$

$$\mu_{1,1}=M((X-a)(Y-b))=M((X-a)(\psi(X)-b))=$$
$$=AM\left((X-a)^2\right)=A{\sigma_X}^2.$$

Звідси

$$A = \frac{\mu_{1,1}}{\sigma_X{}^2} = \frac{K(X,Y)}{\sigma_X{}^2}.$$

Отже, у випадку лінійної кореляції функція регресії Y на X має вигляд:

$$\psi(x) = \frac{\mu_{1,1}}{\sigma_X{}^2}(x-a)+b\ . \qquad (10.6)$$

Аналогічно, функція регресії X на Y має вигляд:

$$g(y) = \frac{\mu_{1,1}}{\sigma_Y{}^2}(y-b)+a. \qquad (10.7)$$

Але враховуючи, що $\mu_{1,1} = K(X,Y) = \rho\sigma_X\sigma_Y$, рівняння прямих регресії можна записати так:

$$y-b = \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-a) \text{ (пряма регресії } Y \text{ на } X\text{);} \qquad (10.8)$$

$$x-a = \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-b) \text{ (пряма регресії } X \text{ на } Y\text{).} \qquad (10.9)$$

З (10.6) та (10.7) бачимо, що при $\mu_{1,1} > 0$ величина Y у середньому зростає за збільшення величини X, проте й величина X у середньому зростає за збільшення величини Y.

З рівнянь (10.8) та (10.9) бачимо, що *обидві прямі регресії проходять через точку* $(a;\, b)$*– центр сумісного розподілу величин* Y *та* X (рис. 10.1).

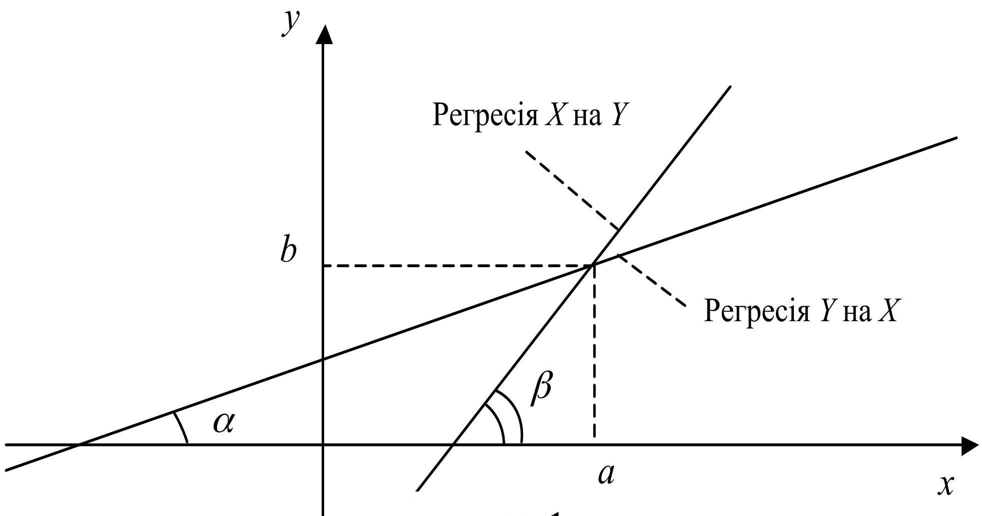


Рис. 10.1

Кутові коефіцієнти прямих регресії відповідно дорівнюють

$$tg\alpha = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \ tg\beta = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}.$$

Якщо $0 < |\rho| < 1$, то $|\rho| < \frac{1}{|\rho|}$, і тому *пряма регресії* Y *на* X *має менший нахил до осі* Ox*, ніж пряма регресії* X *на* Y. За умови $|\rho| \to 1$ кут між обома прямими зменшується; за умови $|\rho| = 1$ прямі регресії збігаються.

Якщо $\rho = 0$, то рівняння прямих регресії набувають вигляду:

$$y = b \text{ та } x = a.$$

Ці прямі паралельні до відповідних координатних осей. Але коли $\rho = 0$, величини X та Y є *некорельованими*, для яких

$$M_x(Y) = b = M(Y), \ M_y(X) = a = M(X),$$

тобто умовні математичні сподівання дорівнюють безумовним математичним сподіванням.

Зазначимо, що у *випадку лінійної кореляції параметри прямих регресії збігаються з параметрами лінійних функцій найкращого середньоквадратичного наближення* (див. підрозділ 9.4).

Якщо сумісний розподіл випадкових величин X та Y є нормальним розподілом на площині (див. підрозділ 9.4), то кажуть, що між цими величинами існує
нормальна кореляція. Встановлено, що *нормальна кореляція завжди лінійна*.

Крім того, виявляється, що *за нормальної кореляції між величинами* X *та* Y *їхня некорельованість рівносильна їхній незалежності*.

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Математична статистика – розділ математики, присвячений математичним методам систематизації, обробки та використання статистичних даних для наукових та практичних висновків.

Статистичними даними називаються відомості про число об'єктів у деякій достатньо широкій сукупності, що мають ті чи інші ознаки.

В практичних задачах ми можемо не знати ні ймовірностей випадкових подій, ні математичних сподівань, ні дисперсій, ні законів розподілу випадкових величин, ні щільності розподілу ймовірностей випадкових величин. Єдине, що ми можемо робити – це досліджувати, одержувати та обробляти наближені результати й робити певні висновки з урахуванням надійності цих результатів.
У зв'язку з цим практичні задачі вимагають перевірки правильності певних припущень – статистичних гіпотез.

Завдання статистики полягає в тому, щоб за результатами поставлених експериментів скласти уявлення про ймовірнісну ситуацію, з якою ми зіткнулися.

Найтиповіші задачі, якими займається математична статистика, зокрема є: визначення закону розподілу за статистичними даними; знаходження точкових та інтервальних оцінок невідомих параметрів статистичних розподілів; побудова емпіричної функції розподілу (наприклад, знаходження функції розподілу відхилень розмірів деталей, що виготовляються, від норми); оцінка залежності однієї випадкової величини від іншої; визначення кореляційних характеристик та рівнянь регресії; порівняння емпіричних розподілів з теоретичними тощо.

При аналізі різного роду проведених експериментів важливо зробити правильні висновки. Статистичні методи дозволяють перевіряти різні припущення (статистичні гіпотези) з високою надійністю міркувань. Тому особливого значення набувають надійні методи перевірки статистичних гіпотез. Цьому питанню у поданому посібнику відведено значну увагу. Ми демонструємо статистичні методи перевірки великої кількості як параметричних, так і не параметричних гіпотез.

Зауважимо, що ці методи широко використовуються при проведенні наукових досліджень під час обробки та аналізу експериментальних даних. Зокрема, авторами посібника в роботах [1-8] аналізувались результати педагогічних експериментів та вивчалась прогностична валідність конкурсного відбору. Відзначимо також наукові статті із застосуванням статистичних методів, викладачів ВНАУ [9-18].

11. ВИБІРКОВИЙ МЕТОД

11.1 Статистичний розподіл вибірки та його числові характеристики

Вивчення множини схожих об'єктів може проводитися як за *кількісною ознакою*, так і за *якісною*. Наприклад, колір деталі – якісна ознака, розмір деталі – кількісна ознака.

Кількісна ознака – це випадкова величина.

Вивчаючи сукупність об'єктів, можна проводити:

1) *повний контроль* (який зазвичай здійснювати незручно або неможливо через велику кількість об'єктів, що досліджуються, або, коли контроль пов'язаний із руйнуванням об'єктів);

2) *контроль деякої частини об'єктів, вибраних випадково*.

О з н а ч е н н я 1. Всю множину об'єктів, яка підлягає контролю та дослідженню, називають *генеральною сукупністю*. Число об'єктів генеральної сукупності називається *обсягом генеральної сукупності*.

О з н а ч е н н я 2. Множина випадково відібраних для дослідження об'єктів називають *вибірковою сукупністю,* або *вибіркою*. Число об'єктів вибіркової сукупності називають *обсягом вибірки*.

Зроблена вибірка повинна достатньо повно відображати особливості всіх об'єктів генеральної сукупності. У такому випадку кажуть, що вибірка повинна бути *репрезентативною* тобто *представницькою.* Іншими словами, обсяг вибірки не повинен бути надто малим, порівняно з обсягом генеральної сукупності, а відбирання об'єктів з генеральної сукупності варто здійснювати випадково.

Нехай для вивчення певної кількісної ознаки X з генеральної сукупності обсягом N отримано вибірку

$$x_1, x_2, ..., x_n \tag{11.1}$$

обсягом n.

Серед чисел вибірки (11.1), які записано в порядку їх отримання, можуть трапитися однакові. Тоді різних чисел у вибірці (11.1) менше ніж n. Нехай у вибірці (11.1) різних чисел є k $(k \le n)$, які запишемо у зростаючому порядку:

$$x_1, x_2, ..., x_k \;. \tag{11.2}$$

О з н а ч е н н я 3. Дослідні значення x_i ознаки X у (11.2) називають *варіантами*, а послідовність варіант, записаних у зростаючому порядку, називають *варіаційним рядом* (ряд (11.2)).

О з н а ч е н н я 4. Різницю $x_k - x_1$ між найбільшою та найменшою варіантами називають *розмахом варіації вибірки*.

Нехай
найменша варіанта x_1 варіаційного ряду (11.2) у вибірці (11.1) трапилася n_1 раз;

варіанта $x_2 - n_2$ раз;

…

варіанта $x_i - n_i$ раз;

…

варіанта $x_k - n_k$ раз.

Число n_1 називається *частотою значення* x_1;

n_2 – *частотою значення* x_2;

…

n_k – *частотою значення* x_k.

Таблицю типу:

Варіанти	x_1	x_2	…	x_i	…	x_k
Частоти	n_1	n_2	…	n_i	…	n_k

(11.3)

називають *статистичним розподілом частот вибірки*.

Зрозуміло, що $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ – обсяг вибірки (11.1).

Число $w_1 = \dfrac{n_1}{n}$ – *відносна частота* значення x_1;

$w_2 = \dfrac{n_2}{n}$ – *відносна частота* значення x_2;

…

$w_k = \dfrac{n_k}{n}$ – *відносна частота* значення x_k.

О з н а ч е н н я 5. Таблицю типу:

Варіанти	x_1	x_2	…	x_i	…	x_k
Відносні частоти	$w_1 = \dfrac{n_1}{n}$	$w_2 = \dfrac{n_2}{n}$	…	$w_i = \dfrac{n_i}{n}$	…	$w_k = \dfrac{n_k}{n}$

(11.4)

називають *статистичним розподілом відносних частот* вибірки.

Оскільки

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_k = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \ldots + \frac{n_k}{n} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}{n} = \frac{n}{n} = 1,$$

то статистичний розподіл відносних частот є *статистичним аналогом* ряду розподілу дискретної випадкової величини. Тому, використовуючи (11.4), можна ввести поняття математичного сподівання та дисперсії вибірки.

О з н а ч е н н я 7. Число

$$\bar{x}_B = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_k w_k = \sum_{i=1}^{k} x_i w_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i n_i \tag{11.5}$$

називають *вибірковим* (*емпіричним*) *математичним сподіванням,* або *математичним сподіванням вибірки*.

О з н а ч е н н я 8. Число

$$D_B = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_B)^2 w_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_B)^2 n_i \tag{11.6}$$

називають *вибірковою* (*емпіричною*) *дисперсією* або *дисперсією вибірки*.

О з н а ч е н н я 9. Аналогічно, число

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}$$

називається *вибірковим середнім квадратичним відхиленням*.

О з н а ч е н н я 10. Число

$$V = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} \cdot 100\%$$

називають *коефіцієнтом варіації* вибірки.

Приклад 1. Для вибірки 4, 4, 3, 4, 2, 5, 3, 3, 3, 4, 2, 5, 4, 3, 4, 3, 3, 3, 5, 4, 2, 5, 3, 3, 4 знайти розподіл частот та розподіл відносних частот.

Розв'язання. Обсяг вибірки $n = 25$. Варіаційний ряд має вигляд: 2, 3, 4, 5, де число варіант $k = 4$. Розмах варіації вибірки дорівнює 5–2=3. Статистичний *розподіл частот* вибірки має вигляд:

x_i	2	3	4	5
n_i	3	10	8	4

де $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4,\ x_4 = 5;\ n_1 = 3,\ n_2 = 10,\ n_3 = 8,\ n_4 = 4$. Статистичний *розподіл відносних частот* вибірки набуває вигляду:

x_i	2	3	4	5
w_i	$\frac{3}{25}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{4}{25}$

де $w_1 = \frac{3}{25}$, $w_2 = \frac{10}{25}$, $w_3 = \frac{8}{25}$, $w_4 = \frac{4}{25}$.

Контроль: $\frac{3}{25} + \frac{10}{25} + \frac{8}{25} + \frac{4}{25} = 1$.

О з н а ч е н н я 11. *Вибірковою модою* d_X унімодального (одновершинного) розподілу називають елемент вибірки, що має найбільшу частоту. (*Унімодальним* називають розподіл, який має лише одне значення з найбільшою частотою.)

О з н а ч е н н я 12. *Вибірковою медіаною* називають число h_X, яке ділить варіаційний ряд на дві частини, що містять однакову кількість елементів. Якщо $n = 2l + 1$ – непарне число, то медіаною є елемент варіаційного ряду з середнім номером $l + 1$. Якщо $n = 2l$, то $h_X = (x_l + x_{l+1}) / 2$.

Наприклад, для вибірки: 5, 6, 8, 2, 3, 1, 1, 4 мода $d_X = 1$. Записавши вибірку у вигляді неспадної послідовності: 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, бачимо, що медіана $h_X = (3 + 4) / 2 = 3{,}5$.

О з н а ч е н н я 13. *Вибірковим початковим моментом* r - го порядку називають число

$$\nu_r^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r = \sum_{i=1}^{k} x_i^r \frac{n_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i^r w_i .$$

Очевидно, що вибірковий початковий момент першого порядку дорівнює вибірковій середній: $\nu_1^* = \overline{x}_B$.

О з н а ч е н н я 14. *Вибірковим центральним моментом* r - го порядку називають число

$$\mu_r^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_B)^r = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_B)^r \frac{n_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_B)^r w_i .$$

Очевидно, що вибірковий центральний момент другого порядку дорівнює вибірковій дисперсії: $\mu_2^* = D_B$.

О з н а ч е н н я 15. *Вибірковим коефіцієнтом асиметрії* розподілу випадкової величини X називають число

$$A_C(X) = \frac{\mu_3^*}{\sigma_B^3},$$

де μ_3^* – вибірковий центральний момент третього порядку, σ_B – середнє квадратичне відхилення вибірки.

О з н а ч е н н я 16. *Вибірковим коефіцієнтом ексцесу* розподілу випадкової величини X називають число

$$E_k(X) = \frac{\mu_4^*}{\sigma_B^4} - 3,$$

де μ_4^* – вибірковий центральний момент четвертого порядку.

§ 2. Емпірична функція розподілу

О з н а ч е н н я 1. *Емпіричною функцією розподілу* (*функцією розподілу вибірки*) називають функцію $F^*(x)$, яка визначає для будь-якого числа x відносну частоту події $(X < x)$:

$$F^*(x) = n_x / n,$$

де n_x – сума частот усіх варіант, менших за x; n – обсяг вибірки.

Емпірична функція розподілу $F^*(x)$ має властивості, подібні до властивостей теоретичної функції розподілу $F(x)$, зокрема:

1. $0 \le F^*(x) \le 1$ за будь-якого x.

2. $F^*(x)$ – неспадна функція.

3. Якщо x_1 – найменша варіанта, а x_k – найбільша варіанта варіаційного ряду (11.2), то $F^*(x) = 0$ коли $x \le x_1$, а $F^*(x) = 1$ коли $x > x_k$.

Приклад 1. Як результат вибірки одержано числа:

$$-3,\ 2,\ -1,\ -3,\ 5,\ -3,\ 2,\ 2,\ -3,\ 5.$$

Побудувати графік емпіричної функції розподілу.

Розв'язання. Оскільки обсяг вибірки $n = 10$, то розподіл частот вибірки має вигляд:

x_i	-3	-1	2	5
n_i	4	1	3	2

Розподіл відносних частот:

x_i	-3	-1	2	5
w_i	$0{,}4$	$0{,}1$	$0{,}3$	$0{,}2$

Емпірична функція розподілу:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le -3; \\ 0{,}4, & \text{коли } -3 < x \le -1; \\ 0{,}5, & \text{коли } -1 < x \le 2; \\ 0{,}8, & \text{коли } 2 < x \le 5; \\ 1, & \text{коли } \quad x > 5. \end{cases}$$

Будуємо графік функції $y = F^*(x)$ (рис. 11.1).

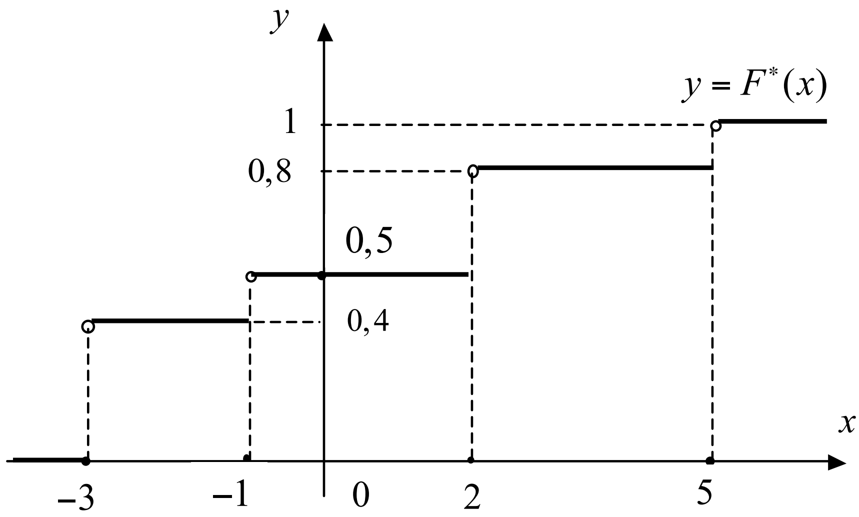


Рис. 11.1

§ 3. Полігон та гістограма

Нехай маємо статистичні розподіли (11.3) та (11.4).

О з н а ч е н н я 1. *Полігоном частот* називають ламану, відрізки якої сполучають точки $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots, (x_k, n_k)$, де x_i – варіанти вибірки, n_i – відповідні їм частоти (рис. 11.1).

О з н а ч е н н я 2. *Полігоном відносних частот* називають ламану, відрізки якої сполучають точки $(x_1, w_1), (x_2, w_2), \ldots, (x_k, w_k)$, де x_i – варіанти вибірки, w_i – відповідні їм відносні частоти.

Полігон відносних частот відрізняється від полігону частот лише масштабом по осі ординат, а тому, якщо стиснути полігон частот у n разів до осі Ox, то одержимо полігон відносних частот (рис. 11.2).

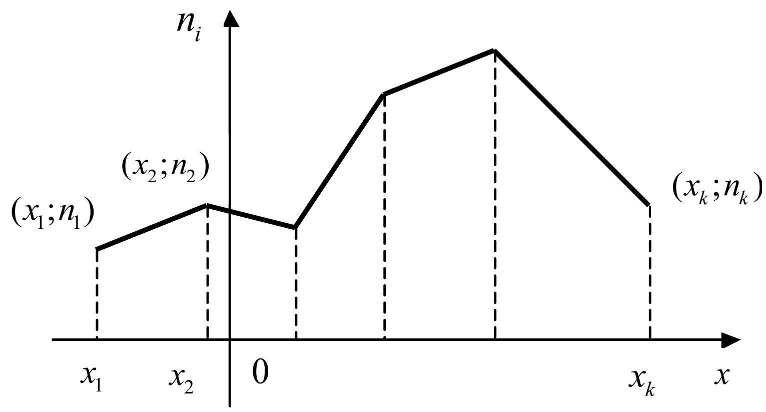


Рис. 11.2

У багатьох випадках (особливо для неперервних розподілів) наочне уявлення про випадкову величину дає *гістограма*.

О з н а ч е н н я 3. Нехай весь інтервал $(x_{\min};x_{\max})$ (від найменшого значення варіаційного ряду до найбільшого) розбито на ряд частинних інтервалів довжиною h і знайдено n_i – суму частот тих варіант, які потрапили до i - го інтервалу. *Гістограмою частот* називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є інтервали довжиною h, а висоти дорівнюють щільності частоти n_i / h.

Площа i -го прямокутника дорівнює $\frac{n_i}{h}\cdot h = n_i$. Площа гістограми дорівнює $\sum n_i = n$ – обсяг вибірки.

Аналогічно визначається *гістограма відносних частот.*

О з н а ч е н н я 4. *Гістограмою відносних частот* називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є інтервали довжиною h, а висоти дорівнюють щільності відносної частоти: $\frac{w_i}{h}$.

Площа i - го прямокутника дорівнює $\frac{w_i}{h}\cdot h = w_i$. Площа гістограми дорівнює $\sum w_i = 1$.

Якщо, площа гістограми відносних частот дорівнює одиниці, то *гістограма відносних частот є статистичним аналогом диференціальної функції розподілу* (*щільності розподілу ймовірностей*) $y = f(x)$ випадкової величини X.

Приклад 1. Нехай у результаті експерименту отримано вибірку: 12,6,19,12,4,11,10,9,17,8,10,7,10,14,1,11,5,9,12,10,9,18,10,16,4,7,13,9,12,10,14, 7,11,11,8,12,7,13,11,12,9,16,6,10,3,9,10,7,18,5,12,9,11,6,19,10,11,8,12,11,15,11,4, 10,14,9,2,11,13,6,13,12,9,3,12,8,12,1,9,11,15,9,8, 10,6,10,3,11,9,13,5,21,20,5,10, 12,2,9,8,17. Побудувати гістограми частот та відносних частот вибірки.

Розв'язання. Обсяг вибірки $n = 100$. Варіаційний ряд вибірки має вигляд: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21.

Оскільки $x_{min} = 1$, а $x_{\max} = 21$, то розмах варіації дорівнює 21 – 1 = 20.

Частоти варіант варіаційного ряду відповідно дорівнюють

$$2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 13, 13, 12, 12, 5, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1. \qquad (11.7)$$

Весь числовий проміжок [1; 21] розбиваємо на п'ять числових проміжків [1; 5), [5; 9), [9; 13), [13; 17), [17; 21] однакової довжини $h = \frac{20}{5} = 4$.

Частота проміжку [1; 5) дорівнює 2+2+3+3=10, частота проміжку [5; 9) дорівнює 4+5+5+6=20, частота проміжку [9; 13) дорівнює 13+13+12+12=50, частота проміжку [13; 17) дорівнює 5+3+2+2=12, частота проміжку [17; 21] дорівнює 2+2+2+1+1=8.

Щільність частоти для кожного з цих проміжків відповідно дорівнює: $10/4 = 2{,}5$; $20/4 = 5$; $50/4 = 12{,}5$; $12/4 = 3$; $8/4 = 2$.

У результаті маємо таку таблицю:

Частинний інтервал	[1; 5)	[5; 9)	[9;13)	[13; 17)	[17; 21]
Сума частот інтервалу	10	20	50	12	8
Щільність частоти інтервалу	2,5	5	12,5	3	2

За даною таблицею будуємо *гістограму розподілу частот* (рис. 11.3). Площа отриманої гістограми дорівнює 100.

Обсяг вибірки $n = 100$, тому відносні частоти варіант ряду (11.7) відповідно дорівнюють 0,02; 0,02; 0,03; 0,03; 0,04; 0,05; 0,05; 0,06; 0,13; 0,13; 0,12; 0,12; 0,05; 0,03; 0,02; 0,02; 0,02; 0,02; 0,02; 0,01; 0,01.

Тоді відносна частота проміжку [1; 5) дорівнює $w_1 = \frac{10}{100}$; проміжку [5; 9) дорівнює $w_2 = \frac{20}{100}$; проміжку [9; 13) дорівнює $w_3 = \frac{50}{100}$; проміжку [13;17) дорівнює $w_4 = \frac{12}{100}$; проміжку [17;21] дорівнює $w_5 = \frac{8}{100}$.

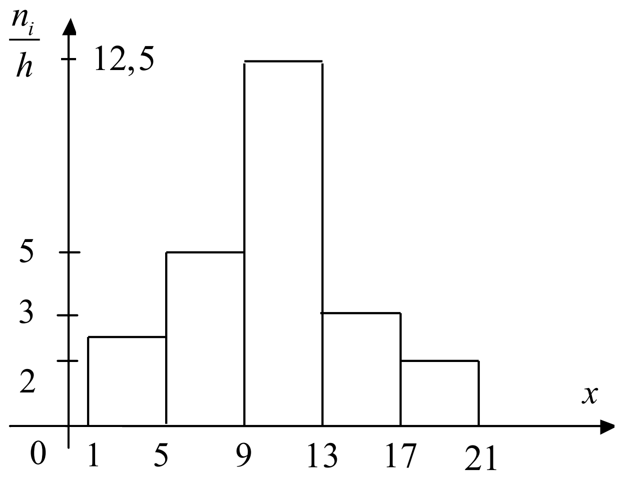


Рис. 11.3

У такому разі, щільність відносної частоти $\frac{w_i}{h} = \frac{w_i}{4}$ для кожного з цих проміжків відповідно дорівнює: $0{,}025$; $0{,}05$; $0{,}125$; $0{,}03$; $0{,}02$.

У результаті маємо таблицю:

Номер інтер-валу, i	Частинний інтервал, $x_i - x_{i+1}$	Сума частот варіант інтер-валу, w_i	Щільність частоти, $\frac{w_i}{h}$
1	[1–5)	0,1	0,025
2	[5–9)	0,2	0,05
3	[9–13)	0,5	0,125
4	[13–17)	0,12	0,03
5	[17–21]	0,08	0,02

За даною таблицею будуємо *гістограму розподілу відносних частот* (рис. 11.4).

Додавши площі п’яти прямокутників гістограми, переконуємося, що площа гістограми відносних частот дорівнює 1.

Зауваження. Як зазначалось вище, гістограма відносних частот є статистичним аналогом диференціальної функції розподілу $y = f(x)$ (функції щільності ймовірностей) випадкової величини X, адже площа під кривою $y = f(x)$ теж дорівнює 1.

Якщо ламану, яка визначає гістограму відносних частот вибірки, згладити неперервною кривою, то отримуємо уявлення про графік диференціальної функції розподілу ймовірностей деякої неперервної випадкової величини X.

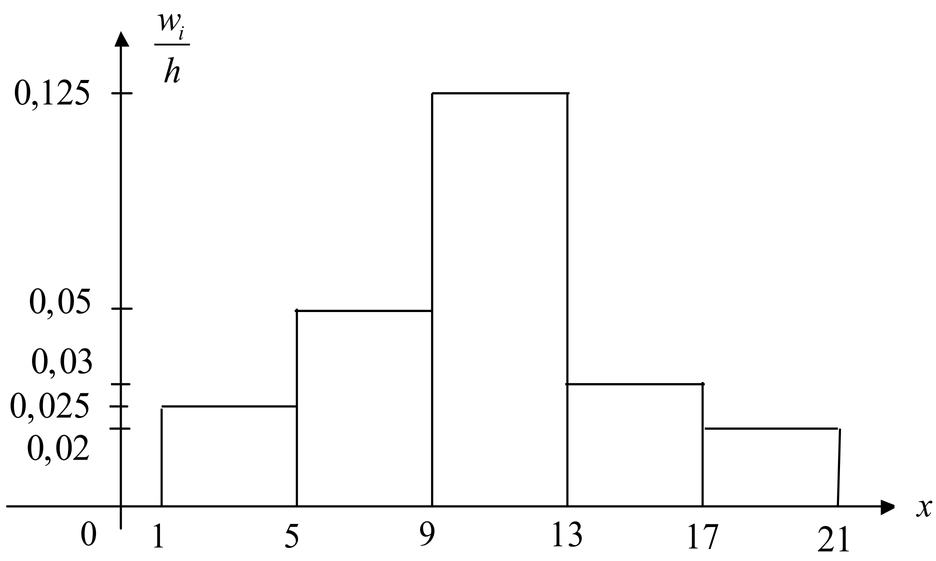


Рис. 11.4

Щільність розподілу ймовірностей такої випадкової величини близька до щільності розподілу відносних частот заданої вибірки. Для вибірки з попереднього прикладу це зображено на рис. 11.5.

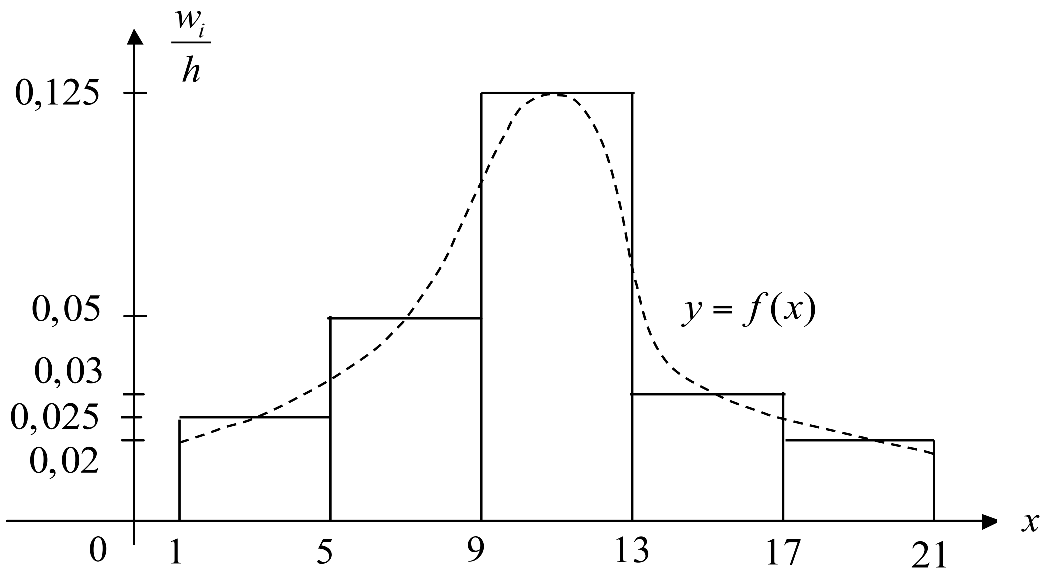


Рис. 11.5

11.4 Елементи теорії кореляції

Нехай статистичну залежність між кількісними ознаками X та Y задано у вигляді кореляційної таблиці 9.5 (таблиці розподілу частот).

Через n_x позначимо частоту числового значення x, через n_y позначимо частоту числового значення y, через n_{xy} позначимо частоту числової пари (x, y). Тоді $\sum n_x = \sum n_y = \sum n_{xy} = n -$обсяг вибірки.

О з н а ч е н н я 1. *Вибірковим коефіцієнтом кореляції* кількісних ознак X та Y називається число

$$\rho_B = \frac{\sum xy \frac{n_{xy}}{n} - \overline{x}_B \cdot \overline{y}_B}{\sigma_B(X) \cdot \sigma_B(Y)},$$

де $\overline{x}_B$ та $\overline{y}_B$ – вибіркові середні ознак X та Y, $\sigma_B(X)$ та $\sigma_B(Y)$ – вибіркові середні квадратичні відхилення.

Вибірковий коефіцієнт кореляції є точковою оцінкою коефіцієнта кореляції

$$\rho(X,Y) = \frac{M\left(X \cdot Y\right) - M\left(X\right) \cdot M\left(Y\right)}{\sqrt{D\left(X\right) \cdot D\left(Y\right)}}$$

(див. підрозділ 9.4).

О з н а ч е н н я 2. *Вибірковим рівнянням лінійної регресії Y на X* є рівняння:

$$\overline{y}_x - \overline{y}_B = \rho_B \frac{\sigma_B(Y)}{\sigma_B(X)}(x - \overline{x}_B),$$

де $\overline{y}_x$ – умовне середнє величини Y за умови $X = x$.

О з н а ч е н н я 3. *Вибірковим рівнянням лінійної регресії X на Y* є рівняння:

$$\overline{x}_y - \overline{x}_B = \rho_B \frac{\sigma_B(X)}{\sigma_B(Y)}(y - \overline{y}_B),$$

де $\overline{x}_y$ – умовне середнє величини X за умови $Y = y$.

Вибірковий коефіцієнт кореляції ρ_B є точковою оцінкою коефіцієнта кореляції ρ генеральної сукупності і тому може слугувати мірою лінійності зв'язку між кількісними ознаками X та Y (див. підрозділ 9.4). Проте коли, наприклад, $\rho_B \neq 0$, то це ще не означає, що коефіцієнт кореляції генеральної сукупності $\rho \neq 0$, бо вибірку здійснюють випадково. Тому виникає потреба перевірки гіпотези про значущість вибіркового коефіцієнта кореляції. Якщо гіпотезу про те, що генеральний коефіцієнт кореляції ρ дорівнює нулеві буде відхилено (після перевірки), то вибірковий коефіцієнт ρ_B є значущим, а величини X та Y є корельованими. Якщо таку гіпотезу буде прийнято, то вибірковий коефіцієнт ρ_B є незначущим, а величини X та Y некорельовані.

Приклад 1. Знайти вибірковий коефіцієнт кореляції за даними такої кореляційної таблиці 11.1:

Таблиця 11.1

Y	X						n_y
	10	20	30	40	50	60	
15	5	7	–	–	–	–	12
25	–	20	23	–	–	–	43
35	–	–	30	47	2	–	79
45	–	–	10	11	20	6	47
55	–	–	–	9	7	3	19
n_x	5	27	63	67	29	9	$n=200$

Розв'язання. Обчислення можна значно спростити, якщо перейти до умовних варіант (при цьому величина ρ_B не зміниться):

$$u_i = (x_i - C_1)/h_1 = (x_i - 40)/10 \text{ та } v_i = (y_i - C_2)/h_2 = (y_i - 35)/10,$$

де $C_1 = 40,\ C_2 = 35$ – умовні нулі (вони є приблизно серединами варіаційних рядів величин X та Y), $h_1 = 10$ та $h_2 = 10$ – кроки (відстані між сусідніми варіантами) тих самих варіаційних рядів.

У такому разі таблиця 11.1 набуває вигляду 11.2:

Таблиця 11.2

v	u						n_v
	–3	–2	–1	0	1	2	
–2	5	7	–	–	–	–	12
–1	–	20	23	–	–	–	43
0	–	–	30	47	2	–	79
1	–	–	10	11	20	6	47
2	–	–	–	9	7	3	19
n_u	5	27	63	67	29	9	$n=200$

З таблиці 11.2 знаходимо, що

$$\sum n_{uv}uv = 5\cdot(-2)\cdot(-3)+7\cdot(-2)\cdot(-2)+20\cdot(-1)\cdot(-2)+23\cdot(-1)\cdot(-1)+30\cdot 0\cdot(-1)+$$
$$47\cdot 0\cdot 0+2\cdot 0\cdot 1+10\cdot 1\cdot(-1)+11\cdot 1\cdot 0+20\cdot 1\cdot 1+6\cdot 1\cdot 2+9\cdot 2\cdot 0+7\cdot 2\cdot 1+3\cdot 2\cdot 2=169.$$

З цієї самої таблиці знаходимо середні

$$\overline{u}_B = \frac{1}{n}\sum n_u u = \frac{1}{200}(5\cdot(-3)+27\cdot(-2)+63\cdot(-1)+67\cdot 0+29\cdot 1+9\cdot 2) = -0{,}425$$

та

$$\overline{v}_B = \frac{1}{n}\sum n_v v = \frac{1}{200}(12\cdot(-2)+43\cdot(-1)+79\cdot 0+47\cdot 1+19\cdot 2) = 0{,}09.$$

Вибіркові середні квадратичні відхилення $\sigma_B(U)$та $\sigma_B(V)$знаходимо за формулами:

$$\sigma_B(U)=\sqrt{\overline{u_B^2}-(\overline{u}_B)^2} \text{ та } \sigma_B(V)=\sqrt{\overline{v_B^2}-(\overline{v}_B)^2}.$$

Оскільки

$$(\overline{u}_B)^2=(-0,425)^2=0,1806,$$

а

$$\overline{u_B^2}=\frac{1}{n}\sum n_u u^2=\frac{1}{200}(5\cdot 9+27\cdot 4+63\cdot 1+67\cdot 0+29\cdot 1+9\cdot 4)=1,405,$$

то

$$\sigma_B(U)=\sqrt{1,405-0,1806}=1,1065.$$

Оскільки

$$(\overline{v}_B)^2=(0,09)^2=0,0081,$$

а

$$\overline{v_B^2}=\frac{1}{n}\sum n_v v^2=\frac{1}{200}(12\cdot 4+43\cdot 1+79\cdot 0+47\cdot 1+19\cdot 4)=1,07,$$

то

$$\sigma_B(V)=\sqrt{1,07-0,0081}=1,0304.$$

Нарешті знаходимо вибірковий коефіцієнт кореляції

$$\rho_B=\frac{\sum uv\frac{n_{uv}}{n}-\overline{u}_B\cdot\overline{v}_B}{\sigma_B(U)\cdot\sigma_B(V)}=\frac{\sum n_{uv}uv-n\cdot\overline{u}_B\cdot\overline{v}_B}{n\cdot\sigma_B(U)\cdot\sigma_B(V)}=$$

$$=\frac{169-200\cdot(-0,425)\cdot 0,09}{200\cdot 1,1065\cdot 1,0304}=0,77.$$

Зауваження. Завдяки вдалому переходу до умовних варіант, числа u_iта v_i в таблиці 11.2 невеликі. Через це числові характеристики $\overline{u}_B$, $\overline{v}_B$, $\sigma_B(U)$ та $\sigma_B(V)$ ми обчислили безпосередньо за даними таблиці 11.2. Якби числа u_iта v_iв таблиці 11.2 були великі, то для знаходження характеристик $\overline{u}_B$, $\overline{v}_B$, $\sigma_B(U)$ та $\sigma_B(V)$ можна було б скористатися *методом добутків*, який полягає у складанні допоміжих таблиць (див., наприклад, [12]).

Якщо вибірка має досить великий обсяг і є репрезентативною, то висновок про тісноту лінійної залежності між ознаками, отриманий за даними вибірки, значною мірою можна поширити на всю генеральну сукупність. Наприклад, для оцінки коефіцієнта кореляції $\rho_Г$ нормально розподіленої генеральної сукупності (при $n \geq 50$) можна скористатися формулою:

$$\rho_В - 3\frac{(1-\rho_В^2)}{\sqrt{n}} \leq \rho_Г \leq \rho_В + 3\frac{(1+\rho_В^2)}{\sqrt{n}}.$$

Знайдемо вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X за даними кореляційної таблиці 11.1.

Легко переконатися, що $\overline{x}_В = 35,75$, $\overline{y}_В = 35,9$, $\sigma_В(X) = 11,06$, $\sigma_В(Y) = 12,09$. Підставляючи ці значення в рівняння

$$\overline{y}_x - \overline{y}_В = \rho_В \frac{\sigma_В(Y)}{\sigma_В(X)}(x - \overline{x}_В),$$

маємо

$$\overline{y}_x - 35,9 = 0,603 \cdot \frac{12,09}{11,06}(x - 35,75),$$

звідки

$$\overline{y}_x = 0,659x + 12,34.$$

Порівнюючи, наприклад, середні значення $\overline{y}_{30} = 32,11$ та $\overline{y}_{30} = 32,94$, знайдені відповідно за рівнянням регресії та за даними кореляційної таблиці 11.1, бачимо, що дослідне середнє 32,94 та розраховане середнє 32,11 узгоджуються достатньо точно.

О з н а ч е н н я 4. Якщо графіком регресії є крива лінія, то кореляцію називають *криволінійною*.

Зокрема, у випадку параболічної кореляції другого порядку вибіркове рівняння регресії Y на X має вигляд:

$$\overline{y}_x = ax^2 + bx + c.$$

Невідомі параметри a, b, c знаходять із системи:

$$\begin{cases} \left(\sum n_x x^4\right)a + \left(\sum n_x x^3\right)b + \left(\sum n_x x^2\right)c = \sum n_x \overline{y}_x x^2, \\ \left(\sum n_x x^3\right)a + \left(\sum n_x x^2\right)b + \left(\sum n_x x\right)c = \sum n_x \overline{y}_x x, \\ \left(\sum n_x x^2\right)a + \left(\sum n_x x\right)b \quad + \quad n \cdot c \quad = \sum n_x \overline{y}_x . \end{cases}$$

Аналогічно знаходять вибіркове рівняння регресії X на Y:

$$\overline{x}_y = a_1 y^2 + b_1 y + c_1.$$

Приклад 2. Знайти вибіркове рівняння регресії Y на X у вигляді $\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$ за даними наступної кореляційної таблиці 11.3:

Таблиця 11.3

$Y \backslash X$	1	1,1	1,2	n_y
6	8	2	−	10
7	−	30	−	30
7,5	−	1	9	10
n_x	8	33	9	$n = 50$
$\overline{y}_x$	6	6,73	7,5	

Складаємо розрахункову таблицю 11.4:

Таблиця 11.4

x	$\overline{y}_x$	n_x	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x \overline{y}_x$	$n_x \overline{y}_x x$
1	6	8	8	8	8	8	48	48
1,1	6,73	33	36,3	39,93	43,93	48,32	222,09	244,30
1,2	7,5	9	10,8	12,96	15,55	18,66	67,50	81
$\sum$	−	50	55,1	60,89	67,48	74,98	337,59	373,30

Звідси отримуємо систему:

$$\begin{cases} 74,98a + 67,48b + 60,89c = 413,93 \\ 67,48a + 60,89b + 55,10c = 373,30 \\ 60,89a + 55,10b + 50c = 337,59, \end{cases}$$

розв’язавши яку методом Гауса, маємо: $a = 1,94$, $b = 2,98$, $c = 1,10$. Отже, шукане рівняння регресії має вигляд:

$$\overline{y}_x = 1,94x^2 + 2,98x + 1,10.$$

Умовні середні, знайдені за цим рівнянням, $\overline{y}_1 = 6,02$, $\overline{y}_{1,1} = 6,72$ та $\overline{y}_{1,2} =$ $= 7,47$, що непогано узгоджується з умовними середніми кореляційної таблиці: $\overline{y}_1 = 6$, $\overline{y}_{1,1} = 6,73$, $\overline{y}_{1,2} = 7,5$.

Для оцінки тісноти нелінійного кореляційного зв’язку між кількісними ознаками X та Y використовується *вибіркове кореляційне відношення* Y на X та X на Y (див. підрозділ 9.5).

Вибіркове кореляційне відношення Y на X − це відношення міжгрупового середнього квадратичного відхилення до загального середнього квадратичного відхилення кількісної ознаки Y:

$$\eta_{y/x} = \sigma_{міжгр} / \sigma_{заг} = \sigma_{\bar{y}_x} / \sigma_B(Y),$$

де

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{\left(\sum n_x (\bar{y}_x - \bar{y}_B)^2\right) / n},$$

а

$$\sigma_B(Y) = \sqrt{\sum n_y (y - \bar{y}_B)^2 / n}.$$

У попередньому прикладі

$$\bar{y}_B = \frac{10 \cdot 6 + 30 \cdot 7 + 10 \cdot 7,5}{50} = 5,7,$$

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{\frac{8(6 - 5,7)^2 + 33(6,73 - 5,7)^2 + 9(7,5 - 5,7)^2}{50}} \approx 1,4,$$

$$\sigma_B(Y) = \sqrt{\frac{10(6 - 5,7)^2 + 30(7 - 5,7)^2 + 10(7,5 - 5,7)^2}{50}} \approx 1,68.$$

Звідси $\eta_{y/x} = \sigma_{\bar{y}_x} / \sigma_B(Y) = 0,83$. Оскільки кореляційне відношення $\eta_{y/x} = 0,83$ досить близьке до 1, то залежність між ознаками X та Y близька до функціональної.

12. ТОЧКОВІ ОЦІНКИ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ

12.1 Точкові оцінки та вимоги до них

Уявимо таку ситуацію: на певній відстані від нас росте дерево невідомої висоти θ, хоча «на око» воно приблизно чотириметрове. Якщо висловити припущення, що висота дерева дорівнює 4 метри, то число 4 є *точковою* (*числовою*) *оцінкою* невідомого параметра θ. Зрозуміло, що *надійність* (тобто, ймовірність $P(\theta = 4)$) такої оцінки з наперед заданою *точністю* не є високою, бо вгадати висоту дерева з високою точністю, наприклад, з точністю до 10 см дуже маловірно.

Припущення про те, що висота дерева більша за 3,5 м і менша за 4,5 м, є *інтервальною* оцінкою невідомого параметра θ. Надійність такої оцінки, тобто ймовірність $P(3{,}5 < \theta < 4{,}5)$, більша, ніж надійність точкової, але ця оцінка вже не така точна. Інтервальна оцінка: $1 < \theta < 7$ ще надійніша, бо ймовірність $P(1 < \theta < 7)$ ще більша, проте сама інтервальна оцінка $1 < \theta < 7$ невідомої висоти дерева θ вже втрачає цінність.

У цьому розділі ми розглядаємо статистичні точкові, а в наступному – інтервальні оцінки деяких параметрів, які фігурують у статистичних задачах.

О з н а ч е н н я 1. Наближене числове значення $\overline{\theta}$ невідомого параметра θ називають *точковою оцінкою* параметра θ.Тобто,

$$\overline{\theta} \approx \theta. \tag{12.1}$$

Число $\overline{\theta}$ не може бути довільним, а є результатом статистичної обробки деякої вибірки, тому такі точкові оцінки називаються *статистичними*. До статистичних точкових оцінок виставляють певні вимоги, а саме:

1) *незміщенність*;
2) *змістовність*;
3) *ефективність*.

Спочатку зупинимося на умові *незміщеності*. Оскільки число $\overline{\theta}$ є результатом статистичної обробки деякої вибірки, тому для різних вибірок воно може бути різним, тобто може змінюватися. Це означає, що на число $\overline{\theta}$ можна дивитись як на випадкову величину. Але всі значення величини $\overline{\theta}$ повинні наближати невідомий параметр θ (на підставі наближеної рівності (12.1)). Іншими словами, це означає, що математичне сподівання випадкової величини $\overline{\theta}$ повинно дорівнювати оцінюваному параметру θ, тобто

$$M(\overline{\theta}) = \theta. \tag{12.2}$$

О з н а ч е н н я 2. Якщо виконується умова (12.2), то кажуть, що величина $\overline{\theta}$ є *незміщеною* точковою оцінкою невідомого параметра θ.

Ми вже зазначали, що точкова оцінка $\overline{\theta}$ знаходиться на основі вибірки. Це означає, що число $\overline{\theta}$ залежить від вибірки, а, отже, і від її обсягу n. Змістовність точкової оцінки $\overline{\theta}$ полягає в тому, що числа $\overline{\theta}$ при збільшенні обсягу вибірки «за ймовірністю» наближаються до оцінюваного параметра θ. Іншими словами це формулюється у вигляді наступного означення.

О з н а ч е н н я 3. Точкова оцінка $\overline{\theta}$ невідомого параметра θ називається *змістовною*, якщо виконується рівність:

$$\lim_{n\to 0} P\left(|\,\overline{\theta} - \theta\,| > a\right) = 0 \tag{12.3}$$

для довільного числа $a > 0$.

Зрозуміло, що в основу процедури знаходження за даною вибіркою точкової оцінки $\overline{\theta}$ невідомого параметра θ покладено певний спосіб (формулу, алгоритм тощо). Нехай $\overline{\theta}^*$ теж точкова оцінка того ж самого невідомого параметра θ, в основу знаходження якої покладено інший спосіб (формулу). Коли змінюються вибірки, то $\overline{\theta}$ і $\overline{\theta}^*$ своєю чергою є випадковими величинами. Нехай $D(\overline{\theta})$ та $D(\overline{\theta}^*)$ − їхні дисперсії.

О з н а ч е н н я 4. Точкова оцінка $\overline{\theta}$ невідомого параметра θ називається *ефективною*, якщо для будь-якої іншої точкової оцінки $\overline{\theta}^*$ того самого параметра θ виконується нерівність:

$$D(\overline{\theta}) < D(\overline{\theta}^*). \tag{12.4}$$

12.2 Точкова оцінка вибіркового математичного сподівання

Нехай за певною кількісною ознакою X досліджується деяка генеральна сукупність об’єктів обсягом N. Через x_i позначимо значення випадкової величини X. Нехай

$$x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n \tag{12.5}$$

є вибіркою обсягом n.

Зрозуміло, що середнє значення

$$\overline{x}_Г = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$$

генеральної сукупності дорівнює математичному сподіванню випадкової величини X (кількісної ознаки X). Тобто,

$$\overline{x}_Г = M(X). \tag{12.6}$$

Означення 1. Середнє

$$\overline{x}_В = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \tag{12.7}$$

вибірки (12.5) називається *вибірковим* (*емпіричним*) *математичним сподіванням*. Воно за досить великих n приблизно дорівнює $\overline{x}_Г = M(X)$. Таким чином,

$$\overline{x}_В \approx M(X), \tag{12.8}$$

а тому число $\overline{x}_В$ *є точковою оцінкою невідомого математичного сподівання* $M(X)$.

Можна довести, що *вибіркове математичне сподівання* $\overline{x}_В$, *визначене рівністю* (12.7), *є незміщеною, змістовною й ефективною точковою оцінкою невідомого математичного сподівання* $M(X) = \overline{x}_Г$.

Приклад 1. З генеральної сукупності зроблено вибірку:
5,2,2,10,2,10,10,7,7,2,10,7,2,2,2,10,5,2,10,2,5,2,7,2,7,10,5,10,2,10,10,7,2,2,7,5,10,5,10,10,2,10,7,5,5,2,5,5,5,5. Знайти незміщену оцінку генеральної середньої.

Розв'язання. Незміщеною оцінкою генеральної середньої $\overline{x}_Г = M(X)$ є вибіркове математичне сподівання $\overline{x}_В$(вибіркова середня). Оскільки обсяг вибірки $n = 50$,то, склавши таблицю,

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

знаходимо $\overline{x}_В = \dfrac{2 \cdot 16 + 5 \cdot 12 + 7 \cdot 8 + 10 \cdot 14}{50} = 5,76$.

Зауваження 1. Іноді для спрощення арифметичних обчислень використовують такі властивості математичного сподівання та дисперсії:

$M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$, $M(X + C) = M(X) + C$, $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$, $D(X + C) = D(X)$, де C – стала, а X – випадкова величина.

Приклад 2. Знайти вибіркову середню за таким розподілом частот вибірки обсягом $n = 10$:

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

Розв'язання. Вибіркова середня – вибіркове математичне сподівання $\overline{x}_B$. Варіанти x_i розподілу вибірки є великими числами, тому перейдемо до *умовних варіант* $u_i = x_i - 1270$. Розподіл умовних варіант має вигляд:

u_i	–20	0	10
n_i	2	5	3

Враховуючи попереднє зауваження, знаходимо вибіркову середню

$$\overline{x}_B = C + \overline{u}_B = 1270 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3} u_i n_i = 1270 + \frac{(-20)\cdot 2 + 0\cdot 50 + 10\cdot 3}{10} =$$

$$= 1270 - 1 = 1269.$$

Зауваження 2. Під час переходу до умовних варіант u_i число C – так званий *умовний нуль*. Зазвичай за умовний нуль вибирають ту з варіант x_i варіаційного ряду, яка знаходиться найближче до середини варіаційного ряду.

12.3 Точкова оцінка вибіркової дисперсії

О з н а ч е н н я 1. Число

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_B)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}_B)^2 n_i \qquad (12.9)$$

називається *вибірковою* (*емпіричною*) *дисперсією* вибірки (2.1).

О з н а ч е н н я 2. Якщо n – обсяг вибірки, то число

$$D_Г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}_B)^2 \qquad (12.10)$$

називається *дисперсією генеральної сукупності* (N – обсяг генеральної сукупності).

Зрозуміло, що за дисперсію $D(X)$ кількісної ознаки X варто приймати дисперсію генеральної сукупності $D_Г$. Тобто

$$D_Г = D(X). \qquad (12.11)$$

Зрозуміло також, що за великих n

$$D_B(X) \approx D_Г = D(X), \tag{12.12}$$

а тому число D_B є *точковою оцінкою невідомої дисперсії* $D(X)$.

Насправді виявляється, що D_Bє *зміщеною* точковою оцінкою невідомого параметра $D(X)$, тобто $M(D_B) \neq D(X)$. Проте, коли в (12.9) замість множника $\frac{1}{n}$ взяти множник $\frac{1}{n-1}$, то отримуємо *незміщену* (*виправлену*) точкову оцінку невідомої дисперсії $D(X)$

$$D_B^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_B)^2. \tag{12.13}$$

Зауважуємо також, що при великих n $D_B^* \approx D_B$.

Надалі $s_B = \sqrt{D_B^*}$ – *незміщене середнє квадратичне відхилення вибірки*; $\sigma_B = \sqrt{D_B}$ – *зміщене середнє квадратичне відхилення вибірки*; s_B^2– *незміщена вибіркова дисперсія*; $\sigma_B^2 = D_B$– *зміщена вибіркова дисперсія*.

Приклад 1. Знайти зміщену σ_X^2 та незміщену s_X^2 вибіркові дисперсії за заданим розподілом частот вибірки обсягу $n = 10$:

x_i	23,5	26,1	28,2	30,4
n_i	2	3	4	1

Розв'язання. Обчислення проведемо за розрахунковою формулою: $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$. Для зручності, перейдемо до умовних варіант $u_i = 10x_i - 268$. Тоді, з урахуванням властивостей дисперсії, для випадкової величини $U = (10X - 268)$ дисперсія

$$D(U) = 100D(X) \quad \Rightarrow \quad D(X) = \frac{1}{100}D(U).$$

Отже, зміщені вибіркові дисперсії σ_X^2та σ_U^2 пов'язані рівністю:

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{100}\sigma_U^2.$$

Аналогічно пов'язані незміщені дисперсії: $s_X^2 = \frac{1}{100}s_U^2$.

Розподіл умовних варіант має вигляд:

u_i	–33	–7	14	36
n_i	2	3	4	1

Зміщена вибіркова дисперсія

$$\sigma_U^2 = M(U^2) - [M(U)]^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} u_i^2 n_i - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{k} u_i n_i\right)^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} u_i^2 n_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} u_i n_i\right)^2\right),$$

а незміщена

$$s_U^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k} u_i^2 n_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} u_i n_i\right)^2\right), \text{ де } n = 10,\ k = 4.$$

Тому

$$s_U^2 = \frac{1}{9}\cdot\Big[\Big((-33)^2\cdot 2 + (-7)^2\cdot 3 + (14)^2\cdot 4 + (36)^2\cdot 1\Big) -$$

$$-\frac{1}{10}\Big((-33)\cdot 2 + (-7)\cdot 3 + 14\cdot 4 + 36\cdot 1\Big)^2\Big] = 489,$$

а

$$\sigma_U^2 = \frac{9}{10}s_U^2 = 440.$$

Таким чином, незміщена вибіркова дисперсія

$$s_X^2 = \frac{1}{100}\cdot s_U^2 = 4{,}89,$$

а зміщена

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{100}\cdot \sigma_U^2 = 4{,}4.$$

13. ІНТЕРВАЛЬНІ ОЦІНКИ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ

13.1 Поняття довірчої інтервальної оцінки

Недолік точкових оцінок полягає в тому, що невідомо, з якою точністю вони дають значення невідомого параметра, котрий оцінюється. Такі оцінки можна взяти за початкові орієнтири, і якщо за великих вибірок для практичних висновків зазвичай буває достатньо незміщеності, змістовності та ефективності точкових оцінок, то для вибірок малого обсягу питання про точність оцінок є суттєвим. Цією обставиною продиктовано потребу введення інтервальних оцінок.

О з н а ч е н н я 1. Нехай θ – невідомий параметр розподілу. Числа θ_1 і θ_2, знайдені за здійсненою вибіркою (за певними правилами), такі, що виконується умова:

$$P(\theta \in (\theta_1; \theta_2)) \geq \gamma , \tag{13.1}$$

називають *довірчими межами*, а інтервал $(\theta_1; \theta_2)$ – *довірчим інтервалом* для параметра θ. Число γ називають *надійністю* зробленої оцінки й вибирають заздалегідь. Зазвичай приймають $\gamma = 0,95$, $\gamma = 0,99$ або $\gamma = 0,999$.

Якщо ймовірність події більша за $0,95$, то така подія вважається *практично вірогідною*.

Якщо ймовірність події менша за $0,05$, то така подія вважається *практично неможливою*.

Наприклад, якщо в (13.1) $\gamma = 0,95$, то середина $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ довірчого інтервалу практично вірогідно дає значення невідомого параметра θ з точністю $\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$.

Оскільки довірчий інтервал залежить від вибірки, тому він сам є випадковим. Отже, він може покривати невідомий параметр θ або не покривати. Тому випадкова подія $(\theta \in (\theta_1; \theta_2))$ полягає в тому, що довірчий інтервал $(\theta_1; \theta_2)$ покриває параметр θ.

Покажемо спочатку, як знаходити довірчі інтервали для таких параметрів нормального розподілу, як математичне сподівання a та дисперсія σ^2.

13.2 Довірчий інтервал для математичного сподівання нормального розподілу за відомої дисперсії σ^2

Нехай випадкова величина X розподілена за нормальним законом, для якого відома дисперсія σ^2.

Тоді вибірку

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

можна розглядати як n незалежних однаково розподілених (за тим самим законом, що й величина X) випадкових величин. Це означає, що

$$M(x_1) = M(x_2) = ... = M(x_n) = a$$

і

$$D(x_1) = D(x_2) = ... = D(x_n) = \sigma^2.$$

Для середнього арифметичного $\overline{x}_B$ вибірки, як для суми однаково розподілених випадкових величин (див. підрозділ 7.9), також нормально розподіленого,

$$M(\overline{x}_B) = a, \;\; D(\overline{x}_B) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

За заданою надійністю γ підберемо число $\delta > 0$ так, щоб виконувалася умова:

$$P(|\,\overline{x}_B - a\,| < \delta) = \gamma. \tag{13.2}$$

Оскільки випадкова величина $\overline{x}_B$ розподілена нормально з параметрами $M(\overline{x}_B) = a$ і $D(\overline{x}_B) = \dfrac{\sigma^2}{n}$, то її функція розподілу має вигляд (див. 7.5):

$F(x) = \dfrac{1}{2} + \Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\sqrt{n}\right)$. Тому ліва частина рівності (13.2) набуває вигляду:

$$P(|\,\overline{x}_B - a\,| < \delta) = P(a - \delta < \overline{x}_B < a + \delta) = F(a+\delta) - F(a-\delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Підберемо δ так, щоб виконувалася рівність:

$$2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \gamma.$$

Оскільки функція $\Phi(t)$ неперервна на $[0; \infty)$ і зростає від 0 до 0,5, то для будь-якого числа $\gamma \in (0; 1)$ (оскільки $\gamma -$ ймовірність) існує єдине значення t_γ аргумента функції таке, що

$$\Phi\left(t_\gamma\right) = \frac{1}{2}\gamma. \qquad (13.3)$$

Число t_γ називається *квантилем* $\frac{\gamma+1}{2}$ *нормального розподілу*. Використовуючи його, умову (13.2) можна переписати так:

$$P\left(\overline{x}_B - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma < a < \overline{x}_B + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma\right) = \gamma,$$

бо $t_\gamma = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$ і $\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma$. Число t_γ у конкретних задачах підбирають за таблицею значень функції $\Phi(t)$ (додаток Б).

Ми отримали такий результат:

З надійністю γ довірчий інтервал

$$\left(\overline{x}_B - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma;\ \overline{x}_B + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma\right)$$

покриває невідомий параметр a, де $t_\gamma = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$*; число $\overline{x}_B$, як точкова оцінка, дає значення a з точністю до $\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma$ і надійністю γ.*

Приклад 1. Випадкова величина розподілена за нормальним законом з параметром $\sigma = 2$. Зроблено вибірку обсягом $n = 25$. Знайти з надійністю $\gamma = 0,95$ довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання a цього розподілу.

Розв'язання. З рівності $\Phi(t) = \frac{1}{2}t_\gamma = 0,475$ знаходимо за таблицею значень функції $\Phi(t)$ число $t_\gamma = 1,96$. Тоді точність оцінки

$$\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma = \frac{2}{\sqrt{25}}\cdot 1,96 = 0,784,$$

а довірчий інтервал $(\overline{x}_B - 0,784;\ \overline{x}_B + 0,784)$.

13.3 Довірчий інтервал для математичного сподівання нормального розподілу за невідомої дисперсії (і обсягу вибірки $n < 30$)

За вибірки обсягом n і заданої надійності γ довірчим інтервалом для математичного сподівання a нормально розподіленої кількісної ознаки X є інтервал:

$$\left(\overline{x}_B - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\gamma;\ \overline{x}_B + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\gamma\right), \tag{13.4}$$

де s – незміщене (виправлене) вибіркове середнє квадратичне відхилення, число t_γ визначається за заданими n і γ з рівності (13.2).

Приклад 1. Із генеральної сукупності зроблено вибірку обсягом $n = 10$:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Оцінити з надійністю $\gamma = 0,95$ за допомогою довірчого інтервалу математичне сподівання a нормально розподіленої кількісної ознаки X генеральної сукупності за вибірковою середньою.

Розв'язання. Вибіркова середня $\overline{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{6} x_i n_i = 2$. Незміщене середнє квадратичне відхилення

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}_B)^2 n_i}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i - 2)^2 n_i}{9}} = 2,4.$$

За таблицями додатку В, коли $\gamma = 0,95$ та $n = 10$, знаходимо $t_\gamma = 2,26$. Підставляючи числові значення в нерівність:

$$\overline{x}_B - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\gamma < a < \overline{x}_B + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\gamma,$$

переконуємося, що інтервал $(0,3 < a < 3,7)$ покриває невідоме математичне сподівання a з надійністю $0,95$.

13.4 Довірчий інтервал для дисперсії нормального розподілу

Нехай для випадкової величини X, розподіленої нормально, дисперсія σ^2 невідома. Її вибірку (вибірку різних значень)

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

обсягом n знову розглядаємо, як n незалежних випадкових величин, кожна з яких розподілена так само, як X.

Розглянемо випадкову величину

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}, \tag{13.5}$$

де s^2 – незміщена («виправлена») вибіркова дисперсія.

Закон розподілу величини χ^2 є розподілом «хі-квадрат» з $n-1$ степенями вільності. Функція розподілу $F(x)$ цієї величини є зростаючою і неперервною (бо неперервною є випадкова величина χ^2, як сума нормально розподілених, а отже, і неперервних в. в.).

За заданою надійністю γ підберемо два додатних числа $x_1^2(\gamma)$ та $x_2^2(\gamma)$ так, щоб виконувалися рівності:

$$F(x_1^2(\gamma)) = \frac{1-\gamma}{2}, \quad F(x_2^2(\gamma)) = \frac{1+\gamma}{2}.$$

Оскільки $\frac{1-\gamma}{2} < \frac{1+\gamma}{2}$, а функція F неперервна і монотонно зростаюча, то для довільного γ $(0<\gamma<1)$ числа $x_1(\gamma)$ та $x_2(\gamma)$ існують і є єдиними. Тоді

$$P\left(x_1^2(\gamma) < \chi^2 < x_2^2(\gamma)\right) = F\left(x_2^2(\gamma)\right) - F\left(x_1^2(\gamma)\right) = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2} = \gamma. \tag{13.6}$$

Тобто

$$P\left(x_1^2(\gamma) < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < x_2^2(\gamma)\right) = \gamma$$

або

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{x_2^2(\gamma)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{x_1^2(\gamma)}\right) = \gamma.$$

Таким чином, *інтервал* $\left(\frac{(n-1)s^2}{x_2^2(\gamma)}; \frac{(n-1)s^2}{x_1^2(\gamma)}\right)$ *є довірчим інтервалом для дисперсії* σ^2 *з надійністю* γ, а *інтервал* $\left(\frac{\sqrt{n-1}\,s}{x_2(\gamma)}; \frac{\sqrt{n-1}\,s}{x_1(\gamma)}\right)$ *є довірчим інтервалом для параметра* σ *нормального розподілу з надійністю* γ.

Під час знаходження меж інтервалу використовують таблиці додатка Д. Для зручності користування цими таблицями вводиться число α, яке є розв'язком рівняння:

$$1-F(x^2)=\alpha \tag{13.7}$$

або

$$1-\alpha=F(x^2)=P(\chi^2<x^2) \quad \Leftrightarrow \quad P(\chi^2>x^2)=\alpha.$$

У цих позначеннях для нашої задачі

$$F\left(x_2^2(\gamma)\right)=1-\alpha,\ 1-F\left(x_2^2(\gamma)\right)=\alpha,$$

$$F\left(x_1^2(\gamma)\right)=\alpha,\ 1-F\left(x_1^2(\gamma)\right)=1-\alpha,$$

а з (13.6) та (13.7) отримуємо такий зв'язок надійності γ з числом α:

$$\gamma=1-2\alpha.$$

Приклад 1. Обчислити з надійністю $0{,}96$ довірчий інтервал для дисперсії нормального розподілу за вибіркою обсягом $n=18$.

Розв'язання. Якщо $\gamma=0{,}96$, то $\alpha=0{,}02$. За таблицею додатка Д в рядку 17 (бо $n-1=17$) і стовпчику $0{,}02$ знаходимо $x_2=x_2^2(\gamma)=31{,}0$. Для знаходження $x_1=x_1^2(\gamma)$ беремо $1-\alpha=0{,}98$ і в стовпчику $0{,}98$ та рядку 17 знаходимо $x_1=7{,}3$. Отже, довірчим інтервалом з надійністю $0{,}96$ для дисперсії σ^2 буде інтервал $\left(\frac{17s^2}{31};\ \frac{17s^2}{7{,}3}\right)$, а для параметра σ інтервал

$$\left(\frac{s\sqrt{17}}{\sqrt{31}};\ \frac{s\sqrt{17}}{\sqrt{7{,}3}}\right).$$

Проілюструємо отриманий розв'язок графічно (рис. 13.1). Нехай $y=f(x)$ – диференціальна функція розподілу «хі-квадрат» з $n-1$ степенями вільності.

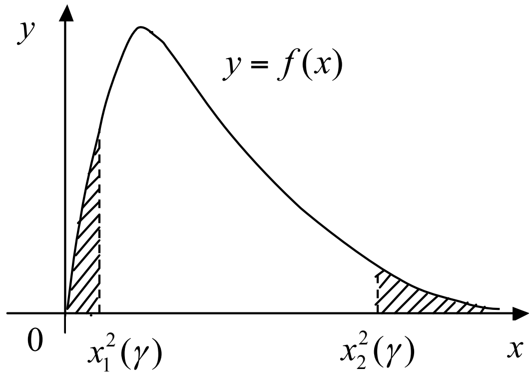


Рис. 13.1

Заштрихована площа ліворуч від числа $x_1^2(\gamma)$ дорівнює α, заштрихована площа праворуч від числа $x_2^2(\gamma)$ теж дорівнює α, а незаштрихована площа над інтервалом $\left(x_1^2(\gamma);\ x_2^2(\gamma)\right)$ дорівнює γ.

13.5 Довірчий інтервал для невідомого середнього квадратичного відхилення σ нормального розподілу за незміщеним вибірковим середнім квадратичним відхиленням s

Нехай кількісна ознака X генеральної сукупності розподілена нормально. Нам потрібно знайти довірчий інтервал, який з надійністю γ покриває невідоме середнє квадратичне відхилення σ, коли вибіркове незміщене середнє квадратичне відхилення s знайдено за даними вибірки.

Ставимо вимогу, аби виконувалася рівність:

$$P(|\sigma - s| < \delta) = \gamma,$$

де $\delta > 0$ –деяке число. Це означає, що

$$P(s - \delta < \sigma < s + \delta) = \gamma.$$

Але $s - \delta < \sigma < s + \delta \ \Leftrightarrow\ s\left(1 - \dfrac{\delta}{s}\right) < \sigma < s\left(1 + \dfrac{\delta}{s}\right)$. Введемо позначення: $\dfrac{\delta}{s} = q$. Тоді

$$P(s(1-q) < \sigma < s(1+q)) = \gamma.$$

Під час знаходження чисел q, за заданими γ та n, використовуємо таблиці додатка Г.

Отже, обчисливши за вибіркою число s і знайшовши за таблицею число q, отримуємо, що *з надійністю γ невідомий параметр σ покривається довірчим інтервалом*

$$\left(s(1-q);\ s(1+q)\right), \textit{ коли } q < 1,$$

та інтервалом

$$\left(0;\ s(1+q)\right), \textit{ коли } q > 1.$$

Приклад 1. За даними вибірки обсягом $n = 16$ з генеральної сукупності, розподіленої нормально, знайдено незміщене середнє квадратичне відхилення $s = 1$. Знайти довірчий інтервал, який покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю $\gamma = 0{,}95$.

Розв'язання. За даними $\gamma = 0,95$ та $n = 16$ з таблиці додатка Г знаходимо $q = 0,44$. Оскільки $q < 1$, а $s = 1$, то з нерівності $s(1-q) < \sigma < s(1+q)$ отримуємо шуканий довірчий інтервал: $0,56 < \sigma < 1,44$.

Приклад 2. Зроблено 12 вимірювань одним приладом (без систематичної помилки), при цьому виявилося, що незміщене середнє квадратичне відхилення $s = 0,6$. Вважаючи, що результати вимірювань розподілені нормально, знайти точність приладу з надійністю $\gamma = 0,99$.

Розв'язання. Точність приладу характеризується середнім квадратичним відхиленням випадкових помилок вимірювань. Тому задача полягає у знаходженні довірчого інтервалу:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q), \tag{13.8}$$

який покриває параметр σ із заданою надійністю $\gamma = 0,99$. За даними $\gamma = 0,99$ та $n = 12$ з таблиці додатка Г знаходимо, що $q = 0,9$. Підставляючи числові значення в (13.8), отримуємо, що $0,06 < \sigma < 1,14$.

13.6 Довірчий інтервал для невідомої ймовірності p біноміального розподілу

Досить часто, нам не відомі ймовірності багатьох тих подій, які нас цікавлять. Для їх знаходження проводять експеримент, наприклад, за схемою Бернуллі, і обчислюють частоту $w = \dfrac{m}{n}$ випадкової події (n – число всіх випробувань, m – число появ випадкової події в n випробуваннях), яку приймають за точкову оцінку ймовірності p випадкової події.

Довірчим інтервалом із заданою надійністю γ невідомої ймовірності p біноміального розподілу за відносної частоти w є інтервал (з наближеними кінцями p_1 і p_2):

$$(p_1; p_2),$$

де

$$p_1 = \frac{n}{t_\gamma^2 + n}\left[w + \frac{t_\gamma^2}{2n} - t_\gamma\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t_\gamma}{2n}\right)^2}\right],$$

$$p_2 = \frac{n}{t_\gamma^2 + n}\left[w + \frac{t_\gamma^2}{2n} + t_\gamma\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t_\gamma}{2n}\right)^2}\right]; \qquad (13.9)$$

n – загальна кількість випробувань; $w = \dfrac{m}{n}$ – відносна частота випадкової події, m – число появ події; t_γ – значення аргументу функції Лапласа (додаток Б), для якого $\Phi(t_\gamma) = \dfrac{\gamma}{2}$.

Коли число n досить велике (вимірюється сотнями), а $np \approx nw > 10$, $n(1-p) \approx n(1-w) > 10$, то для знаходження довірчих меж p_1 та p_2 з (13.9) отримуємо наближені формули:

$$p_1 \approx w - t_\gamma\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}, \quad p_2 \approx w + t_\gamma\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}. \qquad (13.10)$$

Приклад 1. У серії із 100 випробувань подія A сталася 78 разів. Знайти довірчий інтервал для ймовірності події A з надійністю 0,9.

Розв'язання. Частота появи події A дорівнює $w = 0,78$. Оскільки числа $np \approx nw = 78$, $nq \approx n(1-w) = 22$ значно більші за 4 (у такому разі випадкова величина $w = \dfrac{m}{n}$ розподілена майже за нормальним законом), то можна скористатися формулами (13.9). За таблицями нормального розподілу (додаток Б) з умови $\Phi(t_\gamma) = \dfrac{0,9}{2} = 0,45$ знаходимо $t_\gamma = 1,643$. Тоді, за формулами (13.9),

$$p_1 = \frac{0,78 + \dfrac{(1,643)^2}{200} - 1,643 \cdot \sqrt{\dfrac{0,78 \cdot 0,22}{100} + \dfrac{(1,643)^2}{4 \cdot (100)^2}}}{1 + \dfrac{(1,643)^2}{100}} = 0,705,$$

$$p_2 = \frac{0,78 + \dfrac{(1,643)^2}{200} + 1,643 \cdot \sqrt{\dfrac{0,78 \cdot 0,22}{100} + \dfrac{(1,643)^2}{4 \cdot (100)^2}}}{1 + \dfrac{(1,643)^2}{100}} = 0,840.$$

Таким чином, довірчий інтервал $(0,705;\ 0,840)$ покриває істинне значення ймовірності події A з надійністю у 90 %.

Приклад 2. У 200 незалежних повторних випробуваннях випадкова подія A сталася 70 разів. Побудувати довірчий інтервал для ймовірності події A з надійністю 0,85.

Розв'язання. Тут частота $w = 0{,}35$, надійність $\gamma = 0{,}85$. Оскільки $np \approx nw = 70 > 10$, $nq \approx n(1-w) = 130 > 10$, тому скористаємося наближеними формулами (13.10). За таблицею додатка Б, з рівності $\Phi(t_\gamma) = \dfrac{0{,}85}{2} = 0{,}425$, знаходимо $t_\gamma = 1{,}439$. Тоді $t_\gamma \cdot \sqrt{\dfrac{w(1-w)}{n}} = 1{,}439 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}35 \cdot 0{,}65}{200}} \approx 048$, звідки отримуємо довірчий інтервал (за наближеними формулами): (0,302; 0,398). Якби ми знаходили довірчі межі p_1 та p_2 за точними формулами (13.9), то отримали б інтервал: (0,304; 0,396). Як бачимо, розбіжностей між довірчими інтервалами практично немає.

Нехай ***число випробувань*** n ***у схемі Бернуллі є малим***. У цьому випадку за заданою надійністю γ та числом випробувань m, у яких подія A відбулася, з рівностей

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^k p_2^k q_2^{n-k} = \frac{1-\gamma}{2} \quad (0 < p_2 < 1,\ q_2 = 1 - p_2),$$

$$\sum_{k=m}^{n} C_n^k p_1^k q_1^{n-k} = \frac{1-\gamma}{2} \quad (0 < p_1 < 1,\ q_1 = 1 - p_1) \tag{13.11}$$

знаходять числа p_1 та p_2. (Такі числа знайдуться, оскільки функція $y(x) =$
$= \sum\limits_{k=0}^{m} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ $(0 < x < 1)$ є неперервною і спадною, причому $0 < y < 1$.
Рівність (13.11) можна переписати також у рівносильній формі:

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^k p_1^k q_1^{n-k} = \frac{1+\gamma}{2}.$$

Можна довести, що *інтервал* $(p_1; p_2)$ *є довірчим інтервалом для ймовірності* p *випадкової події* A *з надійністю* γ. Довірчі межі p_1, p_2 знаходять із таблиці додатка И за заданою надійністю γ, числом випробувань n та числом m – числом появ події A в n випробуваннях.

Приклад 3. У семи випробуваннях подія A сталася 2 рази. Знайти з надійністю 0,8 довірчий інтервал для $P(A)$.

Розв'язання. У цьому прикладі $n = 7$, $m = 2$, $\gamma = 0,8$. Тоді $\frac{1-\gamma}{2} = 0,1$ і за таблицею додатка И з $n = 7$ і $m = 2$ шукаємо $0,1$. Відповідне значення p дорівнює $p_1 = 0,08$. У тому самому стовпчику шукаємо число $\frac{\gamma+1}{2} = 0,9$ (оскільки сума чисел $\frac{1-\gamma}{2}$ та $\frac{\gamma+1}{2}$ дорівнює 1). Відповідним значенням p є число $p_2 = 0,46$.

Отже, довірчий інтервал (0,08; 0,46) покриває невідому ймовірність p з надійністю у 80 %.

14. ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

14.1 Основні відомості

У математичній статистиці часто доводиться робити припущення, наприклад, щодо вигляду закону розподілу вибірки, про рівність параметрів вибірок, про відмінність параметрів вибірок тощо.

Статистичною гіпотезою називають припущення щодо вигляду невідомого розподілу або щодо параметрів відомих розподілів. Наприклад, статистичними є гіпотези:

1) генеральна сукупність розподілена за нормальним законом;
2) дисперсії двох нормально розподілених сукупностей рівні між собою.

Висунуту гіпотезу H_0 називають *нульовою* (*основною*).

Альтернативною (*конкуруючою*) називають гіпотезу H_1, яка суперечить нульовій. Наприклад, коли перевіряється гіпотеза про рівність деякого параметра θ та деякого заданого числа θ_0, тобто $H_0 : \theta = \theta_0$, то за альтернативну гіпотезу можна взяти одну з таких чотирьох гіпотез : $H_1^{(1)} : \theta > \theta_0$; $H_1^{(2)} : \theta < \theta_0$; $H_1^{(3)} : \theta \neq \theta_0$; $H_1^{(4)} : \theta = \theta_1$, де θ_1 – інше задане число ($\theta_1 \neq \theta_0$).

Вибір однієї з двох гіпотез, які взаємно виключають одна одну, за нульову не є формальним. Цей вибір підлягає обґрунтуванню, що пов'язано з можливими помилками під час перевірки статистичних гіпотез. Вибір альтернативної гіпотези визначається конкретним формулюванням задачі.

Гіпотезу, яка містить лише одне припущення, називають *простою*.

Складною називають гіпотезу, яка складається із скінченного або нескінченного числа простих гіпотез. Наприклад, припущення про те, що випадкова величина X розподілена за нормальним законом $N(0; 1)$ є простою гіпотезою, якщо ж висловлюється припущення, що випадкова величина X має нормальний розподіл $N(m; 1)$, де $a \le m \le b$, то це складна гіпотеза. Ще одним прикладом складної гіпотези є припущення про те, що неперервна випадкова величина X з ймовірністю $\frac{1}{3}$ набуває значення з інтервалу (1; 5); у цьому випадку розподіл випадкової величини X може бути будь-яким із класу неперервних розподілів.

Якщо розподіл випадкової величини X відомий, і за вибіркою спостережень потрібно перевірити припущення стосовно значень параметрів цього розподілу, то така гіпотеза називається *параметричною*. Припущення про властивості випадкової величини X, які виражаються якісно, називається *непарамет-*

ричною гіпотезою. Наприклад, гіпотеза типу: «нормальний розподіл має задану дисперсію» – параметрична. Гіпотеза: «вибіркові сукупності однорідні» – непараметрична.

Статистичним критерієм (або просто *критерієм*) називають випадкову величину Z, яка використовується для перевірки гіпотези. Часто цю величину називають *статистикою* (будь-яку функцію елементів вибірки називають *статистикою*), а критерієм називають правило, за яким приймається або відхиляється гіпотеза. Значення $z_{досл}$, які обчислені за вибіркою, називаються *дослідними* (*емпіричними*) значеннями статистики Z.

Критичною областю називають сукупність тих значень критерію Z, за яких нульову гіпотезу відхиляють.

Областю прийняття гіпотези (*областю допустимих значень*) називають сукупність тих значень критерію, за яких нульову гіпотезу приймають.

Основний принцип перевірки статистичних гіпотез: якщо дослідне значення критерію потрапляє до критичної області, то нульову гіпотезу відхиляють; якщо дослідне значення критерію належить області допустимих значень, то нульову гіпотезу приймають.

Критичними точками (*межами*) $z_{кр}$ називають ті точки, які відділяють критичну область від області допустимих значень.

Критична область, яка визначається нерівністю $Z > z_{кр}$, називається *правосторонньою*.

Критична область, яка визначається нерівністю $Z < z_{кр}$, називається *лівосторонньою*.

Двосторонньою критичною областю називають область, яка визначається сукупністю нерівностей $Z < z_1$, $Z > z_2$, де $z_1 < z_2$. Зокрема, якщо критичні точки симетричні відносно нуля, то двостороння критична область визначається нерівністю: $|Z| > z_{кр}$, де $z_{кр} > 0$.

Критичну область позначимо через $V_{кр}$.

Перед аналізом вибірки фіксують деяку малу ймовірність α, яка називається *рівнем значущості*. Нехай V множина всіх значень статистики Z, а $V_{кр} \subseteq V$ – така її підмножина, що за умови істинності гіпотези H_0 ймовірність потрапляння статистики Z критерію в область $V_{кр}$ дорівнює α, тобто

$$P_{H_0}(Z \in V_{кр}) = \alpha .$$

Нехай $z_{досл}$– вибіркове значення статистики Z, обчислене за отриманою вибіркою спостережень. Тоді критерій (правило) формулюється таким чином: відхилити гіпотезу H_0, якщо $z_{досл} \in V_{кр}$; прийняти гіпотезу H_0, якщо $z_{досл} \in V \setminus V_{кр}$. ($V \setminus V_{кр}$– область прийняття гіпотези. Позначення $M \setminus N$ означає різницю множин M та N, а саме: $x \in M \setminus N \Leftrightarrow x \in M$ і $x \notin N$.)

Критерій, який базується на використанні наперед заданого рівня значущості, називається *критерієм значущості*.

Рівень значущості α визначає «розмір» критичної області $V_{кр}$. Розташування критичної області на множині всіх значень статистики Z залежить від формулювання альтернативної гіпотези H_1. Наприклад, якщо перевіряється гіпотеза $H_0 : \theta = \theta_0$, а альтернативна гіпотеза H_1 формулюється як H_1: $\theta > \theta_0$, то критична область розташовується на правому «хвості» розподілу статистики Z, тобто критична область визначається нерівністю $Z > z_{1-\alpha}$. Якщо альтернативна гіпотеза H_1 формулюється як H_1: $\theta < \theta_0$, то критична область розташовується на лівому «хвості» розподілу статистики Z, тобто критична область визначається нерівністю $Z < z_\alpha$. Тут $z_{1-\alpha}$ та z_α– квантилі розподілу статистики Z, за умови, що істинною є гіпотеза H_0. У цьому разі критерій називається *одностороннім*, відповідно *правостороннім* і *лівостороннім*. Критична область теж називається *односторонньою*.

Якщо альтернативна гіпотеза формулюється як $H_1 : \theta \neq \theta_0$, то критична область розташовується на обох «хвостах» розподілу випадкової величини Z, тобто визначається сукупністю двох нерівностей $Z < z_{\alpha/2}$, $Z > z_{1-\alpha/2}$; у цьому разі критерій називається *двостороннім*, а критичну область теж називають *двосторонньою*.

Через $y = f_{H_0}(z)$ позначаємо диференціальну функцію розподілу випадкової величини Z, за умови, що істинною є нульова гіпотеза H_0 (рис. 14.1, 14.2, 14.3).

Отже, перевірку параметричної статистичної гіпотези за допомогою критерію значущості можна поділити на такі етапи:

1) сформулювати основну гіпотезу H_0, яка перевіряється, та альтернативну гіпотезу H_1;

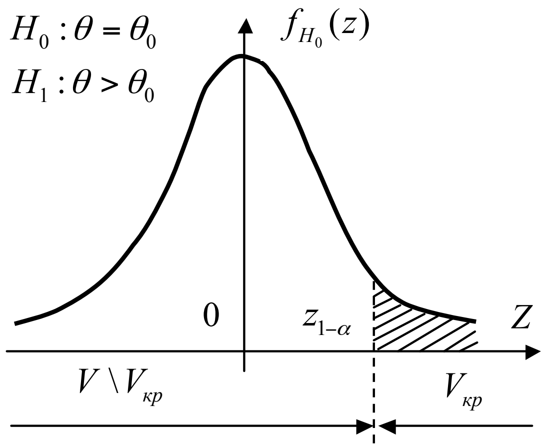


Рис. 14.1

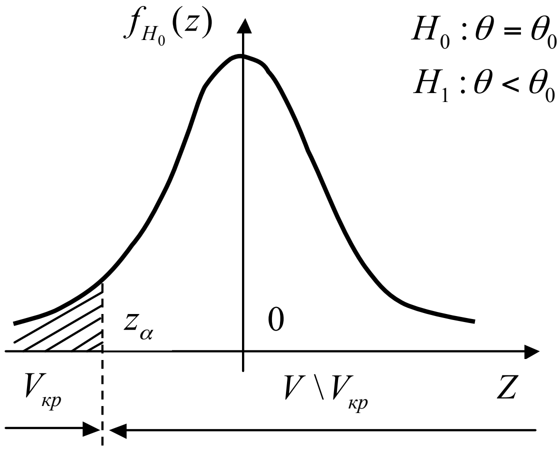


Рис. 14.2

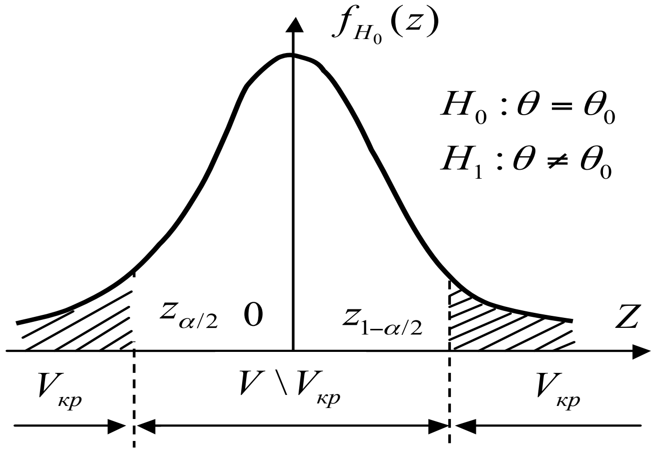


Рис. 14.3

2) вибрати рівень значущості α;

3) вибрати статистику Z критерію для перевірки гіпотези H_0;

4) визначити вибірковий розподіл статистики Z, за умови, що істинною є гіпотеза H_0;

5) залежно від формулювання альтернативної гіпотези визначити критичну область $V_{кр}$ за допомогою однієї з нерівностей $Z > z_{1-\alpha}$, $Z < z_\alpha$ або сукупності двох нерівностей $Z > z_{1-\alpha/2}$, $Z < z_{\alpha/2}$;

6) одержати вибірку спостережень й обчислити вибіркове (фактичне) значення $z_{досл}$ статистики критерію;

7) прийняти статистичне рішення, а саме: якщо $z_{досл} \in V_{кр}$, то відхилити гіпотезу H_0, як таку, що не узгоджується з результатами спостережень; якщо $z_{досл} \in V \setminus V_{кр}$, то прийняти гіпотезу H_0, тобто вважати, що гіпотеза H_0 не суперечить результатам спостережень.

Зауваження. Зазвичай на етапах 4) – 7) використовують відомі статистики, квантилі яких подано таблицями: статистику з нормальним розподілом $N(0;1)$, статистику Стьюдента, статистику χ^2 або статистику Фішера.

Приклад 1. За паспортними даними автомобільного двигуна витрати пального на 100 км пробігу становили 10 л. Після зміни конструкції двигуна очікується, що витрати пального зменшаться. З метою перевірки проводяться випробування 25 випадково відібраних автомобілів з модернізованим двигуном, причому вибіркове середнє витрат пального на 100 км пробігу, за результатами випробувань, становить $\bar{x}_B = 9{,}3$ л. Припустимо, що вибірку витрат пального одержано з нормально розподіленої генеральної сукупності з середнім m та дисперсією $\sigma^2 = 4$л^2. Використовуючи критерій значущості, перевірити гіпотезу, у якій стверджується, що зміна конструкції двигуна не вплинула на витрати пального.

Розв'язання. Перевіряється гіпотеза про середнє (m) нормально розподіленої генеральної сукупності. Перевірку цієї гіпотези проведемо за такою схемою:

1) нульова гіпотеза $H_0 : m = 10$, альтернативна гіпотеза $H_1 : m < 10$;

2) вибираємо рівень значущості $\alpha = 0{,}05$;

3) за статистику критерію обираємо вибіркове середнє $\bar{X}$ (точкову оцінку математичного сподівання);

4) оскільки вибірку одержано з нормально розподіленої генеральної сукупності, то вибіркове середнє теж має нормальний розподіл із дисперсією $\dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{4}{25}$ (див. підрозділ 7.9). За умови, що істинною є гіпотеза H_0, математичне сподівання цього розподілу дорівнює 10. Нормована статистика $U = \dfrac{\bar{X} - 10}{\sqrt{4/25}}$ критерію має нормальний розподіл $N(0; 1)$;

5) альтернативна гіпотеза $H_1 : m < 10$ полягає у зменшенні витрат пального, отже, потрібно використовувати односторонній критерій. Критична область визначається нерівністю $U < u_\alpha$. У силу симетрії графіка функції $\varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$ відносно осі ординат маємо рівність: $u_{0,95} = -u_{0,05}$. Враховуючи, що інтегральна функція статистики U має вигляд

$$F(u) = P(U < u) = \frac{1}{2} + \Phi(u),$$

маємо

$$\Phi(u_{0,95}) = P(U < u_{0,95}) - \frac{1}{2} = 0,95 - 0,5 = 0,45.$$

Отже, $\Phi(u_{0,95}) = 0,45$. З цієї рівності за таблицею додатка Б знаходимо, що $u_{0,95} = 1,645$. Тому, критична точка $u_{0,05} = -u_{0,95} = -1,645$;

6) вибіркова середня статистики U дорівнює

$$u_{досл} = \frac{9,3 - 10}{\sqrt{4/25}} = -1,75 < -1,645 = u_{кр};$$

7) статистичне рішення: оскільки вибіркове значення $u_{досл}$ статистики критерію належить *критичній* області, то гіпотеза H_0 відхиляється. Тобто треба вважати, що зміна конструкції двигуна призвела до зменшення витрат пального.

Граничне значення $\bar{x}_{кр}$ критичної області для вибраної статистики $\bar{X}$ можна одержати з рівності

$$\frac{\bar{x}_{кр} - 10}{\sqrt{4/25}} = -1,645.$$

Звідси одержуємо, що $\bar{x}_{кр} = 9,342$, тобто критична область для статистики $\bar{X}$ визначається нерівністю $\bar{X} < 9,342$.

14.2 Основні статистики, що використовуються під час перевірки гіпотез

Розподіли основних статистик (випадкових величин), які знаходять за вибіркою з нормально розподіленої генеральної сукупності, пов'язані з розподілами χ^2(«хі-квадрат»), Стьюдента (t-розподілом), Фішера-Снедекора (F-розподілом). Частково ці величини було розглянуто в підрозділі 7.6. Квантилі цих розподілів наведено в таблицях додатків Д, Е та Ж. Наведемо ще деякі властивості цих розподілів, що змотивовано їхнім застосуванням під час перевірки статистичних гіпотез.

1. Нехай $X_1, X_2, \; \ldots \; , X_n$ – *незалежні*, нормально розподілені випадкові величини, для яких $M\left(X_i\right) = 0, \; \sigma_{X_i} = 1 \; \left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$.

Тоді кажуть, що випадкова величина

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 =: \chi^2$$

розподілена за *законом* χ^2 (*хі-квадрат*) із n степенями вільності.

Функція щільності розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}, & \text{якщо } x > 0, \end{cases}$$

де $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ – відома гамма-функція, k – число степенів вільності.

Такий розподіл коротко позначаємо через $\chi^2(k)$. Середнє та дисперсія цього розподілу відповідно дорівнюють $M\left(\chi^2(k)\right) = k$, а $D\left(\chi^2(k)\right) = 2k$.

З аналітичної форми запису функції $f_{\chi^2}(x)$ видно, що розподіл «хі-квадрат» визначається лише одним параметром k – числом степенів вільності. Графік функції $f_{\chi^2}(x)$ наведений на рис. 14.4:

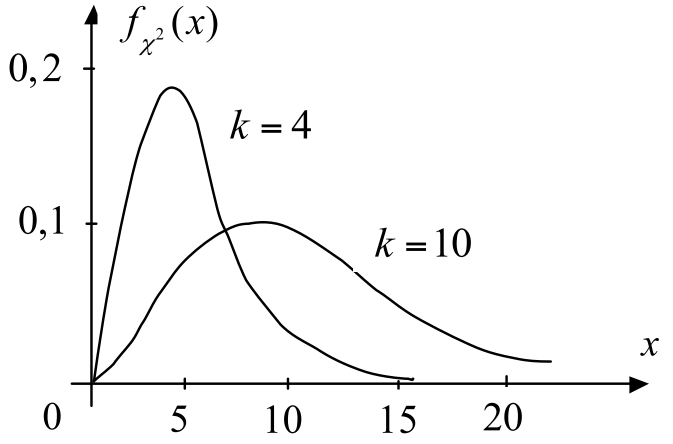


Рис. 14.4

Із збільшенням числа степенів вільності k розподіл χ^2 повільно наближається до нормального.

Розподіл χ^2 часто використовується у статистичних обчисленнях, у зв'язку з наступною теоремою.

Теорема. *Нехай* $x_1, x_2, ..., x_n$ – *вибірка з нормально розподіленої генеральної сукупності* $N(m, \sigma)$, *а* $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$ *та* $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2$ – *відповідно вибіркове середнє та вибіркова дисперсія. Тоді статистики* $\bar{X}$ *та* S^2 – *неза-*

лежні випадкові величини, причому статистика $\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2$ *має розподіл* $\chi^2(n-1)$.

Зазначимо, що коли $\chi^2(k_1)$ та $\chi^2(k_2)$ – незалежні випадкові величини, що мають розподіл χ^2 з k_1 та k_2 степенями вільності відповідно, то сума цих випадкових величин має розподіл χ^2 з k_1+k_2 степенями вільності. Тобто

$$\chi^2(k_1)+\chi^2(k_2)=\chi^2(k_1+k_2).$$

Розподіл $\chi^2(k)$ за великих значень k $(k>30)$ із достатньою для практичних розрахунків точністю апроксимується нормальним розподілом.

Ця властивість використовується для наближеного вираження квантилів $\chi^2_p(k)$ розподілу $\chi^2(k)$ через квантилі u_p нормального розподілу $N(0;1)$. Зазвичай використовують дві такі формули:

$$\chi^2_p(k)\approx\frac{1}{2}\left(u_p+\sqrt{2k-1}\right)^2, \tag{14.1}$$

$$\chi^2_p(k)\approx k\left(1-\frac{2}{9k}+u_p\sqrt{\frac{2}{9k}}\right)^3. \tag{14.2}$$

Рівність (14.1), що використовується при $k\geq 30$ і $p\geq 0,5$, дає відносну похибку в межах 1 %, а рівність (14.2) використовується для обчислення квантилів малого порядку.

2. *Розподілом Стьюдента із* k *степенями вільності* називається розподіл випадкової величини $T(k)$, яка дорівнює відношенню двох незалежних випадкових величин U та $\sqrt{\chi^2(k)/k}$, тобто

$$T(k)=\frac{U}{\sqrt{\chi^2(k)/k}},$$

де U має нормальний розподіл $N(0;1)$. Розподіл випадкової величини $T(k)$ також позначають через $T(k)$. Функція щільності ймовірностей розподілу Стьюдента з k степенями вільності має вигляд:

$$f_T(x)=\frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma(k/2)}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}, \qquad -\infty<x<\infty.$$

Середнє та дисперсія розподілу Стьюдента відповідно дорівнюють

$$M(T(k))=0,\ D(T(k))=\frac{k}{k-2}\quad (k>2).$$

Оскільки графік функції $f_T(x)$ симетричний відносно осі ординат (рис. 14.5), то для квантилів $t_p(k)$ справедлива рівність: $t_p(k)=-t_{1-p}(k)$. Крім того, за великих k $(k>30)$ квантилі $t_p(k)$ розподілу Стьюдента та квантилі u_p нормального розподілу $N(0;1)$ приблизно рівні $t_p(k)\approx u_p$.

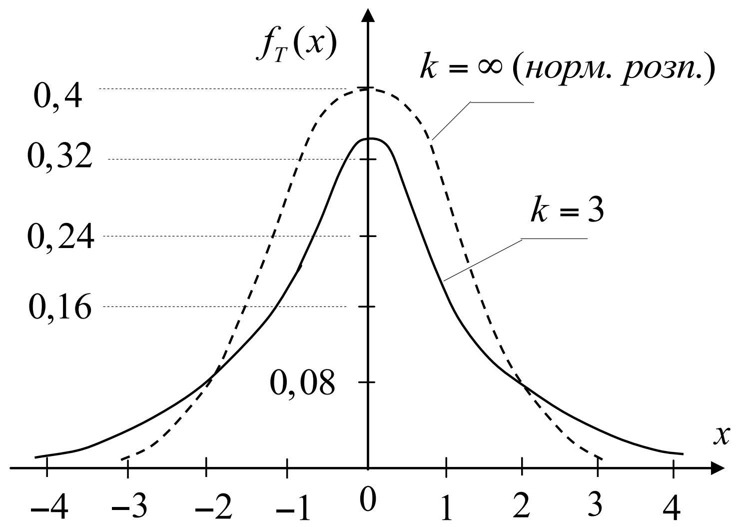


Рис 14.5

Точнішою є наближена рівність:

$$t_p(k)\approx u_p\left(\left(1-\frac{1}{4k}\right)^2-\frac{u_p^2}{2k}\right)^{-1/2}.$$

3. Нехай $\chi^2(k_1)$ та $\chi^2(k_2)$– незалежні випадкові величини. Тоді кажуть, що випадкова величина

$$F(k_1;k_2)=\frac{\chi^2(k_1)/k_1}{\chi^2(k_2)/k_2}$$

розподілена за законом Фішера з k_1 та k_2 степенями вільності.

Середнє розподілу Фішера $M(F)=\dfrac{k_2}{k_2-2}$, $k_2>2$. Квантилі розподілу Фішера порядку p та $1-p$ пов’язані формулою:

$$F_{1-p}(k_1;k_2)=\frac{1}{F_p(k_2;k_1)}.$$

При $k_1 \ge 1$ та $k_2 \ge 1$ квантилі розподілу Фішера, можна обчислити, використовуючи наближену формулу:

$$F_p(k_1;k_2)\approx\frac{k_2}{k_2-2}\sqrt{\frac{2(k_1+k_2-2)}{k_1(k_2-4)}}u_p+\frac{k_2}{k_2-2}.$$

Диференціальна функція цього розподілу зображена на рисунку 14.6 і задається формулою

$$f_F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right)\cdot k_1^{\frac{k_1}{2}}\cdot k_2^{\frac{k_2}{2}}\cdot x^{\frac{k_1-2}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)\left(k_2+k_1x\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, & \text{якщо } x>0.\end{cases}$$

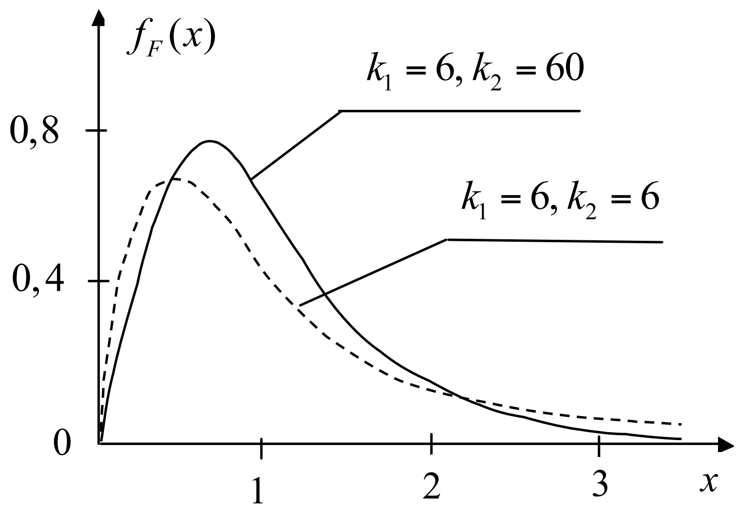


Рис. 14.6.

Зауваження. Випадкові величини, розподілені за нормальним законом $N(0;1)$, за законами χ^2, Стьюдента та Фішера, пов'язані рівностями:

$$T^2(k)=F(1;k),$$

$$F(k;\infty)=\frac{\chi^2(k)}{k},$$

$$\chi^2(1)=U^2.$$

14.3 Помилки першого та другого роду. Потужність критерію

Прийняте статистичне рішення може бути помилковим. При цьому розрізняють так звані *помилки першого* та *другого роду*. Вони можуть бути зумовлені, наприклад, обмеженістю обсягу вибірки.

О з н а ч е н н я 1. *Помилкою першого роду* називається помилка, яка полягає в тому, що основну гіпотезу H_0 відхилено, хоча насправді вона є істинною. Ймовірність помилки першого роду дорівнює ймовірності потрапляння статистики Z критерію в критичну область, за умови, що істинною є гіпотеза H_0, тобто дорівнює рівню значущості α:

$$P_{H_0}\left(Z \in V_{кр}\right) = \alpha.$$

Зокрема, в прикладі 1 (ст. 169) ймовірність помилки першого роду дорівнює 0,05.

О з н а ч е н н я 2. *Помилка другого роду* полягає в тому, що приймається основна гіпотеза H_0, хоча насправді істинною є альтернативна гіпотеза H_1. Ймовірність β помилки другого роду можна обчислити (коли альтернативна гіпотеза H_1 є простою) за формулою:

$$\beta = P_{H_1}\left(Z \in V \setminus V_{кр}\right).$$

Приклад 1. У прикладі 1 (ст. 169) за альтернативну візьмемо гіпотезу H_1: $m = 9$ л. Основна гіпотеза, що перевіряється, $H_0: m = 10$ л. За статистику критерію знову візьмемо вибіркове середнє $\overline{X}$. Нехай критичну область задано нерівністю $\overline{X} < 9{,}44$ л. Знайти ймовірності помилок першого та другого роду для критерію з такою критичною областю.

Розв'язання. Спочатку знайдемо ймовірність помилки першого роду. За умовою $\overline{x}_{кр} = 9{,}44$. Статистика $\overline{X}$ критерію, за умови, що істинною є нульова гіпотеза $H_0: m = 10$, має нормальний розподіл $N\left(10; \sqrt{4/25}\right)$. Оскільки, для нормального розподілу $N(a;\sigma)$ випадкової величини Z інтегральна функція має вигляд:

$$F(z) = P(Z < z) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{z-a}{\sigma}\right), \qquad (14.3)$$

де $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – інтегральна функція Лапласа, то, використовуючи таблицю (додаток Б), знаходимо

$$\alpha = P_{H_0:\, m=10}(\overline{X} < 9,44) = \Phi\left(\frac{9,44-10}{\sqrt{4/25}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \Phi(-1,4) = \frac{1}{2} - \Phi(1,4) \approx 0,08.$$

Це означає, що прийнятий критерій класифікує приблизно 8 % автомобілів, з витратами 10 л на 100 км пробігу, як такі, що мають менші витрати пального.

За умови, що істинною є гіпотеза $H_1: m = 9$, статистика $\overline{X}$ має нормальний розподіл $N\left(9; \sqrt{4/25}\right)$. Ймовірність помилки другого роду дорівнює

$$\beta = P_{H_1:\, m=9}\left(\overline{X} \geq 9,44\right) = 1 - P_{H_1:\, m=9}\left(\overline{X} < 9,44\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \Phi\left[\frac{9,44-9}{\sqrt{4/25}}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \Phi\left[\frac{9,44-9}{\sqrt{4/25}}\right] = \frac{1}{2} - \Phi\left(1,1\right) \approx 0,136.$$

Отже, згідно з прийнятим критерієм, 13,6 % автомобілів, що мають витрати пального 9 л на 100 км пробігу, класифікують як такі, що мають витрати 10 л. Ймовірності помилок першого та другого роду показано у вигляді заштрихованих площ під кривими диференціальних функцій розподілу статистики $\overline{X}$ на рис. 14.7.

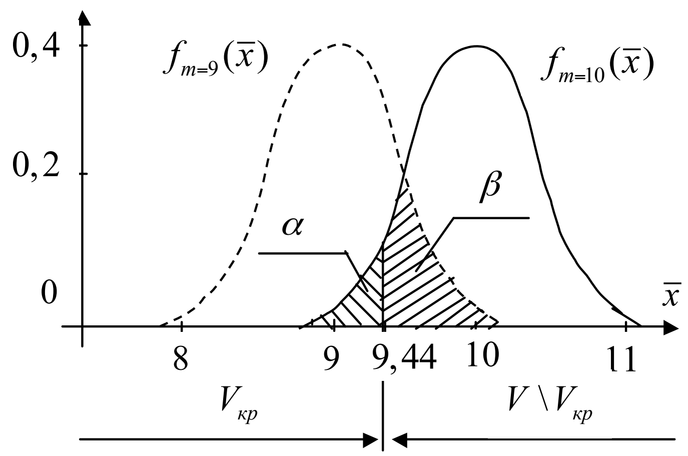


Рис. 14.7

Якщо задано ймовірність α помилки першого роду, то ймовірність помилки другого роду можна зменшити шляхом збільшення обсягу вибірки. Коли при цьому ймовірність помилки другого роду не повинна перевищувати заданого значення β, то мінімальний обсяг вибірки n можна знайти з розв'язку системи:

$$\begin{cases} P_{H_0}\left(Z \in V_{кр}\right) = \alpha \\ P_{H_1}\left(Z \in V \setminus V_{кр}\right) \le \beta. \end{cases}$$

найпростіших випадках можна отримати аналітичний розв'язок цієї системи.

Приклад 2. Яким повинен бути мінімальний обсяг n вибірки в прикладі 1 1 (ст. 69), щоб під час перевірки гіпотези $H_0 : m = 10$ л, за альтернативної гіпотези $H_1 : m = 9$ л, помилка першого роду мала ймовірність $\alpha = 0{,}01$, а ймовірність помилки другого роду не перевищувала $0{,}1$? Якою є критична область у цьому випадку?

Розв'язання. Оскільки альтернативна гіпотеза H_1 включає зменшення значення параметра m,то критична область $V_{кр}$визначається нерівністю: $\bar{X} < \bar{x}_{кр}$.

За умовою задачі, враховуючи (14.3), маємо

$$\begin{cases} P_{H_0:\, m=10}\left(\bar{X} < \bar{x}_{кр}\right) = \dfrac{1}{2} + \Phi\left(\dfrac{\bar{x}_{кр} - 10}{\sqrt{4/n}}\right) = 0{,}01, \\ P_{H_1:\, m=9}\left(\bar{X} \ge \bar{x}_{кр}\right) = 1 - \left(\dfrac{1}{2} + \Phi\left(\dfrac{\bar{x}_{кр} - 9}{\sqrt{4/n}}\right)\right) \le 0{,}1. \end{cases}$$

Звідси, за таблицею (додаток Б),

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{x}_{кр} - 10}{2} \cdot \sqrt{n} = u_{0,49} = -2{,}326, \\ \dfrac{\bar{x}_{кр} - 9}{2} \cdot \sqrt{n} \ge u_{0,4} = 1{,}282. \end{cases}$$

Виключаючи $\bar{x}_{кр}$,знаходимо, що $n \ge 53$. Підставивши найменше значення n у перше рівняння системи, знаходимо граничну точку критичної області

$$\bar{x}_{кр} = 10 - \frac{2 \cdot 2{,}326}{\sqrt{53}} = 9{,}361.$$

Отже, за умов цієї задачі критична область $V_{кр}$визначається нерівністю: $\bar{X} < 9{,}361$.

Зауваження. Ми знову скористалися тим, що коли випадкова величина Z розподілена нормально за законом $N(a;\sigma)$, то її інтегральна функція розподілу має вигляд $F(z) = P(Z < z) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{z-a}{\sigma}\right)$, а випадкова величина $U = \frac{z-a}{\sigma}$ розподілена нормально за законом $N(0;1)$ і має інтегральну функцію розподілу вигляду:

$$F(u) = P(U < u) = \frac{1}{2} + \Phi(u).$$

О з н а ч е н н я 3. *Потужністю критерію* називається ймовірність потрапляння статистики критерію у критичну область, за умови, що справедливою є альтернативна гіпотеза. Іншими словами, потужність критерію – це ймовірність того, що нульову гіпотезу буде відхилено, якщо істинною є альтернативна гіпотеза.

Нехай перевіряється гіпотеза $H_0 : \theta = \theta_0$, а $V_{кр}$ – критична область критерію із заданим рівнем значущості α.

О з н а ч е н н я 4. *Функцією потужності* $\Pi\left(V_{кр}, \theta\right)$ *критерію* називають ймовірність відхилення гіпотези H_0, як функцію параметра θ, тобто

$$\Pi\left(V_{кр}, \theta\right) = P\left(Z \in V_{кр}\right). \qquad (14.4)$$

Якщо θ набуває конкретного значення, то ймовірність відхилення гіпотези H_0 є *потужністю критерію*. Зрозуміло, що $\Pi\left(V_{кр}, \theta_0\right) = \alpha$. Якщо альтернативна гіпотеза є простою, зокрема $H_1 : \theta = \theta_1$, то потужність критерію дорівнює $1 - \beta$, тобто

$$\Pi\left(V_{кр}, \theta_1\right) = 1 - \beta.$$

Здебільшого *графік функції потужності* будують, обчисливши потужність критерію за декількох значень параметра θ.

Приклад 3. Побудувати графік функції потужності критерію в прикладі 1 (ст. 69), якщо використовується:

а) вибірка обсягом $n = 25$;

б) вибірка обсягом $n = 100$.

Розв'язання.

а) Обчислимо потужність критерію за кількох значень параметра m.

Використовуючи (14.2) та дані прикладу 1 $\left(V_{кр} : \bar{X} < 9{,}44,\ \sigma^2 = 4\right)$, коли $n = 25$ маємо

$$\Pi\left(V_{кр}, m\right) = P\left(\bar{X} < 9,44\right) = \Phi\left(\frac{9,44 - m}{\sqrt{4/25}}\right) + \frac{1}{2}.$$

Використовуючи таблицю додатка Б, одержуємо такі значення потужності критерію:

m	$z = \frac{9,44 - m}{\sqrt{4/25}}$	$\Pi\left(V_{кр}, m\right)$
8,50	2,350	0,991
8,75	1,725	0,958
9,00	1,100	0,864
9,25	0,475	0,682
9,50	–0,150	0,440
9,75	–0,775	0,219
10,00	–1,400	0,081

б) Аналогічно, при $n = 100$ одержуємо такі значення потужності критерію:

m	$z = \frac{9,44 - m}{\sqrt{4/100}}$	$\Pi\left(V_{кр}, m\right)$
8,50	4,70	1,000
8,75	3,45	1,000
9,00	2,20	0,986
9,25	0,95	0,829
9,50	–0,30	0,302
9,75	–1,55	0,061
10,00	–2,80	0,003

Графіки функцій потужності наведено на рисунку 14.8.

Критерій для перевірки простої гіпотези $H_0 : \theta = \theta_0$ проти складної альтернативної гіпотези $H_1 : \theta \in \Theta$ називається *незміщеним*, якщо для будь-якого $\theta \in \Theta$ ($\Theta -$ певна множина) функція потужності цього критерію задовольняє умову:

$$\Pi\left(V_{кр}, \theta\right) \geq \alpha, \text{ де } \alpha - \text{рівень значущості критерію.}$$

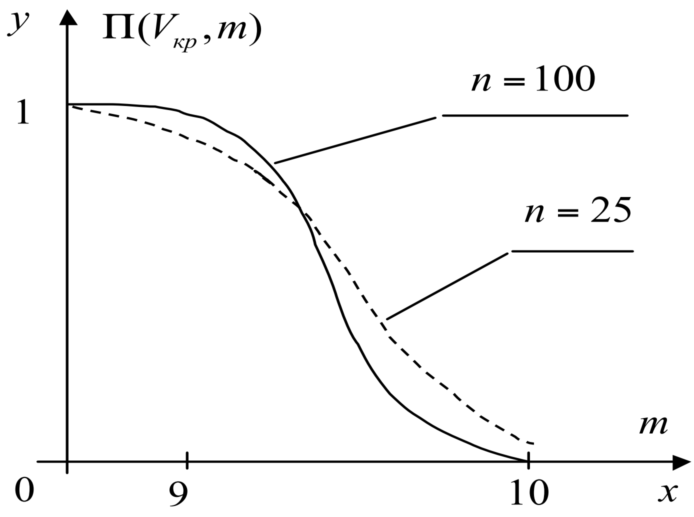


Рис. 14.8

14.4 Перевірка гіпотез на основі довірчих інтервалів

У ряді задач перевірку статистичних гіпотез з використанням критеріїв значущості можна провести з використанням *довірчих інтервалів.* При цьому односторонньому критерію значущості відповідає односторонній довірчий інтервал, а двосторонньому критерію значущості – двосторонній довірчий інтервал. Гіпотеза $H_0 : \theta = \theta_0$ приймається, якщо значення θ_0 покривається відповідним довірчим інтервалом; у протилежному випадку гіпотеза H_0 відхиляється.

Якщо перевіряється гіпотеза $H_0 : \theta_1 = \theta_2$, то розглядається довірчий інтервал для різниці $\theta_1 - \theta_2$. Гіпотеза H_0 приймається, якщо довірчий інтервал для різниці $\theta_1 - \theta_2$ покриває нульове значення. Винятком є перевірка гіпотези про рівність дисперсій $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, оскільки довірчий інтервал будується для відношення дисперсій. У цьому випадку гіпотеза H_0 приймається, коли довірчий інтервал покриває значення, що дорівнює 1.

Приклад 1. Перевіримо у прикладі 1 (ст. 169) гіпотезу $H_0 : m = 10$ л за альтернативної гіпотези $H_1 : m < 10$ л на рівні значущості $\alpha = 0,05$, використовуючи довірчий інтервал для параметра m.

Розв'язання. Знайдемо межу m_2 лівостороннього довірчого інтервалу $(-\infty\, ; m_2)$ для параметра m за довірчої ймовірності $1 - \alpha = 0,95$. Використовуючи вибіркове середнє $\overline{x}_{досл} = 9,3$ та значення квантилю $u_{0,95} = 1,645$, одержуємо

$$m_2 = \overline{x}_{досл} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\alpha} = 9{,}3 + \frac{2}{\sqrt{25}} \cdot 1{,}645 = 9{,}958.$$

(Статистика $U = \dfrac{X - \overline{x}}{\sigma_X}$ має розподіл $N(0;1)$).

Оскільки значення $m = 10$ не покривається інтервалом $(-\infty;\ 9{,}958)$, то гіпотезу H_0 потрібно відхилити, що збігається з результатом прикладу 1 (ст. 169).

14.5 Перевірка гіпотез про параметр p біноміального розподілу

В аналізі статистичних даних, пов'язаних із повторними випробуваннями Бернуллі, здебільшого розглядається два типи задач: зіставлення ймовірності «успіху» p в одному випробуванні із заданим значенням p_0 і зіставлення ймовірностей «успіху» у двох серіях випробувань.

Спочатку зупинимося на першій задачі. Отже, перевіряється гіпотеза H_0 : $p = p_0$. Нехай у n випробуваннях Бернуллі «успіх» стався m разів. За статистику вибираємо відносну частоту $h = m / n$. Тоді, коли $nh > 5$ і $n(1-h) > 5$, то за великих значень n $(n > 50)$ розподіл випадкової величини h дуже близький до нормального розподілу $N(p,\ \sqrt{p(1-p)/n}\ )$. Це означає, що коли гіпотеза H_0 є істинною, то розподіл статистики

$$U = \frac{h - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \tag{14.5}$$

близький до нормального розподілу $N(0;\ 1)$. Тому на рівні значущості α критична область визначається нерівностями :

$u_{досл} > u_{(1-2\alpha)/2}$ за альтернативної гіпотези $H_1^{(1)} : p > p_0$;

$u_{досл} < -u_{(1-2\alpha)/2}$ за альтернативної гіпотези $H_1^{(2)} : p < p_0$;

$|u_{досл}| > u_{(1-\alpha)/2}$ за альтернативної гіпотези $H_1^{(3)} : p \neq p_0$.

У цьому випадку для перевірки гіпотези H_0 можна скористатися також методом довірчих інтервалів для параметра p.

Приклад 1. Вважають, що велика партія деталей містить 15 % браку. З цієї партії навмання відбирають 100 деталей, серед яких виявилося 10 бракованих. Вважаючи, що число бракованих деталей у партії має біноміальний розподіл, і використовуючи двосторонній критерій при $\alpha = 0,05$, перевірити припущення про те, що в партії є 15 % бракованих деталей.

Розв'язання. Перевіряємо гіпотезу $H_0 : p = 0,15$ за альтернативної гіпотези $H_1 : p \neq 0,15$. Значення $h = \frac{10}{100} = 0,1$. Оскільки $n > 50$, $nh = 10$ і $n(1-h) = 9$, то для перевірки гіпотези H_0 можна скористатися статистикою (14.5). Її вибіркове значення

$$u_{досл} = \frac{0,1 - 0,15}{\sqrt{\frac{0,15 \cdot 0,85}{100}}} \approx -1,4.$$

Оскільки $(1-\alpha)/2 = 0,475$, то за таблицею додатка Б знаходимо $u_{0,475} = 1,96$. Значення $|u_{досл}| = 1,4 < u_{кр} = 1,96$ лежить в області прийняття гіпотези H_0, тому припущення про те, що в партії є 15 % браку, узгоджується з результатами спостережень.

Якщо скористатися методом довірчих інтервалів, то виявиться, що двосторонній довірчий інтервал (0,041; 0,159) з надійністю 0,95 покриває значення $p = 0,15$. Отже, гіпотеза H_0 приймається. Іншими словами, відносна частота 10/100 не значуще відрізняється від гіпотетичної ймовірності $p_0 = 0,15$.

Приклад 2. Розглянути попередній приклад за альтернативної гіпотези $H_1 : p < p_0$.

Розв'язання. За умовою, альтернативна гіпотеза має вигляд $p < 0,15$, тому критична область – лівостороння. Спочатку знайдемо «допоміжну» точку – критичну точку симетричної правосторонньої критичної області з рівності:

$$\Phi(u_{кр}) = (1 - 2\alpha)/2 = (1 - 2 \cdot 0,05)/2 = 0,45.$$

За таблицею додатка Б маємо $u_{кр} = u_{(1-2\alpha)/2} = u_{0,45} = 1,645$. Тому лівостороння критична область набуває вигляду: $U < -1,645$. Оскільки

$$u_{досл} = -1,4 > -1,645 = u'_{кр},$$

то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу.

Приклад 3. Партія виробів приймається, коли ймовірність того, що виріб виявиться бракованим не перевищує 0,02. Серед 480 випадково відібраних виробів виявилося 12 не придатних. Чи можна приймати цю партію виробів?

Розв'язання. Нульова гіпотеза $H_0 : p = p_0 = 0,02$. Відносна частота браку $m / n = 12 / 480 = 0,25$.За альтернативну гіпотезу беремо $H_1 : p > 0,02$ і нехай рівень значущості $\alpha = 0,05$.

Користуючись (14.5), знаходимо дослідне значення статистики критерію

$$u_{досл} = \frac{(m/n - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = \frac{(0,025 - 0,02)\cdot\sqrt{480}}{\sqrt{0,02\cdot 0,98}} = 0,78.$$

За умовою альтернативна гіпотеза має вигляд: $p > p_0$, а тому критична область є правосторонньою. Знаходимо критичну точку $u_{кр}$ критичної області з умови $\Phi(u_{кр}) = (1 - 2\cdot 0,05)/2 = 0,45$. За таблицею додатка Б, маємо $u_{кр} = = u_{0,45} = 1,645$. Оскільки $u_{досл} < u_{кр}$, тобто $u_{досл} \in V \setminus V_{кр}$– області допустимих значень, то немає підстав відхиляти гіпотезу про те, що брак в партії не перевищує 0,02. Тому партію можна приймати.

Нехай маємо дві генеральні сукупності незалежних випробувань, у кожному з яких може статися чи не статися деяка випадкова подія A. Нехай у першій сукупності подія A може статися з невідомою ймовірністю p_1, а у другій – з невідомою ймовірністю p_2. За відносними частотами

$$w_1 = \frac{m_1}{n_1}; \;\; p_1 \text{ та } w_2 = \frac{m_2}{n_2}; \;\; p_2,$$

за вибірками, зробленими з першої та другої сукупностей, на рівні значущості α потрібно перевірити нульову гіпотезу, яка полягає в тому, що ймовірності p_1 та p_2 рівні між собою: $H_0 : p_1 = p_2 = p$. Іншими словами, потрібно з'ясувати, випадково чи не випадково відрізняються одна від одної відносні частоти w_1 та w_2. При цьому ми вважаємо, що обсяги n_1 та n_2 вибірок є достатньо великими.

Як критерій для перевірки нульової гіпотези використовуємо випадкову величину

$$U = \frac{\frac{M_1}{n_1} - \frac{M_2}{n_2}}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}, \qquad (14.6)$$

де M_1 та M_2 – випадкові величини, знайдені відповідно за першою та другою вибірками. За справедливості нульової гіпотези величина U розподілена приблизно нормально, для якої математичне сподівання $M(U)=0$ та $\sigma(U)=1$. Оскільки ймовірність p невідома, то виходячи з так званого принципу найбільшої правдоподібності (див. [12]) беремо $p=\dfrac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$, а замість M_1 та M_2 беремо відповідно m_1 та m_2.

У такому разі дослідне значення критерію U знаходимо з рівності:

$$u_{досл}=\frac{\dfrac{m_1}{n_1}-\dfrac{m_2}{n_2}}{\sqrt{\dfrac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\left(1-\dfrac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\right)\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}}. \qquad (14.7)$$

Критична область, як завжди, будується залежно від вигляду альтернативної гіпотези, а саме:

1. Для перевірки на рівні значущості α нульової гіпотези $H_0: p_1=p_2=p$ про рівність ймовірностей появи події у двох генеральних сукупностях (які мають біноміальний розподіл) за альтернативної гіпотези $H_1: p_1 \neq p_2$, обчислюємо $u_{досл}$ за рівністю (14.7). З рівності: $\Phi(u_{кр})=(1-\alpha)/2$ знаходимо $u_{кр}$ за таблицями значень функції $\Phi(x)$ (додаток Б). Якщо $|u_{досл}|<u_{кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $|u_{досл}|>u_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

2. Якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1: p_1>p_2$, то критичну точку $u_{кр}$ правосторонньої критичної області знаходимо з рівності $\Phi(u_{кр})=$ $=(1-2\alpha)/2$. Якщо $u_{досл}<u_{кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $u_{досл}>u_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

3. Якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1: p_1<p_2$, то знаходимо допоміжну критичну точку $u_{кр}$ з рівності $\Phi(u_{кр})=(1-2\alpha)/2$. Потім із рівності $u'_{кр}=-u_{кр}$ знаходимо критичну точку $u'_{кр}$ лівосторонньої критичної області.

Якщо $u_{досл}>u'_{кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $u_{досл}<u'_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

Приклад 4. З першої партії виробів зроблено вибірку обсягом $n_1 = 1000$ виробів, причому $m_1 = 20$ з них виявилися бракованими. З другої партії зроблено вибірку обсягом $n_2 = 900$, причому $m_2 = 30$ з них виявилися бракованими. На рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : p_1 = p_2$ про рівність невідомих ймовірностей p_1 та p_2 браку в першій та другій партіях відповідно, якщо альтернативна гіпотеза має вигляд: $H_1 : p_1 \neq p_2$.

Розв'язання. З рівності (14.7) знаходимо, що $u_{досл} = -1,81$. З рівності: $\Phi(u_{кр}) = (1-\alpha)/2 = 0,475$ за таблицею значень функції $\Phi(x)$ (додаток Б) отримуємо $u_{кр} = 1,96$. Оскільки $|u_{досл}| < u_{кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Іншими словами, ймовірності появи браку в обох партіях відрізняються незначуще (випадково).

14.6 Перевірка гіпотез про значущість вибіркового коефіцієнта кореляції

Нехай за вибіркою обсягу n, зробленою з нормально розподіленої двовимірної генеральної сукупності (X,Y), знайдено вибірковий коефіцієнт кореляції ρ_B, який виявився відмінним від нуля. Але, з огляду на випадковість зробленої вибірки, це ще не означає, що коефіцієнт кореляції генеральної сукупності $\rho_Г$ теж відмінний від нуля, адже у випадку $\rho_Г \neq 0$ можна говорити про лінійну залежність між випадковими величинами X та Y на певному рівні значущості α.

Отже, виникає потреба перевірки на рівні значущості α нульової гіпотези $H_0 : \rho_Г = 0$, за альтернативної гіпотези $H_1 : \rho_Г \neq 0$. Для розв'язання цієї задачі використовують критерій

$$T = \frac{\rho_B}{\sqrt{(1-\rho_B^2)/(n-2)}}. \qquad (14.8)$$

Випадкова величина T розподілена за законом Стьюдента з $k = n-2$ степенями вільності.

Вигляд альтернативної гіпотези $H_1 : \rho_Г \neq 0$ визначає двосторонню критичну область.

Таким чином, для перевірки на рівні значущості α нульової гіпотези H_0 :

$\rho_Г = 0$ про рівність нулеві генерального коефіцієнта кореляції при альтернативній гіпотезі $H_1 : \rho_Г \neq 0$, потрібно за формулою (14.8) знайти дослідне значення $t_{досл}$ і за таблицею критичних значень розподілу Стьюдента, за заданим рівнем значущості α і числом степенів вільності $k = n - 2$ знайти критичну точку $t_{кр}(\alpha; k)$ двосторонньої критичної області.

Тоді якщо $|t_{досл}| < t_{кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $|t_{досл}| > t_{кр}$, то нульову гіпотезу потрібно відхилити.

Приклад 1. За вибіркою обсягу $n = 123$, зробленою з нормальної двовимірної сукупності, знайдено вибірковий коефіцієнт кореляції $\rho_B = 0,4$. На рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : \rho_Г = 0$ за альтернативної гіпотези $H_1 : \rho_Г \neq 0$.

Розв'язання. Знаходимо дослідне значення критерію

$$t_{досл} = \frac{\rho_B}{\sqrt{(1-\rho_B^2)/(n-2)}} = \frac{0,4 \cdot 11}{\sqrt{1-0,16}} = \frac{4,4}{0,92} = 4,78.$$

Альтернативна гіпотеза визначає двосторонню критичну область.
За рівнем значущості $\alpha = 0,05$ та числом степенів вільності $k = n - 2 = 121$ за таблицею додатка Е знаходимо критичну точку двосторонньої критичної області $t_{кр}(0,05;121) = 1,96$.

Оскільки $4,78 = t_{досл} > t_{кр} = 1,96$, то нульову гіпотезу відхиляємо. Це означає, що вибірковий коефіцієнт кореляції значуще (не випадково) відрізняється від нуля, тобто випадкові величини X та Y корельовані.

Розглянемо іншу задачу.

Нехай ρ_{B_1} та ρ_{B_2} – вибіркові коефіцієнти кореляції, знайдені за вибірками обсягів n_1 та n_2 з генеральних сукупностей, що мають двовимірний нормальний розподіл. Для перевірки нульової гіпотези про рівність генеральних коефіцієнтів кореляції $\rho_{Г_1}$ та $\rho_{Г_2}$ обох генеральних сукупностей $H_0 : \rho_{Г_1} = \rho_{Г_2}$ використовують статистику

$$U = \frac{Arth\rho_{B_1} - Arth\rho_{B_2}}{\sqrt{1/(n_1-3) + 1/(n_2-3)}}. \tag{14.9}$$

За умови, що гіпотеза H_0 істинна, статистика (14.9) має розподіл, близький до нормального $N(0,1)$. Критична область цього критерію на рівні значущості α визначається нерівностями:

$u_{досл} > u_{1/2-\alpha}$ за альтернативної гіпотези $H_1 : \rho_{Г_1} > \rho_{Г_2}$;

$u_{досл} < -u_{1/2-\alpha}$ за альтернативної гіпотези $H_1 : \rho_{Г_1} < \rho_{Г_2}$;

$|u_{досл}| > u_{(1-\alpha)/2}$ за альтернативної гіпотези $H_1 : \rho_{Г_1} \neq \rho_{Г_2}$.

Зауваження 1. Функція $z = Arth\rho$ обернена відносно функції $\rho = thz$. Значення цих функцій можна знайти за таблицею додатка К.

Зауваження 2. Для перевірки гіпотези $H_0 : \rho_Г = \rho_0$, де ρ_0 – деяке число, використовують статистику

$$U = \frac{Arth\rho_B - Arth\rho_0}{1/\sqrt{(n-3)}}. \tag{14.10}$$

Якщо гіпотеза H_0 істинна, то розподіл (14.10) близький до нормального $N(0;1)$.

Критична область цього критерію на рівні значущості α визначається нерівностями, такими самими, як і для статистики (14.9).

Приклад 2. Нехай для двох нормально розподілених генеральних сукупностей зроблено вибірки. Для першої вибірки обсягом $n_1 = 28$ вибірковий коефіцієнт кореляції $\rho_{B_1} = 0,77$, а для другої вибірки обсягом $n_2 = 33$, $\rho_{B_2} =$ $= 0,604$. Зіставити $\rho_{Г_1}$ та $\rho_{Г_2}$ на рівні значущості $\alpha = 0,1$.

Розв'язання. Нульова гіпотеза $H_0 : \rho_{Г_1} = \rho_{Г_2}$ за альтернативної H_1 : $\rho_{Г_1} \neq \rho_{Г_2}$. Дослідне значення статистики (14.9) дорівнює

$$u_{досл} = \frac{Arth0,77 - Arth0,604}{\sqrt{1/(28-3) + 1/(33-3)}} = 1,85.$$

Критична точка двосторонньої критичної області

$$u_{кр} = u_{(1-\alpha)/2} = u_{0,45} \approx 1,645.$$

Оскільки $u_{досл} = 1,85$ належить критичній області, то коефіцієнти кореляції $\rho_{Г_1}$ та $\rho_{Г_2}$ двох генеральних нормально розподілених сукупностей варто відрізняти.

14.7 Перевірка гіпотез про рівність дисперсій нормально розподілених генеральних сукупностей

Спочатку порівнюватимемо лише дві дисперсії.

За незалежними вибірками, обсяги яких n_1 та n_2, зробленими з нормально розподілених генеральних сукупностей, знайдено незміщені вибіркові дисперсії s_X^2 та s_Y^2. Потрібно порівняти ці дисперсії.

1. Для того, щоб на заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій нормально розподілених сукупностей за альтернативної гіпотези $H_1 : D(X) > D(Y)$, потрібно обчислити дослідне значення критерію

$$F_{досл} = \frac{s_Б^2}{s_М^2},$$

де $s_Б^2$ – більша, а $s_М^2$ – менша з дисперсій s_X^2 та s_Y^2.

За таблицею критичних точок розподілу Фішера-Снедекора за заданим рівнем значущості α та числом степенів вільності $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$ (k_1– число степенів вільності більшої незміщеної дисперсії, k_2– меншої дисперсії) знайти критичну точку $F_{кр}(\alpha; k_1; k_2)$. Якщо $F_{досл} < F_{кр}$,то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $F_{досл} > F_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

2. Якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : D(X) \neq D(Y)$,то критичну точку $F_{кр}(\alpha / 2; k_1; k_2)$ шукаємо за рівнем значущості $\alpha / 2$ та числом степенів вільності $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$ (k_1– число степенів вільності більшої незміщеної дисперсії). Якщо $F_{досл} < F_{кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $F_{досл} > F_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

Приклад 1. З двох нормально розподілених генеральних сукупностей X та Y зроблено вибірки обсягів $n_1 = 11$ та $n_2 = 14$, а також знайдено незміщені вибіркові дисперсії $s_X^2 = 0,76$ і $s_Y^2 = 0,38$. За рівнем значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій, якщо альтернативна гіпотеза $H_1 : D(X) > D(Y)$.

Розв'язання. Відношення більшої незміщеної дисперсії до меншої дорівнює $F_{досл} = 0,76 / 0,38 = 2$. Оскільки альтернативна гіпотеза має вигляд

$H_1 : D(X) > D(Y)$, то критична область є правосторонньою. За таблицею додатка Ж, за рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ і числами степенів вільності $k_1 = n_1 - 1 = 11 - 1 = 10$ та $k_2 = n_2 - 1 = 14 - 1 = 13$ знаходимо критичну точку $F_{кр}(0{,}05;\, 10;\, 13) = 2{,}67$.

Оскільки $F_{досл} < F_{кр}$, то гіпотеза про рівність дисперсій генеральних сукупностей приймається. Іншими словами, вибіркові незміщені дисперсії відрізняються незначуще.

Приклад 2. З двох нормально розподілених генеральних сукупностей X та Y зроблено вибірки обсягів $n_1 = 14$ та $n_2 = 10$, а також знайдено незміщені вибіркові дисперсії $s_X^2 = 0{,}84$ і $s_Y^2 = 2{,}52$. На рівні значущості $\alpha = 0{,}1$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій, якщо альтернативна гіпотеза $H_1 : D(X) \neq D(Y)$.

Розв'язання. Відношення більшої незміщеної дисперсії до меншої дорівнює $F_{досл} = 2{,}52 / 0{,}84 = 3$. Оскільки альтернативна гіпотеза має вигляд: $H_1 : D(X) \neq D(Y)$, то критична область є двосторонньою. За таблицею додатка Ж, за рівнем значущості $\alpha / 2 = 0{,}1 / 2 = 0{,}05$ і числами степенів вільності $k_1 = n_1 - 1 = 10 - 1 = 9$ та $k_2 = n_2 - 1 = 14 - 1 = 13$ знаходимо критичну точку $F_{кр}(0{,}05;\, 9;\, 13) = 2{,}72$.

Оскільки $F_{досл} > F_{кр}$, то гіпотеза про рівність дисперсій генеральних сукупностей відхиляється.

Тепер *порівнюватимемо декілька дисперсій нормально розподілених генеральних сукупностей за вибірками однакового обсягу*.

Нехай генеральні сукупності $X_1, X_2, ..., X_l$ розподілені нормально. З кожної сукупності зроблено незалежні вибірки обсягом n і за ними знайдено незміщені вибіркові дисперсії $s_1^2, s_2^2, ..., s_l^2$, кожна з яких має однакове число степенів вільності $k = n - 1$. На рівні значущості α потрібно перевірити нульову гіпотезу про однорідність дисперсій, тобто гіпотезу про рівність між собою генеральних дисперсій:

$$H_0 : D(X_1) = D(X_2) = ... = D(X_l).$$

За критерій перевірки нульової гіпотези беремо *критерій Кочрена* − відношення максимальної незміщеної дисперсії до суми всіх незміщених дисперсій:

$$G = \frac{s_{\max}^2}{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_l^2}.$$

Розподіл випадкової величини G залежить лише від числа степенів вільності $k = n-1$ та кількості вибірок l. Для перевірки нульової гіпотези будується правостороння критична область.

Зауваження 1. Зрозуміло, що величина G не зміниться, якщо всі незміщені дисперсії помножити на одне й те саме стале число.

Для того, щоб на заданому рівні значущості α перевірити гіпотезу про однорідність дисперсій нормально розподілених генеральних сукупностей, потрібно обчислити дослідне значення критерію

$$G_{досл} = \frac{s_{\max}^2}{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_l^2}$$

і за таблицею критичних точок розподілу Кочрена (додаток М) знайти критичну точку $G_{кр}(\alpha; k; l)$. Якщо $G_{досл} < G_{кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $G_{досл} > G_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

Зауваження 2. За умови однорідності дисперсій незалежних вибірок однакового обсягу за точкову оцінку генеральної дисперсії приймають середнє арифметичне незміщених вибіркових дисперсій.

Приклад 3. За чотирма незалежними вибірками однакового обсягу $n = 11$, зробленими з нормально розподілених генеральних сукупностей, знайдено незміщені вибіркові дисперсії: $s_1^2 = 0,20$, $s_2^2 = 0,26$, $s_3^2 = 0,35$, $s_4^2 = 0,39$.

На рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу про однорідність дисперсій (критична область − правостороння) та зробити точкову оцінку генеральної дисперсії.

Розв'язання. Дослідне значення критерію Кочрена дорівнює

$$G_{досл} = \frac{s_{\max}^2}{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2} = \frac{0,39}{1,20} = 0,325.$$

За таблицею критичних точок розподілу Кочрена (додаток М) на рівні значущості $\alpha = 0,05$, за числом степенів вільності $k = n - 1 = 11 - 1 = 10$ та числом вибірок $l = 4$ знаходимо критичну точку $G_{кр}(0,05; 10; 4) = 0,4884$.

Оскільки $G_{досл} < G_{кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Тобто, вибіркові дисперсії відрізняються незначуще.

У силу того, що однорідність дисперсій з'ясовано, за точкову оцінку генеральної дисперсії беремо середнє арифметичне незміщених дисперсій:

$$D_Г^* = \frac{0,20+0,26+0,35+0,39}{4} = 0,3.$$

14.8 Перевірка гіпотези про рівність незміщеної вибіркової дисперсії та гіпотетичної генеральної дисперсії нормальної сукупності

Нехай за вибіркою обсягом n знайдено незміщену дисперсію s^2.

1. Для перевірки на заданому рівні значущості α нульової гіпотези $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ про рівність невідомої генеральної дисперсії σ^2 та гіпотетичного значення σ_0^2 за альтернативної гіпотези $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$, обчислюємо значення статистики критерію

$$\chi^2_{досл} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}.$$

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 (додаток Д), за заданим рівнем значущості α та числом степенів вільності $k = n-1$ знаходимо критичну точку $\chi^2_{кр}(\alpha;k)$.

Якщо $\chi^2_{досл} < \chi^2_{кр}(\alpha;k)$, то нульову гіпотезу приймають. Якщо $\chi^2_{досл} >$ $\chi^2_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

2. Якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, то критична область є двосторонньою, а тому знаходимо ліву $\chi^2_{ліва\ кр}(1-\alpha/2;\ k)$ та праву $\chi^2_{права\ кр}(\alpha/2;k)$ критичні точки.

Якщо

$$\chi^2_{ліва\ кр}(1-\alpha/2;\ k) < \chi^2_{досл} < \chi^2_{права\ кр}(\alpha/2;\ k),$$

то нульову гіпотезу приймають.

Якщо

$$\chi^2_{досл} < \chi^2_{ліва\ кр} \text{ або } \chi^2_{досл} > \chi^2_{права\ кр},$$

то нульову гіпотезу відхиляють.

3. Коли альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$, то знаходимо критичну точку $\chi^2_{кр}(1-\alpha; k)$.

Якщо $\chi^2_{досл} > \chi^2_{кр}(1-\alpha; k)$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу.

Якщо $\chi^2_{досл} < \chi^2_{кр}(1-\alpha; k)$, то нульову гіпотезу відхиляють.

Зауваження. Якщо число степенів вільності $k > 30$, то критичну точку $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$ можна знайти з рівності: $\chi^2_{кр}(\alpha; k) = k\left[1 - 2/(9k) + z_0\sqrt{2/(9k)}\right]^3$, де z_α знаходять за таблицею додатка Б за умови, що $\Phi(z_\alpha) = (1-2\alpha)/2$ ($\Phi(z)$ – інтегральна функція Лапласа). Це пояснюється тим, що у разі $k > 30$ розподіл $\chi^2_{кр}(k)$ досить близький до нормального.

Приклад 1. З нормально розподіленої генеральної сукупності зроблено вибірку обсягом $n = 21$. За цією вибіркою знайдено незміщену вибіркову дисперсію $s^2 = 16{,}2$. Перевірити на рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ нульову гіпотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 15$, якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : \sigma^2 > 15$.

Розв'язання. Дослідне значення критерію

$$\chi^2_{досл} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(21-1)\cdot 16{,}2}{15} = 21{,}6.$$

Оскільки альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : \sigma^2 > 15$, то критична область є правосторонньою. За таблицею додатка Д, за рівнем значущості $0{,}01$ та числом степенів вільності $k = n - 1 = 21 - 1 = 20$ знаходимо критичну точку $\chi^2_{кр}(0{,}01;\ 20) = 37{,}6.$

У силу того, що $\chi^2_{досл} < \chi^2_{кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу про рівність генеральної дисперсії та гіпотетичного значення $\sigma_0^2 = 15$. Тобто, різниця між незміщеною дисперсією $s^2 = 16{,}2$ та гіпотетичною генеральною дисперсією $\sigma^2 = 15$ є незначущою.

Приклад 2. Точність роботи верстата-автомата перевіряється за дисперсією контрольованого розміру виробів, яка не повинна перевищувати $\sigma_0^2 = 0{,}1$. Результати вимірювань 25 випадково відібраних виробів подають таблицею:

Розмір виробу (x_i)	3,0	3,5	3,8	4,4	4,5
Частота (n_i)	2	6	9	7	1

На рівні значущості 0,05 перевірити, чи забезпечує верстат потрібну точність.

Розв'язання. Нульова гіпотеза $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0{,}1$. За альтернативну беремо гіпотезу $H_1 : \sigma^2 > 0{,}1$.

В обчисленні незміщеної вибіркової дисперсії для зручності переходимо до умовних варіант $u_i = 10x_i - 39$ (бо 3,9 є приблизно серединою варіаційного ряду), отримуючи такий ряд розподілу частот:

u_i	–9	–4	–1	5	6
n_i	2	6	9	7	1

Знаходимо допоміжну незміщену дисперсію вибірки умовних варіант

$$s_U^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_i u_i^2 - \left[\sum_{i=1}^{5} n_i u_i\right]^2 / 25}{25-1} = 19{,}75.$$

Враховуючи властивості дисперсії, знаходимо незміщену дисперсію $s_X^2 = s_U^2 / (10)^2 = 19{,}75/100 = 0{,}2$. Тоді дослідне значення статистики критерію дорівнює

$$\chi^2_{досл} = \frac{(n-1)s_X^2}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1)\cdot 0{,}2}{0{,}1} = 48.$$

Альтернативна гіпотеза $H_1 : \sigma^2 > 0{,}1$ визначає правосторонню критичну область.

За таблицею додатка Д знаходимо критичну точку $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 24) = 36{,}4$. Оскільки $\chi^2_{досл} = 48 > 36{,}4 = \chi^2_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляємо. Це означає, що верстат не забезпечує потрібної точності й вимагає налагодження.

14.9 Перевірка гіпотези про рівність двох середніх для нормально розподілених генеральних сукупностей, дисперсії яких відомі (за великих незалежних вибірок)

Нехай n та m обсяги великих ($n > 30, m > 30$) незалежних вибірок, за якими знайдено відповідні вибіркові середні $\overline{x}$ та $\overline{y}$, а генеральні дисперсії $D(X), D(Y)$– відомі. Тоді:

1. Для перевірки на заданому рівні значущості нульової гіпотези H_0 : $M(X) = M(Y)$ про рівність математичних сподівань (генеральних середніх) двох нормально розподілених генеральних сукупностей з відомими дисперсіями (у разі великих вибірок) за альтернативної гіпотези $H_1: \ M(X) \neq M(Y)$ знаходимо дослідне значення критерію

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}}.$$

За таблицею значень функції Лапласа (додаток Б) знаходимо критичну точку $z_{кр}$ з рівності $\Phi(z_{кр}) = (1-\alpha)/2$.

Якщо $|z_{досл}| > z_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють. Якщо $|z_{досл}| < z_{кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу.

2. Якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : M(X) > M(Y)$, то за тією ж таблицею критичну точку $z_{кр}$ знаходимо з рівності:

$$\Phi(z_{кр}) = (1-2\alpha)/2. \qquad (14.11)$$

У випадку, коли $z_{досл} < z_{кр}$– немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Коли $z_{досл} > z_{кр}$– нульову гіпотезу відхиляють.

3. Якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : M(X) < M(Y)$, то за тією ж таблицею знаходимо «допоміжну» критичну точку $z_{кр}$ з рівності (14.11). Коли $z_{досл} > -z_{кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Коли $z_{досл} < -z_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

Приклад 1. За двома незалежними вибірками, обсяги яких дорівнюють $n = 40, m = 50$, зробленими з нормальних генеральних сукупностей, знайдено вибіркові середні $\overline{x} = 130$ та $\overline{y} = 140$. Генеральні дисперсії дорівнюють:

$D(X) = 80, D(Y) = 100$. На рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$ за альтернативної гіпотези $H_1 : M(X) \neq M(Y)$.

Розв'язання. Емпіричне значення статистики критерію

$$z_{досл} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}} = \frac{130 - 140}{\sqrt{80/40 + 100/50}} = -5.$$

Альтернативна гіпотеза визначає двосторонню критичну область.

Праву критичну точку знаходимо з рівності:

$$\Phi(z_{кр}) = (1-\alpha)/2 = (1-0,01)/2 = 0,495.$$

За таблицею додатка Б знаходимо $z_{кр} = 2,58$.

Оскільки $|z_{досл}| > z_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляємо. Це означає, що вибіркові середні відрізняються значуще (не випадково).

14.10 Перевірка гіпотези про рівність двох середніх для генеральних сукупностей, дисперсії яких невідомі та однакові (за малих незалежних вибірок)

Нехай n та m обсяги малих ($n < 30, m < 30$) незалежних вибірок, за якими знайдено відповідні вибіркові середні $\bar{x}$ і $\bar{y}$ та незміщені вибіркові дисперсії s_X^2 та s_Y^2. Генеральні дисперсії $D(X), D(Y)$ хоча й невідомі, але вважаються рівними. Тоді:

1. Для перевірки на заданому рівні значущості нульової гіпотези H_0 : $M(X) = M(Y)$ про рівність математичних сподівань (генеральних середніх) двох нормально розподілених генеральних сукупностей з невідомими, але однаковими дисперсіями (у випадку малих незалежних вибірок) при альтернативній гіпотезі $H_1 :\ M(X) \neq M(Y)$ знаходимо дослідне значення $t_{досл}$ критерію

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}.$$

За таблицею критичних точок розподілу Стьюдента (верхній рядок таблиці додатка Е), за заданим рівнем значущості α та числом степенів вільності $k = n + m - 2$ знаходимо критичну точку $t_{двост.кр}(\alpha; k)$.

Якщо $|t_{досл}| < t_{двост.кр}(\alpha; k)$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $|t_{досл}| > t_{двост.кр}(\alpha; k)$, то нульову гіпотезу відхиляють.

2. Якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : M(X) > M(Y)$, то за рівнем значущості α, за таблицею додатка Е (нижній рядок) та числом степенів вільності $k = n + m - 2$ знаходимо критичну точку $t_{правост.кр}(\alpha; k)$.

Якщо $| t_{досл} | < t_{правост.кр}(\alpha; k)$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $| t_{досл} | > t_{правост.кр}(\alpha; k)$, то нульову гіпотезу відхиляють.

3. Якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : M(X) < M(Y)$, то аналогічно знаходимо «допоміжну» критичну точку $t_{правост.кр}(\alpha; k)$, а потім покладаємо $t_{лівост.кр}(\alpha; k) = -t_{правост.кр}(\alpha; k)$. Коли $t_{досл} > -t_{правост.кр}(\alpha; k)$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Коли $t_{досл} < -t_{правост.кр}(\alpha; k)$, то нульову гіпотезу відхиляють.

Приклад 1. За двома незалежними малими вибірками, обсяги яких дорівнюють $n = 12, m = 18$, зробленими з нормально розподілених генеральних сукупностей X та Y, знайдено вибіркові середні $\overline{x} = 31,2$, $\overline{y} = 29,2$ та незміщені вибіркові дисперсії $s_X^2 = 0,84$ і $s_Y^2 = 0,40$. На рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$ за альтернативної гіпотези $H_1 : M(X) \neq M(Y)$.

Розв'язання. Незміщені вибіркові дисперсії $s_X^2 = 0,84$ та $s_Y^2 = 0,40$ є різними, тому попередньо перевіримо гіпотезу про рівність генеральних дисперсій, використовуючи критерій Фішера-Снедекора.

Знаходимо відношення більшої дисперсії до меншої:

$$F_{досл} = 0,84 / 0,40 = 2,1.$$

Оскільки $s_X^2 > s_Y^2$, то за альтернативну вибираємо гіпотезу $H_1 : D(X) > D(Y)$. Це визначає правосторонню критичну область. За таблицею додатка Ж, за рівнем значущості $\alpha = 0,05$ і числами степенів вільності $k_1 = n - 1 = 12 - 1 = 11$ та $k_2 = m - 1 = 18 - 1 = 17$ знаходимо критичну точку $F_{кр}(0,05; 11; 17) = 2,41$.

Оскільки $F_{досл} < F_{кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій. Припущення про рівність генеральних дисперсій виконується, залишається порівняти середні.

Обчислюємо дослідне значення критерію Стьюдента

$$t_{досл} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}} = 7{,}1.$$

Оскільки альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : M(X) \neq M(Y)$, то критична область є двосторонньою. За рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ та числом степенів вільності $k = n + m - 2 = 12 + 18 - 2 = 28$ знаходимо за таблицею додатка Е критичну точку $t_{двост.кр}(0{,}05;\ 28) = 2{,}05$.

У силу того, що $t_{досл} = 7{,}1 > t_{двост.кр} = 2{,}05$, то нульову гіпотезу про рівність середніх відхиляємо. Отже, вибіркові середні відрізняються значуще.

14.11 Перевірка гіпотези про рівність двох середніх для генеральних сукупностей, дисперсії яких невідомі та неоднакові (за малих незалежних вибірок)

На прикладах покажемо, як перевіряються гіпотези про рівність середніх та дисперсій декількох генеральних сукупностей:

Приклад 1. Під час вимірювання продуктивності двох агрегатів одержано такі результати (у кг речовини за годину роботи).

Номер вимірювання	1	2	3	4	5
Агрегат **A**	14,1	10,1	14,7	13,7	14,0
Агрегат **B**	14,0	14,5	13,7	12,7	14,1

Чи можна вважати, що продуктивність агрегатів **A** і **B** однакова, якщо припустити, що обидві вибірки, одержано з нормально розподілених генеральних сукупностей? Покласти $\alpha = 0{,}1$.

Розв'язання. На рівні значущості $\alpha = 0{,}1$ перевіряється гіпотеза H_0 : $\overline{x}_A = \overline{x}_B$ за альтернативної гіпотези $H_1 : \overline{x}_A \neq \overline{x}_B$. Обчислюємо точкові оцінки середніх та дисперсій $\overline{x}_A = 13{,}32$, $\overline{x}_B = 13{,}80$, $s_A^2 \approx 3{,}37$, $s_B^2 \approx 0{,}46$.

Незміщені вибіркові дисперсії $s_A^2 = 3{,}37$ та $s_B^2 = 0{,}46$ є різними, тому попередньо перевіримо гіпотезу про рівність генеральних дисперсій, використовуючи критерій Фішера-Снедекора.

Знаходимо відношення більшої дисперсії до меншої:

$$F_{досл} = 3{,}37 / 0{,}46 = 7{,}33.$$

За альтернативну вибираємо гіпотезу $H_1 : D_A \neq D_B$. Це визначає двосторонню критичну область. За таблицею (додаток Ж), за рівнем значущості $\alpha / 2 = = 0,05$ і числом степенів вільності $k_1 = k_A = 5 - 1 = 4$ та $k_2 = k_B = 5 - 1 = 4$ знаходимо критичну точку $F_{кр}(\alpha / 2; k_1 - 1; k_2 - 1) = F_{кр}(0,05; 4; 4) = 6,39$. Оскільки $F_{досл} > F_{кр}$, то нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій D_A та D_B відхиляємо.

Для перевірки гіпотези про рівність середніх використовують статистику

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s_1^2 / n_1 + s_2^2 / n_2}},$$

де число степенів вільності

$$k = \frac{\left(s_1^2 / n_1 + s_2^2 / n_2\right)^2}{\frac{\left(s_1^2 / n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2 / n_2\right)^2}{n_2 - 1}}.$$

Альтернативна гіпотеза визначає двосторонню критичну область. Тому область прийняття нульової гіпотезі $H_0 : \bar{x}_A = \bar{x}_B$ визначається умовою: $| T | < t_{правост.кр}(\alpha / 2; k)$.

Обчислимо вибіркове значення статистики критерію:

$$t_{досл} = \frac{\left|\bar{x}_A - \bar{x}_B\right|}{\sqrt{s_A^2 / n_A + s_B^2 / n_B}} = \frac{\left|13,32 - 13,80\right|}{\sqrt{\frac{3,37}{5} + \frac{0,46}{5}}} \approx 0,55.$$

Число степенів вільності

$$k = \frac{\left(\frac{3,37}{5} + \frac{0,46}{5}\right)^2}{\frac{\left(\frac{3,37}{5}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{0,46}{5}\right)^2}{4}} \approx 5\cdot$$

Оскільки за таблицею додатка Е $t_{кр}\left(0,05; 5\right) = 2,57$, а отже $| t_{досл} | < t_{кр}$, то гіпотеза про рівність середніх приймається.

14.12 Перевірка гіпотези про рівність двох середніх для нормальних генеральних сукупностей з невідомими дисперсіями (залежні вибірки)

Нехай з двох нормально розподілених генеральних сукупностей X та Y зроблено вибірки однакового обсягу n, варіанти яких відповідно позначимо через x_i та y_i. Нехай, також, дисперсії $D(X)$ та $D(Y)$ є невідомими. Позначимо через: $d_i = (x_i - y_i)$ – різниці варіант з однаковими номерами;

$\bar{d} = \sum d_i / n$ – середню різницю варіант з однаковими номерами;

$s_d = \sqrt{\dfrac{\sum d_i^2 - \left[\sum d_i\right]^2 / n}{n-1}}$ – незміщене середнє квадратичне відхилення.

Тоді, щоб на заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0 : M(\bar{X}) = M(\bar{Y})$ про рівність двох середніх для нормальних сукупностей X та Y з невідомими дисперсіями (у випадку залежних вибірок однакового обсягу) за альтернативної гіпотези $H_1 : M(\bar{X}) \neq M(\bar{Y})$, потрібно знайти дослідне значення статистики критерію

$$T = \frac{\bar{d}\sqrt{n}}{s_d}.$$

Потім за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента, за заданим рівнем значущості α та числом степенів вільності $k = n - 1$ знаходимо критичну точку $t_{двост.кр}(\alpha; k)$ двосторонньої критичної області. Якщо $|t_{досл}| < t_{двост.кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $|t_{досл}| > t_{двост.кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

Приклад 1. Шість деталей вимірюються двома приладами в одному й тому самому порядку. В результаті цього отримано результати (в сотих частках міліметра):

$$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10.$$
$$y_1 = 10, y_2 = 3, y_3 = 6, y_4 = 1, y_5 = 7, y_6 = 4.$$

На рівні значущості $\alpha = 0,05$ з’ясувати, чи значуще відрізняються результати вимірювань різними приладами, якщо вважати, що результати розподілені нормально.

Розв’язання. Знаходимо різниці $d_i = x_i - y_i$:

$$d_1 = -8, d_2 = 0, d_3 = -1, d_4 = 5, d_5 = 1, d_6 = 6.$$

Вибіркова середня $\bar{d} = \sum d_i / n = 3/6 = 0,5$. Оскільки

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \left[\sum d_i\right]^2 / n}{n-1}} = \sqrt{\frac{127 - 9/6}{6-1}} = \sqrt{25,1},$$

то дослідне значення статистики критерію

$$t_{досл} = \frac{\bar{d}\sqrt{n}}{s_d} = \frac{0,5 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{25,1}} = 0,24.$$

За таблицею критичних точок розподілу Стьюдента (додаток Е), за заданим рівнем значущості $\alpha = 0,05$ та числом степенів вільності $k = n - 1 = 6 - 1 = 5$ знаходимо критичну точку $t_{двост.кр}(0,05;\ 5) = 2,57$.

Оскільки $t_{досл} < t_{двост.кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Тобто результати вимірювань за допомогою двох різних приладів відрізняються незначуще.

14.13 Перевірка гіпотези про рівність вибіркової середньої та гіпотетичної генеральної середньої для нормальної сукупності

Перший випадок: дисперсія генеральної сукупності відома.

1. Для того, щоб на заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0$ про рівність генеральної середньої a для нормально розподіленої сукупності з відомою дисперсією σ^2 та гіпотетичного (пропонованого) значення a_0, за альтернативної гіпотези $H_1 : a \neq a_0$, потрібно обчислити дослідне значення статистики критерію

$$U = \frac{(\bar{X} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$$

і за таблицею значень функції Лапласа знайти критичну точку $u_{кр}$ двосторонньої критичної області з рівності:

$$\Phi(u_{кр}) = (1 - \alpha)/2.$$

Якщо $|u_{досл}| < u_{кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $|u_{досл}| > u_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

2. Коли альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : a > a_0$, то критична точка правосторонньої критичної області знаходиться з рівності:

$$\Phi(u_{кр}) = (1 - 2\alpha)/2. \qquad (14.12)$$

У тому випадку, коли $|u_{досл}| < u_{кр}$ – немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $|u_{досл}| > u_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

3. Коли альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : a < a_0$, то спочатку знаходимо допоміжну критичну точку $u_{кр}$ з рівності (14.12), а потім знаходимо межу $u'_{кр}$ лівосторонньої критичної області за допомогою рівності:

$$u'_{кр} = -u_{кр}.$$

Якщо $|u_{досл}| > -u_{кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $|u_{досл}| < -u_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

Приклад 1. З нормально розподіленої генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 5,2$ зроблено вибірку обсягом $n =$ $=100$ і за нею знайдено вибіркову середню $\bar{x} = 27,56$. За рівнем значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0 = 26$, якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : a \neq 26$.

Розв'язання. Дослідне значення статистики критерію

$$u_{досл} = (\bar{x} - a_0) \cdot \sqrt{n} / \sigma = (27,56 - 26) \cdot \sqrt{100} / 5,2 = 3.$$

Альтернативна гіпотеза $H_1 : a \neq a_0$ визначає двосторонню критичну область.

Критичну точку знаходимо з рівності:

$$\Phi(u_{кр}) = (1 - \alpha)/2 = (1 - 0,05)/2 = 0,475.$$

За таблицею значень функції Лапласа (додаток Б) знаходимо $u_{кр} = 1,96$.

Оскільки $u_{досл} > u_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляємо. Тобто, вибіркова та гіпотетична генеральна середні відрізняються не випадково.

Другий випадок: дисперсія генеральної сукупності невідома.

Якщо дисперсія генеральної сукупності невідома (наприклад, за малих вибірок), то за статистику критерію перевірки нульової гіпотези вибирають випадкову величину

$$T = \frac{(\bar{X} - a_0)\sqrt{n}}{s},$$

де

$$s = \sqrt{\frac{\sum n_i x_i^2 - \left[\sum n_i x_i\right]^2 / n}{n-1}}$$

незміщене середнє квадратичне відхилення. Величина T розподілена за законом Стьюдента з $k = n-1$ степенями вільності.

1. Для того, щоб на заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0$ про рівність невідомої генеральної середньої a (нормально розподіленої сукупності з невідомою дисперсією) та гіпотетичного значення a_0 за альтернативної гіпотези $H_1 : a \neq a_0$, потрібно обчислити дослідне значення статистики

$$T = \frac{(\bar{X} - a_0)\sqrt{n}}{s}$$

і за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента, за заданим рівнем значущості α та за числом степенів вільності $k = n-1$ знайти критичну точку $t_{двост.кр}(\alpha; k)$.

Якщо $|T_{досл}| < t_{двост.кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $|T_{досл}| > t_{двост.кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

2. Якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : a > a_0$, то за рівнем значущості α та числом степенів вільності $k = n-1$ знаходять критичну точку $t_{правост.кр}(\alpha; k)$.

Якщо $t_{досл} < t_{правост.кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $t_{досл} > t_{правост.кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

3. Коли альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : a < a_0$, то спочатку знаходимо допоміжну критичну точку $t_{правост.кр}(\alpha; k)$ (як і вище), а потім знаходимо межу $t_{лівост.кр}$ лівосторонньої критичної області за допомогою рівності: $t_{лівост.кр} = -t_{правост.кр}$.

Якщо $t_{досл} > -t_{правост.кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $t_{досл} < -t_{правост.кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

Приклад 2. За вибіркою обсягом $n = 16$, зробленою з нормально розподіленої генеральної сукупності, знайдено вибіркову середню $\bar{x} = 118{,}2$ та незміщене середнє квадратичне відхилення $s = 3{,}6$. На рівні значущості $\alpha =$

$= 0,05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0 = 120$ за альтернативної гіпотези $H_1 : a \neq 120$.

Розв'язання. Дослідне значення статистики критерію

$$t_{досл} = \frac{(\overline{x} - a_0)\sqrt{n}}{s} = \frac{(118,2 - 120)\sqrt{16}}{3,6} = -2.$$

Альтернативна гіпотеза $H_1 : a \neq a_0$ визначає двосторонню критичну область.

За таблицею (додаток Е) критичних точок розподілу Стьюдента, за рівнем значущості $\alpha = 0,05$ та числом степенів вільності $k = n - 1 = 16 - 1 = 15$ знаходимо критичну точку $t_{двост.кр}(0,05; 15) = 2,13$. Оскільки $| t_{досл} | < t_{двост.кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Тобто, вибіркова середня $\overline{x} = 118,2$ відрізняється від гіпотетичної генеральної середньої $a_0 = 120$ незначуще.

Зауваження. Якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : a < a_0 = 120$, то критична область є лівосторонньою. У такому випадку знаходимо допоміжну критичну точку $t_{правост.кр}(0,05; 15) = 1,75$. Тоді межа критичної області

$t_{лівост.кр} = -t_{правост.кр} = -1,75$. Оскільки $-2 = t_{досл} < -t_{правост.кр} = -1,75$, то нульову гіпотезу відхиляємо. Тобто, вибіркова середня $\overline{x} = 118,2$ відрізняється від гіпотетичної генеральної середньої $a_0 = 120$ не випадково.

14.14 Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності за критерієм Пірсона

Насамперед розглянемо дискретну випадкову величину X, розподіл якої невідомий. Нехай у результаті n випробувань значення величини X розподілено таким чином:

Варіанти	x_1	x_2	...	x_k
Частоти	n_1	n_2	...	n_k

де $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Емпіричними частотами називають фактичні дослідні частоти n_i.

Нехай є підстави вважати, що величина X розподілена за *певним* законом. Щоб перевірити, чи узгоджується таке припущення з даними спостережень, знаходять *теоретичні частоти* n'_i кожного з дослідних значень $x_1, x_2, ..., x_k$, у припущенні, що величина X розподілена саме за вибраним законом.

Частоти, знайдені теоретично (за допомогою обчислень), називаються *вирівнювальними* або *теоретичними* частотами.

Теоретичні частоти знаходять з рівності:

$$\frac{n'_i}{n} = p_i, \text{ звідки } n'_i = n \cdot p_i,$$

де n – обсяг вибірки; p_i – ймовірність значення x_i, у припущенні, що випадкова величина X розподілена саме за вибраним законом.

Отже, в дискретному випадку *вирівнювальна частота дослідного значення x_i дорівнює обсягу вибірки, помноженому на ймовірність цього значення*.

У випадку неперервного розподілу випадкової величини X ймовірність окремого можливого значення дорівнює нулеві. Тому весь інтервал можливих значень ділять на k частинних інтервалів, які не перетинаються. Потім обчислюють ймовірності p_i потрапляння величини X в i-й інтервал, у припущенні, що розподіл випадкової величин X підлягає певному (вибраному) закону.

Як і в дискретному випадку, *вирівнювальну частоту* n'_i неперервного розподілу випадкової величини X знаходять з рівності:

$$n'_i = n \cdot p_i,$$

де n – число випробувань; p_i – ймовірності потрапляння величини X в i-й частинний інтервал, у припущенні, що розподіл випадкової величин X підлягає вибраному закону.

Зокрема, якщо є підстави вважати, що випадкова величина X (генеральна сукупність) розподілена за нормальним законом, то вирівнювальні частоти знаходять з рівності:

$$n'_i = \frac{nh}{\sigma_B}\varphi(u_i), \tag{14.13}$$

де n – число випробувань (обсяг вибірки), h – довжина частинного інтервалу, σ_B – середнє квадратичне відхилення, $u_i = (x_i - \overline{x}_B)/\sigma_B$ (x_i – середина i-го частинного інтервалу), функція

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} -$$

диференціальна функція Лапласа.

Рівність (14.13) випливає з того, що ймовірність p_i потрапляння величини X в i-й інтервал $(x_i\,;\,x_i+h)$ дорівнює

$$p_i = \int\limits_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx \approx f(x_i)h \quad (f(x) - \text{щільність ймовірностей в. в. } X).$$

Якщо випадкову величину X нормувати, тобто зробити заміну змінної:

$$U = \frac{X - \overline{x}_B}{\sigma_B},$$

то

$$\frac{h}{\sigma_B} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\sigma_B} = \frac{(x_{i+1} - \sigma_B) - (x_i - \sigma_B)}{\sigma_B} = u_{i+1} - u_i$$

і матимемо рівність (14.13).

Тепер розглянемо задачу перевірки гіпотези про нормальність розподілу генеральної сукупності.

Дискретний випадок. Нехай *емпіричний розподіл значень величини* X *задано у вигляді послідовності рівновіддалених варіант і відповідних їм частот*:

Варіанти	x_1	x_2	...	x_k
Частоти	n_1	n_2	...	n_k

Використовуючи відомий *критерій Пірсона*, потрібно перевірити гіпотезу про те, що генеральна сукупність X розподілена нормально.

Для того, щоб на заданому рівні значущості α перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, варто діяти за таким алгоритмом:

1. Обчислити вибіркову середню $\overline{x}_B$ та вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_B.

2. Обчислити теоретичні частоти

$$n'_i = \frac{nh}{\sigma_B} \cdot \varphi(u_i),$$

де n – обсяг вибірки (сума всіх частот), h – крок (різниця між двома сусідніми варіантами),

$$u_i = \frac{x_i - \overline{x}_B}{\sigma_B}, \; \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}.$$

3. Порівняти емпіричні та теоретичні частоти за допомогою *критерію Пірсона*. Для цього:

а) складають розрахункову таблицю, за якою знаходять дослідне значення статистики критерію

$$\chi^2_{досл} = \sum \frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'};$$

б) за таблицею критичних точок розподілу χ^2 за заданим рівнем значущості α та числом степенів вільності $k = r - 3$ (r – число груп вибірки) знаходять критичну точку $\chi^2_{кр}\left(\alpha; k\right)$ правосторонньої критичної області.

Якщо $\chi^2_{досл} < \chi^2_{кр}$, то немає підстав відхиляти гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності. Іншими словами, емпіричні й теоретичні частоти відрізняються незначуще (випадково). Якщо $\chi^2_{досл} > \chi^2_{кр}$, то гіпотезу відхиляють. Тобто, емпіричні та теоретичні частоти відрізняються значуще.

Зауваження 1. Нечисленні частоти $\left(n_i < 5\right)$ потрібно об'єднувати; в цьому випадку відповідні їм теоретичні частоти також треба додати. Якщо проводилось об'єднання частот, то при визначенні числа степенів вільності за формулою $k = r - 3$ треба за r прийняти число груп вибірки, що залишилися після об'єднання частот.

Зауваження 2. Може виникати питання: чому при перевірці за допомогою критерію Пірсона гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності число степенів вільності знаходять за формулою: $k = r - 3$?

Під час використання критерію Пірсона число степенів вільності $k = r - 1 - \nu$, де ν – число параметрів, що оцінюються за вибіркою. Нормальний розподіл визначається двома параметрами: математичним сподіванням a та середнім квадратичним відхиленням σ. Оскільки ці обидва параметри оцінюють за вибіркою (за a приймають вибіркову середню, а в ролі оцінки σ – беруть вибіркове середнє квадратичне відхилення), то $\nu = 2$, отже, $k = r - 1 - 2 = r - 3$.

Приклад 1. Використовуючи критерій Пірсона, за рівнем значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу про нормальність розподілу генеральної сукупності X з емпіричним розподілом вибірки обсягом $n = 200$:

Варіанти (x_i)	5	7	9	11	13	15	17	19	21
Частоти (n_i)	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Розв'язання.

1. Знаходимо вибіркову середню $\overline{x}_B = 12{,}63$ та вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_B = 4{,}695$.

2. Враховуючи, що $n = 200$, $h = 2$, $\sigma_B = 4{,}695$, обчислюємо теоретичні частоти за формулою $n_i' = \dfrac{nh}{\sigma_B} \cdot \varphi(u_i) = \dfrac{200 \cdot 2}{4{,}695} \cdot \varphi(u_i) = 85{,}2 \cdot \varphi(u_i)$.

Складаємо розрахункову таблицю (значення функції $\varphi(u)$ розміщено в таблиці додатка А).

i	x_i	$u_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_B}{\sigma_B}$	$\varphi(u_i)$	$n_i' = 85{,}2 \cdot \varphi(u_i)$
1	5	–1,62	0,1074	9,1
2	7	–1,20	0,1942	16,5
3	9	–0,77	0,2966	23,5
4	11	–0,35	0,3752	32,0
5	13	0,08	0,3977	33,9
6	15	0,51	0,3503	29,8
7	17	0,93	0,2589	22,0
8	19	1,36	0,1582	13,5
9	21	1,78	0,0818	7,0

3. Порівнюємо емпіричні та теоретичні частоти. Для цього:

а) складаємо наступну розрахункову таблицю 14.1, з якої знаходимо дослідне значення статистики критерію $\chi^2_{досл} = \sum \left(n_i - n_i'\right)^2 / n_i' = 22{,}2.$

б) за таблицею критичних точок розподілу χ^2 (додаток Д) за рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ і числом степенів вільності $k = r - 3 = 9 - 3 = 6$ знаходимо критичну точку правосторонньої критичної області

$$\chi^2_{кр}(0{,}05;6) = 12{,}6.$$

Оскільки $\chi^2_{досл} > \chi^2_{кр}$, то гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності відхиляємо. Інакше кажучи, емпіричні та теоретичні частоти відрізняються значуще.

Таблиця 14.1

i	n_i	n'_i	$(n_i - n'_i)$	$(n_i - n'_i)^2$	$(n_i - n'_i)^2 / n'_i$
1	15	9,1	5,9	34,81	3,8
2	26	16,5	9,5	90,25	5,5
3	25	25,3	–0,3	0,09	0,0
4	30	32,0	–2,0	4,00	0,1
5	26	33,9	–7,9	62,41	1,8
6	21	29,8	–8,8	77,44	2,6
7	24	22,0	2,0	4,00	0,2
8	20	13,5	6,5	42,25	3,1
9	13	7,0	6,0	36,00	5,1
$\sum$	200				$\chi^2_{досл} = 22,2$

Неперервний випадок. Нехай *емпіричний розподіл задано у вигляді послідовності інтервалів* (x_i, x_{i+1}) *та відповідних їм частот* n_i (n_i – сума частот, які потрапили до i-го інтервалу).

$(x_1;x_2)$	$(x_2;x_3)$	...	$(x_r;x_{r+1})$
n_1	n_2	...	n_r

Використовуючи критерій Пірсона, потрібно перевірити гіпотезу про те, що генеральна сукупність X розподілена нормально.

Для того, щоб на рівні значущості α перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, варто діяти за таким алгоритмом:

1. Обчислити вибіркову середню $\overline{x}_B$ і вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_B, причому за варіанти x_i^* прийняти середнє арифметичне $x_i^* = (x_i + x_{i+1}) / 2$ кінців інтервалу (x_i, x_{i+1}).

2. Пронормувати величину X, тобто перейти до випадкової величини $Z = (X - \overline{x^*}) / \sigma^*$ і обчислити кінці $z_i = (x_i - \overline{x^*}) / \sigma^*$ та $z_{i+1} = (x_{i+1} - \overline{x^*}) / \sigma^*$ інтервалів; за найменше значення величини Z взяти $z_1 = -\infty$, а за найбільше значення взяти $z_{r+1} = +\infty$.

3. Обчислити теоретичні частоти $n'_i = n \cdot p_i$, де n – обсяг вибірки (сума всіх частот); $p_i = \Phi(z_{z+1}) - \Phi(z_i)$ – ймовірність потрапляння величини X в

інтервал (x_i, x_{i+1}); $\Phi(z)$ − інтегральна функція Лапласа.

4. Порівняти емпіричні та теоретичні частоти за допомогою критерію Пірсона. Для цього:

а) складають розрахункову таблицю, за якою знаходять дослідне значення критерію Пірсона: $\chi^2_{досл} = \sum\left(n_i - n'\right)^2 / n'_i$.

б) за таблицею критичних точок розподілу χ^2 (додаток Д), за заданим рівнем значущості α і числом степенів вільності $k = r - 3$ (r – число інтервалів вибірки)

знаходять критичну точку $\chi^2_{кр}\left(\alpha; k\right)$ правосторонньої критичної області.

Якщо $\chi^2_{досл} < \chi^2_{кр}$, то немає підстав відхиляти гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності. Якщо $\chi^2_{досл} > \chi^2_{кр}$, то гіпотезу відхиляють.

Зауваження 3. Як і в дискретному випадку, інтервали, що містять нечисленні емпіричні частоти $(n_i < 5)$, потрібно об'єднати, а частоти цих інтервалів додати. Якщо виконувалось таке об'єднання інтервалів, то при визначенні числа степенів вільності за формулою $k = r - 1$ потрібно за r взяти число інтервалів, що залишилися після об'єднання.

Приклад 2. Використовуючи критерій Пірсона, за рівнем значущості $\alpha = 0,05$ перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X з емпіричним розподілом вибірки обсягу $n = 100$ наведеним у наступній таблиці.

Номер інтервалу, i	Межі інтервалу		Частота, n_i
	x_i	x_{i+1}	
1	3	8	6
2	8	13	8
3	13	18	15
4	18	23	40
5	23	28	16
6	28	33	8
7	33	38	7
			$n = 100$

Розв'язання. 1. Обчислимо вибіркову середню та вибіркове середнє квадратичне відхилення. Для цього перейдемо від заданого інтервального розподілу до розподілу рівновіддалених варіант, прийнявши за варіанту x_i^* середнє арифметичне $(x_i + x_{i+1})/2$ кінців інтервалу $(x_i; x_{i+1})$.

У результаті отримуємо розподіл:

x_i^*	5,5	10,5	15,5	20,5	25,5	30,5	35,5
n_i	6	8	15	40	16	8	7

Вибіркова середня та вибіркове середнє квадратичне відхилення відповідно дорівнюють: $\overline{x^*} = 20,7, \sigma^* = 7,28.$

Знаходимо інтервали (z_i, z_{i+1}), враховуючи, що $\overline{x^*} = 20,7, \sigma^* = 7,28,$ $1/\sigma^* = 0,137.$ При цьому беремо за лівий кінець першого інтервалу $-\infty$, а за правий кінець останнього інтервалу $+\infty$.

Далі знаходимо теоретичні ймовірності p_i і теоретичні частоти $n_i' = n \cdot p_i = 100 \cdot p_i$. Усі ці дії відображено в наступних двох таблицях:

i	Межі інтервалу		$x_i - \overline{x^*}$	$x_{i+1} - \overline{x^*}$	Межі інтервалу	
	x_i	x_{i+1}			$z_i = \dfrac{x_i - \overline{x^*}}{\sigma^*}$	$z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - \overline{x^*}}{\sigma^*}$
1	3	8	–	–12,7	$-\infty$	–1,74
2	8	13	–12,7	–7,7	–1,74	–1,06
3	13	18	–7,7	–2,7	–1,06	–0,37
4	18	23	–2,7	2,3	–0,37	0,32
5	23	28	2,3	7,3	0,32	1,00
6	28	33	7,3	12,3	1,00	1,69
7	33	38	12,3	–	1,69	∞

i	Межі інтервалу		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n'_i = 100p_i$
	z_i	z_{i+1}				
1	–	–1,74	–0,5000	–0,4591	0,0409	4,09
2	–1,74	–1,06	–0,4591	–0,3554	0,1037	10,37
3	–1,06	–0,37	–0,3554	–0,1443	0,2111	21,11
4	–0,37	0,32	–0,1443	0,1255	0,2698	26,98
5	0,32	1,00	0,1255	0,3413	0,2158	21,58
6	1,00	1,69	0,3413	0,4545	0,1132	11,32
7	1,69		0,4545	0,5000	0,0455	4,55
$\sum$					1	100

Порівняємо емпіричні та теоретичні частоти, використовуючи критерій Пірсона:

а) обчислимо дослідне значення критерію Пірсона. Для цього складемо наступну розрахункову таблицю. Стовпці 7 і 8 слугують для контролю обчислень за формулою: $\chi^2_{досл} = \sum\left(n_i^2 / n'_i\right) - n$.

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$\left(n_i - n'_i\right)^2$	$\left(n_i - n'_i\right)^2 / n'_i$	n_i^2	n_i^2 / n'_i
1	2	3	4	5	6	7	8
1	6	4,09	1,91	3,6481	0,8920	36	8,8019
2	8	10,37	–2,37	5,6169	0,5416	64	6,1716
3	15	21,11	–6,11	37,3321	1,7684	225	10,6584
4	40	26,98	13,02	169,5204	6,2833	1600	59,3052
5	16	21,58	–5,58	31,1364	1,4428	256	11,8628
6	8	11,32	–3,32	11,0224	0,9737	64	5,6537
7	7	4,55	2,45	6,0025	1,3192	49	10,7692
$\sum$	100	100			$\chi^2_{досл} = 13,22$		113,22

Контроль: $\sum\left(n_i^2 / n'_i\right) - n = 113,22 - 100 = 13,22 = \chi^2_{досл}$. Отже, обчислення виконано правильно;

б) за таблицею критичних точок розподілу χ^2 та числом степенів вільності $k = r - 3 = 7 - 3 = 4$ (r – число інтервалів) на рівні значущості $\alpha = 0,05$ знаходимо критичну точку правосторонньої критичної області $\chi^2_{кр}\left(0,05;4\right) = = 9,5$.

Оскільки $\chi^2_{досл} > \chi^2_{кр}$, то гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності X відхиляємо; Інакше кажучи, емпіричні та теоретичні частоти відрізняються значуще. Це означає, що дані спостереження не узгоджуються з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності.

15.15 Перевірка непараметричних гіпотез

Під час обробки результатів експерименту розподіл генеральної сукупності часто є невідомим або відрізняється від нормального (у випадку неперервних випадкових величин). Тому застосування розглянутих вище методів є неприйнятним. У такому разі використовують методи, які не залежать від розподілу генеральної сукупності, це так звані *непараметричні методи*.

Непараметричні методи передбачають використання не самих числових значень вибірки, а структурних властивостей вибірки (наприклад, відношення порядку між її елементами). Зрозуміло, що при цьому втрачається частина інформації, яка міститься у вибірці. Це означає, що потужність непараметричних методів є меншою аніж потужність розглянутих вище параметричних методів. Проте непараметричні методи можуть бути застосовані при загальніших припущення щодо розподілів і є простішими з точки зору обчислювальної роботи.

Цілий ряд непараметричних методів використовується для перевірки гіпотези про належність двох вибірок $x_1, x_2, ..., x_{n_1}$ та $y_1, y_2, ..., y_{n_2}$ до однієї й тієї ж генеральної сукупності, тобто гіпотези про те, що функції розподілу $F_1(x)$ (для в. в. X) та $F_2(x)$ (для в. в. Y) двох генеральних сукупностей рівні:

$$F_1(x) \equiv F_2(x).$$

Такі генеральні сукупності називаються *однорідними*. Необхідною умовою однорідності є рівність числових характеристик досліджуваних генеральних сукупностей, зокрема середніх, дисперсій, медіан тощо. Як основне припущення непараметричні критерії використовують лише неперервність розподілу генеральної сукупності.

Далі розглянемо деякі найпростіші критерії такого типу – *критерій знаків*, *критерій Вілкоксона*, *критерій серій*.

14.16 Перевірка гіпотези про однорідність двох генеральних сукупностей за критерієм знаків

Задача перевірки нульової гіпотези H_0 про однорідність генеральних сукупностей за їхніми попарно пов'язаними вибірками виникає, наприклад, під час порівняння роботи двох вимірювальних приладів. При цьому використовують n об'єктів і над кожним з них роблять по одному вимірюванню кожним з приладів. Нехай x_i та y_i $(i = 1, 2, ..., n)$ – результати вимірювань i-го об'єкту першим та другим приладом відповідно. Якщо вибірки, які порівнюються, отримано з однорідних сукупностей, то значення x_i та y_i взаємозамінні, а отже ймовірності появи додатних та від'ємних різниць $x_i - y_i$ рівні. Ймовірності появи нульових різниць дорівнюють нулеві, в силу припущення про неперервність розподілу вимірюваної ознаки. Справді, якщо $X-$ неперервна випадкова величина, значення якої є x_i, а $Y-$ неперервна випадкова величина, значення якої є y_i але y_i − фіксоване значення, отримане в результаті вимірювання, то

$$P(x_i - y_i = 0) = P(x_i = y_i) = P(X = y_i) = 0,$$

бо ймовірність набути неперервною випадковою величиною X фіксованого значення y_i дорівнює нулеві.

Таким чином,

$$P(x_i - y_i > 0) = P(x_i - y_i < 0) = 1/2, \quad i = 1, 2, ..., l,$$

де $l-$ число ненульових різниць, $l \le n$. Нульові різниці можуть з'явитися через випадкові похибки або наближені обчислення і тому пари, що їм відповідають, вилучаються з розгляду.

Статистикою критерію знаків є число знаків «+» або «–» в послідовності знаків різниць $(x_i - y_i)$, $i = 1, 2, ..., l$. Для визначеності домовляємося надалі брати до уваги число знаків «+».

За умови, що нульова гіпотеза H_0 істинна, а дослідні пари $(x_i; y_i)$, отже і знаки різниць $x_i - y_i$ *незалежні* , число знаків «+» має *біноміальний розподіл* з параметрами $p = \dfrac{1}{2}$ та l. Тому задача зводиться до перевірки нульової гіпотези $H_0 : p = \dfrac{1}{2}$ за однієї з альтернативних гіпотез:

$$H_1: p > \frac{1}{2} \text{ або } H_1: p < \frac{1}{2} \text{ або } H_1: p \neq \frac{1}{2}.$$

Нехай $r-$ отримане число знаків «+», а $\alpha-$заданий рівень значущості.

Гіпотеза H_0відхиляється, якщо при $H_1: p > \dfrac{1}{2}$ виконується нерівність:

$$\sum_{i=r+1}^{l} C_l^i \left(\frac{1}{2}\right)^l < \alpha; \tag{14.14}$$

або при $H_1: p < \dfrac{1}{2}$ виконується нерівність:

$$\sum_{i=0}^{r} C_l^i \left(\frac{1}{2}\right)^l < \alpha; \tag{14.15}$$

або при $H_1: p \neq \dfrac{1}{2}$ виконується одна з нерівностей:

$$\sum_{i=r+1}^{l} C_l^i \left(\frac{1}{2}\right)^l < \frac{\alpha}{2} \quad \text{чи} \quad \sum_{i=0}^{r} C_l^i \left(\frac{1}{2}\right)^l < \frac{\alpha}{2}. \tag{14.16}$$

Якщо за таких альтернативних гіпотез відповідні нерівності (14.14) – (14.16) не виконуються, то гіпотеза H_0 не суперечить результатам спостережень і приймається на рівні значущості α.

Часто перевірку гіпотези $H_0: p = 1/2$ здійснюють, використовуючи статистику Фішера F.

Гіпотеза H_0відхиляється, якщо при $H_1: p > 1/2$ виконується нерівність:

$$F_{досл} = \frac{r}{l-r+1} \geq F_{кр}(\alpha; k_1, k_2), \tag{14.17}$$

де $k_1 = 2(l-r+1)$, $k_2 = 2r$, $F_{кр}(\alpha; k_1, k_2)-$критична точка розподілу Фішера (див. додаток Ж);

або при $H_1: p < \dfrac{1}{2}$ виконується нерівність:

$$F_{досл} = \frac{l-r}{r+1} \geq F_{кр}(\alpha; k_1, k_2), \tag{14.18}$$

де $k_1 = 2(r+1)$, $k_2 = 2(l-r)$;

або при $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$ виконується одна з нерівностей:

$$F_{досл} = \frac{r}{l - r + 1} \geq F_{кр}(\alpha / 2; k_1, k_2) \text{ чи } F_{досл} = \frac{l - r}{r + 1} \geq F_{кр}(\alpha / 2; k_1, k_2).$$

Приклад 1. Перевіряється припущення про те, що один з двох приладів, що визначають швидкість автомобіля, має систематичну помилку. Для перевірки цього припущення визначили швидкість 10 автомобілів, до того ж швидкість кожного з них фіксувалася одночасно двома приладами. У результаті отримано такі дані:

Перший прилад v_1 км/год	70	85	63	54	65	80	75	95	52	55
Другий прилад v_2 км/год	72	86	62	55	63	80	78	90	53	57

Чи дозволяють ці результати стверджувати те, що другий прилад справді дає завищене значення швидкості? Рівень значущості взяти $\alpha = 0{,}10$.

Розв'язання. Припускаючи, що швидкості автомобілів не залежать одна від одної, розв'яжемо задачу, використовуючи критерій знаків.

Послідовність знаків різниць $v_1 - v_2$ має вигляд:

$$-, -, +, -, +, 0, -, +, -, -.$$

Число ненульових різниць $l = 9$, число додатних різниць $r = 3$. Перевіримо гіпотезу про те, що відмінності в показах приладів спричинено випадковими помилками, тобто гіпотезу $H_0 : p = \frac{1}{2}$. Альтернативна гіпотеза полягає в тому, що покази другого приладу мають додатне зміщення; іншими словами, ймовірність появи додатних різниць повинна бути меншою за $\frac{1}{2}$. Отже, альтернативна гіпотеза має вигляд: $H_1 : p < \frac{1}{2}$.

Для перевірки гіпотези $H_0 : p = \frac{1}{2}$ використовуємо нерівність (14.18). Насамперед маємо:

$$k_1 = 2 \cdot (3 + 1) = 8,\ k_2 = 2 \cdot (9 - 3) = 12,\ F_{досл} = \frac{9 - 3}{3 + 1} = 1{,}5.$$

Оскільки за таблицею додатка Ж $F_{кр}(0{,}1; 8; 12) = 2{,}24$, то гіпотеза H_0 не суперечить результатам спостережень. Треба вважати, що розбіжність у показах приладів спричинена випадковими помилками.

14.17 Перевірка гіпотези про однорідність двох вибірок за критерієм Вілкоксона

Нехай X та Y – неперервні випадкові величини, а

$$x_1, x_2, ..., x_{n_1} \tag{14.19}$$

та

$$y_1, y_2, ..., y_{n_2} \tag{14.20}$$

їх незалежні вибірки обсягів відповідно n_1 та n_2.

Перевірку гіпотези про однорідність вибірок (14.19) та (14.20) проводять за критерієм Вілкоксона (W - критерієм).

Нульова гіпотеза полягає в тому, що при всіх значеннях аргументу (тут аргумент завжди позначаємо через x) функції розподілу $F_1(x)$ (для в. в. X) та $F_2(x)$ (для в. в. Y) рівні між собою:

$$F_1(x) = F_2(x).$$

Альтернативні гіпотези мають вигляд:

$$F_1(x) \neq F_2(x),\ \ F_1(x) < F_2(x),\ \ F_1(x) > F_2(x).$$

Відразу зауважимо, що прийняття альтернативної гіпотези $H_1 : F_1(x) < F_2(x)$, означає, що $X > Y$ в силу зростання інтегральної функції розподілу. Аналогічно, справедливість альтернативної гіпотези $H_1 : F_1(x) > F_2(x)$, означає, що $X < Y$.

У наших міркуваннях надалі вважаємо, що у вибірках (14.19) та (14.20) $n_1 \le n_2$.

1-й випадок: обсяги обох вибірок не перевищують 25.

Для того, щоб на рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0 : $F_1(x) = F_2(x)$ про однорідність двох незалежних вибірок (14.19) та (14.20) обсягів n_1 та n_2 ($n_1 \le n_2$) за альтернативної гіпотези $H_1 : F_1(x) \neq F_2(x)$, треба діяти за таким правилом:

1) записати обидві вибірки у вигляді одного варіаційного ряду (у зростаючому порядку) і знайти в цьому ряду $w_{досл}$ – суму порядкових номерів варіант першої вибірки;

2) за таблицею (додаток Л) знайти ліву критичну точку критерію W

$$w_{ліва\ кр}(Q, n_1, n_2),$$

де $Q = \alpha / 2$;

3) за формулою

$$w_{права\ кр} = (n_1 + n_2 + 1)n_1 - w_{ліва\ кр}$$

знайти праву критичну точку.

Якщо $w_{ліва\ кр} < w_{досл} < w_{права\ кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $w_{досл} < w_{ліва\ кр}$ або $w_{досл} > w_{права\ кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

Приклад 1. На рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : F_1(x) = F_2(x)$ про однорідність двох вибірок обсягів $n_1 = 6$ та $n_2 = 7$:

x_i	8	9	11	15	18	22

y_j	6	7	10	12	21	25	27

За альтернативну гіпотезу взяти $H_1 : F_1(x) \neq F_2(x)$.

Розв'язання. Оскільки альтернативна гіпотеза має вигляд: $F_1(x) \neq F_2(x)$, то критична область – двостороння. Розташуємо варіанти обох вибірок у вигляді одного варіаційного ряду, пронумерувавши варіанти отриманого ряду:

Варіанти	6	7	***8***	***9***	10	***11***	12	***15***	***18***	21	***22***	25	27
Порядковий номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Сума порядкових номерів варіант першої вибірки

$$w_{досл} = 3 + 4 + 6 + 8 + 9 + 11 = 41.$$

За умови, що $n_1 = 6$, $n_2 = 7$, $Q = 0,01/2 = 0,005$ за таблицею додатка Л знаходимо $w_{ліва\ кр}(0,005; 6; 7) = 24$. Права критична точка $w_{права\ кр} = (6 + 7 + 1) \cdot 6 - 24 = 60$. Оскільки 24 < 41 < 60, тобто $w_{ліва\ кр} < w_{досл} < w_{права\ кр}$, то відхиляти гіпотезу про однорідність вибірок немає підстав.

Зауваження 1. За альтернативної гіпотези $F_1(x) > F_2(x)$ потрібно за таблицею знайти ліву критичну точку $w_{ліва\ кр}(Q, n_1, n_2)$, де $Q = \alpha$. Тоді, якщо

$w_{досл}$ > $w_{ліва\ кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $w_{досл}$< $w_{ліва\ кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

За альтернативної гіпотези $F_1(x) < F_2(x)$ потрібно знайти праву критичну точку $w_{права\ кр} = (n_1 + n_2 + 1)n_1 - w_{ліва\ кр}$, де $Q = \alpha$. Тоді, якщо $w_{досл}$<$w_{права\ кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $w_{досл}$> $w_{права\ кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

Зауваження 2. Якщо декілька варіант лише в одній вибірці однакові, то у спільному варіаційному ряду їм приписують порядкові номери так, начебто ці варіанти є різними. Якщо ж збігаються варіанти різних вибірок, то всім їм приписують однаковий порядковий номер, який дорівнює середньому арифметичному порядкових номерів, який мали б ці варіанти до збігу.

2-й випадок: обсяг хоча б однієї з двох вибірок перевищує 25.

Для того, щоб на рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0 : F_1(x) = F_2(x)$ про однорідність двох незалежних вибірок (14.19) та (14.20) обсягів n_1 та n_2 ($n_1 \le n_2$) за альтернативної гіпотези $H_1 : F_1(x) \ne F_2(x)$, треба діяти за таким правилом:

1) з рівності: $\Phi(z_{кр}) = (1 - \alpha)/2$ за таблицею значень функції Лапласа $\Phi(z)$ знайти число $z_{кр}$;

2) ліву критичну точку знайти з рівності:

$$w_{ліва\ кр}(Q, n_1, n_2) = \left[\frac{(n_1 + n_2 + 1)\cdot n_1 - 1}{2} - z_{кр}\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}} \right], \quad (14.21)$$

де $Q = \alpha / 2$; $[a]$ – ціла частина числа a;

3) за формулою $w_{права\ кр} = (n_1 + n_2 + 1)n_1 - w_{ліва\ кр}$ знайти праву критичну точку;

Якщо $w_{ліва\ кр}$< $w_{досл}$< $w_{права\ кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо ж $w_{досл}$< $w_{ліва\ кр}$ або $w_{досл}$> $w_{права\ кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

За альтернативних гіпотез $F_1(x) < F_2(x)$ або $F_1(x) > F_2(x)$:

1) число $z_{кр}$ знаходимо з рівності: $\Phi(z_{кр}) = (1 - 2\alpha)/2$;

2) прийнявши $Q = \alpha$, з рівності (14.21) знаходимо ліву критичну точку;

3) за формулою

$$w_{права\ кр} = (n_1 + n_2 + 1)n_1 - w_{ліва\ кр}$$

знаходимо праву критичну точку;

Якщо

$$w_{ліва\ кр} < w_{досл} < w_{права\ кр},$$

то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо ж $w_{досл} < w_{ліва\ кр}$ або $w_{досл} > w_{права\ кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

Приклад 2. Перевірити на рівні значущості $\alpha = 0,05$ нульову гіпотезу про однорідність двох вибірок обсягів $n_1 = 40$ та $n_2 = 50$ за альтернативної гіпотези $H_1 : F_1(x) \neq F_2(x)$, коли відомо, що в спільному варіаційному ряду сума номерів варіант першої вибірки дорівнює $w_{досл} = 1800$.

Розв'язання. Вигляд альтернативної гіпотези вказує на те, що критична область – двостороння.

З рівності

$$\Phi(z_{кр}) = (1-\alpha)/2 = (1-0,05)/2 = 0,475$$

за таблицею значень функції Лапласа (додаток Б) знаходимо $z_{кр} = 1,96$.

При $n_1 = 40$, $n_2 = 50$, $z_{кр} = 1,96$, $Q = 0,05/2 = 0,025$ з формули (14.21) маємо $w_{ліва\ кр} = 1578$.

Права критична точка

$$w_{права\ кр} = (n_1 + n_2 + 1)n_1 - w_{ліва\ кр} = (40 + 50 + 1)\cdot 40 - 1578 = 2062.$$

Оскільки 1578 < 1800 < 2062, тобто $w_{ліва\ кр} < w_{досл} < w_{права\ кр}$, то відхиляти гіпотезу про однорідність вибірок немає підстав.

14.18 Перевірка гіпотез про випадковість та незалежність елементів вибірки за критерієм серій

Для перевірки нульової гіпотези H_0 про випадковість та незалежність елементів вибірки застосовують критерій серій.

Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ – вибірка результатів спостережень, h_X – вибіркова медіана, визначена за цими даними. Кожному елементу вибірки ставимо у відповідність знак «$+$» або «$-$» залежно від того, більшим чи меншим є цей елемент за медіану (нульові значення до уваги не беруться). Позначимо через n_1

число знаків «$+$», а через n_2 − число знаків «$-$». Отже, всій вибірці поставлено у відповідність деякий набір (послідовність) знаків.

Серією в цьому наборі називається будь-яка послідовність, яка складається з однакових знаків і обмежена однаковим знаками з обох боків або знаходиться наприкінці чи на початку цього набору. Наприклад, у наборі

$$+ - + + + - - - - - + +$$

міститься 5 серій: $(+), (-), (+ + +), (- - - - -), (+ +)$, $n_1 = 6, n_2 = 6$.

Статистикою критерію серій є число серій N. Критична область визначається нерівностями $N \le N_1$ і $N \ge N_2$. Значення меж N_1 та N_2 критичної області на рівні значущості $\alpha = 0,05$ наводяться в таблиці додатка Н.

Приклад 1. Швидкості автомобілів в певній точці траси були такими (у км/год): 31, 39, 40, 45, 27, 28, 35, 55, 21, 33, 42, 36. Чи можна вважати отримані значення швидкості випадковими? Взяти рівень значущості $\alpha = 0,05$.

Розв'язання. Запишемо вибірку у вигляді варіаційного ряду: 21, 27, 28, 31, 33, 35, 36, 39, 40, 42, 45, 55. Тоді вибіркова медіана $h_B = \dfrac{35 + 36}{2} = 35,5$.

Отриманому ряду спостережень відповідає такий набір знаків:

$$-, +, +, +, -, -, -, +, -, -, +, +,$$

звідки $n_1 = 6$, $n_2 = 6$, число серій $N = 6$. За таблицею додатка Н, на рівні значущості $\alpha = 0,05$, знаходимо $N_1 = 3$, $N_2 = 11$. Оскільки $N_1 < N < N_2$ $(3 < 6 < 11)$, то нульова гіпотеза H_0 приймається: отримані значення швидкості можна вважати випадковими.

За великих вибірок, коли або n_1, або n_2, або і n_1 і n_2 більше за 20, для перевірки гіпотези H_0 можна використати статистику U, дослідне значення якої обчислюється за формулою:

$$u_{досл} = \frac{\left(N - \dfrac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2}\right) - \dfrac{1}{2}}{\sqrt{\dfrac{2n_1 n_2 [2n_1 n_2 - (n_1 + n_2)]}{(n_1 + n_2)^2 (n_1 + n_2 - 1)}}}. \qquad (14.22)$$

За умови істинності гіпотези H_0 статистика U має приблизно нормальний розподіл $N(0;1)$. У такому випадку критична область визначається нерівностями:

$$u_{досл} \le u_{ліва\ кр} \text{ або } u_{досл} \ge u_{права\ кр},$$

де

$$u_{права\ кр} = u_{(1-\alpha)/2}, \quad u_{ліва\ кр} = -u_{(1-\alpha)/2}.$$

Зауваження. Критерій серій застосовується для перевірки будь-якої вибірки, елементами якої є два різних символи, наприклад,« 0» та «1», «+» та «–», «A» та «B» тощо. Статистикою критерію є число серій у вибірці (число N).

Приклад 2. Чи можна вважати, що послідовність

100010100001001011011100101010001001

отримано із сукупності випадкових послідовностей? Прийняти $\alpha = 0,01$.

Розв'язання. У заданій послідовності число нулів $n_1 = 21$, а число одиниць $n_2 = 15$. Число серій $N = 23$.

Оскільки $n_1 > 20$, то для перевірки гіпотези H_0, яка полягає в тому, що дану послідовність отримано із сукупності випадкових послідовностей, скористаємося статистикою U. За формулою (14.23) вибіркове (дослідне) значення цієї статистики дорівнює

$$u_{досл} = \frac{\left(23 - \frac{2\cdot21\cdot15}{21+15}\right) - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{2\cdot21\cdot15\cdot[2\cdot15\cdot21-(21+15)]}{(21+15)^2\cdot(21+15-1)}}} \approx 1,741.$$

З огляду на те, що $u_{(1-\alpha)/2} = u_{0,495} = 2,576$ (додаток Б), а отже $u_{досл} = 1,741 <$ $< 2,576 = u_{права\ кр}$ і гіпотеза H_0 приймається: можна вважати, що дану послідовність отримано із сукупності випадкових послідовностей.

15. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

15.1 Класичне означення ймовірності

1. До крамниці надійшло 30 нових плазмових телевізорів, серед яких 5 мають приховані дефекти. Навмання беруть один телевізор для перевірки. Яка ймовірність того, що він не має прихованих дефектів? *Відповідь*: 5/6.

2. Автомат виготовляє однотипні деталі, причому технологія виготовлення така, що 5 % виготовленої продукції є бракованою. Із великої партії взято навмання одну деталь для контролю. Знайти ймовірність події $A = \{$деталь бракована$\}$. *Відповідь*: 0,05.

3. Підкидають два гральних кубики. Знайти ймовірності подій: $A = \{$числа, що випали на обох кубиках, збігаються$\}$, $B = \{$число очок на першому кубику більше за число очок на другому кубику$\}$. *Відповідь*: $P(A) = 1/6$, $P(B) = 5/12$.

4. Підкидають два гральних кубики. Знайти ймовірності подій: $A = \{$сума очок є парною$\}$, $B = \{$сума очок більша ніж 2$\}$. *Відповідь*: $P(A) = 1/2$, $P(B) =$ $= 35/36$.

5. Підкидають два гральних кубики. Знайти ймовірності подій: $A = \{$сума чисел не менша за 5$\}$, $B = \{$хоча б на одному з кубиків з'явиться цифра 6$\}$, $C = \{$добуток чисел, що випали, дорівнює 6$\}$. *Відповідь*: $P(A) = 5/6$, $P(B) =$ $= 11/36$, $P(C) = 1/9$.

6. Навмання вибирається п'ятизначне число. Знайти ймовірність події $A = \{$число однаково читається і зліва, і справа (наприклад, 13531)$\}$. *Відповідь*: $P(A) = 0{,}01$.

7. Навмання вибирається п'ятизначне число. Знайти ймовірність події $B = \{$число кратне 5$\}$. *Відповідь*: $P(B) = 0{,}2$.

8. Навмання вибирається п'ятизначне число. Знайти ймовірність події $C = \{$запис числа містить лише непарні числа$\}$. *Відповідь*: $P(C) = 5/144$.

9. 1 вересня на першому курсі одного із факультетів заплановано за розкладом три лекції з різних дисциплін. Всього на першому курсі викладають 10 дисциплін. Студент, який не встиг ознайомитися з розкладом, намагається його вгадати. Яка ймовірність успіху у даному експерименті, якщо вважати, що будь-який розклад із трьох дисциплін є рівноможливим? *Відповідь*: 1/720.

10. Зенітна батарея, яка складається з n гармат, здійснює залп по групі з m літаків. Кожна з гармат вибирає собі ціль навмання незалежно одна від одної. Яка ймовірність того, що всі гармати вистрелять в один і той самий літак? *Відповідь*: $1/m^{n-1}$.

11. П’яти польовим радіостанціям дозволено упродовж навчання працювати на шести радіохвилях. Вибір хвилі для кожної станції проводять навмання. Знайти ймовірності таких подій: A={при одночасній роботі всіх п’яти радіостанцій хоча б дві хвилі не збігатимуться}, B={будуть використані різні радіохвилі}. *Відповідь*: $P(A)$=1–1/6^4, $P(B)$=5!/6^4.

12. На шахову дошку випадково ставлять дві тури – білу та чорну. Яка ймовірність того, що вони не поб’ють одна одну? *Відповідь*: 7/9.

13. Кожен із 8 комп’ютерів обслуговується одним із операторів. В штаті обчислювального центру є 6 операторів. Призначення оператора для обслуговування даного комп’ютера відбувається навмання. Знайти ймовірність того, що перші шість комп’ютерів пройдуть обслуговування. *Відповідь*: 1/28.

14. Із партії, що містить 10 виробів, серед яких є три нестандартних, навмання беруть три вироби для контролю. Знайти ймовірності таких подій: A={всі три взяті вироби нестандартні}, B={всі три взяті вироби стандартні}. *Відповідь*: $P(A)$ = 1/120, $P(B)$ = 7/24.

15. Із повного набору доміно (28 штук) навмання вибирають 7 кісточок. Яка ймовірність того, що серед них принаймні одна кісточка із шістьма очками. *Відповідь*: $1 - C_{21}^{7} / C_{28}^{7} \approx 0{,}932$.

16. Із десяти перших літер українського алфавіту навмання створюють новий алфавіт, який складається з п’яти літер. Знайти ймовірності таких подій: A={до складу нового алфавіту входить літера **а**}, B={до складу нового алфавіту входять лише приголосні}. *Відповідь*: $P(A)$ = 1/2, $P(B)$ = 1/42.

17. Серед кандидатів до студентської ради факультету є 3 першокурсники, 5 другокурсників і 7 третьокурсників. Із цього складу навмання обирається 5 студентів на наступну конференцію. Знайти ймовірності таких подій: A={буде обрано лише третьокурсників}, B={всі першокурсники потраплять на конференцію}, C={не буде обрано жодного другокурсника}. *Відповідь*: $P(A)$ = 1/143, $P(B)$ = 2/91, $P(C)$ = 12/143.

18. Для зменшення кількості ігор, $2n$ футбольних команд, серед яких 2 призери минулої першості, шляхом жеребкування розбивають на дві підгрупи (першу і другу) по n команд кожна. Яка ймовірність того, що обидві команди-призери потраплять до різних груп? *Відповідь*: $p = \dfrac{n}{2n-1}$.

19. Числа 1, 2, … , 9 записуються у випадковому порядку. Знайти ймовірність того, що числа буде записано у зростаючому порядку.

Відповідь: 1/9!.

20. Числа 1, 2, … , 9 записуються у випадковому порядку. Знайти ймовірність того, що числа 1 і 2 стоятимуть поряд у зростаючому порядку. *Відповідь*: 1/9.

21. Числа 1, 2, … , 9 записуються у випадковому порядку. Знайти ймовірність того, що числа 3, 6, 9 буде записано одне за одним у зростаючому порядку. *Відповідь*: 1/12.

22. Числа 1, 2, … , 9 записуються у випадковому порядку. Знайти ймовірність того, що на парних місцях стоятимуть парні числа. *Відповідь*: 1/126.

23. Числа 1, 2, … , 9 записуються у випадковому порядку. Знайти ймовірність того, що сума кожної пари чисел, що стоять на однаковій відстані від кінців, дорівнює 10. *Відповідь*: 1/945.

24. Із колоди в 52 карти виймають навмання 4 карти. Знайти ймовірності таких подій: $A=${у отриманій вибірці всі карти бубнової масті}, $B=${серед узятих карт є хоча б один туз}. $P(A)\approx 0,264\cdot 10^{-2}$, $P(B)\approx 0,2813$.

25. Два рівних за силою суперники грають матч з n партій в теніс. Кожна партія завершується виграшем або програшем одного з учасників. Усі результати матчу є рівноможливими. Знайти ймовірність того, що перший гравець виграє точно m партій $(m\leq n)$. *Відповідь*: $C_n^m / 2^n$.

26. Група, що складається з 8 людей, займає місця за круглим столом у випадковому порядку. Яка ймовірність того, що відтак дві певні особи сидітимуть поруч? *Відповідь*: 2/7.

27. Група, яка складається з 8 людей, займає місця з одного боку прямокутного столу. Знайти ймовірність того, що дві певні особи опиняться поруч, якщо:

а) число місць дорівнює 8;

б) число місць дорівнює 12;

Відповідь: а) 1/4; б) 1/6.

28. На п’ятьох картках написано цифри від 1 до 5. Експеримент полягає у випадковому виборі трьох карток і викладанні в порядку їх надходження в рядок зліва направо. Знайти ймовірність таких подій: $A=${з’явиться число 123}, $B=${з’явиться число, яке не міститиме цифри 3}. *Відповідь*: $P(A)$=1/60, $P(B)$ = 2/5.

29. На п’ятьох картках написано цифри від 1 до 5. Експеримент полягає у випадковому виборі трьох карток і викладанні в порядку їх надходження в ряд зліва направо. Знайти ймовірність таких подій: $A=${число складатиметься із

послідовних натуральних чисел}, $B =${з'явиться парне число}, $C =${з'явиться число, яке міститиме хоча б одну із цифр 2 або 3}.

Відповідь: $P(A) = 1/20$, $P(B) = 2/5$, $P(C) = 9/10$.

30. n людей входять до кімнати, де є m стільців ($m \le n$), і розсідаються випадково так, що всі стільці стають зайнятими.

а) Яка ймовірність того, що дві певних особи не матимуть місць?

б) Яка ймовірність того, що k певних особи сидітимуть ($k \le m$)?

Відповідь: а) $\dfrac{(n-m)(n-m-1)}{n(n-1)}$; б) C_m^k / C_n^k.

31. 10 варіантів контрольної роботи, кожен із яких написаний на окремій картці, перемішуються й розподіляються випадково серед восьми студентів, які сидять в одному ряду. Кожен студент отримує один варіант контрольної роботи. Знайти ймовірності таких подій: $A =${варіанти 1 та 2 залишаться невикористаними}, $B =${варіанти 1 та 2 дістануться студентам, що сидітимуть поруч}, $C =${вибірка складатиметься із послідовних натуральних чисел}.

Відповідь: $P(A) = 1/45$, $P(B) = 7/45$, $P(C) = 1/15$.

32. 12 студентів, серед яких Іванчук та Петренко, випадково займають чергу за підручниками до бібліотеки. Яка ймовірність того, що між Іванчуком та Петренком у черзі стоятимуть ще п'ять студентів? *Відповідь*: 1/11.

33. У технічній бібліотеці є книги з математики, фізики, хімії тощо, всього із 16 розділів науки. Надійшло чотири чергові замовлення на літературу. Вважаючи, що будь-який набір літератури рівноможливий, знайти ймовірності таких подій: $A =${замовлені книги належать до різних розділів науки}, $B =${замовлені книги належать до одного й того самого розділу науки}.

Відповідь: $P(A) = \dfrac{455}{969}$, $P(B) = \dfrac{4}{969}$.

34. У кондитерській є 7 видів тістечок. Черговий покупець отримав чек на 4 тістечка. Вважаючи, що будь-який замовлений набір тістечок рівноможливий, обчислити ймовірність того, що покупець замовив:

а) тістечка одного виду; б) тістечка різних видів;

в) по 2 тістечка різних видів. *Відповідь*: а) 1/30; б) 1/6; в) 1/10.

35. Підкидають 10 однакових гральних кубиків. Обчислити ймовірності таких подій: $A =${ на жодному з кубиків не випаде число 6 }, $B =${хоча б на одному кубику з'явиться число 6}, $C =${на трьох кубиках випаде число 6}.

Відповідь: $P(A) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{10} \approx 0{,}1615$, $P(B) \approx 0{,}8385$, $P(C) \approx 0{,}155$.

36. Випробування полягає у чотириразовому виборі з поверненням однієї з літер множини $E=\{а,\ б,\ к,\ о,\ м\}$ і викладанні слова в порядку надходження літер. Яка ймовірність того, що у результаті буде викладено слово *мама*? *Відповідь*: 0,0016.

37. У під'їзді будинку встановлено кодовий замок. Двері автоматично відкриваються, якщо у певній послідовності набрати три цифри із десяти. Хтось підійшов до під'їзду і, не знаючи коду, став навмання набирати різні комбінації з трьох цифр. На кожну спробу він витрачає 20 секунд. Яка ймовірність події A = {той, хто підійшов відкриватиме двері не довше однієї години}? *Відповідь*: 1/4.

38. Телефонну книгу відкривають навмання й випадково вибирають номер телефону. Вважаючи, що номер складається з семи цифр і всі комбінації цифр рівноможливі, знайти ймовірності таких подій: $A=${чотири останні цифри телефонного номера однакові}, $B=${всі цифри номера є різними}.

Відповідь: $P(A)=0{,}001$, $P(B)\approx 0{,}0605$.

39. Телефонну книгу відкривають навмання й випадково вибирають номер телефону. Вважаючи, що номер складається з семи цифр і всі комбінації цифр рівноможливі, знайти ймовірності таких подій: $A=${номер починається з цифри 5}, $B=${номер містить три цифри 5, дві цифри 1 та дві цифри 2}.

Відповідь: $P(A)=0{,}1$, $P(B)\approx 2{,}1\cdot 10^{-5}$.

40. Шестеро людей зайшли до ліфту на першому поверсі семиповерхового будинку. Вважаючи, що будь-який пасажир може з однаковою ймовірністю вийти на 2-у, 3-у, …, 7-у поверхах, знайти ймовірності таких подій: $A=${на другому, третьому й четвертому поверхах не вийде жоден із пасажирів}, $B=${троє пасажирів вийдуть на сьомому поверсі}. *Відповідь*: $P(A)=1/216$, $P(B)=5/48$.

41. Шестеро людей зайшли до ліфту на першому поверсі семиповерхового будинку. Вважаючи, що будь-який пасажир може з однаковою ймовірністю вийти на 2-у, 3-у, …, 7-у поверхах, знайти ймовірності таких подій: $C=${на кожному поверсі вийде по одному пасажиру}, $D=${всі пасажири вийдуть на одному поверсі}. *Відповідь*: $P(C)=5/324$, $P(D)=1/6^5$.

42. До чотиристороннього перехрестя з кожного боку під'їхало по одному автомобілю. Кожен автомобіль може з однаковою ймовірністю здійснити один із чотирьох маневрів на перехресті: розвернутися й поїхати назад, поїхати прямо, ліворуч або праворуч. Через певний час на перехресті не було жодного автомобіля. Знайти ймовірності таких подій: A = {всі автомобілі поїхали по одній і тій самій вулиці}, B = {по якійсь вулиці поїхало рівно три автомобілі},

C = {принаймні по одній із вулиць не поїхав жоден з автомобілів}.

Відповідь: $P(A) = 1/64$, $P(B) = 3/64$, $P(C) = 29/32$.

43. Десять осіб, серед яких Шевчук та Краєвський, поселяються у два тримісні та один чотиримісний готельні номери. Скільки існує способів їхнього розселення? Яка ймовірність того, що Шевчук та Краєвський потраплять до чотиримісного номера? *Відповідь*: 4200, 2/15.

44. Студентська рада факультету складається з 3-х першокурсників, 5-и другокурсників і 7-и третьокурсників. Із цього складу навмання обирають 5 делегатів на наступну конференцію. Знайти ймовірність такої події: A ={буде обрано 1 першокурсника, 2 другокурсники та 2 третьокурсники}.

Відповідь: $P(A) = 30/143$.

45. 20 футбольних команд, серед яких 4 призери попередньої першості, за жеребкуванням розбивають на 4 занумерованих підгрупи по 5 команд. Знайти ймовірності подій: A={до першої та другої підгрупи не потрапить жоден з призерів}, B ={до кожної підгрупи потрапить один із призерів}.

Відповідь: $P(A) = 14/323$, $P(B) = 125/969$.

46. Підкидається 6 гральних кубиків. Знайти ймовірності таких подій: A={випадуть три одиниці, дві трійки й одна шістка}, B={випадуть різні цифри}, C={випадуть три однакові цифри}.

Відповідь: $P(A) \approx 0{,}0013$, $P(B) \approx 0{,}0154$, $P(C) \approx 0{,}3215$.

47. З розрізної абетки викладається слово *математика*. Потім всі букви цього слова перемішуються й знову викладаються у випадковому порядку. Яка ймовірність того, що знову отримаємо слово *математика*?

Відповідь: 2!3!2! /10!.

48. 52 карти роздають чотирьом гравцям (кожному по 13 карт). Знайти ймовірності таких подій: A = {кожен гравець матиме туза}, B = {один із гравців отримає всі 13 карт однієї масті}.

Відповідь: $P(A)=\dfrac{4!48!(13!)^4}{(12!)^4 52!} \approx 0{,}105$, $P(B)=\dfrac{16\cdot 39!(13!)^4}{(13!)^3 52!} \approx 8{,}4\cdot 10^{-12}$.

49. 52 карти роздають чотирьом гравцям (кожному по 13 карт). Знайти ймовірності таких подій: A={всі тузи потраплять до одного із гравців}, B={два певні гравці не отримають жодного туза}.

Відповідь: $P(A) \approx 0{,}01056$, $P(B) \approx 0{,}0552$.

50. Із скриньки, що містить кульки з номерами 1,2, … , n, k разів ($k \le n$) виймають кульку й щоразу повертають назад. Знайти ймовірність того, що номери вийнятих кульок утворюватимуть зростаючу послідовність.

Відповідь: C_n^k / n^k.

51. Зенітна батарея, яка складається із n гармат, здійснює залп по групі із m літаків $(m > n)$. Кожна із гармат вибирає собі ціль навмання незалежно одна від одної. Знайти ймовірність того, що гармати вистрелять у різні літаки. *Відповідь*: $\dfrac{(m-1)...(m-n+1)}{m^{n-1}}$.

52. На тренуванні дитячої спортивної школи з футболу ролі гравців розподіляють випадково серед одинадцяти учасників. Потрібно відібрати одного воротаря, чотирьох захисників, трьох напівзахисників та трьох нападників. Яка ймовірність того, що двоє друзів-учасників Вітя та Сашко: а) гратимуть у нападі; б) отримають різні амплуа, причому один із друзів гратиме в нападі, а інший – у захисті? *Відповідь*: а) 3/55; б) 12/55.

53. У лотереї випущено n квитків, з яких m виграшних. Куплено k квитків. Які ймовірності таких подій: A={із k квитків принаймні один виграшний}, B={із k квитків точно один виграшний}, C={із k квитків точно k_1 виграшних}. *Відповідь*: а) $P(A) = 1 - \dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$, коли $k \le n-m$; 1, коли $k > n-m$; б) $P(B) = \dfrac{C_m^1 \cdot C_{n-m}^{k-1}}{C_n^k}$, коли $k \le n-m+1$; 0, коли $k > n-m+1$; в) $P(C) = \dfrac{C_m^{k_1} \cdot C_{n-m}^{k-k_1}}{C_n^k}$, коли $k \le n-m+k_1$; 0, коли $k > n-m+k_1$.

54. Яка ймовірність p_n того, що у групі із n $(n \le 365)$ випадково відібраних студентів принаймні у двох виявиться один і той самий день народження? Розглянути випадки, коли $n = 24$ та $n = 50$. *Відповідь*: $p_n = 1 - \dfrac{A_{365}^n}{(365)^n}$, $p_{24} \approx 0{,}538$, $p_{50} \approx 0{,}97$.

55. На заводі працює 30000 робітників та службовців. Показати, що на цьому заводі обов’язково знайдеться принаймні дві людини з однаковими ініціалами імені, по батькові та прізвищ.

56. Реєстр калькулятора містить 8 розрядів. Вважаючи, що поява будь-якого числа на реєстрі рівноймовірна, знайти ймовірності таких подій: $A =${в усіх розрядах стоять нулі}, $B =${в усіх розрядах стоять одні й ті самі цифри}. *Відповідь*: $P(A) = 10^{-8}$, $P(B) = 10^{-7}$.

57. Реєстр калькулятора містить 8 розрядів. Вважаючи, що поява будь-якого числа на реєстрі рівноймовірна, знайти ймовірності таких подій:

$A=${реєстр містить точно дві однакові цифри}, $B=${реєстр містить точно дві пари однакових цифр}.

Відповідь: $P(A)=28A_9^6\cdot 10^{-7}\approx 0{,}17$, $P(B)=378A_8^4\cdot 10^{-6}\approx 0{,}64$.

58. Реєстр калькулятора містить 8 розрядів. Вважаючи, що поява будь-якого числа на реєстрі рівноймовірна, знайти ймовірності таких подій: $A=${реєстр містить точно три однакові цифри}, $B=${ реєстр містить не більше ніж три різні цифри }.

Відповідь: $P(A)=56A_9^5\cdot 10^{-7}\approx 0{,}08$, $P(B)=C_{10}^3\cdot 3^8\cdot 10^{-8}\approx 0{,}008$.

59. 7 яблук, 3 апельсини та 5 лимонів розкладаються випадково в три пакети, але так, щоб в кожному була однакова кількість фруктів. Знайти ймовірності таких подій: $A=${у кожному із пакетів по одному апельсину}, $B=${у випадково вибраному пакеті немає апельсинів}. *Відповідь*:
$P(A)=25/546$, $P(B)=24/91$.

60. З множини чисел $E=\left\{1,2,\ldots,n\right\}$ випадково вибирається два числа. Яка ймовірність того, що друге число більше за перше, якщо вибирання здійснюється: а) без повернення; б) з поверненням. *Відповідь*: а) $1/2$, б) $\dfrac{n-1}{2n}$.

61. Із множини чисел $E=\left\{1,2,\ldots,n\right\}$ випадково вибирається три числа. Яка ймовірність того, що друге число знаходиться між першим і третім, якщо вибирання здійснюється: а) без повернення; б) з поверненням. *Відповідь*: а) $1/3$, б) $(n-1)(n-2)/3n^2$.

62. Кожну з n палиць випадково ламають на дві частини – довгу та коротку. Потім $2n$ отриманих частин навмання з'єднують у n пар, кожна з яких утворює нову палицю. Знайти ймовірності таких подій: $A=${всі частини з'єдналися в початковому порядку}, $B=${всі довгі куски з'єдналися із короткими}. *Відповідь*: $P(A)=\dfrac{2^n}{(2n)!}$, $P(B)=\dfrac{1}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$.

63. Шляхом жеребкування розігрується шість підписних видань серед десяти учасників. Скільки різних розподілів підписок є можливими, якщо кожне чергове підписне видання розігрується серед усіх учасників? Знайти ймовірність того, що кожен із перших шести учасників матиме по одній підписці. *Відповідь*: 10^6; $p=0{,}72\cdot 10^{-3}$.

64. Шляхом жеребкування розігрується шість підписних видань серед десяти учасників. Скільки різних розподілів підписок є можливими, якщо кожне

чергове підписне видання розігрується лише серед учасників, які поки що не виграли? Знайти ймовірність того, що кожен із перших шести учасників матиме по одній підписці. *Відповідь*: A_{10}^{6}; $p=1/210$.

65. Випробування полягає у тому, що n різних предметів розігруються серед m людей $(m<n)$ таким чином, що кожен може отримати будь-яке число предметів із наявних. Знайти ймовірності таких подій: $A=$ {усі предмети дістануться одному із учасників}, $B=$ {певна особа не отримає жодного предмета}.

Відповідь: $P(A)=\dfrac{1}{n^{m-1}}$, $P(B)=\left(1-\dfrac{1}{m}\right)^{n}$.

66. До чотиристороннього перехрестя з кожного боку під'їхало по одному автомобілю. Кожен автомобіль може з однаковою ймовірністю здійснити один із чотирьох маневрів на перехресті: розвернутися й поїхати назад, поїхати прямо, ліворуч або праворуч. Через певний час усі автомобілі залишили перехрестя. Знайти ймовірності таких подій: A={автомобілі роз'їдуться вулицями попарно}, B = {певною вулицею поїдуть два автомобілі}.

Відповідь: $P(A)$ = 9/64, $P(B)$ = 27/128.

67. До чотиристороннього перехрестя з кожного боку під'їхало по одному автомобілю. Кожен автомобіль може з однаковою ймовірністю поїхати прямо, ліворуч або праворуч (розворот на перехресті заборонено). Через певний час всі автомобілі залишили перехрестя. Знайти ймовірності таких подій: A = {автомобілі роз'їдуться вулицями попарно}, B = {певною вулицею поїдуть два автомобілі}. *Відповідь*: $P(A)$ = 4/27, $P(B)$ = 2/9.

15.2 Геометричні ймовірності

68. На перехресті встановлено автоматичний світлофор, у якому одну хвилину горить зелене світло й півхвилини – червоне, потім знову одну хвилину зелене й півхвилини – червоне і т.д. У випадковий момент часу до перехрестя під'їздить автомобіль. Яка ймовірність того, що він проїде перехрестя без зупинки? *Відповідь*: 2/3.

69. Яка ймовірність того, що сума трьох навмання взятих відрізків, довжина кожного з яких не більша за ℓ, буде більшою за ℓ? *Відповідь*: 5/6.

70. Всередині квадрата з вершинами (0;0), (0;1), (1;0), (1;1) навмання вибирається точка $M(x,y)$. Знайти ймовірність того, що для координат (x,y) точки M виконуватиметься умова: $x^2+y^2\le R^2,\quad R>0$.

Відповідь: $p = \begin{cases} \dfrac{\pi R^2}{4}, & 0 < R \le 1; \\ \sqrt{R^2 - 1} + R^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \arccos\dfrac{1}{R}\right), & 1 < R \le \sqrt{2}; \\ 1, & R > \sqrt{2}. \end{cases}$

71. Всередині квадрата з вершинами (0;0), (0;1), (1;0), (1;1) навмання вибирається точка $M(x, y)$. Знайти ймовірність того, що для координат (x, y) точки M виконуватиметься умова: $xy < R, \quad R > 0$.

Відповідь: $p = \begin{cases} R(1 - \ln R), & 0 < R \le 1; \\ 1, & R > 1. \end{cases}$

72. Всередині квадрата з вершинами (0;0), (0;1), (1;0), (1;1) навмання вибирається точка $M(x, y)$. Знайти ймовірність того, що для координат (x, y) точки M виконуватиметься умова: $\max\{x, y\} < R, \quad R > 0$.

Відповідь: $p = \begin{cases} R^2, & 0 < R \le 1; \\ 1, & R > 1. \end{cases}$

73. Всередині квадрата з вершинами (0;0), (0;1), (1;0), (1;1) навмання вибирається точка $M(x, y)$. Знайти ймовірність того, що для координат (x, y) точки M виконуватиметься умова: $\min\{x, y\} < R, \quad 0 \le R \le 1$.

Відповідь: $p = R(2 - R)$.

74. Промінь локатора пересувається в горизонтальній площині зі сталою кутовою швидкістю. Яка ймовірність того, що ціль буде виявлено в кутовому секторі α радіан, якщо поява цілі в будь-якому напрямку є однаково можливою? *Відповідь*: $\alpha / 2\pi$.

75. Яка ймовірність, не прицілюючись, поцілити нескінченно малою кулею в прути квадратної решітка, якщо товщина прутів дорівнює a, а відстань між осями дорівнює ℓ ($\ell > a$)? *Відповідь*: $\frac{a}{\ell}(2 - \frac{a}{\ell})$.

76. На поверхні кулі беруть навмання дві точки й з'єднують найменшою дугою. Знайти ймовірність того, що дуга не перевищить α радіан.

Відповідь: $\sin^2 \alpha / 2$.

77. Яка ймовірність того, що випадково вибрана на глобусі точка лежить: а) за полярним кругом (66°33′ північної широти); б) між 60° і 30° північної широти; в) між 10° і 40° західної довготи?

Відповідь: а) $\approx 0{,}08$; б) $\sqrt{3}/4 \approx 0{,}433$; в) $\pi/12$.

78. Іван з Петром домовилися про зустріч у певному місці між одинадцятою та дванадцятою годинами. Кожен із них може прийти в будь-який момент зазначеного проміжку часу й чекає на іншого до закінчення часу, але не більше ніж 15 хвилин, після чого залишає місце зустрічі. Якщо через x позначити час приходу Петра, а через y – Івана, то пара чисел (x, y) показує, чи відбулася зустріч між ними (час відраховуємо у хвилинах, починаючи з 11 години). Знайти ймовірність події $A =$ {зустріч відбулася}. *Відповідь*: $p = 7/16$.

79. Іван із Петром домовилися про зустріч у певному місці між одинадцятою та дванадцятою годинами. Кожен із них може прийти в будь-який момент вказаного проміжку часу й чекає на іншого до закінчення часу, але не більше ніж 15 хвилин, після чого залишає місце зустрічі. Якщо через x позначити час приходу Петра, а через y – Івана, то пара чисел (x, y) показує, чи відбулася зустріч між ними (час відраховуємо у хвилинах, починаючи з 11 години). Знайти ймовірність події $C =$ {Івану не довелося чекати Петра}. *Відповідь*: $p = 7/32$.

80. Іван з Петром домовилися про зустріч у певному місці між одинадцятою та дванадцятою годинами. Кожен із них може прийти в будь-який момент вказаного проміжку часу й чекає на іншого до закінчення часу, але не більше ніж 15 хвилин, після чого залишає місце зустрічі. Якщо через x позначити час приходу Петра, а через y – Івана, то пара чисел (x, y) показує, чи відбулася зустріч між ними (час відраховуємо у хвилинах, починаючи з 11 години). Знайти ймовірність події $D =$ {зустріч відбулася після 11 год. 30 хв.}. *Відповідь*: $p = 1/4$.

81. Іван з Петром домовилися про зустріч у певному місці між одинадцятою та дванадцятою годинами. Кожен із них може прийти у будь-який момент вказаного проміжку часу і чекає на іншого до закінчення часу, але не більше ніж 15 хвилин, після чого залишає місце зустрічі. Якщо через x позначити час приходу Петра, а через y – Івана, то пара чисел (x, y) показує, чи відбулася зустріч між ними (час відраховуємо у хвилинах, починаючи з 11 години). Знайти ймовірність події $E =$ {Іван запізнився на зустріч}.

Відповідь: $p = 9/32$.

82. Іван з Петром домовилися про зустріч у певному місці між одинадцятою та дванадцятою годинами. Кожен із них може прийти в будь-який момент вказаного проміжку часу й чекає на іншого до закінчення часу, але не більше ніж 15 хвилин, після чого залишає місце зустрічі. Якщо через x позначити час приходу Петра, а через y – Івана, то пара чисел (x, y) показує, чи відбулася зустріч між ними (час відраховуємо у хвилинах, починаючи з 11 години). Знайти ймовірність події $F =${зустріч відбулася, коли до закінчення часу залишалося менше ніж 5 хвилин}. *Відповідь*: $p = 1/24$.

83. Два пароплави повинні підійти до однієї й тієї ж пристані. Час прибуття двох пароплавів незалежний і рівноможливий упродовж однієї доби. Визначити ймовірність того, що одному з пароплавів доведеться чекати на звільнення пристані, якщо час стоянки першого пароплава – одна година, а другого – дві години. *Відповідь*: 139/1152.

84.* (*Задача Бюффона*). На площину, розкреслену паралельними прямими лініями, що знаходяться на відстані $2a$ одна від одної, навмання кидається голка довжиною $2l$. Яка ймовірність того, що голка перетне одну із паралельних прямих, якщо $l \le a$? *Відповідь*: $2l/(\pi \cdot a)$.

15.3 Умовні ймовірності. Залежність та незалежність подій

Через $P_B(A)$ або $P(A/B)$ позначаємо ймовірність події A, за умови, що подія B уже відбулась.

Нагадуємо, що коли події A і B *незалежні*, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ *незалежні сукупно*, якщо для будь-якого набору m подій $(m = 2, 3, \dots, n)$ виконується рівність

$$P(A_{k_1} A_{k_2} \dots A_{k_m}) = P(A_{k_1}) \cdot P(A_{k_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{k_m}),\ k_m \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

85. Із урни, що містить 3 білих та 7 червоних кульок, навмання послідовно й без повернення беруть дві кульки. Розглянемо події: $A =${перша кулька біла}, $B =${друга кулька біла}, $C =${принаймні одна із двох взятих кульок біла}. Знайти ймовірності $P_A(B)$, $P_B(A)$, $P_C(A)$. *Відповідь*: $P_A(B) = 2/9$, $P_B(A) = 2/9$, $P_C(A) = 9/16$.

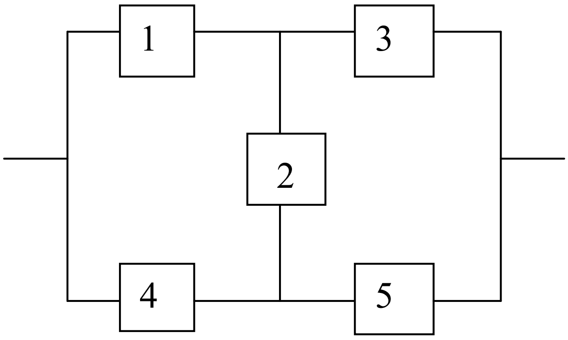
86. Гральний кубик підкидають один раз. Позначимо події: $A =${випало просте число очок}, $B =${випало парне число очок}. Знайти ймовірність $P_B(A)$. *Відповідь*: $P_B(A) = 1/3$.

87. Імовірність поцілити в літака дорівнює 0,4, а ймовірність його збити

дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що при влучанні в літака його буде збито. *Відповідь*: 1/4.

88. Імовірність того, що прилад не відмовить до моменту часу t_1, дорівнює 0,8, а ймовірність того, що він не відмовить до моменту часу t_2 $(t_2 > t_1)$, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що прилад, який не відмовив до моменту часу t_1, не відмовить і до моменту часу t_2. *Відповідь*: 3/4.

89. Електрична схема складається із елементів, кожен із яких в момент



вмикання з рівною ймовірністю може або проводити, або не проводити струм. Стан кожного з елементів не впливає на стан решти. Введемо наступні події: C={коло проводить струм}, A_i={i-й елемент проводить струм}, i = 1,2,...,5. Обчислити $P_C(A_1)$ і $P_C(A_2)$.

Відповідь: $P_C(A_1)$ = 11/32, $P_C(A_2)$ = 9/16.

90. У сім'ї двоє дітей. Вважаючи, що народження хлопчика й дівчинки – незалежні й рівноймовірні події, обчислити ймовірність того, що обидві дитини – хлопчики, якщо відомо, що в сім'ї є хлопчик.

91. Із множини чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ за схемою випадкового вибору без повернення беруть три числа. Знайти умовну ймовірність того, що третє число потрапить у інтервал, утворений двома першими, коли відомо, що перше число менше за друге. *Відповідь*: 1/3.

92. Навмання підкидають три гральних кубики. Нехай події: $A =$ {на трьох кубиках випаде різна кількість очок}, $B =$ {принаймні на одному із кубиків випаде шістка}. Знайти $P_A(B)$ та $P_B(A)$.

Відповідь: $P_A(B) = 0,5$, $P_B(A) = 60/91$.

93. Із колоди в 36 карт навмання беруть одну карту. Розглянемо події: $A =$ {взята карта − туз}, $B =$ {взято карту чорної масті}, $F =$ {взята карта – фігура, тобто є валетом, або дамою, або королем, або тузом}. З'ясувати, чи є залежними такі три пари подій: A і B, A і F, F і B. *Відповідь*: A і B, F і B незалежні. A і F залежні.

94. Навмання підкидають три гральних кубики. З'ясувати, чи є залежними події : $A =$ {з'явиться не менше ніж дві одиниці}, $B =$ {з'явиться не більше ніж

дві шістки}. Знайти $P_A(B)$. *Відповідь*: Залежні. $P_A(B)=1/4$.

95. Тетраедр, три грані якого пофарбовано відповідно в червоний, жовтий і синій кольори, а четверта грань містить всі три кольори, кидається навмання на площину. Події *K*, *C* і *S* полягають у тому, що тетраедр впав на грань, яка містить відповідно червоний, жовтий або синій колір. Довести, що вказані події попарно незалежні, але не є незалежними сукупно.

96. Із 100 студентів, які знаходяться в аудиторії, 50 знають англійську мову, 40 – французьку і 35 – німецьку. Англійську і французьку знають 20 студентів, англійську і німецьку – 8, французьку й німецьку –10. Усі три мови знають п'ятеро. Один із студентів вийшов із аудиторії. Розглянемо події: *E*={той, що вийшов знає англійську мову}, *F*={той, що вийшов знає французьку мову}, *D*={той, що вийшов знає німецьку мову}.

а) вказати всі пари незалежних подій;

б) з'ясувати, чи є події *E*, *D*, *F* незалежні сукупно.

Відповідь: а) *E* і *F* незалежні; б) не є.

97. У ящику лежать 12 червоних, 8 зелених і 10 синіх кульок. Навмання виймають дві кульки. Знайти ймовірність того, що буде вийнято кульки різного кольору, за умови, що не вийнято синю кульку. *Відповідь*: 48/95.

98. На шахову дошку навмання ставиться 2 слони – білий і чорний. Яка ймовірність того, що слони не поб'ють один одного, за умови, що білий слон потрапить на одне з крайніх полів дошки? *Відповідь*: 8/9.

99. Відомо, що 5 % усіх чоловіків і 0,25 % усіх жінок – дальтоніки. На обстеження прибула однакова кількість чоловіків і жінок. Навмання вибрана особа виявилась дальтоніком. Яка ймовірність того, що це чоловік? *Відповідь*: 20/21.

100. На шахову дошку навмання ставлять дві тури. Обчислити $P_A(B)$, якщо $A=${тури потраплять на клітини різного кольору}, $B=${тури поб'ють одна одну}. *Відповідь*: $P_A(B)=1/4$.

101. У продукції заводу брак складає 5 % від загальної кількості виготовлених деталей. Для контролю відібрано 20 деталей. Яка ймовірність того, що серед відібраних деталей є принаймні одна бракована? *Відповідь*: $p\approx 0,64$.

102. Із 100 студентів, які знаходяться в аудиторії, 50 осіб знають англійську мову, 40 – французьку й 35 – німецьку. Англійську й французьку знають 20 студентів, англійську й німецьку – 8, французьку й німецьку –10. Всі три мови знають п'ять осіб. Один із студентів вийшов із аудиторії. Обчислити ймовірності таких подій: *A*={той, хто вийшов знає або англійську мову або

французьку}, B ={той, хто вийшов не знає жодної мови}.
Відповідь: $P(A)=0,7$, $P(B)=0,08$.

103. Із урни, що містить 6 білих та 4 чорних кульки, навмання й послідовно виймають по одній кульці до появи чорної кульки. Знайти ймовірність того, що доведеться проводити четверте виймання, якщо вибірка проводиться: а) з поверненням; б) без повернення. *Відповідь*: а) $0,216$; б) $1/6$.

104. Із колоди в 36 карт навмання беруть одну карту. Розглянемо події: $A=${взята карта − туз}, $B=${взято карту чорної масті}, $F=${взята карта – фігура, тобто є валетом, або дамою, або королем, або тузом}. Обчислити ймовірності подій BF, AF і ABF. *Відповідь*: $P(BF)=2/9$, $P(AF)=1/9$, $P(ABF)=1/18$.

105. Лише одним із n ключів можна відкрити двері. Знайти ймовірність того, що для відкривання дверей доведеться випробувати k ключів $(k\le n)$. *Відповідь*: $p=1/n$.

106. Студент може поїхати до університету або автобусом, який ходить через кожні 20 хв., або тролейбусом, який ходить через кожні 10 хв. Яка ймовірність того, що студент, який підійшов до зупинки, поїде до університету упродовж п'яти хвилин? *Відповідь*: 5/8.

107. Ймовірність влучання у мішень з одного пострілу для першого стрільця дорівнює p_1, для другого – p_2. Стрільці зробили по одному пострілу по мішені. Вважаючи влучання у мішень для кожного окремого стрільця подіями незалежними, знайти ймовірності таких подій: $A=${не сталось жодного влучання в мішень}, $B=${сталось точно одне влучання в мішень}.

Відповідь: $P(A)=(1-p_1)(1-p_2)$, $P(B)=p_1+p_2-2p_1p_2$.

108. Радист тричі викликає кореспондента. Ймовірність того, що кореспондент отримає перший виклик, дорівнює $0,2$, другий – $0,3$ і третій – $0,4$. Події, які полягають у тому, що будь-який виклик почуто чи не почуто є незалежними. Знайти ймовірність того, що кореспондент почує радиста.

Відповідь: $p=0,664$.

109. Ураження бойового літака може настати або в результаті ураження обох двигунів, або в результаті влучання в кабіну пілота. Позначимо події: H_1={уражено лівий двигун}, H_2={уражено правий двигун}, H_3={влучено у кабіну пілота}. Знайти ймовірність ураження літака, коли відомо, що $P(H_1)=P(H_2)=p_1$, $P(H_3)=p_2$. *Відповідь*: $1-(1-p_1^2)(1-p_2)$.

110. Статистика, зібрана серед студентів одного із ВНЗ, виявила такі факти: 60% усіх студентів займаються спортом, 40% беруть участь у науковій роботі на кафедрах і 20% займаються спортом і беруть участь у науковій роботі. Кореспондент місцевого радіо підійшов до навмання вибраного студента взяти інтерв'ю. Знайти ймовірності таких подій: $A =${студент займається принаймні одним із двох видів вказаної діяльності}, $B =${студент займається лише спортом}, $C =${студент займається лише одним із двох видів вказаної діяльності}. *Відповідь*: $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,4$, $P(C) = 0,6$.

111. Студент підготував 20 із 25 питань програми. Залік вважається складеним, якщо студент відповість не менш як на три з чотирьох поставлених у білеті запитань. Взявши білет, студент виявив, що він знає його перше питання. Яка ймовірність того, що студент склав залік? *Відповідь*: $228/253 \approx 0,901$.

112. Студенти виконують тестову контрольну роботу на комп'ютерах. Робота складається з трьох завдань. Для отримання позитивної оцінки достатньо розв'язати дві задачі. До кожної задачі подається п'ять різних відповідей, з яких лише одна правильна. Студент Коваль погано знає матеріал і тому вибирає всі відповіді навмання. Яка ймовірність того, що він отримає позитивну оцінку? *Відповідь*: 0,104.

113. Навмання кидають два гральних кубики. Знайти ймовірності таких подій: $A =${сума очок, які випали, є парною}, $B =${добуток очок, які випали, є парним}, $C =${на одному кубику випало парне число очок, на іншому – непарне}, $D =${на жодному із кубиків не випала шістка}.
Відповідь: $P(A) = 1/2$, $P(B) = 3/4$, $P(C) = 1/2$, $P(D) = 25/36$.

114. Цех виготовляє телевізори, з яких 70% – рідкокристалічні й 30% – плазмові. Відомо, що 50% всієї продукції відправляється на експорт. Із загальної кількості рідкокристалічних телевізорів, на експорт відправляється 40%. Знайти ймовірність того, що навмання взятий для контролю якості телевізор є плазмовим і він буде відправлений на експорт. *Відповідь*: 0,22.

115. Проводиться три повторних незалежних вимірювання деякої фізичної величини. Ймовірність того, що в одному вимірюванні (будь-якому) помилка вийде за межі допуску, дорівнює $0,1$. Знайти ймовірності таких подій: $A =${у всіх проведених вимірюваннях було досягнуто заданої точності}, $B =${не більше, ніж в одному вимірюванні помилка вийде за межі допуску}, $C =${принаймні у двох вимірюваннях підряд було досягнуто заданої точності}.

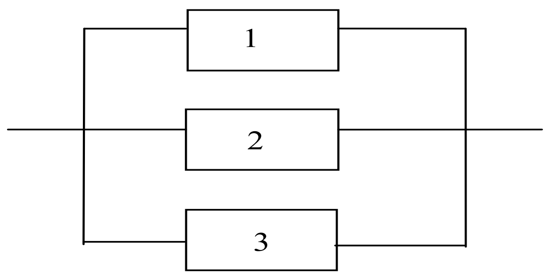
Відповідь: $P(A) = 0,729$, $P(B) = 0,972$, $P(C) = 0,891$.

116. (*задача де Мере*). Скільки разів треба кинути пару гральних кубиків, щоб з імовірністю не меншою, ніж 0,5, хоча б один раз з'явилася сума очок, що дорівнює 12? *Відповідь*: $n \geq 25$.

117. Літак складається з трьох різних за вразливістю частин: 1) кабіни пілота й двигунів, 2) паливних баків, 3) планера. Для ураження літака достатньо одного влучання у першу частину, двох влучань у другу частину або трьох влучань у третю. При влучанні в літака одного снаряда, він з імовірністю p_k і незалежно від інших влучає в k-у частину ($k = 1, 2, 3$). Літак обстріляно. Події: A = {у літака влучили 3 снаряди}, B = {літак уражено}. Знайти умовну ймовірність $P_A(B)$. *Відповідь*: $1 - 3p_2p_3^2$.

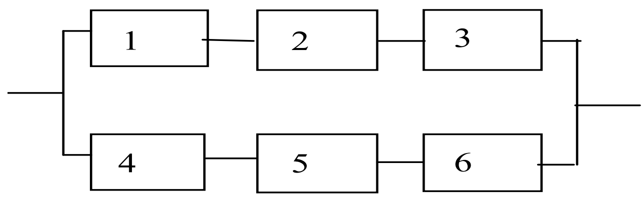
У наступних задачах наведено схеми з'єднання елементів, що утворюють коло з одним входом і одним виходом. Припускаємо, що відмови елементів є сукупно незалежними подіями. Вважаємо відомою надійність p_k k-го елемента (відповідно $q_k = 1 - p_k$ – ймовірність його відмови). Відмова будь-якого з елементів призводить до розриву сигналу у тій ділянці кола, де знаходиться вказаний елемент. Обчислити надійність p кожної зі схем.

118.



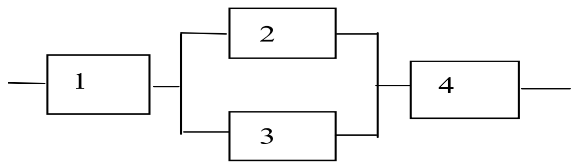
Відповідь: $1 - q_1q_2q_3$.

119.



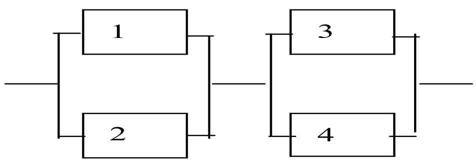
Відповідь: $1 - (1 - p_1p_2p_3)(1 - p_1p_2p_3)$

120.



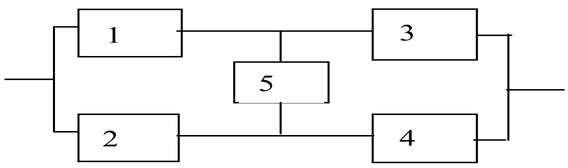
Відповідь: $p_1 p_4 (1 - q_2 q_3)$.

121.



Відповідь: $(1 - q_1 q_2)(1 - q_3 q_4)$.

122.



Відповідь: $p_5 (1 - q_1 q_2)(1 - q_3 q_4) + q_5 (p_1 p_3 + p_2 p_4 - p_1 p_2 p_3 p_4)$.

123. Іван та Петро по черзі кидають монету. Виграє той, у кого раніше з'явиться герб. Іван кидає першим. Знайти ймовірності p_1 і p_2 виграшу для кожного з гравців, вважаючи, що кидання монети може продовжуватися необмежено довго. *Відповідь*: $p_1 = 2/3$, $p_2 = 1/3$.

124. Іван та Петро по черзі кидають монету. Виграє той, у кого раніше з'явиться герб. Іван кидає першим. Знайти ймовірності p_1 і p_2 виграшу для кожного із гравців, вважаючи, що гра обмежена десятьма киданнями для кожного із гравців. Якщо герб не з'явиться у Івана аж до його десятого кидання, то вважається, що виграв Петро. *Відповідь*: $p_1 = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right) \approx \frac{2}{3}$,

$$p_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx \frac{1}{3}.$$

125. З'ясувати, чи можна зробити гру у задачі 124 справедливішою, якщо Петру дозволити більше кидків, коли наступає його черга. Обчислити

ймовірність виграшу для Івана, якщо Петру дозволяється робити 2 кидки під час його підходу, а загальне число кидків необмежене.

Відповідь: p_1=4/7, p_2=3/7.

126. У театральній касі на певний момент часу залишилося: 1 квиток у театр естради, 2 квитки в драматичний театр і 3 квитки в театр комедії. Кожен черговий покупець купує лише один квиток з однаковою ймовірністю в будь-який з можливих театрів. Дві людини з черги послідовно купили квитки. Знайти ймовірності подій: $A=\{$квитки куплено в різні театри$\}$, $B=\{$квитки куплено в якийсь один театр$\}$. *Відповідь*: $P(A)=7/9$, $P(B)=2/9$.

127. У театральній касі на певний момент часу залишилося: 1 квиток у театр естради, 2 квитки в драматичний театр і 3 квитки в театр комедії. Кожен черговий покупець купує лише один квиток з однаковою ймовірністю в будь-який з можливих театрів. Дві людини з черги послідовно купили квитки. Знайти ймовірності подій: $A=\{$усі квитки в театр естради продано$\}$, $B=\{$квиток у театр комедії куплено раніше, ніж у театр естради$\}$.

Відповідь: $P(A)=5/9$, $P(B)=4/9$.

128. За деякий проміжок часу амеба може загинути з імовірністю 1/4, вижити з імовірністю 1/4 і поділитися на дві з імовірністю 1/2. Далі за той самий час із кожною амебою незалежно від її “походження” відбувається те саме. Скільки амеб і з якими ймовірностями може існувати до кінця другого проміжка часу? *Відповідь*: можуть існувати 0, 1, 2, 3, 4 амеби відповідно з імовірностями 11/32, 4/32, 9/32, 4/32, 4/32.

129*. (*задача про неуважну секретарку*). Одна секретарка написала n ділових листів, вклала їх у конверти й через розгубленість написала адреси випадково. Яка ймовірність p_n того, що хоча б один із листів дійде за призначенням? Оцінити p_n для $n=5$ і $n=10$. *Відповідь*: $p_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}$, $p_5=\frac{19}{30}$, $p_{10}=1-e^{-1}+R_{11}\approx 0,649$, де R_{n+1} – залишковий член розкладу в ряд Тейлора функції e^x в точці $x=-1$.

130. Журі складається з трьох суддів. Перший та другий суддя приймають правильне рішення незалежно один від одного з імовірністю p, а третій суддя для прийняття рішення кидає монету. Остаточне рішення журі приймає за більшістю голосів. Яка ймовірність того, що журі прийме правильне рішення? *Відповідь*: p.

131. Журі складається з трьох суддів. Всі троє членів журі приймають

правильне рішення незалежно один від одного з імовірністю p. Яким повинно бути p, щоб це журі приймало правильне рішення з більшою ймовірністю, ніж журі в попередній задачі? *Відповідь*: $p > 1/2$.

132. Журі складається з трьох суддів. Перший та другий суддя приймають правильне рішення незалежно один від одного з імовірністю p, а третій суддя чинить так: якщо двоє перших суддів приймають однакове рішення, то він до них приєднується, якщо ж рішення двох перших суддів різні, то третій суддя кидає монету. Яка ймовірність прийняття правильного рішення таким журі? *Відповідь*: p.

15.4 Формула повної ймовірності

133. Партія мобільних телефонів, з яких 10% мають вади, надійшла для перевірки. Ваду виявляють з імовірністю 0,95, проте з імовірністю 0,03 справний телефон можуть визнати несправним. Яка ймовірність того, що навмання вибраний із партії телефон буде визнано несправним. *Відповідь*: $p = 0{,}122$.

134. Прилад, встановлений на борту літака, може працювати у двох режимах: у режимі нормального крейсерського польоту й в режимі перевантаження (при злеті та посадці). Нормальний режим триває 80 % усього часу польоту, режим перевантаження – 20 %. Імовірність поломки приладу в нормальному режимі дорівнює 0,1, а в режимі перевантажень – 0,4. Обчислити надійність приладу за час польоту. *Відповідь*: $p = 0{,}84$.

135. У продаж надходять телевізори трьох заводів. Продукція першого заводу містить 20 % телевізорів із прихованими вадами, другого – 10 %, а третього – 5 %. Яка ймовірність придбати справний телевізор, якщо до магазину надійшло 30 % телевізорів із першого заводу, 20 % – з другого та 50 % – з третього? *Відповідь*: $p = 0{,}895$.

136. Два цехи штампують однотипні деталі. Перший цех дає $\alpha\%$ браку, а другий – $\beta\%$. Для контролю відібрано n_1 деталей з першого цеху та n_2 деталей з другого. Ці $n_1 + n_2$ деталей змішують в одну партію і з неї навмання беруть одну деталь. Яка ймовірність того, що вона бракована?

Відповідь: $p = \dfrac{\alpha n_1 + \beta n_2}{100(n_1 + n_2)}$.

137. Під час переливання крові потрібно враховувати групу крові донора і хворого. Людині, яка має четверту групу крові, можна перелити кров будь-якої групи; людині з другою або третьою групою крові можна перелити кров або тієї

ж групи, або першої групи; людині з першою групою крові можна перелити лише кров першої групи. Серед населення 33,7 % мають першу групу, 37,5 % − другу, 20,9 % − третю й 7,9 % − четверту групи крові. Знайти ймовірність того, що випадково взятому хворому можна перелити кров випадково взятого донора. *Відповідь*: ≈0,574.

138. На рис. 15.1 зображено схему доріг. Туристи виходять із пункту B_1, вибираючи щоразу на роздоріжжі навмання дорогу для подальшого руху. Яка ймовірність того, що вони потраплять в пункт B_2? *Відповідь*: 67/120.

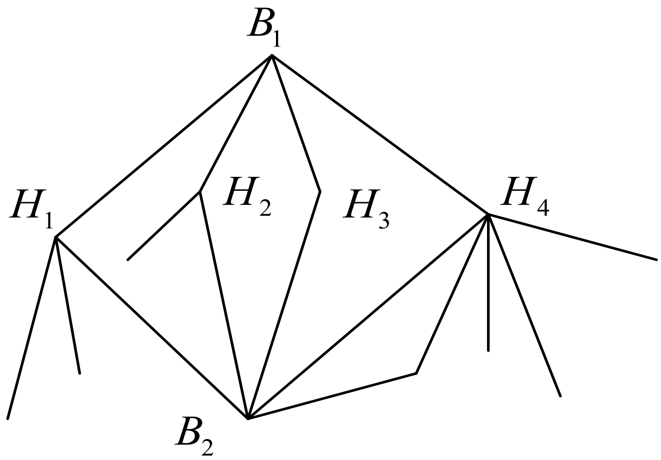


Рис. 15.1

139. У ящику лежать 20 тенісних м'ячів, з яких 15 нових та 5 не нових. На гру навмання беруть 2 м'ячі і після гри повертають назад. Потім для наступної гри також навмання знову беруть два м'ячі. Яка ймовірність того, що друга гра буде проводитись новими м'ячами? *Відповідь*: 0,445.

140. Із десяти студентів, що прийшли складати екзамен із теорії ймовірностей і взяли білети, Іванчук та Петренко засвоїли матеріал 20 білетів із 30, Сидоренко навчався погано й засвоїв матеріал лише 15 білетів, решта студентів знають всі 30 білетів. Екзаменатор навмання викликає відповідати одного з студентів. Яка ймовірність того, що студент склав екзамен, якщо знання білета гарантує складання екзамену з імовірністю 0,85, а при незнанні білета можна скласти екзамен лише з імовірністю 0,1? *Відповідь*: 0,763.

141. У двох скриньках знаходиться 6 кульок, із яких три білих та три чорних. Навмання вибирається одна скринька, а з неї – одна кулька. Як потрібно розкласти кульки по скриньках, щоб імовірність події $A = \{$взята кулька є білою$\}$ була максимальною? *Відповідь*: В одну скриньку покласти одну білу кульку, а в іншу – 2 білих та 3 чорних. $P_{\max}(A) = 0,7$.

142**. Для пошуку родовищ нафти на заданій території організовано n геологорозвідувальних партій, кожна з яких незалежно від інших виявляє родовища з імовірністю p. Після обробки й аналізу сейсмографічних записів всю територію було поділено на 2 райони. У першому районі нафта може залягати з імовірністю p_1, а в другому з імовірністю $1-p_1$. Як треба розподілити n геологорозвідувальних партій за двома районами, аби ймовірність виявлення нафти була максимальною? *Відповідь*: У перший район треба відправити m_0 геологорозвідувальних партій, де m_0- ціле число, найближче до числа $\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-p_1}{p_1}$. Нехай подія $A=${хоча б одна із n відправлених геологорозвідувальних партій виявила нафту на заданій території}. Показати, що $P(A)$ = $=1-p_1(1-p)^m-(1-p_1)(1-p)^{n-m}$, де $m-$ число геологорозвідувальних партій, відправлених в перший район. Далі треба розглянути функцію $f(x)=1-p_1(1-p)^x-(1-p_1)(1-p)^{n-x}$ і знайти її максимум, коли $x\in[0;n]$.

143. Із повної колоди в 52 карти навмання послідовно і без повернення вибирають дві карти. Яка ймовірність того, що другою картою можна побити першу? (Це означає, що друга карта повинна бути старшою й тієї самої масті). *Відповідь*: $p=2/17$.

144. Програма екзамену має 30 різних питань, з яких студент Петренко засвоїв лише 15. Для успішного складання екзамену достатньо відповісти на 2 запропонованих запитання або на одне з них та на одне додаткове. Яка ймовірність того, що студент Петренко успішно складе іспит? *Відповідь*: 1/2.

145. На шахову дошку навмання ставлять двох слонів, білого й чорного. Яка ймовірність того, що слони поб’ють один одного? *Відповідь*: 5/36.

146. Студент Мельник засвоїв лише 10 із 25 екзаменаційних білетів. У якому разі шанси Мельника отримати засвоєний білет вищі: коли він у черзі за білетом стоїть першим чи другим? *Відповідь*: Шанси однакові.

15.5 Формула Бейєса

147. Партія смартфонів, серед яких 10% мають дефект, надійшла для перевірки. Дефект виявляють з імовірністю 0,95, проте з імовірністю 0,03 справний смартфон можуть визнати несправним. Навмання вибраний із партії смартфон було визнано несправним. Яка ймовірність того, що насправді смартфон є справним? *Відповідь*: 0,221.

148. У скриньці лежить куля невідомого кольору – з однаковою ймовірністю біла або чорна. У скриньку опускають одну білу кулю й після ретельного перемішування навмання виймають одну кулю. Вона виявилась білою. Яка ймовірність того, що в скриньці залишилась біла куля? *Відповідь*: 2/3.

149. На вхід радіолокаційного пристрою з імовірністю 0,8 надходить суміш корисного сигналу із шумом, а з імовірністю 0,2 – лише шум. Якщо надходить корисний сигнал із шумом, то пристрій реєструє наявність якогось сигналу з імовірністю 0,7, якщо лише шум, − то з імовірністю 0,3. Відомо, що пристрій зареєстрував наявність якогось сигналу. Знайти ймовірність того, що в його складі є корисний сигнал. *Відповідь*: ≈ 0,903.

150. Прилад складається із двох послідовно ввімкнених вузлів. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи упродовж часу T) першого вузла дорівнює 0,9, другого – 0,8. За час випробування приладу упродовж часу T зареєстровано відмову приладу. Знайти ймовірносні таких подій: $A_1 =${відмовив лише перший вузол}, $A_2 =${відмовили обидва вузли}. *Відповідь*: $P(A_1) \approx 0,285$, $P(A_2) \approx 0,0714$.

151. Зі скриньки, що містить 3 білих та 7 червоних кульок, навмання послідовно й без повернення беруть дві кулі. Розглянемо події: $A =${перша куля біла}, $B =${друга куля біла}. Знайти ймовірність $P_B(A)$ за теоремою Бейєса, враховуючи, що $P_A(B) = 2/9$. *Відповідь*: $P_B(A) = 2/9$.

152. У коробці знаходяться два однакові за зовнішнім виглядом та вагою гральних кубики. Один із кубиків звичайний (правильний), при киданні якого кожна із граней випадає з однаковою ймовірністю. Інший із кубиків має зміщений центр ваги, за рахунок цього ймовірність випадання шістки дорівнює 1/3, одиниці – 1/9, решта цифр мають однакову ймовірність випадання. Із коробки навмання взято кубик, у результаті підкидання якого випала шістка. Знайти ймовірність того, що було підкинуто правильний гральний кубик.

Відповідь: 1/3.

153. Три стрільці роблять по одному пострілу в одну й ту саму мішень. Ймовірності влучання для кожного із стрільців відповідно дорівнюють p_1, p_2, p_3. Яка ймовірність того, що другий стрілець схибив, коли після пострілів в мішені було виявлено два влучання?

Відповідь: $\dfrac{p_1 p_3 (1 - p_2)}{(1 - p_1) p_2 p_3 + (1 - p_2) p_1 p_3 + (1 - p_3) p_1 p_2}$.

154. Однотипні прилади виготовляються трьома заводами у кількісному

відношенні $n_1 : n_2 : n_3$, причому ймовірності браку для кожного із заводів відповідно дорівнюють $p_1,\ p_2,\ p_3$. Прилад, придбаний науково-дослідним інститутом, виявився бракованим. Яка ймовірність того, що придбаний прилад виготовлено першим заводом? *Відповідь*: $\dfrac{n_1 p_1}{n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3}$.

155. Число бракованих мікросхем на 1000 штук апріорі вважається рівноможливим від 0 до 3. Навмання апробовані 100 мікросхем, виявились справними. Яка ймовірність того, що всі мікросхеми справні? *Відповідь*: $\approx 0{,}29$.

156. У групі з 25 студентів, що прийшли складати екзамен із теорії ймовірностей, є 10 відмінників, 7 підготовлених добре, 5 – задовільно та 3 особи підготовлені погано. Відмінники знають усі 25 питань програми, добре підготовлені – 20, підготовлені задовільно – 15, і погано підготовлені знають лише 10 питань. Викликаний навмання студент відповів на два заданих запитання. Знайти апостеріорні ймовірності гіпотез: $H_1 = \{$студент підготовлений відмінно або добре$\}$, $H_2 = \{$студент підготовлений задовільно$\}$, $H_3 = \{$студент підготовлений погано$\}$.

Відповідь: $P_A(H_1) \approx 0{,}8677$, $P_A(H_2) \approx 0{,}1052$, $P_A(H_3) \approx 0{,}0271$.

157*. Астрономічний об’єкт, за яким ведеться спостереження, може знаходитись у одному з двох станів: H_1 та H_2. Апріорні ймовірності цих станів $P(H_1) = 0{,}6,\ P(H_2) = 0{,}4$. Спостереження ведеться незалежно двома обсерваторіями. Перша обсерваторія, зазвичай, дає правильні відомості про стан об’єкта у 90 % випадків, а в 10 % помиляється; друга дає правильні відомості у 80 % випадків, а в 20 % помиляється. Перша обсерваторія повідомила, що об’єкт знаходиться у стані H_1, а друга – що він у стані H_2. Знайти апостеріорну ймовірність стану H_1. *Відповідь*: $135/139 \approx 0{,}971$.

158. Розслідуються причини невдалого запуску космічної ракети, щодо якого можна висунути чотири припущення (гіпотези): H_1, H_2, H_3 або H_4. За даними статистики $P(H_1) = 0{,}2,\ P(H_2) = 0{,}4,\ P(H_3) = 0{,}3,\ P(H_4) = 0{,}1$. У ході розслідування з’ясувалося, що під час запуску сталось витікання пального (подія A). Умовні ймовірності події A, згідно з тією ж статистикою, дорівнюють: $P(A/H_1 = 0{,}9)$, $P(A/H_2) = 0$, $P(A/H_3) = 0{,}2$, $P(A/H_4) = 0{,}3$. Яка із гіпотез найімовірніша за даних умов? *Відповідь*: H_1.

159. По каналу зв'язку передається цифровий текст, що містить лише цифри 1, 2, 3, які можуть з'являтися в тексті з однаковою ймовірністю. Кожна цифра, що передається, у силу наявності шумів приймається правильно з імовірністю p і з імовірністю $\frac{1}{2}(1-p)$ приймається за яку-небудь іншу цифру. Вважається, що цифри «викривлюються» незалежно. Знайти ймовірність того, що було передано число 111, тоді як прийнято число 123.

Відповідь: $p(1-p)^2/4$.

160. Припустимо, що надійність виявлення туберкульозу під час рентгенівського просвічування грудної клітини складає 90% (тобто 10 % носіїв туберкульозу залишаються нерозпізнаними). Ймовірність того, що у здорової людини помилково буде виявлено туберкульоз складає 1 %. Просвічуванню підлягає велика група людей із середнім процентом хворих, що дорівнює 0,1 %. Яка ймовірність того, що людина, яку визнано хворою, насправді є носієм туберкульозу? *Відповідь*: $\approx 0{,}0826$.

15.6 Розподіли та числові характеристики випадкових величин

Під час розв'язку задач необхідно користуватись підручниками [12-16] .

Для випадкової величини X позначаємо через:

$m_X = M(X)$ – математичне сподівання,

$D_X = D(X)$ – дисперсію,

$\sigma_X = \sigma(X)$ – середнє квадратичне відхилення (стандартне відхилення),

d_X – моду,

h_X – медіану,

ν_r – початковий момент r –го порядку,

μ_r – центральний момент r –го порядку,

a_X – коефіцієнт асиметрії,

e_X – коефіцієнт ексцесу,

x_p – критична точка порядку p ($\frown{x}_p$ – симетрична критична точка порядку p),

t_p – квантиль порядку p ($\frown{t}_p$ – симетричний квантиль порядку p).

Квантиль та критична точка одного й того самого розподілу пов'язані простим співвідношенням: $x_p = t_{1-p}$.

$\rho(X,Y)$ – коефіцієнт кореляції випадкових величин X,Y.

161. Довести, що для дисперсії $D(X)$ випадкової величини X справедлива формула: $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$.

162. Ряд розподілу дискретної випадкової величини X має вигляд:

X	1	2	3	4
P	$1/16$	$1/4$	$1/2$	$3/16$

Знайти $M(X)$ та $P(X>2)$. *Відповідь*: $M(X)=45/16$, $P(X>2)=11/16$.

163. Ряд розподілу дискретної випадкової величини Y має вигляд:

Y	1	2	3	4
P	$1/16$	$1/4$	$1/2$	$3/16$

Знайти $D(Y)$ та d_Y. *Відповідь*: $D(Y)=167/256$, $d_Y=3$.

164. Ряд розподілу дискретної випадкової величини X має вигляд:

X	1	3	5	7	9
P	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Знайти початкові та центральні моменти перших чотирьох порядків в. в. X. *Відповідь*: $\nu_1=4{,}6;\ \nu_2=26{,}6;\ \nu_3=177{,}4;\ \nu_4=1293{,}8.\ \mu_1=0;$

$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2=5{,}44;\ \mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3=4{,}992;$

$\mu_4=\nu_4-4\nu_1\nu_3+6\nu_1^2\nu_2-3\nu_1^4=64{,}55.$

165. Ряд розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	1	3	5	7	9
P	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Визначити ексцес та асиметрію розподілу випадкової величини X.

Відповідь: $e_X=\dfrac{\mu_4}{\sigma_X^4}-3=-0{,}82$, $a_X=\dfrac{\mu_3}{\sigma_X^3}=0{,}394$. *Вказівка*: скористатися результатами попередньої задачі, враховуючи, що $\sigma_X=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\mu_2}$.

166. Дано функцію

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x<0; \\ ax^2, & \text{коли} \quad 0\le x<1; \\ a(2-x)^2, & \text{коли} \quad 1\le x<2; \\ 0; & \text{коли} \quad x>2. \end{cases}$$

За якого значення a функція $f(x)$ є функцією щільності розподілу ймовірностей випадкової величини X? *Відповідь*: $a=3/2$.

167. Диференціальна функція розподілу в. в. X має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & коли \quad x<0; \\ \dfrac{3}{2}x^2, & коли \ \ 0\le x<1; \\ \dfrac{3}{2}(2-x)^2, & коли \ 1\le x<2; \\ 0; & коли \quad x>2. \end{cases}$$

Знайти початкові та центральні моменти перших чотирьох порядків, а також асиметрію та ексцес. *Відповідь*: $\nu_1=1$; $\nu_2=1{,}1$; $\nu_3=1{,}3$; $\nu_4=1\dfrac{22}{35}$. $\mu_1=0$; $\mu_2=\nu_2-\nu_1^2=0{,}1$; $\mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3=0$ (це означає, що крива розподілу $f(x)$ має вертикальну вісь симетрії); $\mu_4=\nu_4-4\nu_1\nu_3+6\nu_1^2\nu_2-3\nu_1^4=1/35$. Тоді дисперія $D(X)=\mu_2=0{,}1$, звідки середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}1}=0{,}316$. $a_X=\mu_3/\sigma_X^3=0$, $e_X=\mu_4/\sigma_X^4-3=-1/7$.

168. Ряд розподілу дискретної випадкової величини X має вигляд:

X	2	4	6	8
P	0,4	0,3	0,2	0,1

Знайти початкові та центральні моменти перших чотирьох порядків, а також визначити асиметрію та ексцес.

Відповідь: $\nu_1=4$; $\nu_2=20$; $\nu_3=116{,}3$; $\nu_4=752$. $\mu_1=0$; $\mu_2=4$; $\mu_3=4{,}8$; $\mu_4=35{,}2$. $e_X=-0{,}8$; $a_X=0{,}6$.

169. Щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & коли \quad x<0; \\ x, & коли \ \ 0\le x<1; \\ (2-x), & коли \ 1\le x<2; \\ 0; & коли \quad x\ge 2. \end{cases}$$

Знайти початкові та центральні моменти перших чотирьох порядків, визначити асиметрію та ексцес. *Відповідь*: $\nu_1=1$; $\nu_2=7/6$; $\nu_3=3/2$; $\nu_4=31/15$. $\mu_1=0$; $\mu_2=1/6$; $\mu_3=0$; $\mu_4=1/15$. $e_X=-0{,}6$; $a_X=0$.

170. Довести, що для будь-яких випадкових величин X,Y коефіцієнт кореляції $\rho(X,Y)$ задовольняє умову: $|\rho(X,Y)|\le 1$.

171. Довести, що коли випадкові величини X та Y лінійно залежні, тобто $Y = aX + b \ (a = const, b = const)$, то це рівносильно тому, що $|\rho(X,Y)| = 1$. Крім цього $a > 0 \Leftrightarrow \rho(X,Y) = 1$ і $a < 0 \Leftrightarrow \rho(X,Y) = -1$.

172. Нехай $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9, E_{10}$ – рівноможливі наслідки експерименту, у яких випадкові величини X, Y, Z набувають значень, заданих таблицею

Наслідки	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}
X	–6	–2	5	3	5	–2	0	5	1	0
Y	–7	4	6	0	–5	4	–7	0	–3	4
Z	10	0	7	–5	0	10	–5	1	–5	0

Знайти: а) $\rho(X,Y)$; б) $\rho(X,Z)$; в) $\rho(Y,Z)$. *Відповідь*: а) 0,95; б) –0,372; в) 0,42.

173. Ряд розподілу дискретної випадкової величини X має вигляд:

X	1	2	3	4
P	$1/16$	$1/4$	$1/2$	$3/16$

Побудувати графік інтегральної функції розподілу $F(x)$ випадкової величини X.

174. Функція розподілу д. в. в. X має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & коли \quad x \le 2; \\ 0,3, & коли \quad 2 < x \le 3; \\ 0,5, & коли \quad 3 < x \le 4; \\ 1, & коли \quad x > 4. \end{cases}$$

Обчислити $P(X \ge 3,5)$ та $P(|X| < 2,5)$.

Відповідь: $P(X \ge 3,5) = 1/2$, $P(|X| < 2,5) = 0,3$.

175. Функція розподілу д. в. в. X має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & коли \quad x \le 2; \\ 0,3, & коли \quad 2 < x \le 3; \\ 0,5, & коли \quad 3 < x \le 4; \\ 1, & коли \quad x > 4. \end{cases}$$

Записати закон розподілу в. в. X і знайти її числові характеристики $M(X)$ та $D(X)$. *Відповідь*: $M(X) = 3,2$, $D(X) = 0,76$,

X	2	3	4
P	0,3	0,2	0,5

176. Два стрільці незалежно один від одного роблять по одному пострілу в мішень. Ймовірність влучання в мішень для першого стрільця дорівнює p_1, для другого $-\, p_2$. Випадкова величина X – сумарне число влучань у мішень у даному експерименті. Записати закон розподілу в. в. X і знайти числові характеристики $M(X)$ та $D(X)$.

Відповідь: $M(X) = p_1 + p_2$, $D(X) = p_1q_1 + p_2q_2$ $(q_1 = 1 - p_1,\ q_2 = 1 - p_2)$,

X	0	1	2
P	q_1q_2	$p_1q_2 + p_2q_1$	p_1p_2

177. Один раз підкинули три однакових гральних кубики. Випадкова величина X набуває значення 1, коли хоча б на одному гральному кубику випаде шістка; набуває значення 0, коли шістка не випаде ні на жодній із граней, але хоча б на одній із граней з'явиться п'ятірка; набуває значення (-1) у решті випадків. Знайти закон розподілу випадкової величини X, функцію розподілу $F(x)$, математичне сподівання та моду розподілу. *Відповідь*:

X	-1	0	1
P	p_1	p_2	p_3

де $p_1 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$, $p_2 = \dfrac{61}{216}$, $p_3 = \dfrac{91}{216}$. $M(X) = \dfrac{1}{8}$, $d_X = 1$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{коли} \quad x \le -1; \\ \dfrac{8}{27}, & \textit{коли} \quad -1 < x \le 0; \\ \dfrac{125}{216}, & \textit{коли} \quad 0 < x \le 1; \\ 1, & \textit{коли} \quad x > 1. \end{cases}$$

178. Випадкова величина X розподілена за законом, котрий визначається щільністю розподілу ймовірностей вигляду:

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \cos x, & \textit{якщо} \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2; \\ 0, & \textit{якщо} \quad |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти константу c, обчислити $P\{|X| < \pi/4\}$, m_X і D_X. *Відповідь*: c=1/2,

$P\left\{|X| < \pi/4\right\} = \sqrt{2}/2,\ m_X = 0,\ D_X = \pi^2/4 - 2.$

179. Випадкова величина X розподілена за законом, який визначається щільністю розподілу ймовірностей вигляду:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{2}, & якщо \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2; \\ 0, & якщо \quad |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Квантилем якого порядку є точка $x = \pi/4$? *Відповідь*: $(2+\sqrt{2})/4$.

180. Функцію розподілу неперервної випадкової величини X задано у вигляді:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & якщо\ \ x \le 0; \\ x^2/4, & якщо\ \ 0 < x \le 2; \\ 1, & якщо\ \ x > 2. \end{cases}$$

Обчислити $P\left\{X \ge 1\right\},\ m_X,\ D_X,\ h_X$. *Відповідь*: $P\left\{X \ge 1\right\} = 3/4,\ m_X = 4/3,$ $D_X = 2/9,\ h_X = \sqrt{2}.$

181. Проводять послідовні незалежні випробування п’яти пристроїв на надійність. Надійність кожного із пристроїв дорівнює p. Кожен наступний пристрій випробовують лише в тому разі, коли попередній виявився надійним. Описати закон розподілу випадкової величини X − числа випробуваних у даному експерименті пристроїв – і обчислити d_X та m_X. *Відповідь*:

X	1	2	3	4	5
P	q	pq	p^2q	p^3q	p^4

$$d_X = \begin{cases} 1, & коли\ \ p < p_0; \\ 5, & коли\ \ p \ge p_0. \end{cases} \qquad p_0 \approx 0{,}725. \qquad m_X = \frac{1-p^5}{1-p}$$

182. Зі скриньки, яка містить 4 білих і 6 чорних кульок, випадково й без повернення виймають 3 кульки. Випадкова величина X − число білих кульок у вибірці. Знайти закон розподілу в. в. X. *Відповідь*:

X	0	1	2	3
P	$1/6$	$1/2$	$3/10$	$1/30$

183. Для випадкової величини Y, заданої законом

Y	0	1	2	3
P	$1/6$	$1/2$	$3/10$	$1/30$

знайти $M(Y)$ та $D(Y)$. *Відповідь*: $M(Y)=6/5$, $D(Y)=14/25$.

184. Для складання пристрою потрібно 4 однотипні деталі. Всього є 10 деталей, із яких лише 6 якісних. Навмання відібрано 5 деталей (одну деталь «на запас»). Знайти ймовірність того, що пристрій буде зібрано. *Відповідь*: 11/42.

185. Проводиться тираж національної лотереї «6 із 49». Людина купила одну картку й заповнила її. Яка ймовірність того, що вона правильно вгадала k цифр ($k=6;\ 5$)? *Відповідь*: $p_6 \approx 1{,}22\cdot 10^{-7}$, $p_5 \approx 2{,}85\cdot 10^{-5}$.

186. Автобуси ходять з інтервалом в 5 хвилин. Вважаючи, що випадкова величина X – час чекання автобуса на зупинці – розподілена рівномірно на вказаному інтервалі, знайти середній час чекання та дисперсію часу чекання. *Відповідь*: $M(X)=5/2$, $D(X)=25/12$.

187. Автобуси ходять з інтервалом в 5 хвилин. Вважають, що випадкова величина X – час чекання автобуса на зупинці – розподілена рівномірно на вказаному інтервалі. Знайти функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X і обчислити ймовірність того, що час чекання перевищуватиме 3 хвилини.

Відповідь: $$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \dfrac{x}{5}, & 0<x\le 5; \\ 1, & x>5. \end{cases} \qquad P(X>3)=2/5.$$

188. Випадкова величина X розподілена рівномірно на інтервалі (a,b). Знайти формули для обчислення числових характеристик $M(X)$ та $D(X)$ через параметри a і b. *Відповідь*: $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$, $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

189. Шкала лабораторних ваг має ціну поділки 1г. Під час вимірювання маси хімічних компонентів суміші відлік робиться з точністю до цілої поділки із заокругленням у ближчий бік. Яка ймовірність того, що абсолютна помилка визначення маси:

а) не перевищуватиме величини середньоквадратичного відхилення можливих помилок визначення маси;

б) знаходитиметься між значеннями σ_X і $2\sigma_X$.

Відповідь: а) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$, б) $1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}423$.

190. Випадкова величина X розподілена за законом *рівнобедреного трикутника в інтервалі* $(-a;\ a)$ (*закон Сімпсона*), якщо вона неперервна та її щільність розподілу ймовірностей має вигляд, як на рис. 15.2. Записати аналітичні вирази для функції щільності ймовірностей $f(x)$ та інтегральної функції розподілу ймовірностей $F(x)$.

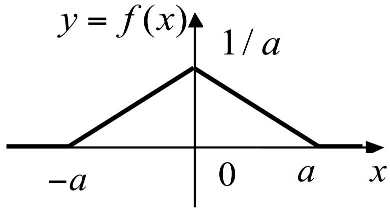


Рис. 15.2

Відповідь:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\left(1 - \dfrac{|x|}{a}\right), & |x| < a; \\ 0, & |x| \ge a. \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -a; \\ \dfrac{(a+x)^2}{2a^2}, & -a < x \le 0; \\ 1 - \dfrac{(a-x)^2}{2a^2}, & 0 < x \le a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

191. Для випадкової величини X, розподіленої за законом Сімпсона (див. попередню задачу), знайти математичне сподівання, дисперсію, моду, медіану та коефіцієнт ексцесу. *Відповідь*: $m_X = d_X = h_X = 0$, $D_X = a^2/6$, $e_X = -3/5$.

192. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X, розподіленої за показниковим законом із параметром λ.

Відповідь: $m_X = \dfrac{1}{\lambda}$, $D_X = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

193. За яким законом розподілена випадкова величина X, якщо її щільність ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, \textit{коли } x \ge 0; \\ 0, \quad \textit{коли } x < 0. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання та дисперсію цього розподілу.

Відповідь: За показниковим законом з параметром $\lambda = 2$, де $m_X = 1/2$,

$D_X = 1/4$.

194. Час безвідмовної роботи радіоапаратури є випадковою величиною X, розподіленою за показниковим законом із параметром λ. Знайти ймовірність того, що радіоапаратура не вийде з ладу упродовж часу $t = m_X$. Квантилем якого порядку для даного розподілу є значення m_X?

Відповідь: $P\left\{X \geq m_x\right\} = e^{-1} \approx 0{,}308, \quad m_X = t_{0{,}632}$.

195. Неперервна випадкова величина X розподілена за *законом Коші*, який визначається інтегральною функцією розподілу ймовірностей

$$F(x) = b + c \cdot arctg \frac{x}{a} \text{ при } -\infty < x < +\infty.$$

Визначити коефіцієнти a, b, c. *Відповідь*: $a > 0$, b=1/2, $c = 1/\pi$.

196. Обчислити щільність ймовірностей розподілу Коші (див. попередню задачу). Чи існують математичне сподівання та моменти вищих порядків у даному розподілі? *Відповідь*: $f_X(x) = \dfrac{a}{\pi(x^2 + a^2)}$, m_X та моменти вищих порядків не існують.

197. Знайти моду, медіану й квантиль t_p порядку $p = 0{,}75$ розподілу Коші (див. дві попередні задачі). *Відповідь*: $d_X = h_X = 0$, $t_{0{,}75} = a$.

198. Відомо, що під час стрільби по плоскій мішені у незмінних умовах випадкова величина R – відстань від точки влучання до центру мішені – підпорядкована *закону розподілу Релея* зі щільністю розподілу ймовірностей

$$f_R(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & при\ x > 0; \\ 0 & при\ x \leq 0, \end{cases}$$

де $\sigma > 0$ – параметр, що характеризує розподіл. Побудувати ескіз графіка щільності ймовірностей $f_R(x)$, перевірити умову нормування (умову $\int_{-\infty}^{+\infty} f_R(x)dx = 1$) і обчислити характеристики m_R та D_R.

Відповідь: $m_R = \sigma\sqrt{\pi/2} \approx 1{,}253\sigma$, $D_R = \sigma^2(2 - \pi/2) \approx 0{,}429\sigma^2$.

199. Для випадкової величини R, розподіленої за законом Релея (див. попередню задачу), обчислити d_R, h_R, a_R та з'ясувати взаємне розташування

характеристик m_R, d_R, h_R. *Відповідь*: $d_R = \sigma$, $h_R = \sigma\sqrt{2\ln 2} \approx 1,77\sigma$,

$a_R = 2\sqrt{\dfrac{\pi}{4-\pi}} \cdot \dfrac{\pi - 3}{4-\pi} \approx 0,631$, $d_R < h_R < m_R$.

200. Швидкість V молекул ідеального газу, що знаходиться в рівновазі при певній температурі, є випадковою величиною, яка підпорядкована *закону розподілу Максвелла* зі щільністю розподілу ймовірностей

$$f_V(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\beta^{3/2}x^2 e^{-\frac{1}{2}\beta x^2} & при\ x > 0, \end{cases}$$

де параметр розподілу $\beta > 0$ визначається температурою та масою молекул. Виразити середнє значення та найімовірніше значення швидкості молекул, а також дисперсію розподілу через фізичний параметр β.

Відповідь: $m_V = 2\sqrt{2/(\beta\pi)}$, $d_V = \sqrt{2/\beta}$, $D_V = \dfrac{1}{\beta}\left(3 - \dfrac{8}{\pi}\right)$.

201. Випадкова величина X підлягає *закону арксинуса* зі щільністю розподілу ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & якщо\ |x| \ge a; \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, & якщо\ |x| < a. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$ та обчислити m_X, D_X.

Відповідь: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -a; \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\arcsin\dfrac{x}{a}, & |x| < a; \\ 1, & x \ge a. \end{cases}$ $m_X = 0$. $D_X = \dfrac{a^2}{2}$.

202. Для випадкової величини, розподіленої за законом арксинуса (див. попередню задачу), обчислити: d_X, h_X, $\hat{x}_{0,75}$ (симетрична критична точка порядку $p = 0,75$). *Відповідь*: d_X не існує, $h_X = 0$, $\hat{x}_{0,75} = a\sin\dfrac{\pi}{8} \approx 0,3827a$.

203. Неперервна випадкова величина X розподілена *за законом Лапласа* з параметрами $m \in R$ і $\sigma > 0$, якщо її щільність розподілу ймовірностей задається формулою:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}e^{-\frac{|x-m|\sqrt{2}}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Виразити характеристики m_X і σ_X через параметри розподілу. *Відповідь*: $m_X = m, \sigma_X = \sigma$.

204. Випадкова величина X розподілена за законом Лапласа з параметрами $m = 0$ та $\sigma > 0$ (див. попередню задачу). Побудувати функцію розподілу $F(x)$ і обчислити ймовірності $p_k = P\{|X| < k\sigma\}$ при k=1, 2, 3.

Відповідь: $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\frac{x\sqrt{2}}{\sigma}}, & x\le 0;\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x\sqrt{2}}{\sigma}}, & x>0.\end{cases}$ $\quad p_k = 1-e^{-k\sqrt{2}} \approx \begin{cases}0,7569, & k=1;\\ 0,94, & k=2;\\ 0,9656, & k=3.\end{cases}$

205$*$. Для випадкової величини X, розподіленої за законом Лапласа, обчислити характеристики a_X і e_X. *Відповідь*: $a_X = 0, e_X = 3$.

206. Випадкова величина X, розподілена за *законом Парето з параметрами* $a > 0$ і $x_0 > 0$, якщо вона неперервна та її інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{якщо } x \le x_0;\\ 1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^a, & \text{якщо } x > x_0.\end{cases}$$

З'ясувати, за яких значень параметра a для даного розподілу існують m_X і D_X та обчислити їх. *Відповідь*: $m_X = \frac{a}{a-1}x_0, \quad \text{якщо } a > 1;$

$D_X = \frac{a}{(a-1)^2(a-2)}x_0^2, \quad \text{якщо } a > 2.$

207. Обчислити для розподілу Парето (див. попередню задачу) характеристики d_X і h_X, а також квантиль t_p порядку $p = 0,75$. *Відповідь*: $d_X = x_0$, $h_X = x_0\sqrt[a]{2}$, $t_{0,75} \approx 156,2$.

208. У ряді країн діє закон про обкладання податками, який поширюється на тих приватних підприємців, річний дохід яких перевищує певний встановлений законом рівень x_0. Вважаючи, що річний дохід навмання вибраної особи,

яку обкладають податком, є випадковою величиною X, розподіленою за законом Парето (див. дві попередні задачі) із параметрами $a=4$ та $x_0=1000$, знайти ймовірності таких подій: $A=\{h_X \le X < m_X\}$, $B=\{|X-m_X|<\sigma_X\}$. Критичною точкою якого порядку для даного розподілу є математичне сподівання m_X? *Відповідь*: $P(A)\approx 0{,}1836$, $P(B)\approx 0{,}9057$, $m_X = x_{0,3164}$.

Випадкова величина X має *гамма-розподіл* із параметрами $a>0$ та $b>0$ (його позначають через $\Gamma(a,b)$), якщо вона неперервна та її щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le 0; \\ \dfrac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx}, & при \quad x>0, \end{cases} \qquad \text{де } \Gamma(a)=\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}dt -$$

гамма-функція Ейлера.

Якщо $a=1$, $b=\lambda>0$, то з гамма-розподілу одержуємо *показниковий* розподіл із параметром λ.

Якщо $a=n/2$ ($n-$натуральне число), $b=1/2$, то з гамма-розподілу одержуємо *розподіл хі-квадрат* з n степенями вільності (позначаємо $\chi^2(n)$).

209$**$. Випадкова величина X розподілена за законом $\Gamma(a,b)$. Знайти m_X, D_X, a_X, e_X. *Відповідь*: $m_X=a/b, D_X=a/b^2, a_X=2/\sqrt{a}, e_X=6/a$.

210$*$. Випадкова величина X розподілена за законом $\chi^2(4)$. Обчислити m_X, D_X, h_X. Критичною точкою якого порядку є значення m_X?
Відповідь: $m_X=4, D_X=8, h_X\approx 3{,}3567, m_X=x_{0,46}$.

211$*$. Випадкова величина X розподілена за *законом Вейбула* з параметрами $n,a,b>0$, якщо щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & коли \quad x\le a; \\ \dfrac{n}{b}\left(\dfrac{x-a}{b}\right)^{n-1} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^n}, & коли \quad x>a. \end{cases}$$

Обчислити математичне сподівання та моду розподілу.

Відповідь: $m_X=a+b\Gamma\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $d_X=a+b\sqrt[n]{\dfrac{n-1}{n}}$. Використати інтеграл

$$\int_{0}^{+\infty} x^n e^{-(\alpha x)^m} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right)}{m\alpha^{n+1}}.$$

212*. Випадкова величина X має *бета-розподіл* з параметрами $a > 0$ і $b > 0$, якщо щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \ \textit{коли} \ \ 0 < x < 1; \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{коли} \quad x \notin (0;1). \end{cases}$$

Обчислити m_X, D_X. *Відповідь*: $m_X = \dfrac{a}{a+b}$, $D_X = \dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$. Використати інтеграл $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, який виражає умову нормування для будь-яких допустимих значень параметрів $a > 0,\ b > 0$ та наступну властивість гамма-функції: $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

15.7 Біноміальний розподіл

213. Для стрільця, що виконує вправу в тирі, ймовірність влучити в «яблучко» в одному пострілі не залежить від результатів попередніх пострілів і дорівнює $p = 1/4$. Спортсмен зробив 5 пострілів. Знайти ймовірності подій: $A = \{$точно одне влучання$\}$, $B = \{$точно два влучання$\}$.
Відповідь: $P(A) \approx 0{,}3955$, $P(B) \approx 0{,}2637$.

214. Для стрільця, що виконує вправу в тирі, ймовірність влучити в «яблучко» в одному пострілі не залежить від результатів попередніх пострілів і дорівнює $p = 1/4$. Спортсмен зробив 5 пострілів. Знайти ймовірності подій: $A = \{$хоча б одне влучання$\}$, $B = \{$не менше ніж три влучання$\}$.
Відповідь: $P(A) \approx 0{,}7627$, $P(B) \approx 0{,}1035$.

215. Десять освітлювальних лампочок для ялинки ввімкнено в коло послідовно. Ймовірність перегорання будь-якої з лампочок під час підвищення напруги в мережі дорівнює $0{,}1$. Визначити ймовірність розриву кола під час підвищення напруги у мережі. *Відповідь*: $p \approx 0{,}6513$.

216. Пару однакових гральних кубиків підкидають 7 разів. Знайти ймовірності таких подій: $A = \{$сума очок, що дорівнює 7, випаде двічі$\}$, $B = \{$сума

очок, що дорівнює 7, випаде принаймні один раз}. *Відповідь*: $P(A) \approx 0,234$, $P(B) \approx 0,721$.

217. Пару однакових гральних кубиків підкидають 7 разів. Знайти ймовірності таких подій: $A =$ {випала сума очок, що більша за 7}, $B =$ {не випала сума очок, що дорівнює 12}. *Відповідь*: $P(A) = \left(15/36\right)^7 \approx 0,00218$, $P(B) \approx 0,821$.

218. Проводиться одне випробування з імовірністю успіху, що дорівнює p. Ймовірність невдачі дорівнює $q = 1 - p$. Нехай X – випадкове число успіхів у даному випробуванні. Записати закон розподілу випадкової величини X; обчислити $M(X)$ та $D(X)$. *Відповідь*: $M(X) = p$, $D(X) = pq$,

X	0	1
P	q	p

219. Ймовірність того, що відвідувачеві магазину потрібне взуття 40-го розміру, дорівнює 0,4. До взуттєвого відділу зайшли троє. Нехай X – число тих покупців, яким потрібне взуття 40-го розміру. Обчислити $P\left\{X \ge 2\right\}$. *Відповідь*: $P\left\{X \ge 2\right\} \approx 0,663$.

220. Ймовірність того, що відвідувачеві магазину потрібне взуття 40-го розміру, дорівнює 0,4. До взуттєвого відділу зайшли троє. Нехай X – число тих покупців, яким потрібне взуття 40-го розміру. Знайти функцію розподілу випадкової величини X. *Відповідь*:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 27/125, & 0 < x \le 1; \\ 81/125, & 1 < x \le 2; \\ 117/125, & 2 < x \le 3; \\ 1, & 3 < x. \end{cases}$$

221. Ймовірність відмови кожного із приладів під час випробування не залежить від того, чи працює решта приладів і дорівнює 0,2. Випробувано 9 приладів. Випадкова величина X − число відмов приладів під час випробувань. Знайти найімовірніше число приладів, що не спрацюють. *Відповідь*: Один або два прилади.

222. Ймовірність відмови кожного із приладів під час випробування не залежить від того, чи працює решта приладів і дорівнює $0,2$. Випробувано 9 приладів. Випадкова величина X − число приладів, що відмовлять під час

випробувань. Знайти ймовірність події $A = \{X \geq m_X\}$. *Відповідь*: $P(A) \approx 0{,}5638$.

223. Випробування за схемою Бернуллі з імовірністю успіху p в одному випробуванні повторюються доти, поки не з'явиться успіх і потім припиняються. Нехай $X-$ число проведених випробувань до першого успіху включно. Описати закон розподілу випадкової величини X і знайти $P\{X \leq 3\}$.

Відповідь: $P(X \leq 3) = p(1+q+q^2)$,

X	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
P	p	qp	$q^2 p$	$\cdots$	$q^{n-1}p$	$\cdots$

224. Випробування за схемою Бернуллі з імовірністю успіху p в одному випробуванні повторюються доти, доки не з'явиться успіх і потім припиняються. Нехай X − число проведених випробувань до першого успіху включно. Знайти m_X і D_X. *Відповідь*: $m_X = 1/p$, $D_X = q/p^2$.

225. Ймовірність появи браку на автоматичній лінії дорівнює $0{,}001$. Лінія працює без переналагодження до появи першого бракованого виробу. Скільки виробів у середньому виготовляє дана автоматична лінія між двома переналагодженнями? Яка ймовірність того, що число виготовлених виробів буде більшим за $3m_X$? *Відповідь*: 1000 виробів, $P\{X > 3m_X\} \approx 0{,}0498$.

226. Випробування за схемою Бернуллі з імовірністю успіху в одному випробуванні p повторюються до отримання рівно k успіхів. Описати закон розподілу й знайти середнє значення числа проведених випробувань у даному експерименті. (Цей розподіл називається «*від'ємним біноміальним*» з параметрами $k \in N$ і $p > 0$). *Відповідь*: $P\{X = m\} = C_{m-1}^{k-1} p^k q^{m-k}$, $m \geq k$, $m_X = k/p$.

227. Ймовірність появи позначки на екрані радіолокатора про ціль під час одного оберту антени дорівнює $1/6$. Ціль вважається виявленою, якщо отримано три позначки. Яка ймовірність того, що ціль буде виявлено не більш як за 5 обертів антени? *Відповідь*: $23/648$.

228. З гармати стріляють по цілі, яка віддаляється. Ймовірність влучання в першому пострілі дорівнює $0{,}8$, а в кожному наступному пострілі ймовірність влучання зменшується у два рази. Випадкова величина $X-$ число влучань у ціль за два постріли. Записати закон розподілу в. в. X. *Відповідь*:

X	0	1	2
P	0,12	0,56	0,32

229. Із гармати стріляють по цілі, яка віддаляється. Ймовірність влучання в першому пострілі дорівнює $0,8$, а в кожному наступному пострілі ймовірність влучання зменшується у два рази. Випадкова величина X – число влучань у ціль за два постріли. Знайти m_X і D_X. *Відповідь*: $m_X = 1,2$, $D_X = 0,4$.

230. Із гармати стріляють по цілі, яка віддаляється. Ймовірність влучання в першому пострілі дорівнює $0,8$, а в кожному наступному пострілі ймовірність влучання зменшується у два рази. Випадкова величина X – число влучань у ціль за 4 постріли. Знайти середнє число влучань та дисперсію числа влучань. *Відповідь*: $m_X = 1,5$, $D_X = 0,65$.

231. Із гармати стріляють по цілі, яка віддаляється. Ймовірність влучання в першому пострілі дорівнює $0,8$, а в кожному наступному пострілі ймовірність влучання зменшується у два рази. Випадкова величина X – число влучань у ціль за 4 постріли. Знайти ймовірності подій: $A = \{$точно одне влучання$\}$, $B = \{$хоча б одне влучання$\}$. *Відповідь*: $P(A) \approx 0,4344$, $P(B) \approx 0,9136$.

232. Прилад складається з 5 елементів. Відмова k-го елемента за час T відбувається з імовірністю $p_k = 0,2 + (k-1)\cdot 0,1$ незалежно від того чи працює решта елементів. Визначити: а) математичне сподівання та дисперсію числа елементів, що відмовлять за час T; б) визначити ймовірність того, що за час T відмовить хоча б один із елементів приладу.

Відповідь: а) $m_X = 2$, $D_X = 1,1$; б) $0,9328$.

233. Ймовірності перегорання першої, другої та третьої лампи відповідно дорівнюють $0,1$, $0,2$ і $0,3$. Якщо перегорає одна лампа, то пристрій виходить із ладу з імовірністю $0,5$, а якщо дві або три – то пристрій повністю виходить із ладу. Знайти ймовірність того, що прилад не працюватиме. *Відповідь*: $0,297$.

234. Проводять три незалежних постріли в мішень у незмінних умовах. Ймовірність у одному пострілі влучити в «десятку» дорівнює $p_{10} = 0,3$, ймовірність влучити в «дев'ятку» дорівнює $p_9 = 0,4$, ймовірність не влучити ні в «десятку», ні в «дев'ятку» дорівнює $p_0 = 1 - p_{10} - p_9 = 0,3$. Знайти ймовірності таких подій: $A = \{$одне влучання в «десятку» й одне влучання в «дев'ятку»$\}$, $B = \{$точно два влучання у «десятку»$\}$.
Відповідь: $P(A) = 0,216$, $P(B) = 0,189$.

235. Проведено три незалежних постріли в мішень у незмінних умовах. Ймовірність у одному пострілі влучити в «десятку» дорівнює $p_{10} = 0,3$, ймовірність влучити в «дев'ятку» дорівнює $p_9 = 0,4$, ймовірність не влучити ні в «десятку», ні в «дев'ятку» дорівнює $p_0 = 1 - p_{10} - p_9 = 0,3$. Знайти ймовірність того, що буде набрано не менше, ніж 29 очок. *Відповідь*: $p = 0,135$.

236. Кожен із десяти аспірантів групи випадково й незалежно від решти вибирає один із чотирьох днів наступного тижня (понеділок, вівторок, середу або четвер) для роботи в бібліотеці у відділі періодичних видань. Знайти ймовірності таких подій: $A =$ {у понеділок у бібліотеку з'явиться один аспірант, у вівторок – два, у середу – три, у четвер – чотири}, $B =$ {у понеділок з'явиться три аспіранти, а у вівторок – сім}. *Відповідь*: $P(A) \approx 0,012$, $P(B) \approx 1,144 \cdot 10^{-4}$.

237. Кожен із десяти аспірантів групи випадково й незалежно від решти вибирає один із чотирьох днів наступного тижня (понеділок, вівторок, середу або четвер) для роботи в бібліотеці у відділі періодичних видань. Знайти ймовірності таких подій: $A =$ {п'ятеро з аспірантів з'являться в бібліотеку в перші два дні тижня, а п'ятеро – у наступні два дні}, $B =$ {у понеділок і вівторок не з'явиться ніхто з аспірантів}. *Відповідь*: $P(A) \approx 0,246$, $P(B) \approx 2^{-10} \approx 10^{-3}$.

238. Два рівносильних шахісти грають матч із 12 партій. У кожній із партій можливі три завершення: ω_1={виграв перший гравець (програв другий)}, ω_2={нічия}, ω_3={виграв другий (програв перший)}. Нехай $P(\omega_1) = P(\omega_3) =$ $= 0,2$, $P(\omega_2) = 1 - P(\omega_1) - P(\omega_3) = 0,6$. Знайти ймовірності таких подій: $A =$ {перший гравець виграв три партії, програв три партії, а всі інші зіграв унічию}, $B =$ {один із гравців виграв чотири партії й програв три партії}. *Відповідь*: $P(A) \approx 0,055$, $P(B) \approx 0,055$.

239. Два рівносильних шахісти грають матч із 12 партій. У кожній партії можливі три завершення: ω_1={виграв перший гравець (програв другий)}, ω_2={нічия}, ω_3={виграв другий (програв перший)}. Нехай $P(\omega_1) = P(\omega_3) =$ $= 0,2$, $P(\omega_2) = 1 - P(\omega_1) - P(\omega_3) = 0,6$. Знайти ймовірність події $A =$ {зіграно лише дві результативні (не нічийні) партії}. *Відповідь*: $P(A) \approx 0,0638$.

15.8 Розподіл Пуассона

240. Апаратура складаєтьсяі з 1000 елементів, кожен з яких незалежно від інших виходить із ладу за час T з імовірністю $p = 5 \cdot 10^{-4}$. Знайти ймовірність

таких подій: $A=${за час T не відмовлять три елементи}, $B=${за час T відмовить принаймні один елемент}, $C=${за час T відмовить не більше, ніж три елементи}. *Відповідь*: $P(A)\approx 0{,}394$, $P(B)\approx 0{,}013$, $P(C)\approx 0{,}998$.

241. Підручник видано тиражем 100000 екземплярів. Ймовірність того, що підручник зшито неправильно, дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має точно п'ять бракованих книг. *Відповідь*: $P_{100000}(5)=0{,}375$

242. Середнє число викликів, що надходять на АТС упродовж хвилини, дорівнює 120. Знайти ймовірності таких подій: $A=${упродовж двох секунд на АТС не надійде жодного виклику}, $B=${упродовж двох секунд на АТС надійде менше, ніж два виклики}. *Відповідь*: $P(A)\approx 0{,}018$, $P(B)\approx 0{,}092$.

243. Середнє число викликів, що надходять на АТС упродовж хвилини, дорівнює 120. Знайти ймовірності таких подій: $A=${упродовж однієї секунди на АТС надійде точно три виклики}, $B=${упродовж трьох секунд на АТС надійде не менше, ніж три виклики}. *Відповідь*: $P(A)\approx 0{,}18$, $P(B)\approx 0{,}938$.

244. Коректура в 500 сторінок має 1300 помилок. Знайти найімовірніше число помилок на одній сторінці тексту та ймовірність цього числа.

Відповідь: дві помилки з імовірністю $p\approx 0{,}251$.

245. Радіостанція веде автоматичну передачу цифрового тексту упродовж 10 мкс. Її робота відбувається за наявності хаотичної імпульсної перешкоди, середнє число імпульсів якої за одну секунду складає 10^4. Для зриву передачі достатньо потрапляння двох імпульсів перешкоди за період роботи станції. Обчислити ймовірність зриву передачі. *Відповідь*: $0{,}0047$.

246. Число елементарних частинок, які реєструються приладом, є випадковим і утворює пуассонівську випадкову величину із середнім значенням n частинок. Кожна зареєстрована частинка може нести заряд з імовірністю p і бути нейтральною з імовірністю $1-p$. Визначити закон розподілу заряджених частинок, що реєструються приладом, знайти середнє значення та дисперсію отриманого розподілу. *Відповідь*: Закон Пуассона із параметром $\lambda = np$, $M(X)=D(X)=np$.

247. При випробуванні легованої сталі на вміст вуглецю ймовірність того, що у навмання взятій пробі процент вуглецю перевищуватиме допустимий рівень, дорівнює $0{,}01$. Застосовуючи закон рідкісних явищ, обчислити, скільки в середньому необхідно випробувати зразків, щоб із ймовірністю $0{,}95$ вказаний ефект спостерігався принаймні один раз. *Відповідь*: $n\geq 300$.

248. При випробуванні легованої сталі на вміст вуглецю ймовірність того,

що у навмання взятій пробі процент вуглецю перевищуватиме допустимий рівень, дорівнює $0{,}01$. Застосовуючи закон рідкісних явищ, обчислити, скільки у середньому необхідно випробувати зразків, щоб з імовірністю $0{,}95$ вказаний ефект спостерігався не менше, як два рази. *Відповідь*: $n \geq 475$.

249. Верстат-автомат виготовляє деталі. Ймовірність виготовлення бракованої деталі дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що серед 200 деталей виявиться точно чотири бракованих. *Відповідь*: $P_{200}(4) = 0{,}09$.

250. Завод відправив на базу 500 виробів. Імовірність пошкодження виробу в дорозі дорівнює $0{,}002$. Знайти ймовірності пошкодження в дорозі: а) трьох виробів; б) менше, ніж трьох виробів; в) більше, ніж трьох виробів; г) принаймні одного виробу. *Відповідь*: а) $P_{500}(3) = 0{,}0613$; б) $p = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) = 0{,}9197$; в) $p = 1 - (P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3)) = 0{,}019$; г) $p = 1 - P_{500}(0) = 0{,}632$.

15.9 Нормальний розподіл

Якщо випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподівання m та середнім квадратичним відхиленням σ, то такий розподіл позначаємо: $N(m, \sigma)$. Функція розподілу щільності ймовірностей нормального розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \ \sigma > 0.$$

251. Випадкова величина X нормально розподілена з параметрами $m = 1, \ \sigma = 2$. Виразити її функцію розподілу $F(x)$ через функцію $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. *Відповідь*: $F(x) = \Phi\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{1}{2}$.

Зауваження. Через функцію Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ інтегральна функція нормального розподілу виражається як: $F(x) = \Phi\left(\frac{x - m_X}{\sigma_X}\right) + \frac{1}{2}$.

252. Випадкова величина X розподілена за законом $N(m, \sigma)$. Використовуючи таблицю значень функції нормального розподілу, обчислити ймовірність p_k того, що відхилення величини X від її математичного сподівання не

перевищуватиме $k\sigma$ (розглянути випадки $k = 1, 2, 3$).

Відповідь: $p_1 \approx 0,683$, $p_2 \approx 0,954$, $p_3 \approx 0,997$.

253. Досліджується випадкова величина X, розподілена за законом $N(10, 5)$. Знайти симетричний відносно m_X інтервал, у який з імовірністю p потрапляє дослідне значення. Розглянути такі числові значення : а) $p = 0,997$; б) $p = 0,9544$; в) $p = 0,50$. *Відповідь*: а) $(-5;25)$; б) $(1;20)$; в) $(6,65;\ 13,35)$.

254. Хімічний завод виготовляє сірчану кислоту номінальною густиною $1,84$ г/см^3. У результаті статистичних випробовувань помітили, що практично $99,9\%$ всіх реактивів, що випускаються, мають густину в інтервалі $(1,82;1,86)$. Знайти ймовірність того, що кислота задовольняє стандарт, якщо для цього достатньо, щоб її густина не відхилялась від номіналу більше, ніж на $0,01$г/см^3. *Відповідь*: $0,898$.

255. У нормально розподіленій сукупності 15% значень x менші за 12 і 40% значень x більші за $16,2$. Знайти середнє значення й стандартне відхилення заданого розподілу. *Відповідь*: $m = 15,39$, $\sigma = 3,26$.

256. Деталь, що виготовляється автоматом, вважається придатною, якщо відхилення X контрольованого параметру від номіналу не перевищує 10 мм. Точність виготовлення деталей характеризується стандартним відхиленням σ. Вважаючи, що для заданої технології $\sigma = 5$ мм і X нормально розподілена, з’ясувати, скільки відсотків придатних деталей виготовляє автомат.

Відповідь: $\approx 95\%$.

257. Деталь, що виготовляється автоматом, вважають придатною, якщо відхилення X контрольованого параметра від номіналу не перевищує 10 мм. Точність виготовлення деталей характеризується стандартним відхиленням σ. Вважаючи, що X нормально розподілена, з’ясувати, якою повинна бути точність виготовлення, щоб відсоток придатних деталей дорівнював 98? *Відповідь*: $\sigma \approx 4,292$ мм.

258. Коробки із шоколадом запаковуються автоматично. Їхня середня маса дорівнює $1,06$ кг. Відомо, що 5% коробок мають масу меншу за 1 кг. Яким є відсоток коробок, маса яких перевищує 940 г? *Відповідь*: $\approx 99,95\%$.

259$*$. Розмір деталі, виготовленої на верстаті, є випадковою величиною X, розподіленою за нормальним законом із середнім значенням 20 мм та дисперсією $0,2$ мм^2. Яку відносну точність виробу можна гарантувати з імовірністю $0,95$? *Відповідь*: $\approx 0,0196$.

260. Випадкова величина X підпорядковується закону $N(1,\sigma)$. Відомо, що $P\left\{X<2\right\}=0,99$. Обчислити $M\left[X^2\right]$ та $P\left\{X^2>2\right\}$.

Відповідь: $M\left[X^2\right]\approx 1,1842$, $P\left\{X^2>2\right\}\approx 0,8328$.

261. Випадкова величина X, розподілена за законом $N(-1,1)$. Знайти a_X та e_X. *Відповідь*: $a_X=e_X=0$.

15.10 Закон великих чисел та граничні теореми теорії ймовірностей

262. Випадкова величина X має характеристики: $m_X=1$, $\sigma_X=0,2$. Оцінити знизу ймовірності подій: $A=\{0,5\le X<1,5\}$, $B=\{0,75\le X<$ $<1,35\}$, $C=\{X<2\}$. *Відповідь*: $P(A)\ge 0,84$, $P(B)\ge 0,36$, $P(C)\ge 0,96$.

263. Вимірюється швидкість вітру в даному пункті Землі. Випадкова величина X – проекція вектора швидкості вітру на фіксований напрямок. Оцінити ймовірність події $A=\{X\ge 80$ км/год$\}$, шляхом багаторічних вимірювань встановлено, що $m_X=16$ км/год. *Відповідь*: $P(A)\le 0,2$.

264. Вимірюється швидкість вітру в даному пункті Землі. Випадкова величина X – проекція вектора швидкості вітру на фіксований напрямок. Оцінити ймовірність події $A=\{X\ge 80$ км/год$\}$, коли встановлено, що $m_X=16$ км/год, а $\sigma_X=4$ км/год. *Відповідь*: $P(A)\le 0,004$.

265. Вимірюється швидкість вітру в даному пункті Землі. Випадкова величина X – проекція вектора швидкості вітру на фіксований напрямок. Оцінити ймовірність події $A=\{X\ge 80$ км/год$\}$, коли відомо, що $m_X=16$ км/год, $\sigma_X=4$ км/год, а розподіл випадкової величини X є симетричним відносно m_X. *Відповідь*: $P(A)\le 0,002$.

266. Число X сонячних днів упродовж року для даної місцевості є випадковою величиною із середнім значенням 100 днів та середньоквадратичним відхиленням 20 днів. Оцінити зверху ймовірності подій: $A=\{X\ge 150\}$, $B=\{X\ge 200\}$. *Відповідь*: $P(A)\le 0,16$, $P(B)\le 0,04$.

267. За допомогою нерівності Чебишева оцінити ймовірності $p_k=P\left\{\left|X-m_X\right|\le k\sigma_X\right\}$ для $k=1,2,3$, якщо X розподілена за законом $N(m_X,\sigma_X)$. Порівняти з точними значеннями цих імовірностей, отриманими в задачі 252. *Відповідь*: $p_1\ge 0$, $p_2\ge 0,75$, $p_3\ge 8/9$.

268. З якою надійністю середнє арифметичне вимірювань дає вимірювану величину, якщо виконано 500 вимірювань із точністю 0,1, а дисперсії випадкових величин (результатів вимірювань) не перевищують 0,3?
Відповідь: 94%.

269. З якою точністю середнє арифметичне вимірювань дає вимірювану величину, якщо виконано 400 вимірювань, надійність результатів складає 80 %, а дисперсії випадкових величин (результатів вимірювань) не перевищують 0,04? *Відповідь*: 0,24.

270. Скільки вимірювань потрібно виконати, щоб середнє арифметичне отриманих значень давало вимірювану величину з точністю до 0,05 і надійністю 90%, якщо дисперсії випадкових величин (результатів вимірювань) не перевищують 0,2? *Відповідь*: 800.

271. Визначити, з якою надійністю середнє арифметичне вимірювань дає вимірювану величину, якщо здійснено 500 вимірювань з точністю 0,1, а дисперсії випадкових величин (результатів вимірювань) дорівнюють 0,3?

Відповідь: 99,998 %.

272. Визначити, з якою точністю середнє арифметичне вимірювань дає вимірювану величину, якщо виконано 400 вимірювань, надійність результатів складає 80 %, а дисперсії випадкових величин (результатів вимірювань) дорівнюють 0,04? *Відповідь*: 0,013.

273. Скільки вимірювань потрібно виконати, щоб середнє арифметичне отриманих значень давало вимірювану величину з точністю до 0,05 і надійністю 90%, якщо дисперсії випадкових величин (результатів вимірювань) дорівнюють 0,2? *Відповідь*: 216.

274. Для деякого автопарку середнє число автобусів, що відправляються на ремонт після місячної експлуатації на міських лініях, дорівнює 5. Оцінити ймовірність події $A=\{$по завершенню місяця у даному автопарку буде відправлено на ремонт менше, ніж 15 автобусів$\}$, коли інформація про дисперсію відсутня. *Відповідь*: $0,666$.

275. Для деякого автопарку середнє число автобусів, що відправляються на ремонт після місячної експлуатації на міських лініях, дорівнює 5. Оцінити ймовірність події $A=\{$по завершенню місяця у даному автопарку буде відправлено на ремонт менше, ніж 15 автобусів$\}$, коли дисперсія дорівнює 4. *Відповідь*: $P(A)=P\left\{X<15\right\}\geq 0,96$.

276. Проводиться 60 повторних незалежних випробувань за схемою Бернуллі. Імовірність здійснення події A у одному випробуванні $p=0,6$. Використовуючи інтегральну теорему Муавра-Лапласа, обчислити ймовірності та-

ких подій: $B=\{$подія A станеться в більшості випробувань$\}$, $C=\{$подія A станеться не менш як 30 і не більш як 42 рази$\}$. *Відповідь*: $P(B)\approx 0{,}9066$, $P(C)\approx 0{,}8858$.

277. Проводиться 60 повторних незалежних випробувань за схемою Бернуллі. Імовірність здійснення події A в одному випробуванні $p=0{,}6$. Використовуючи локальну теорему Муавра-Лапласа, обчислити ймовірність події $D=\{$подія A станеться 36 разів$\}$. *Відповідь*: $P(D)\approx 0{,}1051$.

278. Радіотелеграфна станція передає цифровий текст. Через наявність звукових перешкод кожна цифра незалежно від інших може бути неправильно прийнятою з імовірністю $0{,}01$. Знайти ймовірності таких подій: $A=\{$у прийнятому тексті, що містить 1100 цифр буде менше, ніж 20 помилок$\}$, $B=\{$буде зроблено 7 помилок$\}$. *Відповідь*: $P(A)\approx 0{,}9966$, $P(B)\approx 0{,}0176$.

279. Імовірність народження хлопчика $p=0{,}512$. Застосовуючи локальну та інтегральну теореми Муавра-Лапласа, обчислити ймовірності таких подій: $A=\{$серед 100 новонароджених 51 хлопчик$\}$, $B=\{$ серед 100 новонароджених буде більше хлопчиків ніж дівчаток$\}$.

Відповідь: $P(A)\approx 0{,}0797$, $P(B)\approx 0{,}5160$.

280. Імовірність народження хлопчика $p=0{,}512$. Використовуючи теорему Муавра-Лапласа, обчислити ймовірність події $C=\{$серед 100 новонароджених різниця між кількістю хлопчиків та дівчаток не перевищує $10\}$.

Відповідь: $P(C)\approx 0{,}6689$.

281. Додають 10^3 чисел , кожне із яких заокруглене з точністю до 10^{-3}. Припускаючи, що помилки від заокруглення незалежні й рівномірно розподілені в інтервалі $(-0{,}5\cdot 10^{-3};\ 0{,}5\cdot 10^{3})$, знайти інтервал, симетричний відносно математичного сподівання, у якому з імовірністю $0{,}998$ знаходитиметься сумарна помилка. *Відповідь*: $(-0{,}0283;\ 0{,}0283)$.

282$*$. Випадкова величина $X-$ результат вимірювання деякої фізичної величини, закон розподілу якої невідомий. Визначити, яку максимально можливу відносну точність вимірювання можна гарантувати з імовірністю не меншою, ніж $0{,}95$, за таких умов: а) відомо, що $m_X=0{,}1$, $\sigma_X=0{,}02$ і проводиться одне вимірювання; б) проводиться 5 вимірювань і за значення X береться середнє арифметичне отриманих значень. *Відповідь*: а) $\approx 0{,}8944$, $0{,}4$. *Відносною точністю* вимірювання називається величина $\left|\left(X-m_X\right)/\,m_X\right|$.

283*. Випадкова величина X – результат вимірювання деякої фізичної величини, закон розподілу якої невідомий. Визначити, яку максимально можливу відносну точність вимірювання можна гарантувати з імовірністю не меншою, ніж $0{,}95$, за умови, що проводиться 100 вимірювань; за значення X береться середнє арифметичне отриманих значень і можна застосувати центральну граничну теорему про нормальність розподілу суми випадкових величин. *Відповідь*: $\approx 0{,}0392$.

284. Відділ технічного контролю перевіряє якість навмання відібраних 900 деталей. Імовірність того, що деталь є стандартною дорівнює $p = 0{,}9$. Випадкова величина X – число стандартних деталей в партії. Знайти найменший інтервал, симетричний відносно m_X, у який з імовірністю $0{,}9544$ потрапляє випадкова величина X – число стандартних деталей. *Відповідь*: $(796;\ 828)$.

285. У страховій компанії застраховано 10000 автомобілів. Імовірність пошкодження будь-якого автомобіля в результаті аварії дорівнює $0{,}006$. Кожен власник застрахованого автомобіля платить на рік 750 грн. страхових, а у випадку пошкодження автомобіля в результаті аварії отримує від компанії 100000 грн. Знайти ймовірність події $A = \{$із завершенням року роботи страхова компанія матиме збитки$\}$. *Відповідь*: $P(A) \approx 0$ з точністю до п’яти знаків.

286. У страховій компанії застраховано 10000 автомобілів. Ймовірність пошкодження будь-якого автомобіля в результаті аварії дорівнює $0{,}006$. Кожен власник застрахованого автомобіля платить на рік 750 грн. страхових, а у випадку пошкодження автомобіля в результаті аварії отримує від компанії 100000 грн. Знайти ймовірності таких подій: $A_1 = \{$із завершенням року роботи страхова компанія матиме прибуток, не менший за 400000 грн.$\}$, $A_2 = \{$із завершенням року роботи страхова компанія матиме прибуток, не менший за 600000 грн.$\}$, $A_3 = \{$із завершенням року роботи страхова компанія матиме прибуток, не менший за 800000 грн.$\}$.

287. Гральний кубик підкидають 500 разів. Яка ймовірність того, що частота випадання шістки потрапить в інтервал $\left(\frac{1}{6} - 0{,}05;\ \frac{1}{6} + 0{,}05\right)$?

Відповідь: $\approx 0{,}9974$.

288. Дослід Бюффона полягав у тому, що монету було підкинуто

4040 разів і герб випав 2048 разів. З якою ймовірністю за повторення цього досліду можна отримати таке саме або й більше відхилення відносної частоти «успіхів» від імовірності «успіху» в одному випробуванні? *Відповідь*: $\approx 0{,}3888$.

289. Скільки разів треба підкинути монету, щоб з імовірністю не меншою ніж $0{,}975$ можна було стверджувати, що частота випадання герба потрапить в інтервал $(0{,}4;\ 0{,}6)$? Отримати оцінку вказаного числа, використовуючи нерівність Чебишева: $P\left\{\left|X - m_X\right| \ge \varepsilon\right\} \le \dfrac{D_X}{\varepsilon^2}$. *Відповідь*: Не менш як 1000 разів.

290. Скільки разів треба підкинути монету, щоб з імовірністю не меншою як $0{,}975$ можна було стверджувати, що частота випадання герба потрапить в інтервал $(0{,}4;\ 0{,}6)$? Отримати оцінку вказаного числа, використовуючи інтегральну теорему Муавра-Лапласа. *Відповідь*: Не менш як 127 разів.

291$*$. У скриньці містяться білі та чорні кульки у відношенні $3:2$. Із скриньки послідовно виймають (з поверненням назад) по одній кулі, фіксуючи їх колір. Яке мінімальне число виймань куль треба здійснити, щоб з імовірністю, не меншою за $0{,}9948$, можна було очікувати, що відхилення відносної частоти появи білої кулі від імовірності її появи в одному вийманні не перевищуватиме величини $\varepsilon = 0{,}05$? *Відповідь*: 753.

292. Монету підкидають 100 разів. Оцінити зверху ймовірність того, що відносна частота появи герба відхилиться від імовірності його появи менш як на $0{,}1$. *Відповідь*: $p > 39/40$.

Зауваження. Оскільки $\left|m/1000 - 1/2\right| < 0{,}1 \iff 400 < m < 600$, то ймовірність числа потраплянь герба у інтервал $(400;\ 600)$ більша за $39/40$.

293. У скриньці 1000 білих та 2000 чорних кульок. Вийняли (з поверненням) 300 кульок. Оцінити зверху ймовірність того, що число m вийнятих білих кульок задовольняє подвійну нерівність $80 < m < 120$. *Відповідь*: $p = 5/6$. *Вказівка*: $80 < m < 120 \iff -20 < m - 100 < 20 \iff$

$$-\frac{1}{15} < \frac{m}{300} - \frac{1}{3} < \frac{1}{15} \iff \left|\frac{m}{300} - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{15}.$$

294. Нехай у результаті 100 незалежних випробувань отримано значення $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ випадкової величини X, для якої математичне сподівання $M(X) = 10$ і дисперсія $D(X) = 1$. Оцінити зверху ймовірність того, що абсолютна величина різниці між середнім $(\sum\limits_{i=1}^{100} x_i)/100$ отриманих значень в. в. X

та математичним сподіванням буде меншою за $1/2$. *Відповідь*: $p=\frac{24}{25}$.

Вказівка: Скористатись нерівністю $P\left\{\left|(\sum_{i-1}^{n} x_i)/n - m_X\right| < \varepsilon\right\} > 1-\frac{D_X}{n\varepsilon^2}$.

295. У кожній із двох скриньок є по 10 кульок із номерами від 1 до 10. Експеримент полягає в тому, що з кожної скриньки виймають по одній кулі з поверненням. Випадкова величина X – сума номерів кульок, вийнятих із скриньок. Експеримент повторили 100 разів. Оцінити зверху ймовірність потрапляння суми $\sum_{i=1}^{100} x_i$ в інтервал $(800;1400)$. *Вказівка*:

$$800<\sum_{i=1}^{100} x_i<1400 \Leftrightarrow -300<\sum_{i=1}^{100} x_i-1100<300 \Leftrightarrow$$

$$-3<(\sum_{i=1}^{100} x_i/100)-11<3 \Leftrightarrow \left|(\sum_{i=1}^{100} x_i/100)-11\right|<3.$$

Показати, що $M(X)=11,\ D(X)=16{,}5$. *Відповідь*:

$$P\left\{\left|(\sum_{i-1}^{100} x_i)/100-11\right|<3\right\}>1-\frac{16{,}5}{900}\approx 0{,}982.$$

296. Гральний кубик підкидають 10000 разів. Оцінити ймовірність відхилення відносної частоти появи шести очок від імовірності появи цього числа очок менш як на 0,01. *Відповідь*: $P\left(\left|m/10000-1/6\right|<0{,}01\right)\geq 31/36$.

297. У скриньці 100 білих та 100 чорних кульок. Виймають (з повернення) 50 кульок. Оцінити зверху ймовірність того, що число вийнятих білих кульок задовольнятиме подвійну нерівність $15<m<35$.

Відповідь: $P\left(\left|m/50-1/2\right|<1/5\right)\geq 7/8$.

298. У результаті 200 незалежних випробувань знайдено значення $x_1, x_2, \dots, x_{200}$ випадкової величини X та її числові характеристики $M(X)=D(X)=2$. Оцінити зверху ймовірність того, що абсолютна величина різниці між середнім арифметичним значень випадкової величини $\left(\sum_{i=1}^{200} x_i\right)/200$ та її математичним сподіванням менша за $1/5$. *Відповідь*: $3/4$.

299. Ймовірність події A в одному випробуванні дорівнює $0{,}7$. Скільки разів достатньо повторити випробування, щоб із ймовірністю $0{,}9$ можна було

очікувати, що відносна частота появи події A відхилятиметься від імовірності події A не більше ніж на $0,05$? *Відповідь*: $n = 273$.

300. Яка ймовірність того, що у 100 підкиданнях монети герб з'явиться від 40 до 60 разів? *Відповідь*: $p = 0,954$.

301. У скриньці 80 білих та 20 чорних кульок. Скільки кульок потрібно вийняти (із поверненням) зі скриньки, щоб із ймовірністю 0,95 можна було очікувати, що відносна частота появи білої кулі відхилятиметься від її ймовірності менш як на 0,1? *Відповідь*: 61.

15.11 Вибірковий метод. Задачі до підрозділів 11.1 − 11.3

302. Для вибірки: 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4 записати варіаційний ряд, знайти розмах варіації, статистичний розподіл частот вибірки та статистичний розподіл відносних частот.

303. Для вибірки: 11, 15, 12, 0, 18, 9, 6,19, 6, 11, 12, 13, 16, 14, 5, 11, 3 записати варіаційний ряд, знайти розмах варіації, статистичний розподіл частот вибірки та статистичний розподіл відносних частот.

304. Для вибірки: 17, 18, 16, 16, 17, 18, 19, 17, 15, 17, 19, 18, 16, 16, 18, 18 записати варіаційний ряд, знайти розмах варіації, статистичний розподіл частот вибірки та статистичний розподіл відносних частот.

305. Для вибірки 55 спостережень:

20,3	15,4	17,2	19,2	23,3	18,1	21,9	15,3	16,8	13,2	20,4
16,5	19,7	20,5	14,3	20,1	16,8	14,7	20,8	19,5	15,3	19,3
17,8	16,2	15,7	22,8	21,9	12,5	10,1	21,1	18,3	14,7	14,5
18,1	18,4	13,9	19,1	18,5	20,2	23,8	16,7	20,4	19,5	17,2
19,6	17,8	21,3	17,5	19,4	17,8	13,5	17,8	11,8	18,6	19,1

знайти розмах варіації, статистичні розподіли частот та відносних частот, використовуючи 7 інтервалів групування однакової довжини.

306. Для вибірки 50 спостережень:

38	60	41	51	33	42	45	21	53	60
68	52	47	46	49	49	14	57	54	59
77	47	28	48	58	32	42	58	61	30
61	35	47	72	41	45	44	55	30	40
67	65	39	48	43	60	54	42	59	50

знайти розмах варіації, статистичні розподіли частот та відносних частот, використовуючи інтервали групування однакової довжини, якщо перший інтервал: 14−23.

307. Побудувати полігон частот за даним розподілом частот вибірки:

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

308. Побудувати полігон частот за даним розподілом частот вибірки:

x_i	15	20	25	30	35
n_i	10	15	30	20	25

309. Побудувати полігон відносних частот за даним розподілом відносних частот вибірки:

x_i	2	4	5	7	10
w_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

310. Побудувати гістограму частот за даним розподілом вибірки:

Номер інтервалу i	Частинний інтервал $x_i - x_{i+1}$	Сума частот варіант інтервалу n_i	Щільність частоти $\frac{n_i}{h}$
1	2−7	5	
2	7−12	10	
3	12−17	25	
4	17−22	6	
5	22−27	4	

(Попередньо знайти щільність частоти n_i / h для кожного інтервалу і заповнити останній стовпчик таблиці. h –довжина інтервалу.)

311. За даним розподілом частот вибірки:

x_i	2	4	5	8
n_i	1	3	4	2

знайти емпіричну функцію розподілу та побудувати її графік.

312. За даним розподілом частот вибірки:

x_i	5	8	9
n_i	3	2	5

знайти емпіричну функцію розподілу та побудувати її графік.

313. Для вибірки, заданої розподілом частот:

x_i	16	17	18	19	20
n_i	2	4	5	4	1

побудувати графік функції розподілу, гістограму та полігон частот.

314. Побудувати гістограму частот за даним розподілом вибірки:

Номер інтервалу i	Частинний інтервал $x_i - x_{i+1}$	Сума частот варіант інтервалу n_i	Щільність частоти $\frac{n_i}{h}$
1	3−5	4	
2	5−7	6	
3	7−9	20	
4	9−11	40	
5	11−13	20	
6	13−15	4	
7	15−17	6	

(Попередньо знайти щільність частоти n_i / h для кожного інтервалу і заповнити останній стовпчик таблиці. h –довжина інтервалу.)

315. Для вибірки, заданої розподілом частот:

x_i	3	4	5	6	7	8
n_i	2	3	4	6	4	1

побудувати графік функції розподілу, гістограму та полігон частот.

316. Побудувати графік функції розподілу, гістограму та полігон частот для вибірки, заданої розподілом частот інтервалів:

Межі інтервалів	10−20	20−30	30−40	40−50	50−60	60−70	70−80
Частоти	2	8	7	12	18	2	1

317. Побудувати графік функції розподілу, гістограму та полігон відносних частот для вибірки, заданої розподілом частот інтервалів:

Межі інтервалів	20−22	22−24	24−26	26−28	28−30	30−32	32−34	34−36
Частоти	5	3	3	12	7	4	4	2

318. Для вибірки 80 спостережень:

1,9	3,1	1,3	0,7	3,2	1,1	2,9	2,7	2,7	4,0
1,7	3,2	0,9	0,8	3,1	1,2	2,6	1,9	2,3	3,2
4,1	1,3	2,4	4,5	2,5	0,9	1,4	1,6	2,2	3,1
1,5	1,1	2,3	4,3	2,1	0,7	1,2	1,5	1,8	2,9
0,8	0,9	1,7	4,1	4,3	2,6	0,9	0,8	1,2	2,1
3,2	2,9	1,1	3,2	4,5	2,1	3,1	5,1	1,1	1,9
0,9	3,1	0,9	3,1	3,3	2,8	2,5	4,0	4,3	1,1
2,1	3,8	4,6	3,8	2,3	3,9	2,4	4,1	4,2	0,9

побудувати гістограму та полігон відносних частот, попередньо провівши групування й взявши інтервал завдовжки $h = 0,3$.

319. Для вибірки 80 спостережень:

1,3	0,7	3,2	1,1	2,9	2,7	2,7	1,9	3,1	4,0
0,9	0,8	3,1	1,2	2,6	1,9	2,3	1,7	3,2	3,2
2,4	4,5	2,5	0,9	1,4	1,6	2,2	4,1	1,3	3,1
2,3	4,3	2,1	0,7	1,2	1,5	1,8	1,5	1,1	2,9
1,7	4,1	4,3	2,6	0,9	0,8	1,2	0,8	0,9	2,1
1,1	3,2	4,5	2,1	3,1	5,1	1,1	3,2	2,9	1,9
0,9	3,1	3,3	2,8	2,5	4,0	4,3	0,9	3,1	1,1
4,6	3,8	2,3	3,9	2,4	4,1	4,2	2,1	3,8	0,9

побудувати гістограму та полігон відносних частот, попередньо провівши групування й взявши інтервал завдовжки $h = 0,6$.

320. Для вибірки 80 спостережень:

3,1	1,3	0,7	3,2	1,1	2,9	2,7	2,7	1,9	4,0
3,2	0,9	0,8	3,1	1,2	2,6	1,9	2,3	1,7	3,2
1,3	2,4	4,5	2,5	0,9	1,4	1,6	2,2	4,1	3,1

1,1	2,3	4,3	2,1	0,7	1,2	1,5	1,8	1,5	2,9
0,9	1,7	4,1	4,3	2,6	0,9	0,8	1,2	0,8	2,1
2,9	1,1	3,2	4,5	2,1	3,1	5,1	1,1	3,2	1,9
3,1	0,9	3,1	3,3	2,8	2,5	4,0	4,3	0,9	1,1
3,8	4,6	3,8	2,3	3,9	2,4	4,1	4,2	2,1	0,9

побудувати гістограму та полігон відносних частот, попередньо провівши групування й взявши інтервал завдовжки $h = 1{,}2$.

15.12 Числові характеристики вибіркового розподілу. Задачі до підрозділів 11.1 − 11.3 та 12.1 − 12.3

321. З генеральної сукупності зроблено вибірку обсягом $n = 50$:

Варіанта x_i	−1	2	4	7
Частота n_i	8	12	16	14

знайти незміщену оцінку генеральної середньої (вибіркове математичне сподівання).

322. Для вибірки обсягом $n = 20$, заданої рядом розподілу частот:

x_i	2660	2700	2720	2750	2800
n_i	1	3	10	4	2

знайти вибіркове середнє (вибіркове математичне сподівання). *Вказівка*: перейти до умовних варіант $y_i = x_i - 2720$ та скористатись властивостями математичного сподівання.

323. За вибіркою обсягом $n = 91$ знайдено зміщену оцінку $\sigma_B^2 = 3$ генеральної дисперсії. Знайти незміщену оцінку дисперсії генеральної сукупності.

324. За вибіркою обсягом $n = 81$ знайдено незміщену оцінку $s_B^2 = 9$ генеральної дисперсії. Чому дорівнює незміщена оцінка дисперсії генеральної сукупності?

325. Знайти вибіркову дисперсію вибірки, заданої розподілом частот:

x_i	2	5	6	9	10
n_i	2	5	11	2	1

326. Знайти вибіркову дисперсію за заданим розподілом частот вибірки обсягом $n = 100$:

x_i	240	260	275	280
n_i	12	18	50	20

Вказівка: перейти до умовних варіант $y_i = x_i - 260$ та скористатись властивостями дисперсії.

327. Знайти вибіркову дисперсію за заданим розподілом частот вибірки обсягом $n = 50$:

x_i	18,4	18,9	19,3	19,6
n_i	15	20	10	5

Вказівка: перейти до умовних варіант $y_i = 10x_i - 195$ та скористатись властивостями дисперсії.

328. Знайти незміщену вибіркову дисперсію за заданим розподілом частот вибірки обсягом $n = 10$:

x_i	303	305	309
n_i	5	3	2

Вказівка: перейти до умовних варіант $y_i = x_i - 305$ та скористатись властивостями дисперсії.

329. Знайти незміщену вибіркову дисперсію за заданим розподілом частот вибірки обсягом $n = 10$:

x_i	0,02	0,06	0,1
n_i	3	5	2

Вказівка: щоб уникнути дій з дробами, перейти до умовних варіант $y_i = 100x_i$ та скористатись властивостями дисперсії.

330. Нижче наводяться результати вимірювання зросту (в см) 100 випадково відібраних студентів:

Зріст	154–158	158–162	162–166	166–170	170–174	174–178	178–182
Число студ.	8	12	24	26	14	10	6

Знайти вибіркове середнє та вибіркову дисперсію зросту обстежених студентів. *Вказівка*: за варіанти варіаційного ряду прийняти середини інтервалів.

331. Обчислити розмах варіації, коефіцієнт варіації, вибірковий коефіцієнт асиметрії, вибірковий коефіцієнт ексцесу, вибіркову моду, вибіркову медіану, вибіркове середнє, вибіркову дисперсію та вибіркове середнє квадратичне відхилення вибірки: 7, 3, 3, 6, 4, 5, 1, 2, 1, 3.

332. Обчислити розмах варіації, коефіцієнт варіації, вибірковий коефіцієнт асиметрії, вибірковий коефіцієнт ексцесу, вибіркову моду, вибіркову медіану, вибіркове середнє, вибіркову дисперсію та вибіркове середнє квадратичне відхилення вибірки: 3,1; 3,0; 1,5; 1,8; 2,5; 3,1; 2,4; 2,8; 1,3; 2,0. (Щоб уникнути дій з дробами, перейти до умовних варіант $y_i = 10x_i$.)

333. Обчислити розмах варіації, коефіцієнт варіації, вибірковий коефіцієнт асиметрії, вибірковий коефіцієнт ексцесу, вибіркову моду, вибіркову медіану, вибіркове середнє, вибіркову дисперсію та вибіркове середнє квадратичне відхилення для кожної з двох вибірок:

а) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 12 та б) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 18.

Отримані числові характеристики для вибірок а) та б) порівняти.

334. Визначити середнє, моду, медіану та дисперсію погрупованої вибірки, заданої розподілом частот інтервалів:

Межі інтервалів	1−3	3−5	5−7	7−9	9−11	11−13
Частоти	1	2	3	2	1	1

Вказівка: за варіанти варіаційного ряду прийняти середини інтервалів.

335. Визначити середнє, моду, медіану та дисперсію погрупованої вибірки, заданої розподілом частот інтервалів:

Межі інтервалів	0−4	4−8	8−12	12−16	16−20	20−24
Частоти	1	1	3	2	2	1

Вказівка: за варіанти варіаційного ряду прийняти середини інтервалів.

336. Визначити середнє, моду, медіану та дисперсію погрупованої вибірки, заданої розподілом частот інтервалів *(вказівка*: за варіанти варіаційного ряду прийняти середини інтервалів):

Межі інтервалів	5−7	7−9	9−11	11−13	13−15	15−17
Частоти	10	14	40	26	6	4

337. Довести, що для початкових та центральних моментів справедливі рівності:

$$\mu_3^* = \nu_3^* - 3\nu_2^*\nu_1^* + 2(\nu_1^*)^3,\ \ \mu_4^* = \nu_4^* - 4\nu_3^*\nu_1^* + 6\nu_2^*(\nu_1^*)^2 - 3(\nu_1^*)^4.$$

338. Обчислити середнє, дисперсію кофіцієнти асиметрії та ексцесу наступної погрупованої вибірки, заданої розподілом частот інтервалів:

Межі інтервалів	20−22	22−24	24−26	26−28	28−30	30−32	32−34
Частоти	4	6	9	13	10	5	3

прийнявши за варіанти варіаційного ряду середини інтервалів та перейшовши до умовних варіант $u_i = \dfrac{x_i - d_B(X)}{h}$, де $h = 2$ − довжина інтервалу, $d_B(X)$ − вибіркова мода.

15.13 Інтервальні оцінки невідомих параметрів. Задачі до розділу 13

339. Випадкова величина розподілена за нормальним законом з параметром σ. Зроблено вибірку обсягом n. Знайти з надійністю γ довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання (параметра a), якщо $\sigma = 3$, $n = 36$, $\gamma = 0{,}95$.

340. Випадкова величина розподілена за нормальним законом з параметром σ. Зроблено вибірку обсягом n. Знайти з надійністю γ довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання (параметра a), якщо $\sigma = 3, n = 36$, $\gamma = 0{,}99$.

341. Випадкова величина розподілена за нормальним законом з параметром σ. Зроблено вибірку обсягом n. Знайти з надійністю γ довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання (параметра a), якщо $\sigma = 3, n = 36$, $\gamma = 0{,}999$.

342. Випадкова величина розподілена за нормальним законом з параметром σ. Зроблено вибірку обсягом n. Знайти з надійністю γ довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання (параметра a), якщо $\sigma = 3$, $n = 81$,

$\gamma = 0{,}95$.

343. Випадкова величина розподілена за нормальним законом з параметром σ. Зроблено вибірку обсягом n. Знайти з надійністю γ довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання (параметра a), якщо $\sigma = 0{,}3$, $n = 36$, $\gamma = 0{,}99$.

344. Випадкова величина розподілена за нормальним законом з параметром σ. Зроблено вибірку обсягом n. Знайти з надійністю γ довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання (параметра a), якщо $\sigma = 0{,}4$, $n = 81$, $\gamma = 0{,}95$.

345. Випадкова величина розподілена за нормальним законом з параметром σ. Знайти мінімальний обсяг вибірки, щоб з надійністю γ і точністю δ виконувалась рівність $\overline{x} = a$, якщо $\sigma = 0{,}5$, $\gamma = 0{,}95$, $\delta = 0{,}1$.

346. Випадкова величина розподілена за нормальним законом з параметром σ. Знайти мінімальний обсяг вибірки, щоб з надійністю γ і точністю δ виконувалась рівність $\overline{x} = a$, якщо $\sigma = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}95$, $\delta = 0{,}1$.

347. Випадкова величина розподілена за нормальним законом з параметром σ. Знайти мінімальний обсяг вибірки, щоб з надійністю γ і точністю δ виконувалась рівність $\overline{x} = a$, якщо $\sigma = 1{,}25$, $\gamma = 0{,}95$, $\delta = 0{,}1$.

348. Випадкова величина розподілена за нормальним законом з параметром σ. Знайти мінімальний обсяг вибірки, щоб з надійністю γ і точністю δ виконувалась рівність $\overline{x} = a$, якщо $\sigma = 0{,}5$, $\gamma = 0{,}99$, $\delta = 0{,}1$.

349. Випадкова величина розподілена за нормальним законом з параметром σ. Знайти мінімальний обсяг вибірки, щоб з надійністю γ і точністю δ виконувалась рівність $\overline{x} = a$, якщо $\sigma = 0{,}5$, $\gamma = 0{,}95$, $\delta = 0{,}2$.

350. З нормально розподіленої генеральної сукупності зроблено вибірку:

−1,90	1,37	−0,89	−0,13	0,15	−0,79	−0,96	1,55	0,40	0,69
−0,90	0,15	0,90	0,82	1,53	−0,34	0,98	−1,38	1,48	−0,65
1,10	0,30	−0,13	−1,90	−0,32	−0,42	0,77	0,08	0,17	0,87

Знайти з надійністю 0,9 довірчий інтервал для математичного сподівання, вважаючи, що дисперсія σ^2 дорівнює одиниці.

351. Знайти дисперсію нормально розподіленої генеральної сукупності із заданою надійністю γ (знайти довірчий інтервал) за вибіркою обсягу n, якщо $\gamma = 0{,}9$, $n = 20$.

352. Знайти дисперсію нормально розподіленої генеральної сукупності із заданою надійністю γ (знайти довірчий інтервал) за вибіркою обсягом n, якщо $\gamma = 0,9, \quad n = 8.$

353. Знайти дисперсію нормально розподіленої генеральної сукупності із заданою надійністю γ (знайти довірчий інтервал) за вибіркою обсягом n, якщо $\gamma = 0,9, \quad n = 25.$

354. Знайти дисперсію нормально розподіленої генеральної сукупності із заданою надійністю γ (знайти довірчий інтервал) за вибіркою обсягом n, якщо $\gamma = 0,98, \quad n = 20.$

355. Знайти дисперсію нормально розподіленої генеральної сукупності із заданою надійністю γ (знайти довірчий інтервал) за вибіркою обсягом n, якщо $\gamma = 0,98, \quad n = 8.$

356. Знайти дисперсію нормально розподіленої генеральної сукупності із заданою надійністю γ (знайти довірчий інтервал) за вибіркою обсягом n, якщо $\gamma = 0,98, \quad n = 25.$

357. Для нормально розподіленої генеральної сукупності знайти з надійністю 90 % довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення за вибірками обсягів: а) $n = 16$; б) $n = 25$.

358. Для вибірки :

−1,90	1,37	−0,89	−0,13	0,15	−0,79	−0,96	1,55	0,40	0,69
−0,90	0,15	0,90	0,82	1,53	−0,34	0,98	−1,38	1,48	−0,65
1,10	0,30	−0,13	−1,90	−0,32	−0,42	0,77	0,08	0,17	0,87

зробленої з нормально розподіленої генеральної сукупності, знайти з надійністю в 80 % довірчий інтервал для невідомої дисперсії.

359. Із надійністю γ знайти довірчий інтервал для математичного сподівання нормально розподіленої генеральної сукупності з невідомою дисперсією за вибіркою обсягом n, якщо $n = 25, \quad \bar{x} = 2,4, \quad s^2 = 4, \quad \gamma = 0,9.$

360. Із надійністю γ знайти довірчий інтервал для математичного сподівання нормально розподіленої генеральної сукупності з невідомою дисперсією за вибіркою обсягом n, якщо $n = 30, \quad \bar{x} = 1,93, \quad s^2 = 0,6, \quad \gamma = 0,95.$

361. Із надійністю γ знайти довірчий інтервал для математичного сподівання нормально розподіленої генеральної сукупності з невідомою дисперсією за вибіркою обсягом n, якщо $n = 120, \quad \bar{x} = 4,35, \quad s^2 = 0,01, \quad \gamma = 0,99.$

362. Із надійністю γ знайти довірчий інтервал для математичного сподівання нормально розподіленої генеральної сукупності з невідомою дисперсією за вибіркою обсягом n, якщо $n = 10$, $\bar{x} = 9{,}3$, $s^2 = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}95$.

363. Для вибірки:

−1,90	1,37	−0,89	−0,13	0,15	−0,79	−0,96	1,55	0,40	0,69
−0,90	0,15	0,90	0,82	1,53	−0,34	0,98	−1,38	1,48	−0,65
1,10	0,30	−0,13	−1,90	−0,32	−0,42	0,77	0,08	0,17	0,87

зробленої з нормально розподіленої генеральної сукупності, знайти з надійністю в 90 % довірчий інтервал для математичного сподівання, вважаючи, що дисперсія невідома.

364. За даними вибірки обсягом $n = 16$ з генеральної сукупності, розподіленої нормально, знайдено незміщене середнє квадратичне відхилення s. Знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю $\gamma = 0{,}999$, якщо $n = 50$, $s = 14$.

365. За даними вибірки обсягом $n = 16$ з генеральної сукупності, розподіленої нормально, знайдено незміщене середнє квадратичне відхилення s. Знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю $\gamma = 0{,}999$, якщо $n = 10$, $s = 5{,}1$.

366. За схемою Бернуллі було проведено n випробувань, і в m із них сталась подія A. Знайти з надійністю γ довірчий інтервал для ймовірності події A, якщо $n = 9$, $m = 3$, $\gamma = 80\%$.

367. За схемою Бернуллі було проведено n випробувань, і в m із них сталась подія A. Знайти з надійністю γ довірчий інтервал для ймовірності події A, якщо $n = 9$, $m = 3$, $\gamma = 90\%$.

368. За схемою Бернуллі було проведено n випробувань, і в m із них сталась подія A. Знайти з надійністю γ довірчий інтервал для ймовірності події A, якщо $n = 9$, $m = 3$, $\gamma = 96\%$.

369. За схемою Бернуллі було проведено n випробувань, і в m із них сталась подія A. Знайти з надійністю γ довірчий інтервал для ймовірності події A, якщо $n = 9$, $m = 3$, $\gamma = 98\%$.

370. За схемою Бернуллі було проведено n випробувань, і в m із них сталась подія A. Знайти з надійністю γ довірчий інтервал для ймовірності події A, якщо $n = 10$, $m = 4$, $\gamma = 80\%$.

371. За схемою Бернуллі було проведено n випробувань, і в m із них сталась подія A. Знайти з надійністю γ довірчий інтервал для ймовірності події A, якщо $n = 10$, $m = 4$, $\gamma = 90\%$.

372. За схемою Бернуллі було проведено n випробувань, і в m із них сталась подія A. Знайти з надійністю γ довірчий інтервал для ймовірності події A, якщо $n = 10$, $m = 4$, $\gamma = 98\%$.

373. За схемою Бернуллі було проведено n випробувань, і в m із них сталась подія A. Знайти з надійністю γ довірчий інтервал для ймовірності події A, якщо $n = 7$, $m = 5$, $\gamma = 80\%$.

374. За схемою Бернуллі було проведено n випробувань, і в m із них сталась подія A. Знайти з надійністю γ довірчий інтервал для ймовірності події A, якщо $n = 7$, $m = 5$, $\gamma = 90\%$.

375. За схемою Бернуллі було проведено n випробувань, і в m із них сталась подія A. Знайти з надійністю γ довірчий інтервал для ймовірності події A, якщо $n = 300$, $m = 250$, $\gamma = 95\%$.

376. За схемою Бернуллі було проведено n випробувань, і в m із них сталась подія A. Знайти з надійністю γ довірчий інтервал для ймовірності події A, якщо $n = 360$, $m = 270$, $\gamma = 95\%$.

377. Серед 250 деталей, виготовлених верстатом-автоматом, виявилось 32 нестандартних. Знайти довірчий інтервал, що покриває з надійністю $0{,}99$ невідому ймовірність p виготовлення верстатом нестандартної деталі.

378. У випробуванні 1000 приладів зареєстровано 100 відмов цих приладів. Знайти довірчий інтервал, що покриває невідому ймовірність p відмови приладу з надійністю $\gamma = 0{,}95$.

379. У випробуванні 1000 приладів зареєстровано 100 відмов цих приладів. Знайти довірчий інтервал, що покриває невідому ймовірність p відмови приладу з надійністю $\gamma = 0{,}99$.

15.14 Теорія кореляції. Задачі до підрозділу 11.4

380. Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X за даними наступної кореляційної таблиці:

Y	X					n_y
	10	15	20	25	30	
6	3	7	–	–	–	10
16	–	8	10	–	–	18
26	–	–	30	5	9	44
36	–	–	4	12	6	22
46	–	–	–	1	5	6
n_x	3	15	44	18	20	n=100

381. Знайти вибіркові рівняння прямих ліній регресії Y на X та X на Y за даними наступної кореляційної таблиці:

Y	X								n_y
	10	15	20	25	30	35	40	45	
120	1	2	–	–	–	–	–	–	3
140	2	4	4	–	–	–	–	–	10
160	–	–	4	10	8	–	–	–	22
180	–	–	1	1	–	6	1	1	10
200	–	–	–	–	–	–	4	1	5
n_x	3	6	9	11	8	6	5	2	n=50

382. Знайти вибіркові рівняння прямих ліній регресії Y на X та X на Y за даними наступної кореляційної таблиці:

Y	X							n_y
	13	18	23	28	33	38	43	
175	–	1	–	–	–	–	–	1
200	2	3	3	–	–	–	–	8
225	–	2	2	10	–	–	–	14
250	–	–	1	8	10	–	–	19
275	–	–	–	–	3	3	–	6
300	–	–	–	–	–	1	1	2
n_x	2	6	6	18	13	4	1	n=50

383. Знайти вибіркові рівняння прямих ліній регресії Y на X та X на Y

за даними наступної кореляційної таблиці:

Y	X							n_y
	15	20	25	30	35	40	45	
80	–	–	–	–	–	4	2	6
100	–	–	–	–	–	4	2	6
120	–	–	8	10	6	–	–	24
140	3	4	3	–	–	–	–	10
160	2	1	1	–	–	–	–	4
n_x	5	5	12	10	6	8	4	n=50

384. Знайти вибіркове рівняння регресії $\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$ та вибіркове кореляційне відношення $\eta_{y/x}$ за даними наступної кореляційної таблиці:

Y	X					n_y
	0	1	2	3	4	
0	18	1	1	–	–	20
3	1	20	–	–	–	21
5	3	5	10	2	–	20
10	–	–	7	12	–	19
17	–	–	–	–	20	20
n_x	22	26	18	14	20	n=100

385. Знайти вибіркове рівняння регресії $\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$ та вибіркове кореляційне відношення $\eta_{y/x}$ за даними наступної кореляційної таблиці

Y	X					n_y
	0	1	2	3	4	
10	20	5	–	–	–	25
11	7	15	3	1	–	26
20	–	3	17	4	–	24
35	–	–	8	13	7	28
50	–	–	–	5	42	47
n_x	27	23	28	23	49	n=150

386. Знайти вибіркове рівняння регресії $\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$ та вибіркове кореляційне відношення $\eta_{y/x}$ за даними наступної кореляційної таблиці:

Y	X			n_y
	0	4	5	
1	50	5	1	56
35		44		44
50		5	45	50
n_x	50	54	46	n=150

15.15 Перевірка статистичних гіпотез. Задачі до підрозділу 14.5

387. У 100 незалежних випробуваннях деяка випадкова подія сталася 14 разів. За рівнем значущості 0,05 перевірити гіпотезу про те, що ймовірність події p дорівнює числу $p_0 = 0,2$ (нульова гіпотеза: $H_0 : p = p_0 = 0,2$), за альтернативної гіпотези $H_1 : p \neq 0,2$.

388. У 100 незалежних випробуваннях деяка випадкова подія сталася 14 разів. За рівнем значущості 0,05 перевірити гіпотезу про те, що ймовірність події p дорівнює числу $p_0 = 0,2$ (нульова гіпотеза: $H_0 : p = p_0 = 0,2$), за альтернативної гіпотези $H_1 : p < 0,2$.

389. Партію виробів приймають, якщо ймовірність бракованого виробу не перевищує 0,03. Серед випадково відібраних 400 виробів виявилось 18 бракованих. Чи можна приймати партію? *Вказівка*: за нульову гіпотезу прийняти $H_0 : p = p_0 = 0,03$, за альтернативну $H_1 : p > 0,03$; рівень значущості взяти $\alpha = 0,05$.

390. Завод розсилає рекламні каталоги можливим замовникам. Як показав досвід, імовірність того, що установа, яка отримала каталог, замовить рекламовану продукцію, дорівнює 0,08. Завод розіслав 1000 каталогів нової поліпшеної форми й отримав 100 замовлень. Чи можна вважати, що нова форма реклами виявилась значуще ефективнішою за першу? *Вказівка*: за нульову гіпотезу прийняти $H_0 : p = p_0 = 0,08$, за альтернативну $H_1 : p > 0,08$; рівень значущості $\alpha = 0,05$.

391. У результаті тривалих спостережень встановлено, що ймовірність повного одужання хворого, який приймав ліки A, дорівнює 0,8. Нові ліки B було призначено 800 хворим, 660 із яких повністю одужали. Чи можна вважати,

що нові ліки B є значуще ефективнішими за ліки A на п’ятипроцентному рівні значущості? *Вказівка*: за нульову гіпотезу прийняти $H_0 : p = p_0 = 0,8$, за альтернативну $H_1 : p \neq 0,8$; рівень значущості $\alpha = 0,05$.

392. З добової продукції цеху випадково відібрано та перевірено 200 приладів, із яких 16 приладів було визнано непридатними до експлуатації. Чи можна вважати, що придатна продукція цеху складає 90 %, якщо рівень значущості $\alpha = 0,1$?

393. Кількість бракованих деталей в партії не повинна перевищувати 5 %. Із цієї партії було перевірено 100 деталей, з яких 6 виявились бракованими. Чи можна вважати, що процент браку перевищує допустимий поріг, на рівні значущості $\alpha = 0,01$?

394. При 600 підкиданнях грального кубика шістка з’явилась 75 разів. Чи можна на рівні значущості $\alpha = 0,05$ вважати, що кубик симетричний та однорідний?

395. При дослідженні 50 корпусів мікросхем, які випадково було відібрано з їх великої партії, виявилось, що шість із них не мають потрібної міцності. Чи узгоджуються, на рівні значущості $\alpha = 0,05$, ці дані з твердженням про те, що дана партія містить більш як 90 % міцних корпусів?

396. Наступна таблиця показує результати вибіркового обстеження двох партій виробів:

Номер партії	Число виробів		Сума
	Браковані	Небраковані	
1	8	92	100
2	13	287	300
Сума	21	379	400

Чи можна на рівні значущості $\alpha = 0,05$ вважати, що частка браку в кожній із партій однакова?

397. Два преси штампують деталі одного найменування. Із партії деталей, виготовлених першим пресом, перевірили 1000 деталей, з яких 25 виявилися непридатними. Із 800 деталей, виготовлених другим пресом, непридатними виявились 36 деталей. Чи узгоджуються ці результати з припущенням про рівність часток браку в продукції двох пресів на рівні значущості $\alpha = 0,01$?

398. Для вивчення ефективності профілактичних ліків проти алергії обстежено дві групи людей, схильних до цього захворювання. Результати обстеження такі:

Приймали ліки		Не приймали ліки	
Захворіли	Не захворіли	Захворіли	Не захворіли
3	172	32	168

Чи демонструють ці результати ефективність ліків, якщо рівень значущості $\alpha = 0,05$?

399. Припускається, що застосування нової технології у виробництві мікросхем призведе до збільшення виходу придатної продукції. Результати контролю двох партій продукції, виготовлених за старою та новою технологіями, наведено у таблиці:

Вироби	Технологія	
	Стара	Нова
Придатні	140	185
Непридатні	10	15
Всього	150	200

Чи підтверджують ці результати припущення про збільшення виходу придатної продукції, якщо рівень значущості $\alpha = 0,01$?

400. За зміну відмовило 20 елементів пристрою **А**, який має 1000 елементів та 30 елементів пристрою **В**, який має 1200 елементів. На рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0: p_1 = p_2 = p$ про рівність імовірностей відмови елементів обох приладів за альтернативної гіпотези $H_1: p_1 \neq p_2$.

401. У партії із 500 деталей, виготовлених першим верстатом-автоматом, виявилось 60 нестандартних. Із 600 деталей, виготовлених другим верстатом-автоматом, 42 нестандартних. На рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити нульову гіпотезу $H_0: p_1 = p_2 = p$ про рівність імовірностей виготовлення нестандартної деталі обома верстатами за альтернативної гіпотези $H_1: p_1 \neq p_2$.

402. Для оцінки якості виробів, виготовлених двома заводами, зроблено вибірки обсягами $n_1 = 200$ та $n_2 = 300$ виробів. У цих вибірках виявилося відповідно $m_1 = 20$ та $m_2 = 15$ бракованих виробів. На рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0: p_1 = p_2 = p$ про рівність імовірностей виготовлення бракованого виробу обома заводами, за альтернативної гіпотези $H_1: p_1 > p_2$.

403. Із 200 пострілів, здійснених по цілі кожною із двох гармат, зареєстровано відповідно $m_1 = 24$ та $m_2 = 16$ невлучань. На рівні значущості

$\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : p_1 = p_2 = p$ про рівність імовірностей промаху кожною із гармат, за альтернативної гіпотези $H_1 : p_1 \neq p_2$.

15.16 Перевірка статистичних гіпотез. Задачі до підрозділу 14.6

404. За вибіркою обсягом $n = 62$, зробленою із двовимірної нормальної генеральної сукупності (X,Y), знайдено вибірковий коефіцієнт кореляції $\rho_B = 0,2$. На рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу про рівність нулеві генерального коефіцієнта кореляції $H_0 : \rho_Г = 0$, якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : \rho_Г \neq 0$.

405. За вибіркою обсягом $n = 62$, зробленою з двовимірної нормальної генеральної сукупності (X,Y), знайдено вибірковий коефіцієнт кореляції $\rho_B = 0,3$. На рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити нульову гіпотезу про рівність нулеві генерального коефіцієнта кореляції $H_0 : \rho_Г = 0$, якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : \rho_Г \neq 0$.

406. За вибіркою обсягом $n = 120$, зробленою з двовимірної нормальної генеральної сукупності (X,Y), знайдено вибірковий коефіцієнт кореляції $\rho_B = 0,4$. На рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : \rho_Г = 0$ про рівність нулеві генерального коефіцієнта кореляції , якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : \rho_Г \neq 0$.

407. За вибіркою обсягом $n = 100$, зробленою з двовимірної нормальної генеральної сукупності (X,Y), складено наступну кореляційну таблицю:

$Y \backslash X$	5	10	15	20	25	30	n_y
15	3	2	–	–	–	–	5
25	2	5	2	–	–	–	9
35	–	–	5	40	5	–	50
45	–	–	2	8	7	–	17
55	–	–	–	4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	$n = 100$

Знайти вибірковий коефіцієнт кореляції ρ_B та на рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : \rho_Г = 0$ про рівність нулеві генерального коефіцієнта кореляції, якщо альтернативна гіпотеза має вигляд

$H_1 : \rho_Г \neq 0$. *Вказівка*: для спрощення обчислень перейти до умовних варіант: $u_i = (x_i - 20)/5$, $v_i = (y_i - 35)/10$.

408. За вибіркою обсягом $n = 100$, зробленою із двовимірної нормальної генеральної сукупності (X, Y), складено наступну кореляційну таблицю:

$Y \backslash X$	1	6	11	16	21	26	n_y
150	3	2	–	–	–	–	5
160	2	5	2	–	–	–	9
170	–	–	3	50	2	–	55
180	–	–	2	8	7	–	17
190	–	–	–	4	7	3	14
n_x	5	7	7	62	16	3	$n = 100$

Знайти вибірковий коефіцієнт кореляції ρ_B та на рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : \rho_Г = 0$ про рівність нулеві генерального коефіцієнта кореляції, якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : \rho_Г \neq 0$. *Вказівка*: для спрощення обчислень перейти до умовних варіант: $u_i = (x_i - 16)/5$, $v_i = (y_i - 170)/10$.

409. Вибірковий коефіцієнт кореляції ρ_B, обчислений за вибіркою обсягом $n = 39$, зробленою із нормально розподіленої генеральної сукупності, дорівнює $0,25$. На рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити значущість коефіцієнта кореляції (нульова гіпотеза $H_0 : \rho_Г = 0$) генеральної сукупності, альтернативної гіпотези: а) $H_1 : \rho_Г \neq 0$; б) $H_1 : \rho_Г > 0$.

410. Вибірковий коефіцієнт кореляції ρ_B, обчислений за вибіркою обсягом $n = 52$, зробленою із нормально розподіленої генеральної сукупності, дорівнює ($-0,41$). На рівні значущості $\alpha = 0,1$ перевірити значущість коефіцієнта кореляції (нульова гіпотеза $H_0 : \rho_Г = 0$) генеральної сукупності, за альтернативної гіпотези: $H_1 : \rho_Г < 0$.

411. Вибірковий коефіцієнт кореляції ρ_B, обчислений за вибіркою обсягом $n = 39$, зробленою із нормально розподіленої генеральної сукупності, дорівнює $0,15$. На рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити значущість коефіцієнта

кореляції (нульова гіпотеза $H_0 : \rho_Г = 0$) генеральної сукупності, за альтернативної гіпотези: $H_1 : \rho_Г \neq 0$.

412. Вибірковий коефіцієнт кореляції ρ_B, обчислений за вибіркою обсягом $n = 103$, зробленою із нормально розподіленої генеральної сукупності, дорівнює ($-0,32$). На рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити значущість коефіцієнта кореляції (нульова гіпотеза $H_0 : \rho_Г = 0$) генеральної сукупності, за альтернативної гіпотези: $H_1 : \rho_Г \neq 0$.

413. Вибірковий коефіцієнт кореляції ρ_B, обчислений за вибіркою обсягом $n = 28$, зробленою із нормально розподіленої генеральної сукупності, дорівнює $0,88$. На рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити чи узгоджується гіпотеза $\rho_Г > 0,90$ про коефіцієнт $\rho_Г$ генеральної сукупності із результатами спостережень.

414. Вибірковий коефіцієнт кореляції ρ_B, обчислений за вибіркою обсягом $n = 28$, зробленоюз нормально розподіленої генеральної сукупності, дорівнює $0,88$. На рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити чи узгоджується гіпотеза $\rho_Г < 0,6$ про коефіцієнт $\rho_Г$ генеральної сукупності з результатами спостережень.

415. Вибірковий коефіцієнт кореляції ρ_B, обчислений за вибіркою обсягом $n = 28$, зробленою із нормально розподіленої генеральної сукупності, дорівнює $0,88$. На рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити чи узгоджується гіпотеза $\rho_Г \neq 0,96$ про коефіцієнт $\rho_Г$ генеральної сукупності з результатами спостережень.

416. За двома вибірками обсягами $n_1 = 28$ та $n_2 = 39$, зробленими з двох нормально розподілених генеральних сукупностей, обчислено вибіркові коефіцієнти кореляції $\rho_{B_1} = 0,71$ та $\rho_{B_2} = 0,85$ відповідно.

а) Чи можна вважати, що коефіцієнти кореляції $\rho_{Г_1}$ та $\rho_{Г_2}$ обох генеральних сукупностей справді різні?

б) Для яких значень ρ_{B_2} різниця вибіркових коефіцієнтів кореляції ρ_{B_1} та ρ_{B_2} є значущою. Прийняти $\alpha = 0,01$.

417. За двома вибірками обсягами $n_1 = 124$ та $n_2 = 147$, зробленими із двох нормально розподілених генеральних сукупностей, обчислено вибіркові

коефіцієнти кореляції $\rho_{B_1} = -0,87$ та $\rho_{B_2} = -0,65$ відповідно.

а) Чи можна вважати, що коефіцієнти кореляції ρ_{Γ_1} та ρ_{Γ_2} обох генеральних сукупностей справді різні?

б) Для яких значень ρ_{B_2} різниця вибіркових коефіцієнтів кореляції ρ_{B_1} та ρ_{B_2} є значущою? Прийняти $\alpha = 0,10$.

418. За двома вибірками обсягами $n_1 = 12$ та $n_2 = 19$, зробленими з двох нормально розподілених генеральних сукупностей, обчислено вибіркові коефіцієнти кореляції $\rho_{B_1} = 0,42$ та $\rho_{B_2} = 0,36$ відповідно.

а) Чи можна вважати, що коефіцієнти кореляції ρ_{Γ_1} та ρ_{Γ_2} обох генеральних сукупностей справді різні?

б) Для яких значень ρ_{B_2} різниця вибіркових коефіцієнтів кореляції ρ_{B_1} та ρ_{B_2} є значущою? Прийняти $\alpha = 0,05$.

419. За двома вибірками обсягами $n_1 = 84$ та $n_2 = 67$, зробленими з двох нормально розподілених генеральних сукупностей, обчислено вибіркові коефіцієнти кореляції $\rho_{B_1} = 0,95$ та $\rho_{B_2} = 0,82$ відповідно.

а) Чи можна вважати, що коефіцієнти кореляції ρ_{Γ_1} та ρ_{Γ_2} обох генеральних сукупностей справді різні?

б) Для яких значень ρ_{B_2} різниця вибіркових коефіцієнтів кореляції ρ_{B_1} та ρ_{B_2} є значущою? Прийняти $\alpha = 0,01$.

15.17 Перевірка статистичних гіпотез. Задачі до підрозділу 14.7

420. За двома незалежними вибірками, обсяги яких $n_1 = 9$ та $n_2 = 16$, зробленими з двох нормально розподілених генеральних сукупностей X та Y, знайдено незміщені вибіркові дисперсії $s_X^2 = 17,01$ та $s_Y^2 = 6,075$. На рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій за альтернативної гіпотези $H_1 : D(X) > D(Y)$.

421. За двома незалежними вибірками, обсяги яких $n_1 = 14$ та $n_2 = 10$, зробленими з двох нормально розподілених генеральних сукупностей X та Y, знайдено незміщені вибіркові дисперсії $s_X^2 = 1,68$ та $s_Y^2 = 5,04$. На рівні зна-

чущості $\alpha = 0{,}1$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій, за альтернативної гіпотези $H_1 : D(X) \neq D(Y)$.

422. За двома незалежними вибірками, обсяги яких $n_1 = 9$ та $n_2 = 6$, зробленими з двох нормально розподілених генеральних сукупностей X та Y, знайдено вибіркові дисперсії $D_B(X) = 14{,}4$ та $D_B(Y) = 20{,}5$. На рівні значущості $\alpha = 0{,}1$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій, за альтернативної гіпотези $H_1 : D(X) \neq D(Y)$.

Вказівка: спочатку знайти незміщені дисперсії $s_X^2 = (n_1 / (n_1 - 1))D_B(X)$ і $s_Y^2 = (n_2 / (n_2 - 1))D_B(Y)$.

423. Вимірювання однієї й тієї самої фізичної величини проводилось двома методами. Отримано такі результати:

а) у першому випадку (x) 9,5; 10,1; 9,8; 10,3; 10,5;

б) у другому випадку (y) 10,4; 9,6; 10,1; 10,3.

Чи можна вважати, що обидва методи однаково точні, якщо взяти рівень значущості $\alpha = 0{,}1$, результати вимірювань вважати розподіленими нормально, а вибірки є незалежними? *Вказівка*: для спрощення обчислень перейти до умовних варіант: $u_i = 10x_i - 100$, $v_i = 10y_i - 100$.

424. Для порівняння точності верстатів-автоматів зроблено дві вибірки, обсяги яких $n_1 = 10$ та $n_2 = 8$. У результаті вимірювань контрольованого розміру відібраних виробів отримано такі результати:

x_i	2,08	2,10	2,12	2,14	2,15	2,25	2,36	2,38	2,40	2,42

y_j	2,11	2,12	2,18	2,22	2,33	2,35	2,36	2,38

Чи можна на рівні значущості $\alpha = 0{,}1$ вважати, що верстати мають однакову точність $\left[H_0 : D(X) = D(Y)\right]$, за альтернативної гіпотези $H_1 : D(X) \neq D(Y)$? *Вказівка*: для спрощення обчислень перейти до умовних варіант: $u_i = 100x_i - 224$, $v_j = 100y_j - 226$.

425. За вісьмома незалежними вибірками однакового обсягу $n = 17$, зробленими з нормально розподілених генеральних сукупностей, знайдено незміщені вибіркові дисперсії: 23,2; 26,8; 29,0; 37,0; 38,4; 45,6; 46,0; 46,6.

На рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити нульову гіпотезу про однорідність дисперсій.

426. За шістьма незалежними вибірками однакового обсягу $n = 37$, зробленими з нормально розподілених генеральних сукупностей, знайдено незміщені вибіркові дисперсії: 29,0; 37,0; 38,4; 45,6; 46,0; 46,6.

На рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу про однорідність дисперсій.

427. За п'ятьма незалежними вибірками однакового обсягу $n = 37$, зробленими з нормально розподілених генеральних сукупностей, знайдено незміщені середні квадратичні відхилення: 0,00022; 0,00036; 0,00041; 0,00059; 0,00084.

На рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу про однорідність дисперсій. *Вказівка*: помножити попередньо всі середні квадратичні відхилення на 100000.

428. П'ять фасувальних автоматів налагоджено на зважування однієї й тієї самої маси товару. На кожному автоматі відважили по 10 проб, а потім ці самі проби зважили на точній вазі й за отриманими відхиленнями знайшли незміщені дисперсії: 0,010; 0,023; 0,026; 0,031; 0,036. Чи можна на рівні значущості $\alpha = 0,05$ вважати, що автомати забезпечують однакову точність зважування? Знайти точкову оцінку генеральної дисперсії.

429. Кожна з чотирьох хімічних лабораторій провела аналіз 11 проб сплаву для визначення процентного вмісту вуглецю. Під час цього незміщені вибіркові дисперсії виявилися такими: $s_1^2 = 4,2$; $s_2^2 = 6,3$; $s_3^2 = 8,9$; $s_4^2 = 9,3$. На рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити гіпотезу про однорідність дисперсій та в разі їх однорідності зробити точкову оцінку генеральної дисперсії.

15.18 Перевірка статистичних гіпотез. Задачі до підрозділу 14.8

430. Із нормально розподіленої генеральної сукупності зроблено вибірку обсягом $n = 18$. За цією вибіркою знайдено незміщену вибіркову дисперсію $s^2 = 0,25$. Перевірити на рівні значущості $\alpha = 0,05$ нульову гіпотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0,15$, якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : \sigma^2 > 0,15$.

431. Із нормально розподіленої генеральної сукупності зроблено вибірку обсягом $n = 41$:

Варіанти x_i	20,1	20,3	20,6	21,2	21,5	21,8	22	22,2
Частоти n_i	1	3	8	13	7	4	3	2

Перевірити на рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ нульову гіпотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0{,}18$, якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : \sigma^2 > 0{,}18$. *Вказівка*: для спрощення обчислень перейти до умовних варіант: $u_i = 10x_i - 210$; спочатку обчислити $s_U^2 = \dfrac{\sum n_i u_i^2 - \left[\sum n_i u_i\right]^2 / n}{n-1}$, а потім $s_X^2 = \dfrac{s_u^2}{100}$.

432. Під час дослідження витрат часу для складання певного технічного вузла різними складальниками встановлено, що дисперсія цього часу дорівнює $\sigma_0^2 = 3\text{хв}^2$. Результати 20 спостережень за роботою нового складальника такі:

Час складання вузла у хвилинах x_i	55	57	60	63	65
Частота n_i	1	3	10	4	2

Чи можна на рівні значущості 0,05 вважати, що новачок працює ритмічно (у тому розумінні, що дисперсія витраченого ним часу суттєво не відрізняється від дисперсії часу решти складальників)? *Вказівка*: для спрощення обчислень перейти до умовних варіант: $u_i = x_i - 60$ і знайти s_U^2. Нульова гіпотеза $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 3$; альтернативна гіпотеза $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

433. Партію виробів приймають, якщо дисперсія контрольованого розміру значуще не перевищує 0,2. Незміщена вибіркова дисперсія, знайдена за вибіркою обсягом $n = 101$, дорівнює $s_X^2 = 0{,}3$. Чи можна прийняти партію на рівні значущості 0,01?

434. Партію виробів приймають, якщо дисперсія контрольованого розміру значуще не перевищує 0,2. Незміщена вибіркова дисперсія, знайдена за вибіркою обсягом $n = 101$, дорівнює $s_X^2 = 0{,}3$. Чи можна прийняти партію на рівні значущості 0,05?

15.19 Перевірка статистичних гіпотез. Задачі до підрозділу 14.9

435. За вибіркою обсягом $n = 25$ знайдено середню вагу $\bar{x} = 120$ г виробів, виготовлених на першому верстаті; за вибіркою обсягом $m = 40$ знайдено середню вагу $\bar{y} = 125$ г виробів, виготовлених на другому верстаті. Генеральні дисперсії відповідно дорівнюють: $D(X) = 50$ г^2 та $D(Y) = 70$ г^2. На рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$, за аль-

тернативної гіпотези $H_1 : M(X) \neq M(Y)$. Вважаємо, що випадкові величини X та Y розподілені нормально, а вибірки незалежні.

436. За вибіркою обсягом $n = 45$ знайдено середній розмір $\overline{x} = 20$ мм діаметра валиків, виготовлених на верстаті №1; за вибіркою обсягом $n = 50$ знайдено середній розмір $\overline{y} = 19$ мм діаметра валиків, виготовлених на верстаті №2. Дисперсії генеральних сукупностей відповідно дорівнюють: $D(X) = 1{,}8$ мм^2 та $D(Y) = 1{,}4$ мм^2. На рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$, за альтернативної гіпотези $H_1 : M(X) \neq M(Y)$. Вважаємо, що випадкові величини X та Y розподілені нормально, а вибірки незалежні.

437. За двома незалежними вибірками, обсяги яких відповідно дорівнюють $n = 50$ та $m = 50$, знайдено вибіркові середні $\overline{x}_B = 140$, $\overline{y}_B = 148$. Генеральні дисперсії відомі: $D(X) = 27{,}8$ та $D(Y) = 22{,}2$. На рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$ за альтернативної гіпотези $H_1 : M(X) < M(Y)$, вважаючи, що випадкові величини X та Y розподілені нормально.

438. За двома незалежними вибірками, обсяги яких відповідно дорівнюють $n = 110$ та $m = 120$, знайдено вибіркові середні $\overline{x}_B = 32{,}3$, $\overline{y}_B = 30{,}2$ та вибіркові дисперсії $D_B(X) = 15{,}2$ та $D_B(Y) = 24{,}3$. На рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$, за альтернативної гіпотези $H_1 : M(X) \neq M(Y)$. *Вказівка*: при великих вибірках, коли $n > 30$, $m > 30$, невідомі генеральні дисперсії $D(X)$ та $D(Y)$ можна замінити на вибіркові відповідно $D_B(X)$ та $D_B(Y)$.

15.20 Перевірка статистичних гіпотез. Задачі до підрозділів 14.10, 14.11

439. За двома незалежними малими вибірками, обсяги яких дорівнюють $n = 12, m = 8$, зробленими з нормально розподілених генеральних сукупностей X та Y, знайдено вибіркові середні $\overline{x}_B = 143{,}2$, $\overline{y}_B = 145{,}1$ та незміщені вибіркові дисперсії $s_X^2 = 2{,}8$ і $s_Y^2 = 3{,}3$. На рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$, за альтернативної гіпотези $H_1 : M(X) \neq M(Y)$. *Вказівка*: попередньо перевірити рівність дисперсій, використовуючи критерій Фішера-Снедекора.

440. Із двох партій виробів, виготовлених на двох однаково налагоджених верстатах, зроблено малі вибірки, обсяги яких $n = 9$ та $m = 11$. Отримано такі результати:

Перший верстат.

Розміри виробів x_i, мм	3,3	3,4	3,7	3,9
Число виробів n_i, шт	1	3	4	1

Другий верстат.

Розміри виробів y_i, мм	3,1	3,3	3,8
Число виробів m_i, шт	1	3	7

На рівні значущості $\alpha = 0,02$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : M(X) =$ $= M(Y)$, за альтернативної гіпотези $H_1 : M(X) \neq M(Y)$. Вважаємо, що випадкові величини X та Y розподілені нормально.

441. На рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу H_0 : $M(X) = M(Y)$ про рівність генеральних середніх нормально розподілених сукупностей X та Y, за альтернативної гіпотези $H_1 : M(X) > M(Y)$, за малими незалежними вибірками $n = 12$ та $m = 15$, що задані таблицями:

x_i	12,1	12,2	12,5	12,8	13,0	13,4
n_i	1	2	4	3	1	1

y_i	12,3	12,4	13,0	13,1
m_i	3	7	3	2

Вказівка: перевірити попередньо нульову гіпотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій, за альтернативної гіпотези $H_1 : D(X) > D(Y)$, використовуючи критерій Фішера-Снедекора.

442. Тиск у камері контролюється двома манометрами. Для порівняння точності цих приладів одночасно фіксуються їхні покази. За результатами 10 вимірів (у одиницях шкали приладів) отримано результати: $\overline{x}_B = 15,3$, $\overline{y}_B = 16,1$, $s_X^2 = 0,2$ та $s_Y^2 = 0,15$. На рівні значущості $\alpha = 0,1$ перевірити гіпотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$ про рівність середніх, за альтернативної гіпотези $H_1 : M(X) \neq M(Y)$. *Вказівка*: перевірити попередньо нульову гіпотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій, за альтернативної гі-

потези $H_1: D(X) > D(Y)$ (бо $s_X^2 = 0,2 > 0,15 = s_Y^2$), використовуючи критерій Фішера-Снедекора.

443. Тиск у камері контролюється двома манометрами. Для порівняння точності цих приладів одночасно фіксуються їхні покази. За результатами 10 вимірів (у одиницях шкали приладів) отримано результати: $\overline{x}_B = 15,3$, $\overline{y}_B = 16,1$, $s_X^2 = 0,15$ та $s_Y^2 = 0,2$. На рівні значущості $\alpha = 0,1$ перевірити гіпотезу $H_0: M(X) = M(Y)$ про рівність середніх, за альтернативної гіпотези $H_1: M(X) > M(Y)$. *Вказівка*: перевірити попередньо нульову гіпотезу $H_0: D(X) = D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій, за альтернативної гіпотези $H_1: D(X) < D(Y)$ (бо $s_X^2 = 0,15 < 0,2 = s_Y^2$), використовуючи критерій Фішера-Снедекора.

444. На двох верстатах **А** та **Б** виробляють однакову продукцію, яка контролюється за внутрішнім діаметром виробу. Із продукції, виготовленої верстатом **А**, взято вибірку обсягом $n_A = 15$, а з продукції, виготовленої верстатом **Б** – вибірку обсягом $n_Б = 25$. Вибіркові середні та вибіркові незміщені дисперсії відповідно дорівнюють: $\overline{x}_A = 37,5$мм, $s_A^2 = 1,21$мм, $\overline{x}_Б = 36,8$мм, $s_Б^2 = 1,44$мм. На рівні значущості $\alpha = 0,1$ перевірити гіпотезу $H_0: M(X) = M(Y)$ про рівність математичних сподівань. За альтернативну взяти $H_1: M(X) \neq M(Y)$.

445. На двох верстатах **А** та **Б** виробляють однакову продукцію, яка контролюється за внутрішнім діаметром виробу. З продукції, виробленої верстатом **А**, взято вибірку обсягом $n_A = 15$, а з продукції, виробленої верстатом **Б** – вибірку обсягом $n_Б = 25$. Вибіркові середні та вибіркові незміщені дисперсії відповідно дорівнюють: $\overline{x}_A = 37,5$мм, $s_A^2 = 1,21$мм, $\overline{x}_Б = 36,8$мм, $s_Б^2 = 1,44$мм. На рівні значущості $\alpha = 0,1$ перевірити гіпотезу $H_0: M(X) = M(Y)$ про рівність математичних сподівань. За альтернативну взяти $H_1: M(X) > M(Y)$.

446. Щоб визначити, чи впливає температура навколишнього середовища на систематичну помилку кутомірного інструменту, проведено вимірювання горизонтального кута деякого об’єкту вранці ($t = 10^{\circ}\, C$) та вдень ($t = 26^{\circ}\, C$). Результати вимірювань такі:

Вранці: 38,2; 36,4; 37,7; 36,1; 37,9; 37,8.

Вдень: 39,5; 38,7; 37,8; 38,6; 39,2; 39,1; 38,9; 39,2.

Чи можна вважати, що температура навколишнього середовища впливає на систематичну помилку кутоміра? Прийняти $\alpha = 0,05$.

15.21 Перевірка статистичних гіпотез. Задачі до підрозділу 14.12

447. Лабораторія провела в одному й тому самому порядку аналіз 10 проб двома методами. Отримано такі результати (у першому рядку вказано вміст деякої речовини в процентах у кожній пробі, визначену першим методом, у другому рядку – другим методом):

x_i, %	16	21	20	16	22	29	14	18	24	15
y_i, %	15	20	22	14	25	24	16	20	20	15

На рівні значущості $\alpha = 0,05$ з'ясувати, випадково чи не випадково відрізняються середні результати аналізів, у припущенні, що вони розподілені нормально.

448. Дві лабораторії одним і тим самим методом, у одному й тому самому порядку, визначали вміст вуглецю у 12 пробах нелегованої сталі. Отримано такі результати (у першому рядку вказано вміст вуглецю в процентах у кожній пробі, отриманий першою лабораторією, в другому рядку – другою лабораторією):

x_i, %	0,13	0,14	0,18	0,12	0,12	0,08	0,08	0,12	0,19	0,30	0,27	0,22
y_i, %	0,08	0,12	0,16	0,09	0,08	0,05	0,13	0,10	0,14	0,32	0,31	0,24

На рівні значущості $\alpha = 0,05$ з'ясувати, випадково чи не випадково відрізняються середні результати аналізів, у припущенні, що вони розподілені нормально.

449. Проводилась перевірка фізичної підготовленості 10 спортсменів до тренувань, а потім після тренувань. Результати перевірки в балах виявились такими (перший рядок – число балів, отриманих кожним спортсменом до тренувань, другий рядок – після тренувань):

x_i, бали	60	59	65	26	69	70	49	56	71	76	25
y_i, бали	62	62	84	33	63	70	52	53	85	81	34

На рівні значущості $\alpha = 0,05$ з'ясувати, випадково чи не випадково поліпшилась фізична підготовка спортсменів, у припущенні, що число балів розподілено нормально.

450. Двома приладами в одному й тому самому порядку було виміряно 10 деталей і отримано результати (у відповідних одиницях довжини):

x_i, мм	7	6	7	8	5	7	8	6	8	8
y_i, мм	7	7	6	8	7	8	7	5	5	6

На рівні значущості $\alpha = 0,05$ з'ясувати, випадково чи не випадково відрізняються середні результати вимірювань, у припущенні, що вони розподілені нормально.

15.22 Перевірка статистичних гіпотез. Задачі до підрозділу 14.13

451. Середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої генеральної сукупності дорівнює $\sigma = 50$. Із цієї сукупності зроблено вибірку обсягом $n = 81$ і за нею знайдено вибіркову середню $\overline{x}_B = 245,6$. На рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0 = 240$, за альтернативної гіпотези $H_1 : a \neq 240$.

452. Середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої генеральної сукупності дорівнює $\sigma = 50$. Із цієї сукупності зроблено вибірку обсягом $n = 81$ і за нею знайдено вибіркову середню $\overline{x}_B = 245,6$. На рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0 = 240$, за альтернативної гіпотези $H_1 : a > 240$.

453. Відомо, що середня вага однієї капсули снодійного препарату повинна дорівнювати $a_0 = 0,75$ мг. Фармацевтичним заводом встановлено, що вага капсул розподіляється нормально з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 0,13$ мг. Вибіркова перевірка 144 капсул із отриманої партії ліків показала, що середня вага однієї капсули з цієї партії дорівнює $\overline{x}_B = 0,78$ мг. На рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0 = 0,75$, за альтернативної гіпотези $H_1 : a > 0,75$.

454. За вибіркою обсягом $n = 16$, зробленою з нормально розподіленої генеральної сукупності, знайдено вибіркову середню $\overline{x} = 118,2$ та незміщене середнє квадратичне відхилення $s = 3,6$. За рівнем значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0 = 120$, за альтернативної гіпотези $H_1 : a > a_0 = 120$.

455. Проектний розмір виробів, які виготовляє верстат-автомат, дорівнює $a = a_0 = 40$ мм. Вимірювання 25 випадково відібраних виробів дали такі

результати:

Розміри виробів x_i, мм	39,8	39,9	40,0	40,1	40,3	40,4
Число виробів n_i, шт	1	3	6	8	5	2

На рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0 =$ $= 40$, за альтернативної гіпотези $H_1 : a \neq 40$.

456. Проектний розмір виробів, які виготовляє верстат-автомат, дорівнює $a = a_0 = 40$мм. Вимірювання 25 випадково відібраних виробів дали такі результати:

Розміри виробів x_i, мм	39,8	39,9	40,0	40,1	40,3	40,4
Число виробів n_i, шт	1	3	6	8	5	2

На рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0 =$ $= 40$, за альтернативної гіпотези $H_1 : a > 40$.

15.23 Перевірка статистичних гіпотез. Задачі до підрозділу 14.14

457. На рівні значущості $\alpha = 0,05$, використовуючи критерій Пірсона, перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X з емпіричним розподілом вибірки обсягом $n = 200$, заданим таким рядом розподілу частот:

x_i	10	12	14	16	18	20	22	24	26
n_i	13	20	24	21	26	30	25	26	15

458. На рівні значущості $\alpha = 0,05$, використовуючи критерій Пірсона, перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X з емпіричним розподілом вибірки обсягом $n = 200$, заданим таким рядом розподілу частот:

x_i	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2
n_i	5	8	20	24	21	26	30	25	26	9	6

459. На рівні значущості $\alpha = 0,01$, використовуючи критерій Пірсона, з’ясувати, чи є випадковою або значущою розбіжність між емпіричними частотами n_i та теоретичними частотами n'_i:

n_i	9	17	37	73	40	16	8
n'_i	7	17	39	76	37	18	6

які знайдено в припущенні про нормальний розподіл генеральної сукупності X.

460. На рівні значущості $\alpha = 0,05$, використовуючи критерій Пірсона, з'ясувати, чи є випадковою або значущою розбіжність між емпіричними частотами n_i та теоретичними частотами n_i':

n_i	7	8	20	10	5
n_i'	5	7	18	14	6

які знайдено в припущенні про нормальний розподіл генеральної сукупності X.

461. На рівні значущості $\alpha = 0,05$, використовуючи критерій Пірсона, з'ясувати, чи є випадковою або значущою розбіжність між емпіричними частотами n_i та теоретичними частотами n_i':

n_i	6	7	13	15	20	16	10	8	5
n_i'	5	6	14	16	18	16	9	9	7

які знайдено в припущенні про нормальний розподіл генеральної сукупності X.

462. На рівні значущості $\alpha = 0,05$, використовуючи критерій Пірсона, з'ясувати, чи є випадковою або значущою розбіжність між емпіричними частотами n_i та теоретичними частотами n_i':

n_i	9	10	16	18	23	19	13	11	8
n_i'	4	6	15	17	19	15	10	8	6

які знайдено в припущенні про нормальний розподіл генеральної сукупності X.

463. На рівні значущості $\alpha = 0,05$, використовуючи критерій Пірсона, з'ясувати, чи є випадковою або значущою розбіжність між емпіричними частотами n_i та теоретичними частотами n_i':

n_i	14	18	32	70	20	36	10
n_i'	10	24	34	80	18	22	12

які знайдено в припущенні про нормальний розподіл генеральної сукупності X.

464. На рівні значущості $\alpha = 0,05$, використовуючи критерій Пірсона, з'ясувати, чи є випадковою або значущою розбіжність між емпіричними частотами n_i та теоретичними частотами n_i':

n_i	6	7	9	16	21	14	15	7	5
n_i'	6	8	8	15	22	15	14	6	6

які знайдено в припущенні про нормальний розподіл генеральної сукупності X.

465. На рівні значущості $\alpha = 0,05$, використовуючи критерій Пірсона, з'ясувати, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X із таким емпіричним розподілом:

Номер інтервалу i	Межі інтервалу		Частота
	x_i	x_{i+1}	n_i
1	−20	−10	20
2	−10	0	47
3	0	10	80
4	10	20	89
5	20	30	40
6	30	40	16
7	40	50	8
			$n = 300$

466. На рівні значущості $\alpha = 0,05$, використовуючи критерій Пірсона, з'ясувати, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X із таким емпіричним розподілом:

Номер інтервалу i	Межі інтервалу		Частота
	x_i	x_{i+1}	n_i
1	1	3	2
2	3	5	4
3	5	7	6
4	7	9	10
5	9	11	18
6	11	13	20
7	13	15	16
8	15	17	11
9	17	19	7
10	19	21	5
11	21	23	1
			$n = 100$

467. На рівні значущості $\alpha = 0{,}05$, використовуючи критерій Пірсона, з’ясувати, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X із таким емпіричним розподілом:

Номер інтервалу i	Межі інтервалу		Частота
	x_i	x_{i+1}	n_i
1	6	16	5
2	16	26	6
3	26	36	8
4	36	46	15
5	46	56	35
6	56	66	16
7	66	76	7
8	76	86	8
			$n = 100$

468. На рівні значущості $\alpha = 0{,}05$, використовуючи критерій Пірсона, з’ясувати, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X із таким емпіричним розподілом:

Номер інтервалу i	Межі інтервалу		Частота
	x_i	x_{i+1}	n_i
1	10	15	6
2	15	20	10
3	20	25	14
4	25	30	19
5	30	35	23
6	35	40	18
7	40	45	15
8	45	50	8
9	50	55	7
			$n = 120$

Вказівка: об’єднати малочисельні частоти перших двох та останніх двох інтервалів, а також самі інтервали.

15.24 Перевірка статистичних гіпотез. Задачі до підрозділу 14.16

469. Зміна урожайності при застосуванні одного з препаратів допосівної обробки зерна характеризується такими даними (у центнерах з гектара):

Рік	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Необроблене зерно	21,0	18,0	20,6	22,0	21,4	23,8	21,4	19,8	18,4
Оброблене зерно	22,1	19,1	19,4	22,1	21,7	24,9	21,6	20,3	18,3

Чи можна вважати, що допосівна обробка зерна збільшує урожайність? Взяти $\alpha = 0{,}05$.

470. На рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити припущення про те, що запропонований лікувальний препарат не змінює складу крові (зокрема, числа лейкоцитів), якщо препарат випробовувався на 10 особах, а подальший аналіз крові дав такі результати:

0,97; 1,05; 1,09; 0,88; 1,01; 1,14; 1,03; 1,07; 0,94; 1,02

(ці числа показують відношення дослідного числа лейкоцитів до числа лейкоцитів у нормі).

471. Наступною таблицею подається час (у секундах) розв᾿язування контрольних вправ з усного рахунку одинадцятьма учнями до й після вивчення формул скороченого множення:

До вивчення формул	87	61	98	90	93	74	83	72	81	75	83
Після вивчення формул	50	45	79	90	88	65	52	79	84	61	52

Чи можна вважати, що вивчення формул скороченого множення сприяло поліпшенню вмінь та навичок учнів проводити усні підрахунки? Рівень значущості взяти $\alpha = 0{,}10$.

472. Десятьом людям було запропоновано спеціальну дієту. Після двотижневого харчування за цією дієтою маса їх тіл змінилась таким чином:

Маса до дієти, кг	68	80	92	81	70	79	78	66	57	76
Маса після дієти, кг	60	84	87	79	74	71	72	67	57	70

а) Чи здійснює ця дієта який-небудь вплив на масу тіла?

б) Чи можна радити цю дієту людям, які бажають схуднути?

Рівень значущості взяти $\alpha = 0{,}10$.

473. Порівнюється вплив двох антивірусних препаратів під час зараження рослин вірусом. Для цього кожна з половинок листка оброблялась одним із двох препаратів. Число вражених місць вказане в таблиці:

Препарат A	43	13	28	26	17	49	36	20	39
Препарат B	45	6	21	13	17	46	31	31	22

Чи можна вважати, що дія цих препаратів є різною? Рівень значущості взяти $\alpha = 0,01$.

15.25 Перевірка статистичних гіпотез. Задачі до підрозділу 14.17

474. Продуктивність праці двох змін підприємства характеризується вибірками обсягів $n_1 = 10$ та $n_2 = 11$:

Перша зміна − 18; 23; 29; 30; 31; 32; 35; 36; 37; 39.

Друга зміна − 24; 30; 31; 32; 33; 34; 36; 38; 39; 42; 43.

На рівні значущості $\alpha = 0,1$, використовуючи критерій Вілкоксона, перевірити нульову гіпотезу про однакову продуктивність праці обох змін, взявши за альтернативну гіпотезу: продуктивність праці обох змін є різною. *Вказівка*: ранги однакових варіант із різних вибірок дорівнюють середньому арифметичному їх порядкових номерів у спільному варіаційному ряду обох вибірок.

475. Худобу відгодовували за двома раціонами − M та N. Ефективність відгодівлі характеризується вибірками обсягів $n_1 = 10$ та $n_2 = 12$ (x_i – вага (в кг) тварин, яких відгодовували за раціоном M, y_i – за раціоном N):

x_i	29	31	32	32	35	37	38	39	40	41

y_i	26	26	27	28	30	30	30	30	32	32	34	36

На рівні значущості $\alpha = 0,1$, використовуючи критерій Вілкоксона, перевірити нульову гіпотезу про однакову ефективність раціонів M та N, взявши за альтернативну гіпотезу: раціон M ефективніший за раціон N (H_1 : $F_1(x) < F_2(x)$, тобто $X > Y$). *Вказівка*: критична область – правостороння.

476. Було запропоновано два способи (M та N) збільшення виходу продукції підприємства. На рівні значущості $\alpha = 0,05$, перевірити нульову гіпотезу про їх однакову ефективність за двома вибірками обсягів $n_1 = 8$ та $n_2 = 13$ (x_i – проценти приросту за методом M, y_i – за методом N):

x_i	0,3	0,4	0,6	0,9	1,1	1,4	1,6	1,7

y_i	0,2	0,5	0,7	0,8	0,10	1,5	1,8	1,9	2,0	2,2	2,3	2,5	2,6

Взяти за альтернативну гіпотезу: ефективність методів M і N є різною.

477. На рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити нульову гіпотезу про

однорідність двох вибірок обсягів $n_1 = 50$ та $n_2 = 60$, за альтернативної гіпотези $H_1 : F_1(x) \neq F_2(x)$, коли відомо, що у спільному варіаційному ряду, складеному з варіант обох вибірок, сума порядкових номерів варіант першої вибірки $w_{досл} = 3120$.

478. На рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу про однорідність двох вибірок обсягів $n_1 = 25$ та $n_2 = 30$,за альтернативної гіпотези $H_1 : F_1(x) \neq F_2(x)$.

Варіанти першої вибірки – 7, 9, 10, 13, 16, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 30, 33, 36, 38, 41, 43, 47, 51, 52, 55, 60, 63, 68, 70;

Варіанти другої вибірки – 6, 8, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 23, 24, 28, 29, 31, 32, 34, 35, 37, 39, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 53, 56, 58, 61.

15.26 Перевірка статистичних гіпотез. Задачі до підрозділу 14.18

479. При підкиданні монети 50 разів послідовність результатів є такою:
Г Г Г Ц Ц Г Г Г Г Г Г Ц Ц Ц Ц Г Г Г Ц Ц Ц Г Ц Г Ц Ц Ц Ц Ц Ц Г Г Г Г Ц Ц Ц Ц
Ц Г Г Г Ц Г Г Г Г Ц Ц Ц (Г – випав герб, Ц –випала цифра).Чи є ця послідовність випадковою вибіркою? Взяти $\alpha = 0{,}05$.

480. Радист прийняв таку послідовність символів:

– – – · · – – – – · · – · – · · – · – · · – – – – · · – · – · · – · – – – – · · · – –

– – · · – · – ·

Чи можна вважати, що ця послідовність є випадковою вибіркою? Взяти $\alpha = 0{,}05$.

481. Продуктивність праці підприємства упродовж 15 робочих днів характеризується такими даними (в умовних одиницях): 12,1; 12,5; 12,5; 13,0; 13,1; 13,0; 12,5;12,8; 12,3; 12,1; 12,2; 12,1; 12,7; 12,0; 12,6. Чи можна вважати, що зміна продуктивності праці викликана випадковими причинами? Прийняти $\alpha = 0{,}05$.

482. Отримано такі відхилення від номінального значення контрольного розміру 15 деталей (в мкм): −4, −3, −4, +21, +15, −4, −4, −11, +6, +7, −9, −5, +5, +10, +8. Чи можна вважати, що отримана вибірка є результатом випадкових та незалежних спостережень? Взяти $\alpha = 0{,}05$.

483. При сталому струмі 10 мА вимірювався прямий спад напруги на діодах. Отримано такі результати (у вольтах): 0,917; 0,918; 0,921; 0,909; 0,919; 0,917; 0,916; 0,917; 0,918; 0,919; 0,919; 0,916.
Чи можна вважати, ці значення випадковими? Взяти $\alpha = 0{,}05$.

484. Глибина шару дифузії, що визначається за вибіркою із партії мікросхем, має такі значення (в мкм): 8,6; 8,6; 9,8; 9,8; 9,2; 9,2; 9,8; 9,0; 10,0; 9,4; 9,0; 11,2; 10,8; 9,2; 9,4. Перевірити гіпотезу H_0 про те, що отримані результати розподілені випадково. Прийняти $\alpha = 0,05$.

15.27 Варіанти типових індивідуальних завдань для самостійної роботи з математичної статистики

Для заданої вибірки:

1) записати варіаційний ряд та знайти розмах варіації вибірки;

2) знайти вибіркове середнє $\overline{x}_B$, вибіркову дисперсію σ_B^2, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_B та коефіцієнт варіації вибірки;

3) знайти незміщену дисперсію s_B^2 та незміщене середнє квадратичне відхилення s_B;

4) знайти моду, медіану, коефіцієнт асиметрії та коефіцієнт ексцесу вибірки;

5) розбивши весь інтервал $(x_{\min}, x_{\max})$ (від найменшого значення варіаційного ряду до найбільшого) на сім інтервалів однакової довжини h, побудувати гістограму частот та гістограму відносних частот;

6) подавши кожен інтервал його серединним значенням та прийнявши за частоту інтервалу суму частот тих варіант, які до нього потрапили, побудувати емпіричну функцію розподілу вибірки;

7) використовуючи критерій Пірсона, перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

001

446,6	541,4	359,7	532,8	457,2
502,3	462,5	368,8	446,1	447,6
444,9	438,0	459,0	442,7	443,5
438,9	456,7	411,5	424,2	496,4
472,9	517,0	460,7	446,0	423,8
385,0	382,2	385,6	453,9	414,5
482,7	438,8	403,7	520,7	394,8
395,8	374,3	537,1	520,8	392,6
460,4	528,2	377,8	427,7	451,3
491,3	441,0	454,1	482,0	446,9

002

531,8	627,4	547,7	554,0	600,8
521,6	626,5	561,4	572,6	538,1
565,1	542,1	558,3	628,4	636,7
588,7	588,9	526,0	524,4	525,4
549,2	544,9	576,8	513,9	523,6
509,1	516,3	602,8	503,8	615,1
532,3	596,0	529,0	537,0	595,6
559,6	550,4	579,6	530,9	542,1
612,5	549,1	526,7	570,9	564,1
529,2	560,1	585,7	521,5	545,0

003

531,8	627,4	547,7	554,0	600,8
521,6	626,5	561,4	572,6	538,1
565,1	542,1	558,3	628,4	636,7
588,7	588,9	526,0	524,4	525,4
549,2	544,9	576,8	513,9	523,6
509,1	516,3	602,8	503,8	615,1
532,3	596,0	529,0	537,0	595,6
559,6	550,4	579,6	530,9	542,1
612,5	549,1	526,7	570,9	564,1
529,2	560,1	585,7	521,5	545,0

004

246,9	245,3	247,6	242,8	281,9
254,6	269,0	257,1	240,0	253,6
242,3	269,2	255,1	295,6	233,5
240,0	289,3	259,8	239,9	272,1
268,9	259,3	260,3	257,7	250,3
286,2	250,2	270,9	294,6	285,8
244,8	262,8	247,7	245,4	288,4
256,3	274,4	272,2	258,0	264,8
267,3	270,4	265,5	254,6	262,5
226,4	240,2	259,5	269,7	240,4

005

406,0	459,2	442,2	386,3	436,5
484,4	438,7	408,6	452,1	437,0
447,6	433,8	391,0	411,1	463,2
426,8	431,8	410,3	467,0	420,7
435,9	444,7	481,7	386,6	441,9
425,6	450,9	482,1	431,5	448,6
408,6	422,2	484,4	446,3	465,0
452,5	473,2	442,5	443,0	449,7
424,2	425,6	397,2	356,1	410,0
478,6	444,8	411,5	446,9	413,3

006

218,7	218,3	176,0	120,8	247,0
217,2	164,6	299,8	268,7	146,5
139,1	243,6	221,7	170,9	238,5
169,7	134,0	233,6	350,8	248,8
267,5	177,8	187,0	150,1	222,3
194,5	242,7	177,4	240,7	194,7
279,1	276,8	260,0	248,4	221,6
110,0	286,7	173,5	170,4	259,7
180,3	169,3	113,9	299,4	232,1
244,2	113,9	195,3	262,1	192,6

007

121,5	148,9	-16,1	61,1	-37,3
205,3	89,4	224,4	86,2	149,9
110,8	187,9	152,8	137,4	200,3
146,6	22,6	317,1	192,5	135,7
97,4	190,1	103,8	89,6	75,5
232,0	263,9	-35,8	171,2	132,2
132,9	237,4	171,2	169,4	163,5
127,0	-23,7	90,0	137,3	189,3
82,9	151,1	144,2	73,4	198,2
224,0	60,5	10,3	158,3	114,7

008

406,7	421,9	440,1	409,4	450,8
438,2	512,3	463,8	363,9	449,9
417,5	454,0	439,9	341,5	370,6
462,3	363,6	446,5	465,1	450,3
485,6	434,3	375,7	453,6	466,2
460,6	445,8	417,6	409,6	410,5
405,1	417,6	407,9	374,3	370,7
421,4	395,6	490,8	430,3	428,5
400,9	443,6	398,8	397,5	454,2
353,0	459,4	419,6	382,1	381,6

009

420,2	427,8	407,4	348,9	330,8
395,7	448,2	382,6	365,4	417,1
419,0	332,4	379,6	421,1	368,9
376,5	444,0	365,8	325,7	420,5
418,7	434,8	385,1	348,0	412,3
406,5	391,9	389,2	362,0	368,3
424,8	390,1	370,2	374,6	396,5
401,0	389,0	320,1	357,2	414,9
369,1	396,1	377,1	382,6	368,4
403,2	422,4	459,0	321,4	385,5

010

93,7	141,6	316,7	310,0	314,9
225,1	138,4	83,2	222,9	218,1
198,8	253,8	31,2	100,2	170,6
226,2	142,3	203,5	261,4	269,1
153,4	171,0	338,7	97,5	115,2
140,9	103,0	229,8	110,8	289,7
191,6	149,0	181,6	226,0	207,9
206,7	318,2	219,7	225,2	161,3
410,4	244,9	122,4	180,7	163,7
329,9	201,6	167,2	96,6	268,3

011

239,2	353,0	400,0	517,9	233,0
265,2	485,3	570,5	319,0	221,7
247,7	300,9	403,4	355,5	245,3
445,6	431,9	418,6	362,0	374,8
356,4	286,6	389,1	386,6	200,4
366,1	408,6	319,8	375,9	472,3
524,5	304,0	456,3	369,1	548,9
424,5	536,9	456,1	351,1	483,6
502,0	427,7	274,9	455,2	316,4
322,5	407,7	287,1	287,5	452,4

012

585,1	530,4	614,7	512,3	680,4
537,0	764,9	603,5	581,2	513,2
580,9	555,2	512,2	674,7	639,2
478,5	577,8	673,1	563,0	567,9
550,4	546,2	651,7	620,5	547,1
483,8	584,4	592,0	640,9	637,6
628,2	622,2	731,3	671,9	686,2
626,8	591,8	492,3	575,7	699,7
505,1	495,2	549,2	598,5	484,0
585,0	533,2	596,7	661,4	627,4

013

207,6	448,3	137,2	170,7	224,6
329,2	261,9	383,6	99,0	399,8
179,6	310,8	203,6	303,0	224,2
408,5	404,7	305,9	297,4	360,2
303,0	231,4	334,1	314,3	389,5
156,8	319,1	390,4	296,2	300,9
215,3	262,9	260,1	162,2	352,7
260,5	144,5	486,5	180,0	360,6
377,6	199,2	211,5	244,2	370,2
226,4	333,5	268,0	312,1	222,3

014

134,8	178,3	137,6	187,4	122,2
151,7	175,9	111,6	112,8	149,6
149,2	121,4	151,2	196,4	215,7
181,8	151,3	200,7	100,3	148,3
177,3	131,6	198,5	186,9	161,2
126,0	161,0	183,8	165,7	121,7
173,4	139,0	193,4	169,6	100,5
118,4	168,8	184,2	140,2	135,6
141,5	114,8	152,1	164,1	182,6
109,1	165,2	156,8	144,0	119,6

015

254,8	238,9	119,1	250,4	177,9
171,5	260,1	139,9	228,7	267,4
332,8	121,6	214,3	273,0	309,7
285,3	277,8	276,2	340,4	253,5
203,8	204,1	326,9	264,5	295,9
334,6	355,8	231,5	227,1	278,9
268,0	304,9	337,2	231,0	257,5
174,5	237,4	217,0	295,4	320,9
222,2	279,5	235,9	246,7	200,4
251,8	319,1	188,8	256,6	156,9

016

559,6	555,3	535,9	556,8	525,6
545,7	545,5	562,7	534,3	538,0
548,6	558,0	549,8	574,4	540,9
565,0	537,7	549,4	531,5	555,4
536,7	528,0	574,3	542,5	534,9
565,6	548,7	522,5	552,4	535,1
540,0	556,0	540,9	577,4	521,5
548,7	537,1	568,5	535,3	586,5
540,6	552,5	524,7	548,0	520,4
567,0	537,7	554,9	533,6	536,4

017

246,5	202,1	231,2	280,0	254,7
292,9	187,3	211,5	349,2	212,9
176,0	301,7	129,1	228,3	113,7
99,8	266,1	242,5	278,4	330,2
236,3	150,1	310,1	276,5	306,2
228,1	472,7	227,9	354,7	210,0
209,1	167,7	375,0	177,4	239,9
146,7	161,1	24,3	295,1	259,9
170,2	225,9	293,1	402,1	296,7
92,3	388,5	228,3	172,7	192,0

018

489,1	695,9	531,6	737,6	360,4
476,2	461,0	410,8	581,1	382,5
599,0	534,3	770,7	477,7	686,9
477,7	542,1	540,7	597,0	351,5
432,4	553,1	487,6	578,2	590,9
566,2	389,6	605,3	660,8	577,8
411,1	668,1	550,9	597,7	556,4
550,5	505,5	418,5	614,9	519,1
537,1	469,5	437,8	620,7	410,9
504,6	572,0	533,2	753,0	541,6

019

137,4	89,9	139,2	169,6	164,6
136,2	147,2	155,0	118,4	145,0
132,7	115,8	123,5	124,2	100,0
153,6	130,5	118,1	143,9	104,9
159,2	121,1	130,0	113,8	133,6
151,6	137,6	135,1	124,6	92,2
95,9	131,4	112,8	131,5	138,6
156,1	141,3	120,9	122,7	161,6
127,6	150,5	151,3	122,5	145,5
115,3	126,7	138,4	112,0	182,0

020

500,8	484,7	459,7	547,7	437,2
670,5	508,1	440,1	480,5	371,3
524,2	536,5	471,7	550,4	384,8
423,9	552,9	471,1	491,6	445,5
461,3	445,0	545,4	451,7	537,2
483,0	530,8	465,8	537,6	396,3
549,0	489,8	520,7	431,1	464,5
449,6	462,7	476,6	478,4	508,5
498,6	490,0	389,4	555,5	509,2
487,8	495,5	458,8	454,0	502,3

021

301,2	350,6	296,3	311,5	298,5
293,9	335,8	272,5	272,5	274,1
312,4	279,5	328,9	310,8	307,3
302,8	302,8	305,0	321,0	357,0
325,1	310,0	323,4	350,9	289,5
325,3	303,4	318,1	290,2	280,7
305,3	296,8	278,3	307,0	313,4
321,0	305,4	318,5	282,4	278,0
314,5	304,7	290,4	303,7	309,8
298,9	279,5	273,3	325,3	292,4

022

335,1	339,5	323,9	317,8	279,0
339,5	284,1	317,4	309,8	316,3
280,3	329,1	300,6	275,2	259,2
314,3	321,8	314,5	302,5	315,6
283,3	309,7	265,5	347,9	376,0
288,9	326,8	309,2	324,4	306,7
266,5	311,2	281,8	319,7	332,6
238,0	258,9	337,5	316,8	322,0
323,1	292,6	348,4	309,3	316,7
302,1	303,0	324,7	328,3	302,5

023

341,5	359,1	375,0	358,3	393,3
372,5	370,6	361,4	363,9	374,8
373,4	376,8	401,2	386,9	373,8
382,3	367,5	360,1	347,5	350,4
375,7	381,8	375,2	359,5	368,3
361,2	364,2	349,7	373,2	399,6
360,5	353,7	351,8	387,2	382,5
361,6	371,5	391,4	374,0	365,9
389,3	327,5	352,9	346,9	352,2
383,5	352,9	366,4	354,4	375,8

024

137,4	308,1	230,2	135,9	179,3
117,6	237,6	211,9	213,7	158,1
104,9	238,4	175,8	169,3	105,9
105,1	82,6	68,1	144,7	53,9
170,7	185,8	177,2	195,1	41,4
114,4	168,8	140,6	120,6	106,1
206,1	204,6	102,3	162,9	261,9
186,3	133,2	151,9	229,9	124,6
184,1	118,9	147,5	99,8	110,7
89,4	224,4	153,2	205,2	154,9

025

398,4	297,1	421,0	390,9	449,2
262,4	438,9	248,9	325,6	406,9
421,2	525,3	471,2	389,7	390,6
339,8	204,5	376,4	498,8	407,3
227,4	412,6	422,2	221,4	229,8
312,3	390,3	478,5	322,3	392,0
381,7	389,8	484,0	415,1	418,1
334,7	490,0	433,0	401,7	419,0
428,3	431,7	487,5	243,7	337,4
364,5	463,3	569,4	471,9	395,5

026

558,2	357,4	348,3	450,9	277,8
596,0	457,5	203,2	574,3	343,9
361,1	485,8	303,0	506,0	396,3
445,5	347,8	279,0	696,6	353,6
396,0	308,4	349,2	445,5	502,5
384,4	371,2	359,3	567,6	466,1
295,2	505,8	470,3	463,8	443,3
449,2	610,4	361,4	459,3	354,6
304,5	618,8	481,6	676,2	513,8
485,6	280,0	485,3	453,4	459,5

027

599,1	629,6	650,1	572,8	589,4
651,6	558,4	599,0	514,4	494,5
703,9	410,2	559,0	532,9	592,6
539,5	572,3	495,8	544,0	413,5
475,8	509,6	682,8	522,4	588,3
402,1	518,7	544,9	356,3	524,4
640,2	580,1	657,0	584,9	484,5
525,3	459,4	439,3	548,0	475,0
696,2	458,7	503,6	610,4	347,1
514,8	605,5	444,2	462,7	520,9

028

281,4	359,4	371,2	385,4	232,3
299,3	239,5	263,9	337,3	322,4
392,9	303,2	486,8	377,1	383,1
389,6	322,5	317,8	436,2	260,6
385,2	352,9	324,2	331,4	351,4
325,6	363,4	353,8	267,2	319,9
235,8	317,5	250,1	348,2	351,9
335,8	264,0	299,5	354,4	289,6
215,3	270,5	341,6	266,9	288,2
347,5	414,8	358,2	366,0	348,9

029

324,3	337,2	300,1	299,6	321,9
309,6	258,2	327,8	301,8	327,3
339,7	315,5	308,8	344,6	297,2
348,1	320,0	298,3	329,3	306,2
324,5	351,3	275,8	320,8	345,5
301,3	343,3	338,6	335,4	334,8
325,5	290,5	334,2	318,2	318,6
314,9	322,2	306,6	313,4	297,4
337,2	310,9	313,8	302,2	313,9
324,9	357,5	310,1	340,8	306,6

030

156,8	48,9	91,8	229,1	94,8
77,7	75,7	246,8	118,7	95,6
135,6	198,8	203,3	108,7	49,6
101,2	213,8	152,3	91,8	147,1
73,4	136,2	146,0	215,1	192,6
87,9	125,9	140,2	130,0	261,0
122,0	145,2	129,9	184,1	91,9
103,1	103,5	205,6	145,4	169,0
185,6	105,0	215,4	142,6	160,4
77,1	196,6	217,3	188,3	131,3

031

-30,6	168,8	111,0	96,3	125,1
87,3	69,9	127,1	169,4	184,1
-103,0	123,8	139,7	25,7	181,1
204,3	119,9	77,0	287,6	176,8
169,7	150,1	159,9	263,5	34,3
111,4	98,8	88,3	116,9	99,2
-18,6	22,1	18,1	212,5	152,4
6,4	133,3	-38,3	1,9	-32,6
156,8	198,1	152,8	252,8	28,4
139,8	64,1	180,4	101,9	117,3

032

440,3	383,2	467,7	482,7	506,2
529,3	442,8	492,2	466,4	559,1
409,5	510,6	402,0	322,9	480,1
469,4	499,9	505,7	451,5	524,9
547,2	610,3	520,7	587,8	694,7
548,7	541,9	546,6	309,6	485,6
485,7	524,2	460,1	243,0	504,9
578,8	495,0	455,5	609,3	504,3
589,0	459,9	575,9	607,3	372,0
526,2	511,3	573,0	463,2	447,3

033

207,3	134,7	309,7	139,0	153,4
150,0	83,9	94,4	93,2	81,7
115,0	204,6	229,5	62,1	181,4
179,3	284,9	169,1	348,7	325,8
39,1	155,2	392,5	67,6	226,8
228,4	-31,9	210,9	258,3	174,4
150,5	203,5	127,3	134,5	243,7
186,5	187,2	345,9	152,2	258,7
98,9	195,5	176,0	334,5	230,7
221,0	128,6	29,0	300,6	240,9

034

433,6	398,4	380,9	415,6	397,2
414,8	391,0	388,4	396,7	406,9
377,3	411,9	383,6	388,1	421,5
395,0	417,6	395,8	373,2	404,2
387,9	387,3	384,0	394,6	393,1
410,1	395,2	413,5	385,1	402,9
414,9	399,1	381,5	392,7	417,9
391,0	412,7	397,6	444,1	398,3
402,1	390,8	401,0	437,2	385,3
396,8	380,1	409,9	408,1	374,8

035

504,5	475,4	484,2	426,6	497,3
434,6	499,7	544,3	556,4	466,9
567,6	467,5	577,9	440,5	584,9
451,0	487,2	478,7	556,6	577,4
501,0	438,4	582,1	580,9	447,8
441,7	565,8	537,9	554,3	626,0
551,0	679,9	447,4	578,5	516,5
522,3	559,4	464,8	477,5	435,3
512,4	475,9	525,1	505,6	384,0
461,1	536,7	546,7	582,6	491,6

036

378,0	277,1	316,2	315,5	466,3
470,3	475,1	395,5	509,3	478,8
556,4	387,2	444,5	426,3	467,0
511,3	409,6	455,0	452,6	398,6
321,6	502,1	344,7	464,8	522,5
379,9	450,6	272,7	613,7	412,7
408,7	429,6	563,2	495,2	435,0
419,3	423,8	451,5	421,7	433,4
468,5	338,6	427,1	331,6	331,6
388,7	541,4	481,4	390,7	408,3

037

171,5	167,5	170,7	134,9	208,0
190,3	188,9	195,4	197,2	186,1
171,8	201,3	134,6	204,8	220,8
187,3	174,2	156,5	147,4	174,8
191,9	159,7	183,5	125,2	170,7
180,3	145,6	147,9	156,6	147,9
136,5	130,2	157,2	162,4	173,6
171,1	133,6	216,3	173,6	153,7
184,1	160,6	153,8	158,9	129,2
166,9	128,4	193,7	171,0	158,9

038

152,1	42,0	92,1	108,9	130,0
139,3	94,3	153,6	152,0	240,9
120,7	73,6	133,3	71,8	48,5
106,1	172,9	62,4	122,4	222,3
81,8	185,5	135,9	65,3	56,6
127,9	41,2	90,4	77,0	113,1
128,7	66,0	140,5	134,5	100,6
152,2	176,3	133,9	238,1	76,7
69,6	56,0	51,6	31,6	53,6
104,1	185,6	77,6	78,2	68,6

039

259,7	211,6	241,7	214,5	246,1
268,6	232,6	224,3	222,4	230,5
234,9	238,4	252,8	232,4	225,6
223,5	233,0	222,5	241,8	255,4
255,3	229,7	238,1	206,2	239,9
213,7	242,2	231,9	208,6	228,2
261,6	245,6	226,7	259,6	230,1
233,4	243,2	212,4	223,7	235,3
250,4	249,8	233,9	253,3	246,8
265,0	226,8	209,0	233,3	214,3

040

580,2	473,3	374,4	578,3	523,6
561,0	461,7	485,8	356,6	459,3
521,9	585,5	432,4	604,1	413,0
322,6	525,3	567,6	535,9	577,3
512,2	614,3	581,6	440,8	477,9
436,4	491,1	604,7	571,8	421,7
408,4	609,0	450,9	325,3	474,3
345,6	451,1	624,4	632,6	480,7
417,4	443,6	466,8	418,3	613,7
643,4	364,4	522,4	680,7	620,7

041

311,3	349,0	326,9	304,5	325,4
332,1	302,3	318,0	364,9	339,2
277,2	331,4	317,3	327,2	317,0
296,1	330,6	346,0	309,2	334,6
296,6	327,7	339,7	304,0	317,1
312,1	313,4	304,6	316,6	319,1
305,1	338,1	313,8	268,1	311,4
314,2	284,2	314,1	314,7	313,1
316,2	304,5	304,0	324,1	310,5
275,8	297,4	310,8	309,0	337,0

042

597,9	607,9	613,1	636,4	556,0
560,9	550,1	533,6	565,7	645,2
532,7	528,0	602,2	553,8	420,9
536,0	544,2	536,0	643,5	550,2
575,6	559,3	614,1	585,6	546,8
483,2	521,1	508,6	572,6	541,0
519,9	500,3	485,1	596,8	611,2
660,0	479,9	627,6	555,0	583,5
505,6	529,3	641,4	516,0	561,6
582,1	463,7	518,1	450,7	577,0

043

646,1	521,4	649,9	563,9	537,1
478,1	585,0	632,0	583,9	496,1
591,1	592,1	540,0	672,9	493,7
532,0	615,4	500,3	477,1	419,4
529,4	550,3	568,3	626,0	531,0
607,7	599,1	602,6	557,9	583,8
533,6	514,0	618,2	558,2	541,9
542,1	504,5	589,0	486,2	534,0
594,1	505,8	536,7	461,8	558,2
476,4	546,7	538,9	547,0	546,1

044

121,4	64,4	98,0	139,1	16,6
83,8	144,6	130,1	27,6	90,8
132,6	181,6	14,1	143,0	121,7
73,3	156,5	96,6	97,9	117,1
94,4	115,5	152,9	8,9	139,6
63,9	131,9	97,7	35,1	82,0
186,6	94,6	90,8	131,3	84,6
110,8	26,3	136,3	133,7	106,2
149,3	223,9	154,9	75,8	115,4
57,5	84,5	205,9	217,4	120,1

045

469,7	605,3	435,7	561,4	633,4
463,7	475,6	472,4	683,0	537,0
570,6	646,0	433,7	651,9	683,6
400,8	456,7	625,8	528,9	556,1
470,9	379,0	533,7	415,2	545,5
511,8	403,6	653,7	499,0	462,1
640,6	417,9	677,3	535,4	336,9
697,9	394,3	520,5	611,6	381,3
454,4	546,4	364,5	653,7	332,3
635,0	605,4	546,4	502,3	540,5

046

534,9	330,2	540,3	410,7	514,1
279,1	461,9	431,0	464,4	465,9
544,8	556,0	553,3	670,5	408,5
366,0	328,1	383,2	510,5	446,4
516,1	510,9	440,0	484,0	451,2
353,4	475,4	488,5	446,6	483,7
391,7	348,5	549,1	539,9	353,5
485,1	351,7	525,6	523,3	419,4
586,8	425,8	574,1	478,3	449,6
461,8	413,1	551,8	409,8	629,1

047

117,6	108,2	149,7	38,8	222,9
57,2	106,9	159,8	317,5	87,0
28,9	131,8	171,0	123,6	163,8
155,8	166,9	221,9	287,1	230,9
150,9	160,8	26,3	225,5	140,5
34,4	153,4	172,8	292,0	136,4
218,8	47,6	155,8	119,0	127,2
123,9	127,6	60,5	50,6	-18,4
166,6	245,8	65,5	190,2	205,0
155,1	191,6	277,8	59,0	50,0

048

668,3	630,7	522,3	513,2	551,3
503,3	598,9	489,9	488,0	484,8
556,3	495,6	520,7	567,9	601,3
548,9	571,0	517,2	587,1	550,1
511,4	571,4	467,1	502,7	568,0
494,3	541,6	528,4	622,3	570,4
510,8	531,8	528,6	495,5	589,2
467,4	544,7	501,0	554,6	528,1
536,7	592,2	550,4	427,9	542,2
495,7	476,6	490,0	522,5	454,6

049

49,7	153,8	148,5	26,8	80,8
91,8	118,0	140,6	98,2	141,4
98,2	60,6	152,6	143,2	46,0
183,9	89,3	110,8	179,0	143,7
64,6	155,5	80,6	124,1	200,3
124,7	133,1	111,9	32,9	118,8
171,9	43,2	106,3	80,2	-22,0
136,7	172,6	131,1	-17,4	146,2
-6,2	70,0	108,0	124,2	15,5
78,8	188,5	148,4	61,5	224,8

050

324,9	200,2	435,5	359,7	336,0
371,8	367,8	315,5	342,9	269,5
324,8	275,0	361,6	359,2	356,0
339,8	383,5	318,4	349,3	324,6
338,3	313,0	324,9	362,3	396,8
305,0	386,4	327,4	270,7	391,4
345,4	305,7	359,5	377,1	377,9
271,7	337,0	301,1	302,6	368,5
277,4	227,4	437,0	335,1	421,7
430,3	297,1	447,0	416,9	405,9

051

322,6	139,0	315,9	345,6	325,0
233,2	174,6	299,4	177,9	246,7
408,6	384,0	345,4	240,6	263,0
283,9	301,6	315,9	369,7	351,5
310,0	281,0	423,2	200,7	264,6
360,5	320,1	389,9	198,5	364,4
400,3	267,9	204,5	335,4	459,7
316,8	388,1	279,4	446,2	227,4
425,1	217,8	343,0	246,2	314,6
201,5	416,8	215,2	261,4	266,8

052

390,4	295,9	349,9	263,6	208,2
209,4	312,2	283,4	283,9	352,9
465,4	362,5	182,7	291,6	338,7
295,9	241,8	237,2	347,8	275,1
347,1	260,0	271,0	344,2	300,7
311,8	282,4	176,6	294,5	364,7
398,2	274,5	350,5	249,5	331,8
303,1	283,2	336,3	255,4	322,8
355,0	302,5	286,7	284,6	320,0
318,1	253,7	363,2	383,8	311,7

053

275,3	330,9	226,3	391,1	269,2
261,3	287,1	302,7	364,0	340,9
367,6	284,4	401,1	236,8	369,7
427,3	502,7	352,0	345,4	318,3
246,3	376,3	293,8	218,8	420,2
343,5	287,7	477,0	494,1	485,0
424,5	321,5	312,7	242,2	320,7
282,0	251,1	336,6	341,9	574,4
262,8	344,0	328,7	370,1	329,7
361,4	394,1	354,2	266,9	229,4

054

51,6	103,8	233,1	162,8	-59,1
44,2	42,8	125,5	152,8	139,5
136,9	44,4	298,6	200,7	14,9
252,2	71,7	161,2	168,0	-20,9
318,6	199,4	94,7	206,3	121,6
131,6	80,6	239,5	249,1	200,2
228,4	229,1	-107,8	5,6	166,0
345,1	50,1	-11,6	23,0	258,2
204,6	388,4	55,6	-58,6	236,0
55,0	28,8	92,1	45,9	131,6

055

315,5	334,6	343,0	312,4	313,6
366,3	319,5	370,8	335,9	303,0
327,9	316,7	318,9	339,5	346,9
363,1	349,3	348,2	342,0	315,6
338,4	323,1	331,2	341,1	342,6
359,1	360,8	326,4	366,2	349,7
330,6	341,4	316,9	361,0	347,1
319,1	325,1	383,9	375,3	377,4
343,4	361,3	342,2	344,1	315,8
318,1	331,3	349,4	324,3	356,1

056

543,2	591,0	488,3	558,2	553,6
528,0	489,7	523,0	530,3	560,4
558,7	586,3	527,7	529,0	538,7
564,6	553,3	510,1	547,4	503,8
574,0	569,9	531,5	565,4	560,6
558,7	584,2	516,2	553,9	521,7
577,6	551,3	534,5	546,0	590,9
544,8	544,9	528,0	563,5	535,8
547,1	487,9	538,6	562,7	563,1
567,6	539,3	570,3	518,4	567,1

057

419,7	347,0	368,5	381,0	393,5
437,9	417,5	357,2	392,6	320,9
360,2	361,9	373,3	397,4	367,8
380,8	355,7	401,9	367,1	397,4
344,1	365,0	398,9	406,1	356,0
425,7	392,9	335,4	439,3	379,2
356,7	337,7	360,7	391,7	325,0
351,0	364,1	380,9	402,8	367,5
389,1	370,3	354,8	340,6	364,9
362,8	407,2	397,0	391,2	402,9

058

419,5	488,7	446,8	467,5	443,3
450,5	514,9	499,9	499,6	371,0
577,4	531,2	499,6	420,2	433,2
520,1	482,8	486,2	396,5	532,8
530,4	576,5	484,7	580,2	538,1
488,8	515,7	523,9	460,9	532,0
438,2	520,5	405,6	479,3	532,1
515,3	480,2	513,7	566,5	460,0
519,8	569,9	470,0	597,6	479,8
558,3	481,5	416,2	531,4	423,0

059

448,9	439,7	461,9	468,0	457,6
471,3	459,8	468,4	477,2	461,8
447,5	438,2	470,3	461,8	439,9
490,1	453,0	462,7	448,0	440,6
452,8	469,1	448,6	455,3	443,6
449,2	449,0	453,6	469,1	458,6
481,1	450,7	454,0	440,6	439,9
459,8	479,2	455,9	446,5	447,6
439,4	439,6	433,5	426,0	469,6
447,4	454,0	431,1	452,6	441,5

060

521,1	429,3	442,6	511,2	480,0
383,4	464,7	513,5	460,4	495,9
467,5	462,9	489,2	491,0	514,1
476,5	465,8	460,6	486,5	515,9
489,7	514,2	469,7	455,5	506,2
493,9	441,2	496,2	477,6	479,0
508,6	446,8	470,6	485,7	474,0
465,9	492,0	512,6	463,7	457,9
496,3	503,7	506,5	536,4	494,9
488,0	490,5	487,4	492,3	501,2

061

470,7	166,0	287,7	111,8	188,5
198,9	125,0	117,3	196,5	214,5
190,2	240,0	145,1	166,0	72,7
76,2	179,1	262,7	339,1	97,1
232,3	273,3	232,9	57,1	295,5
281,5	271,0	76,8	314,9	156,7
198,2	32,8	126,5	190,5	268,3
325,7	167,9	128,2	183,5	321,9
237,6	175,1	346,0	257,5	127,2
142,3	152,9	240,8	170,4	196,2

062

433,8	459,0	387,4	295,7	295,9
376,8	336,0	349,3	351,4	423,4
299,3	449,3	412,8	408,4	282,5
399,5	343,7	388,3	434,6	313,0
347,9	271,8	362,3	441,0	381,2
314,8	396,1	381,1	356,2	435,3
298,9	343,4	400,9	373,7	351,3
272,4	378,6	446,4	384,8	346,0
399,8	504,3	431,9	422,2	353,6
427,7	370,6	348,9	366,3	314,9

063

528,1	550,3	556,6	586,6	408,6
413,7	304,1	285,2	324,4	445,1
486,8	252,2	377,6	412,0	466,7
194,0	468,3	342,3	236,1	649,5
496,4	238,7	548,2	351,6	530,5
434,8	586,6	421,2	417,0	464,3
362,3	272,5	412,2	494,0	416,3
212,4	364,7	447,2	404,5	429,0
443,2	380,9	336,5	325,3	405,7
379,8	406,0	291,0	567,5	263,8

064

186,1	65,9	86,7	205,6	149,9
249,1	141,8	182,8	205,0	182,2
207,5	221,5	158,9	177,9	225,5
180,5	240,6	225,5	279,7	163,2
288,8	98,8	278,7	200,7	234,1
187,8	179,9	358,3	236,3	175,5
132,3	171,0	175,7	227,4	304,4
195,3	279,0	155,3	204,9	161,4
230,8	246,2	130,7	95,6	211,0
73,9	70,9	155,3	104,2	180,1

065

282,4	263,0	274,4	295,8	277,5
248,6	303,5	281,7	302,0	248,7
255,6	268,4	271,0	311,3	275,0
259,5	282,2	294,6	279,1	301,7
273,5	293,9	301,8	292,0	284,1
266,6	267,1	291,5	266,4	291,2
268,0	287,2	285,6	278,1	264,1
287,4	282,1	278,1	267,8	280,9
274,0	308,0	265,4	282,2	287,6
254,7	274,1	267,3	284,5	296,2

066

475,8	497,0	466,0	490,5	483,2
491,8	478,2	537,3	417,0	433,1
453,4	488,0	543,3	457,4	453,0
422,8	437,9	382,1	504,7	453,8
479,4	458,9	450,4	468,8	519,2
486,6	481,0	465,9	529,1	422,9
479,9	439,9	453,0	541,2	508,1
436,2	461,5	426,6	400,0	468,2
483,2	478,5	488,5	459,0	499,4
465,3	525,3	435,4	530,2	486,8

067

188,9	71,0	218,3	320,4	185,9
292,6	280,5	184,2	169,1	149,5
243,5	86,0	131,2	112,9	279,2
129,7	67,9	139,0	234,0	399,9
159,9	148,5	297,8	328,1	315,3
90,6	179,8	181,3	149,6	209,8
141,8	304,2	276,1	135,8	220,9
252,3	282,9	255,3	270,4	246,0
232,8	172,8	167,0	228,6	327,5
323,6	140,7	77,3	185,2	392,8

068

167,6	242,4	80,6	293,5	364,5
255,9	197,2	265,3	243,3	388,6
256,0	245,0	320,8	308,8	352,3
297,9	204,0	314,4	295,0	246,0
289,9	230,5	285,5	237,7	279,3
205,2	151,1	269,0	120,2	262,6
270,2	167,0	349,2	376,8	331,4
222,9	290,6	317,8	197,9	190,8
349,6	267,4	178,2	271,6	268,0
153,4	152,8	252,6	185,4	283,6

069

190,2	217,7	217,1	155,9	227,5
221,8	145,2	187,7	86,7	223,3
251,6	199,1	256,6	216,4	240,9
196,1	248,1	240,8	161,0	222,5
163,0	143,6	273,6	253,2	205,7
174,4	226,3	251,8	230,4	214,4
249,1	205,9	244,9	237,7	227,2
171,3	245,4	133,2	228,4	272,6
256,6	265,1	173,2	174,5	238,1
222,0	273,2	186,7	283,0	283,2

070

408,2	316,5	417,8	374,7	214,6
289,5	317,0	442,8	390,2	308,5
298,2	343,8	328,6	247,8	219,7
305,7	363,2	223,1	407,2	287,3
367,2	410,7	254,5	381,2	252,2
414,5	312,0	208,9	379,1	311,0
176,8	344,4	311,0	307,2	376,4
343,6	234,0	320,4	417,9	361,5
409,6	339,0	316,4	259,9	374,1
358,1	479,1	348,1	279,9	222,5

071

264,6	274,4	303,3	272,2	292,9
281,1	291,3	262,2	273,3	268,9
284,6	289,0	278,0	286,2	239,9
244,2	283,2	298,9	281,8	258,9
273,9	281,7	305,7	266,2	290,0
259,2	271,2	245,4	282,0	256,1
275,4	287,1	285,9	283,5	258,7
267,5	258,6	293,1	279,8	252,2
277,0	275,8	294,6	279,3	259,7
316,1	274,9	280,0	279,6	279,2

072

449,2	395,7	344,5	232,0	371,2
271,6	307,3	396,8	272,8	353,4
428,2	350,3	523,9	363,4	412,7
358,8	369,8	338,8	419,1	390,5
414,2	319,3	310,9	461,0	287,4
305,9	433,8	348,0	441,4	380,5
530,4	462,9	407,7	335,8	320,6
474,4	381,4	295,2	528,6	346,0
372,1	446,1	470,1	425,3	531,3
412,7	395,0	531,1	307,3	336,3

073

710,8	569,0	472,6	676,8	363,5
511,1	627,4	677,7	631,2	631,9
433,8	527,9	549,1	630,8	633,9
503,5	701,6	486,5	510,2	637,6
474,4	643,1	582,2	368,0	694,9
579,9	430,9	495,7	603,5	309,0
612,9	681,4	505,4	520,3	736,7
549,0	279,3	613,0	510,7	680,7
680,1	622,4	521,7	637,2	508,5
580,1	552,5	616,0	626,0	640,7

074

371,2	339,5	367,6	367,5	326,6
290,8	342,7	373,9	372,7	415,4
369,3	334,9	259,6	370,5	324,4
283,3	348,0	252,6	335,1	326,6
310,1	364,9	297,8	327,4	373,4
355,5	316,7	367,8	260,6	354,9
373,4	340,9	333,5	326,5	316,2
367,8	403,5	352,4	352,5	281,1
333,4	361,4	309,9	368,3	325,0
364,9	318,5	328,0	358,5	345,4

075

158,5	164,4	191,6	137,6	163,3
85,4	136,5	217,6	111,6	153,9
139,3	145,0	148,7	92,4	110,8
191,2	121,6	193,2	192,9	119,4
101,0	146,6	178,7	141,1	143,5
164,3	150,4	90,3	152,6	156,2
110,6	156,3	174,0	136,1	180,2
134,7	143,1	221,2	152,1	191,0
137,3	154,1	150,7	157,0	115,6
187,9	148,1	126,5	180,1	173,1

076

432,9	519,3	552,0	585,3	420,4
429,4	513,1	589,0	654,2	602,2
580,7	536,2	559,9	554,8	602,0
538,5	633,7	384,0	566,5	526,3
571,5	562,8	594,1	549,8	488,2
642,3	455,4	527,9	633,7	617,1
647,8	549,6	604,7	572,3	656,0
566,8	611,6	515,0	596,3	555,6
508,1	490,7	559,9	528,3	532,9
629,5	566,9	398,9	663,7	546,3

077

138,8	107,3	187,8	213,4	114,8
41,2	66,9	149,9	38,5	152,6
99,1	89,5	90,7	-2,0	56,6
176,6	183,1	111,5	181,4	120,9
112,8	-0,1	-3,9	98,4	185,7
64,1	116,4	76,2	100,4	135,5
104,4	111,7	48,6	172,7	137,0
147,9	90,7	118,8	-24,3	172,0
94,8	163,2	-2,0	108,1	79,9
26,7	121,1	174,7	-5,0	123,7

078

595,2	677,5	530,1	718,9	575,9
559,5	530,2	582,3	588,7	536,7
502,3	511,0	580,2	421,1	438,7
552,3	567,5	573,4	529,1	591,4
376,7	490,1	528,4	512,5	447,6
611,6	658,8	587,9	508,0	676,8
552,1	562,9	539,3	580,3	440,2
562,1	655,3	601,1	543,5	528,0
629,1	478,3	526,5	620,5	587,8
518,5	682,4	572,8	477,3	530,6

079

110,2	173,1	200,8	182,6	168,6
168,0	148,1	133,4	167,2	144,0
161,0	161,8	161,5	135,5	129,3
140,2	185,6	193,2	159,1	143,5
158,2	132,4	174,0	189,1	149,0
179,4	199,0	166,9	138,0	161,7
183,9	162,6	184,3	189,5	125,7
177,7	147,6	160,8	201,2	160,4
153,1	189,6	130,0	158,2	188,6
151,9	191,9	170,5	171,5	181,4

080

245,5	197,8	247,6	203,3	183,2
179,5	167,7	204,1	203,4	199,1
201,9	158,0	185,9	196,9	213,6
237,2	232,8	207,2	183,0	191,3
221,0	222,9	177,9	233,5	228,2
229,9	254,7	224,9	212,5	201,0
208,7	221,5	246,4	247,4	145,9
206,7	232,7	190,7	200,5	245,6
224,8	241,9	219,3	201,5	195,2
244,0	160,0	220,5	202,1	200,2

081

522,1	514,9	522,0	538,1	507,9
543,3	512,7	539,9	519,5	514,9
523,6	508,0	528,6	543,6	522,2
512,1	510,8	506,4	512,8	516,2
519,7	526,4	527,2	533,6	511,2
521,7	522,2	510,4	504,6	533,2
524,0	528,9	543,6	532,2	516,0
519,3	514,7	518,7	524,9	525,0
514,4	498,9	518,7	532,0	532,7
516,8	508,4	518,3	522,4	522,6

082

331,1	240,8	294,6	321,3	325,7
297,9	168,7	316,5	296,1	259,9
240,9	201,1	313,1	253,9	242,9
310,5	274,1	305,5	309,8	238,3
173,1	258,9	335,8	233,4	182,7
251,8	254,8	260,8	281,0	271,4
314,5	271,7	309,7	257,4	225,7
307,8	241,9	336,3	226,9	297,0
351,4	261,0	286,2	258,4	282,5
254,6	239,9	185,4	242,2	257,5

083

485,2	452,0	403,0	299,4	341,7
259,3	625,3	502,1	472,2	397,1
412,0	415,0	439,5	482,9	421,4
476,7	563,5	462,9	348,1	441,1
363,0	434,0	512,5	481,8	511,5
223,0	370,2	337,2	460,2	519,6
412,3	406,5	331,5	421,9	448,1
293,4	434,3	315,3	324,7	292,0
377,4	316,4	388,7	369,7	295,9
185,7	350,0	405,5	413,8	453,1

084

233,9	238,6	260,1	228,8	209,7
211,1	236,7	206,5	215,1	235,5
244,8	269,4	227,5	252,9	263,4
233,2	231,6	263,9	237,4	223,3
223,0	257,7	231,4	242,7	209,6
225,3	250,7	202,2	241,1	239,8
204,4	241,3	230,8	198,2	233,6
214,8	240,6	189,3	233,7	248,1
259,7	254,5	249,4	220,8	235,7
268,2	243,2	243,5	209,8	222,3

085

503,3	504,7	356,8	465,4	256,2
348,6	374,3	131,0	466,7	241,1
372,8	567,9	343,4	314,9	388,1
209,3	298,4	248,6	444,3	339,6
328,7	350,4	389,2	632,8	386,0
340,3	260,0	225,8	464,8	525,3
254,4	542,3	358,9	218,0	317,7
346,9	569,5	353,0	442,6	366,5
388,1	412,0	388,6	283,9	243,5
243,3	130,4	495,1	320,0	246,6

086

118,8	109,3	79,9	120,9	132,7
131,3	150,7	84,1	113,0	77,7
154,9	70,7	180,8	62,6	147,3
64,8	100,6	121,0	144,8	106,9
125,0	139,7	121,1	180,3	124,4
119,5	68,9	112,2	126,0	131,6
142,8	121,8	88,5	108,0	129,4
152,6	179,7	105,5	122,2	171,3
152,3	114,0	105,2	177,5	82,3
125,1	117,3	220,0	181,9	112,9

087

424,3	233,8	431,4	417,5	219,5
346,7	314,7	194,4	297,5	380,7
216,1	280,4	363,3	308,1	314,1
270,6	328,7	349,0	428,1	254,1
418,8	379,8	189,7	318,5	257,3
242,1	286,2	342,2	407,5	460,9
359,5	210,0	502,7	207,9	268,4
378,7	339,9	379,6	201,2	512,4
365,5	163,0	264,0	310,6	381,4
240,1	244,1	199,7	446,1	381,1

088

110,5	147,3	166,2	144,1	125,0
120,1	87,2	123,1	140,4	119,9
137,0	143,6	116,0	130,1	121,3
129,1	153,0	147,6	118,2	149,2
86,7	143,0	129,9	131,4	145,4
134,8	86,9	127,3	139,3	166,0
189,4	115,3	109,4	141,8	125,9
129,1	111,4	180,4	155,8	158,6
87,6	139,3	111,0	139,6	137,7
119,8	89,2	83,4	151,6	90,8

089

470,4	408,2	265,0	336,9	268,5
434,4	441,1	260,1	370,6	268,6
293,3	378,2	325,2	425,2	397,8
319,5	448,4	245,4	279,0	215,1
384,9	321,5	398,0	262,6	320,2
371,6	434,6	342,1	410,1	358,6
345,8	430,1	403,0	338,3	390,8
188,8	366,5	434,9	419,7	471,0
383,6	337,0	446,0	398,2	369,6
402,4	242,7	373,3	359,6	198,6

090

281,2	290,1	408,8	286,8	273,7
312,1	269,3	248,7	279,9	271,1
272,5	280,2	328,7	321,5	291,8
295,2	287,6	358,9	375,4	242,1
303,0	282,2	273,8	261,9	308,9
292,0	323,2	314,9	297,0	340,1
274,9	312,0	312,5	303,7	293,6
309,2	342,0	245,8	321,5	392,6
222,5	326,5	288,5	323,0	340,2
342,8	316,3	271,3	316,3	332,3

091

515,0	562,2	537,8	551,9	541,5
672,0	632,6	680,5	775,2	590,4
539,2	533,0	546,3	585,8	491,2
569,9	597,2	515,0	621,4	714,6
528,4	583,9	482,8	559,0	467,9
678,8	577,4	614,0	446,7	656,4
599,2	622,2	502,0	584,7	513,1
571,3	596,4	588,3	572,3	580,1
418,9	627,1	476,3	693,8	596,7
507,0	577,5	535,5	604,4	449,4

092

426,5	529,0	507,9	442,1	463,9
484,3	477,5	432,4	552,2	416,9
406,6	487,3	471,3	443,7	398,4
499,8	440,2	496,9	445,7	484,9
525,2	520,7	434,9	482,9	479,5
448,1	457,5	514,7	503,5	426,8
462,2	497,8	536,9	477,6	472,4
470,7	475,5	421,7	486,8	460,5
455,6	456,1	415,7	554,3	402,8
458,2	401,7	456,1	494,7	476,8

093

424,7	307,4	364,2	363,4	379,1
426,2	429,5	306,9	305,0	374,3
438,7	332,1	355,6	279,1	305,4
407,1	271,2	357,3	362,7	408,8
348,7	467,1	355,2	539,0	361,4
421,6	388,6	339,2	317,5	388,7
363,9	422,1	416,2	481,9	352,1
418,6	380,0	343,7	472,8	485,6
445,9	354,6	420,1	374,2	297,6
441,2	379,8	386,5	325,7	401,1

094

338,2	386,7	348,5	364,4	379,5
360,1	380,6	327,2	383,0	369,3
365,7	341,8	363,6	311,5	371,3
334,7	349,2	330,7	360,4	335,5
337,1	354,0	417,0	344,7	317,5
369,9	432,6	377,2	386,8	315,9
326,8	317,4	370,7	323,9	357,6
389,4	341,9	425,3	345,0	363,5
399,4	310,0	359,4	409,5	368,1
371,4	358,3	350,7	340,7	304,1

095

125,4	135,0	316,2	239,3	247,9
146,2	268,6	176,1	146,6	201,6
226,7	163,6	213,0	282,3	255,9
203,7	384,9	142,3	67,0	146,0
257,0	76,4	259,3	182,7	404,5
150,5	199,8	287,4	286,8	221,4
217,8	250,3	284,2	289,4	206,9
164,4	339,9	136,4	177,5	210,3
38,1	180,5	205,4	81,8	92,9
177,5	435,3	172,5	203,6	-60,3

096

510,5	561,5	556,3	506,5	519,1
549,2	498,4	576,0	594,0	588,1
562,6	559,4	468,6	582,3	464,6
379,9	650,7	593,8	594,7	490,9
552,5	656,6	447,9	555,9	493,1
375,7	413,6	418,9	514,1	536,0
468,2	530,7	580,5	415,3	483,3
498,3	457,8	397,0	654,3	510,3
544,5	571,9	575,1	517,7	484,8
505,8	528,1	431,7	604,0	476,8

097

148,2	229,2	118,6	144,6	199,6
112,8	246,2	292,7	163,9	88,9
45,5	90,8	145,2	280,2	202,2
104,8	39,2	91,3	240,5	335,0
246,9	324,6	69,2	125,0	223,1
178,4	222,9	85,4	81,0	80,2
260,1	275,7	152,5	237,6	69,9
179,3	25,6	258,3	337,5	179,8
186,6	22,6	245,0	77,4	211,5
110,5	138,2	274,2	212,6	132,6

098

425,5	464,0	465,0	436,5	430,3
427,7	491,6	432,9	457,9	422,0
416,0	456,3	459,7	450,4	458,9
424,8	477,1	427,2	426,3	460,8
420,2	435,6	434,0	482,6	433,3
415,1	480,3	412,9	396,0	432,9
466,6	472,0	406,7	474,7	386,9
433,6	395,5	421,5	423,9	508,8
412,3	494,4	395,5	492,9	500,5
476,0	447,6	485,9	435,4	430,4

099

358,8	330,0	372,6	346,9	354,3
361,8	345,6	358,3	329,7	356,4
348,5	356,2	364,7	363,0	376,9
349,2	361,2	369,6	355,7	355,4
335,3	354,0	364,7	350,4	342,1
337,4	354,3	385,9	338,4	353,6
359,1	365,5	357,7	357,3	365,0
362,2	357,5	371,9	353,2	360,3
364,4	351,2	354,9	366,6	357,5
370,1	345,9	354,1	354,7	352,0

100

138,5	166,2	89,2	185,1	161,3
185,1	194,9	102,4	202,3	230,7
210,4	151,2	158,0	226,1	111,7
83,8	123,6	166,7	172,2	129,2
134,3	124,2	214,2	182,0	107,9
202,7	213,0	228,2	119,6	182,3
217,7	211,5	216,7	159,0	200,1
168,5	89,1	282,1	133,4	180,9
141,8	143,8	155,9	179,0	209,9
227,5	169,5	178,5	113,7	176,6

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Найко Д.А. Перевірка непараметричних гіпотез у педагогічному експерименті. / Д.А. Найко // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методи навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. / Збірник наукових праць Вінницького державного педагогічного університету. – 2016. – С. 272 – 277.

2. Найко Д.А. Визначення однорідності груп при дослідженні процесу формування комунікативної компетентності майбутніх менеджерів-аграріїв. / Д.А. Найко, О.Д. Краєвська // Економіка. Фінанси. Менеджмент: актуальні питання науки і практики. / Збірник наукових праць Вінницького національного аграрного університету. – 2015. – №1. – С. 70 − 81.

3. Найко Д. А. Особливості побудови тестових завдань з математичних дисциплін / Д. А. Найко. – Сучасні інформаційні технології та інноваційні методи навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми // Зб. наук. пр. – Випуск 48. – 2017. – С. 154 – 160.

4. Шевчук О.Ф. Вивчення впливу сільського коефіцієнта на прогностичну валідність конкурсного бала студентів-першокурсників / О.Ф. Шевчук // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми // Зб. наук. пр. – Випуск 52 / редкол. – Київ-Вінниця: ТОВ фірма "Планер", 2018. – С. 439-443.

5. Шевчук О.Ф. Прогностична валідність конкурсного бала студентів-першокурсників економічного напрямку / О.Ф. Шевчук // Економіка. Фінанси. Менеджмент: актуальні питання науки і практики. – № 7. – 2018. – С. 65-78.

6. Шевчук О.Ф. Прогностична валідність конкурсного відбору до магістратури за спеціальністю 081 «Право» / О.Ф. Шевчук // Економіка. Фінанси. Менеджмент: актуальні питання науки і практики – № 11. – 2018. – С. 125-137.

7. Шевчук О.Ф. Прогностична валідність конкурсного відбору випускників коледжів економічного спрямування / О.Ф. Шевчук // Економіка. Фінанси. Менеджмент: актуальні питання науки і практики. – № 2. – 2019. – С. 140-150.

8. Шевчук О.Ф. Методика виявлення аномальних рівнів оцінювання студентів-першокурсників / О.Ф. Шевчук // Slovak international scientific journal. – 2020. – № 37, Vol. 2. – P. 43-49.

9. Потапова Н.А. Економетрична модель оцінки виробництва продукції тваринництва / Н.А. Потапова, І.М. Ушкаленко, І.С. Мельник // Інфраструктура ринку. – 2020. – Вип. 40. – С. 491-497.

10. Ушкаленко І.М. Особливості моделювання сільськогосподарського виробництва з врахуванням ризику / І. М. Ушкаленко // Економіка, фінанси,

менеджмент: актуальні питання науки і практики. – 2020. – № 1 (51). – С. 7-22.

11. Потапова Н.А. Економетричний аналіз оцінки змін у використанні інформаційних технологій / Н.А. Потапова, О.В. Зелінська // Polish journal of science. – 2020. - № 26. – S. 17-24.

12. Потапова Н.А. Інформаційне забезпечення прогнозування нормативної грошової оцінки землі сільськогосподарського призначення в Україні / Н.А. Потапова, Л.О. Волонтир // Slovak international scientific journal. – 2020. – №39. – С.3-10.

13. Потапова Н.А. Прогнозування динаміки поточних логістичних матеріальних витрат сільського господарства України / Н.А. Потапова // Економіка. Фінанси. Менеджмент: актуальні питання науки і практики. – 2019. – №4. – С. 41-52.

14. Підгурський О.І. Порівняльний аналіз результатів імітаційного та математичного моделювання суперпозиції пуассонівського та регулярного потоків транзакцій / О.І. Підгурський // Економіка. Фінанси. Менеджмент: актуальні питання науки і практики. – 2018. – № 3. – С. 47-60.

15. Томчук О.Ф. Роль фінансової стійкості в оцінці ймовірності банкрутства підприємства / О.Ф. Томчук // Slovak international scientific journal – 2020. – № 38. – P. 14-24.

16. Shevchuk O.D. Financial stability of the enterprise. Forecast and adequacy of the mathematical model / O.D. Shevchuk // Slovak international scientific journal. – 2020. – № 39, VOL. 2. – P. 52-60.

17. Шевчук О.Д. Методи математичного аналізу та контролю різних етапів інфляційного процесу / Шевчук О.Д., Найко Д.А. // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми Зб. наук. пр. – Випуск 49 – 2017. – С. 171-177.

18. Волонтир Л.О. Інформаційне забезпечення прогнозування розвитку галузі буряківництва / Л.О. Волонтир // Економіка. Фінанси. Менеджмент: актуальні питання науки і практики. – 2019. – № 1. – С. 71-82.

19. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.

20. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб./ О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Б. П. Орел, П. І. Штабалюк. – К: НТУУ «КПІ», 2014. – 212 с.

21. Донченко В.С. Теорія ймовірностей та математична статистика для соціальних наук : навч. посіб. / В.С. Донченко, М.В.-С. Сидоров. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2015. – 400 с.

22. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов ; за ред. Г.О. Михаліна. – К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. – 336 с.

23. Авраменко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч. посібник / В.І. Авраменко, І.К. Карімов. – 2-ге вид., перероб. і доп. – Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2013. – 245 с.

24. Кармелюк Г.І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв'язування задач : Навч. посібник. - К.: Центр учбової літератури, 2007. – 576 с.

25. Карташов М.В. Імовірність, процеси, статистика : Посібник. – К.: Видавничо поліграфічний центр «Київський університет», 2008.– 494 с.

26. Турчин В. М. Теорія ймовірностей і математична статистика: Основні поняття, приклади, задачі. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – 476 с.

27. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посібник. У 2-х ч. – Ч. І. Теорія ймовірностей. – К. : КНЕУ, 2000. – 304 с.

28. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І., Савіна С. С. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посібник. У 2-х ч. – Ч. ІІ. Математична статистика. – К. : КНЕУ, 2001. – 336 с.

29. Жалдак М.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: підручник [для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів]. − Вид. 2, перероб. і доп. / М.І. Жалдак, Н.М. Кузьміна, Г.О. Михалін. − Полтава : "Довкілля-К", 2009. − 500 с.

30. Барковський В.В. Теорія ймовірностей та математична статистика / В.В. Барковський, Н.В. Барковська, О.К. Лопатін–5-те видання. – Київ: Центр учбової літератури, 2010. – 424 с.

Додаток А

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1	0,242	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	989	973	957
1,7	940	925	909	893	878	863	848	833	818	804
1,8	790	775	761	748	734	721	707	694	681	669
1,9	656	644	632	620	608	596	584	573	562	551
2	0,054	529	519	508	498	488	478	468	459	449
2,1	440	431	422	413	404	396	387	379	371	363
2,2	355	347	339	332	325	317	310	303	297	290
2,3	283	277	270	264	258	252	246	241	235	229
2,4	224	219	213	208	203	198	194	189	184	180
2,5	175	171	167	163	158	154	151	147	143	139
2,6	136	0132'	129	126	122	119	116	113	110	107
2,7	104	101	99	96	93	91	88	86	84	81
2,8	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61
2,9	60	58	56	55	53	51	50	48	47	46
3	0,0044	43	42	40	39	38	37	36	35	34
3,1	33	32	31	30	29	28	27	26	25	25
3,2	24	23	22	22	21	20	20	19	18	18
3,3	17	17	16	16	15	15	14	14	13	13
3,4	12	12	12	11	11	10	10	10	9	9
3,5	9	8	8	8	8	7	7	7	7	6
3,6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	4
3,7	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3
3,8	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2
3,9	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1

Додаток Б

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0	0	0,31	0,1217	0,61	0,2291	0,91	0,3186	1,21	0,3869
0,01	0,004	0,32	0,1255	0,62	0,2324	0,92	0,3212	1,22	0,3883
0,02	0,008	0,33	0,1293	0,63	0,2357	0,93	0,3238	1,23	0,3907
0,03	0,012	0,34	0,1331	0,64	0,2389	0,94	0,3264	1,24	0,3925
0,04	0,016	0,35	0,1368	0,65	0,2422	0,95	0,3289	1,25	0,3944
0,05	0,0199	0,36	0,1406	0,66	0,2454	0,96	0,3315	1,26	0,3962
0,06	0,0239	0,37	0,1443	0,67	0,2486	0,97	0,334	1,27	0,398
0,07	0,0279	0,38	0,148	0,68	0,2517	0,98	0,3365	1,28	0,3997
0,08	0,0319	0,39	0,1517	0,69	0,2549	0,99	0,3389	1,29	0,4015
0,09	0,0359	0,4	0,1554	0,7	0,258	1	0,3413	1,3	0,4032
0,1	0,0398	0,41	0,1591	0,71	0,2611	1,01	0,3438	1,31	0,4049
0,11	0,0438	0,42	0,1628	0,72	0,2642	1,02	0,3461	1,32	0,4066
0,12	0,0478	0,43	0,1664	0,73	0,2673	1,03	0,3485	1,33	0,4082
0,13	0,0517	0,44	0,17	0,74	0,2703	1,04	0,3508	1,34	0,4099
0,14	0,0557	0,45	0,1736	0,75	0,2734	1,05	0,3531	135	0,4115
0,15	0,0596	0,46	0,1772	0,76	0,2764	1,06	0,3554	136	0,4131
0,16	0,0636	0,47	0,1808	0,77	0,2794	1,07	0,3577	1,37	0,4147
0,17	0,0675	0,48	0,1844	0,78	0,2823	1,08	0,3599	1,38	0,4162
0,18	0,0714	0,49	0,1879	0,79	0,2852	1,09	0,3621	1,39	0,4177
0,19	0,0753	0,5	0,1915	0,8	0,2881	1,1	0,3643	1,4	0,4192
0,2	0,0793	0,51	0,195	0,81	0,291	1,11	0,3665	1,41	0,4207
0,21	0,0832	0,52	0,1985	0,82	0,2939	1,12	0,3686	1,42	0,4222
0,22	0,0871	0,53	0,2019	0,83	0,2967	1,13	0,3708	1,43	0,423
0,23	0,091	0,54	0,2054	0,84	0,2995	1,14	0,3729	0,144	0,4251
0,24	0,0948	0,55	0,2088	0,85	0,3023	1,15	0,3749	1,45	0,4265
0,25	0,0987	0,56	0,2123	0,86	0,3051	1,16	0,377	1,46	0,4279
0,26	0,1026	0,57	0,2157	0,87	0,3078	1,17	0,379	1,47	0,4292
0,27	0,1064	0,58	0,219	0,88	0,3106	1,18	0,381	1,48	0,4305
0,28	0,1103	0,59	0,2224	0,89	0,3133	1,19	0,383	1,49	0,4319
0,29	0,1141	0,6	0,2257	0,9	0,3159	1,2	0,3849	1,5	0,4332
0,3	0,1179								

Продовження таблиці додатку Б

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,51	0,4345	1,81	0,4649	2,22	0,4868	2,82	0,4976
1,52	0,4357	1,82	0,4656	2,24	0,4875	2,84	0,4977
1,53	0,437	1,83	0,4664	2,26	0,4881	2,86	0,4979
1,54	0,4382	1,841	0,4671	2,28	0,4887	2,88	0,498
1,55	0,4394	1,85	0,4678	2,3	0,4893	2,9	0,4981
1,56	0,4406	1,86	0,4686	2,32	0,4898	2,92	0,4982
1,57	0,4418	1,87	0,4693	2,34	0,4904	2,94	0,4984
1,58	0,4429	1,88	0,4699	2,3	0,4909	2,96	0,4985
1,59	0,4441	1,89	0,4706	2,38	0,4913	2,98	0,4985
1,6	0,4452	1,9	0,4713	2,4	0,4918	3	0,49865
1,61	0,4463	1,91	0,4719	2,42	0,4922	3,2	0,49931
1,62	0,4474	1,92	0,4726	2,44	0,4927	3,4	0,49966
1,'33	0,4484	1,93	0,4732	2,46	0,4931	3,6	0,499841
1,64	0,4495	1,94	0,4738	2,48	0,4934	3,8	0,499928
1,65	0,4505	1,95	0,4744	2,5	0,4938	4	0,499968
1,6	0,4515	1,96	0,475	2,52	0,4941	4,5	0,499997
1,67	0,4525	1,97	0,4756	2,54	0,4945	5	0,499997
1,68	0,4535	1,98	0,4761	2,56	0,4948		
1,69	0,4545	1,99	0,4767	2,58	0,4951		
1,7	0,4554	2	0,4772	2,6	0,4953		
1,71	0,45641	2,02	0,4783	2,62	0,4956		
1,72	0,4573!	2,04	0,4793	2,64	0,4959		
1,73	0,4582	2,06	0,4803	2,66	0,4961		
1,74	0,4591	2,08	0,4812	2,68	0,4963		
1,75	0,4599	2,1	0,4821	2,7	0,4965		
1,76	0,4608	2,12	0,483	2,72	0,4967		
1,77	0,4616	2,14	0,4838	2,74	0,4969		
1,78	0,4625	2,16	0,4846	2,76	0,4971		
1,79	0,4633	2,18	0,4854	2,78	0,4973		
1,8	0,4641	2,2	0,4861	2,8	0,4974		

Додаток В

Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$ **(квантилів** $(\gamma+1)/2$ **нормального розподілу)**

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4.03	6,86	25	2,064	2.797	3.745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2.756	3.659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2.708	3.558
10	2.26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2.23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2.633	3.403
16	2,13	2.95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2.576	3.291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток Г

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5.64	20	0.37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0.73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0.26	0,38	0.56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1.60	50	0.21	0,30	0,43
12	0.55	0.90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0.151	0.211	0,29
16	0,44	0,70	1.07	100	0,143	0,198	0.27
17	0,42	0.66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0.40	0.63	0.96	200	0.099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0.92	250	0.089	0,120	0,162

Додаток Д

Критичні точки розподілу χ^2

Число степенів вільності k	Рівень значущості α								
	0,001	0,002	0,005	0,01	0,02	0,025	0,05	0,10	0,2
1	10,83	9,5	7,9	6,6	5,4	5,0	3,8	2,7	1,64
2	13,8	12,4	11,6	9,2	7,8	7,4	6,0	4,6	3,22
3	16,3	14,8	12,8	11,3	9,8	9,4	7,8	6,3	4,64
4	18,5	16,9	14,9	13,3	11,7	11,1	9,5	7,8	6,0
5	20,5	18,9	16,3	15,1	13,4	12,8	11,1	9,2	7,3
6	22,5	20,7	18,6	16,8	15,0	14,4	12,6	10,6	8,6
7	24,3	22,6	20,3	18,5	16,6	16,0	14,1	12,0	9,8
8	26,1	24,3	21,9	20,1	18,2	17,5	15,5	13,4	11,8
9	27,9	26,1	23,6	21,7	19,7	19,0	16,9	14,7	12,2
10	29,6	27,7	25,2	23,2	21,2	20,5	18,3	16,0	13,4
11	31,3	29,4	26,8	24,7	22,6	21,9	19,7	17,3	14,6
12	32,9	31	28,3	26,2	24,1	23,3	21,0	18,5	15,8
13	34,5	32,5	29,8	27,7	25,5	24,7	22,4	19,8	17,0
14	36,1	34	31	29,1	26,9	26,1	23,7	21,1	18,2
15	37,7	35,5	32,5	30,6	28,3	27,5	25,0	22,3	19,3
16	39,2	37	34	32,0	29,6	28,8	26,3	23,5	20,5
17	40,8	38,5	35,5	33,4	31,0	30,2	27,6	24,8	21,6
18	42,3	40	37	34,8	32,3	31,5	28,9	26,0	22,8
19	43,8	41,5	38,5	36,2	33,7	32,9	30,1	27,2	23,9
20	45,3	43	40	37,6	35,0	34,2	31,4	28,4	25,0
21	46,8	44,5	41,5	38,9	36,3	35,5	32,7	29,6	26,2
22	48,3	46	42,5	40,3	37,7	36,8	33,9	30,8	27,3
23	49,7	47,5	44	41,6	39,0	38,1	35,2	32,0	28,4
24	51,2	48,5	45,5	43,0	40,3	39,4	36,4	33,2	29,6
25	52,6	50	47	44,3	41,6	40,6	37,7	34,4	30,7
26	54,1	51,5	48	45,6	42,9	41,9	38,9	35,6	31,8
27	55,5	53	49,5	47,0	44,1	43,2	40,1	36,7	32,9
28	56,9	54,5	51	48,3	45,4	44,5	41,3	37,9	34,0
29	58,3	56	52,5	49,6	46,7	45,7	42,6	39,1	35,1
30	59,7	57,5	54	50,9	48,0	47,0	43,8	40,3	36,3

Продовження таблиці додатку Д

Число степенів вільності k	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99
1	1,07	0,455	0,148	0,064	0,016	0,0039	0,00098	0,0006	0,00016
2	2,41	1,386	0,713	0,446	0,211	0,103	0,051	0,040	0,020
3	3,66	2,366	1,424	1,005	0,584	0,352	0,216	0,185	0,115
4	4,9	3,36	2,19	1,65	1,06	0,711	0,484	0,43	0,297
5	6,1	4,35	3,00	2,34	1,61	1,15	0,831	0,75	0,554
6	7,2	5,35	3,83	3,97	2,20	1,64	1,24	1,13	0,872
7	8,4	6,35	4,67	3,82	2,83	2,17	1,69	1,56	1,24
8	9,5	7,34	5,53	4,59	3,49	2,73	2,18	2,03	1,65
9	10,7	8,34	6,39	5,38	4,17	3,33	2,70	2,53	2,09
10	11,8	9,34	7,27	6,18	4,86	3,94	3,25	3,06	2,55
11	12,9	10,3	8,1	7,0	5,6	4,57	3,82	3,6	3,05
12	14,0	11,3	9,0	7,8	6,3	5,23	4,40	4,2	3,57
13	15,1	12,3	9,9	8,6	7,0	5,89	5,01	4,8	4,11
14	16,2	13,3	10,8	9,5	7,8	6,57	5,63	5,4	4,66
15	17,3	14,3	11,7	10,3	8,5	7,26	6,26	6,0	5,23
16	18,4	15,3	12,6	11,2	9,3	7,96	6,91	6,6	5,81
17	19,5	16,3	13,5	12,0	10,1	8,67	7,56	7,3	6,41
18	20,6	17,3	14,4	12,9	10,9	9,39	8,23	7,9	7,01
19	21,7	18,3	15,4	13,7	11,7	10,1	8,91	8,6	7,63
20	22,8	19,3	16,3	14,6	12,4	10,9	9,59	9,2	8,26
21	23,9	20,3	17,2	15,4	13,2	11,6	10,3	9,9	8,90
22	24,9	21,3	18,1	16,3	14,0	12,3	11,0	10,6	9,54
23	26,0	22,3	19,0	17,2	14,8	13,1	11,7	11,3	10,2
24	27,1	23,3	19,9	18,1	15,7	13,8	12,4	12,0	10,9
25	28,1	24,3	20,9	18,9	16,5	14,6	13,1	12,7	11,5
26	29,3	25,3	21,8	19,8	17,3	15,4	13,8	13,4	12,2
27	30,3	26,3	22,7	20,7	18,1	16,2	14,6	14,1	12,9
28	31,4	27,3	23,6	21,6	18,9	16,9	15,3	14,8	13,6
29	32,5	28,3	24,6	22,5	19,8	17,7	16,0	15,6	14,3
30	33,5	29,3	25,5	23,4	20,6	18,5	16,8	16,3	15,0

Додаток Е

Критичні точки розподілу Стьюдента

Число степенів вільності k	Рівень значущості α (двостороння критична область)								
	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,003	0,002	0,001
1	6,31	12,7	25,452	31,82	63,7	127,3	212,2	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,205	6,97	9,92	14,089	18,216	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,177	4,54	5,84	7,153	8,891	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,495	3,75	4,60	5,597	6,435	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,163	3,37	4,03	4,773	5,376	5,89	6,86
6	1,94	2,45	2,969	3,14	3,71	4,317	4,800	5,21	5,96
7	1,89	2,36	2,841	3,00	3,50	4,029	4,412	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,752	2,90	3,36	3,833	4,199	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,685	2,82	3,25	3,690	4,024	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,634	2,76	3,17	3,581	3,892	4,14	4,59
11	1,80	2,20		2,72	3,11			4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,560	2,68	3,05	3,428	3,706	3,93	4,32
13	1,77	2,16		2,65	3,01			3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,510	2,62	2,98	3,326	3,583	3,79	4,14
15	1,75	2,13		2,60	2,95			3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,473	2,58	2,92	3,252	3,494	3,69	4,01
17	1,74	2,11		2,57	2,90			3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,445	2,55	2,88	3,193	3,428	3,61	3,92
19	1,73	2,09		2,54	2,86			3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,423	2,53	2,85	3,153	3,376	3,55	3,85
21	1,72	2,08		2,52	2,83			3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,405	2,51	2,82	3,119	3,335	3,51	3,79
23	1,71	2,07		2,50	2,81			3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,391	2,49	2,80	3,092	3,302	3,47	3,74
25	1,71	2,06		2,49	2,79			3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,379	2,48	2,78	3,067	3,274	3,44	3,71
27	1,71	2,05		2,47	2,77			3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,369	2,46	2,76	3,047	3,250	3,40	3,66
29	1,70	2,05		2,46	2,76			3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,360	2,46	2,75	3,030	3,230	3,39	3,65
40	1,68	2,02		2,42	2,70			3,31	3,55
60	1,67	2,00		2,39	2,66			3,23	3,46
120	1,66	1,98		2,36	2,62			3,17	3,37
200		1,972		2,345	2,601				3,339
500		1,965		2,334	2,586				3,310
∞	1,64	1,96	2,241	2,33	2,58	2,807	2,968	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,0125	0,01	0,005	0,025	0,015	0,001	0,0005
	Рівень значущості α (одностороння критична область)								

Додаток Ж

Критичні точки розподілу Фішера (k_1 - число степенів вільності більшої дисперсії, k_2 - число степенів вільності меншої дисперсії)

k_2	Рівень значущості $\alpha = 0{,}95$; k_1									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,0000	1,5000	1,7092	1,8227	1,8937	1,9422	1,9774	2,0041	2,0250	2,0419
2	0,66667	1,0000	1,1349	1,2071	1,2519	1,2824	1,3045	1,3213	1,3344	1,3450
3	0,58506	0,88110	1,0000	1,0632	1,1024	1,1289	1,1482	1,1627	1,1741	1,1833
4	0,54863	0,82843	0,94054	1,0000	1,0367	1,0617	1,0797	1,0933	1,1040	1,1126
5	0,52807	0,79877	0,90715	0,96456	1,0000	1,0240	1,0414	1,0545	1,0648	1,0730
6	0,51489	0,77976	0,88578	0,94191	0,97654	1,0000	1,0169	1,0298	1,0398	1,0478
7	0,50572	0,76655	0,87095	0,92619	0,96026	0,98334	1,0000	1,0126	1,0224	1,0304
8	0,49898	0,75683	0,86004	0,91464	0,94831	0,97111	0,98757	1,0000	1,0097	1,0175
9	0,49382	0,74938	0,85168	0,90580	0,93916	0,96175	0,97805	0,99037	1,0000	1,0077
10	0,48973	0,74349	0,84508	0,89882	0,93193	0,95436	0,97054	0,98276	0,99232	1,0000
11	0,48644	0,73872	0,83973	0,89316	0,92608	0,94837	0,96445	0,97661	0,98610	0,99373
12	0,48369	0,73477	0,83530	0,88848	0,92124	0,94342	0,95943	0,97152	0,98097	0,98856
13	0,48141	0,73145	0,83159	0,88454	0,91718	0,93926	0,95520	0,96724	0,97665	0,98421
14	0,47944	0,72862	0,82842	0,88119	0,91371	0,93573	0,95161	0,96360	0,97298	0,98051
15	0,47775	0,72619	0,82569	0,87830	0,91073	0,93627	0,94850	0,96046	0,96981	0,97732
16	0,47628	0,72406	0,82330	0,87578	0,90812	0,93001	0,94580	0,95773	0,96705	0,97454
17	0,47499	0,72219	0,82121	0,87357	0,90584	0,92767	0,94342	0,95532	0,96462	0,97203
18	0,47385	0,72053	0,81936	0,87161	0,90381	0,92560	0,94132	0,95319	0,96247	0,96993
19	0,47284	0,71906	0,81771	0,86987	0,90200	0,92375	0,93944	0,95129	0,96056	0,96800
20	0,47192	0,71773	0,81621	0,86830	0,90038	0,92210	0,93776	0,94959	0,95884	0,96626
21	0,47108	0,71653	0,81487	0,86688	0,89891	0,92060	0,93624	0,94805	0,95728	0,96470
22	0,47033	0,71545	0,81365	0,86559	0,89759	0,91924	0,93486	0,94665	0,95588	0,96328
23	0,46965	0,71446	0,81255	0,86442	0,89638	0,91800	0,93360	0,94538	0,95459	0,96199
24	0,46902	0,71356	0,81153	0,86335	0,89527	0,91687	0,93245	0,94422	0,95342	0,96081
25	0,46844	0,71272	0,81061	0,86236	0,89425	0,91583	0,93140	0,94315	0,95234	0,95972
26	0,46793	0,71195	0,80975	0,86145	0,89331	0,91487	0,93042	0,94217	0,95135	0,95872
27	0,46744	0,71124	0,80894	0,86061	0,89244	0,91399	0,92952	0,94126	0,95044	0,95779
28	0,46697	0,71059	0,80820	0,85983	0,89164	0,91317	0,92869	0,94041	0,94958	0,95694
29	0,46654	0,70999	0,80753	0,85911	0,89089	0,91241	0,92791	0,93963	0,94879	0,95614
30	0,46616	0,70941	0,80689	0,85844	0,89019	0,91169	0,92719	0,93889	0,94805	0,95540
40	0,46330	0,70531	0,80228	0,85357	0,88516	0,90654	0,92197	0,93361	0,94272	0,95003
60	0,46053	0,70122	0,79770	0,84873	0,88017	0,90144	0,91679	0,92838	0,93743	0,94471
120	0,45774	0,69717	0,79314	0,84392	0,87521	0,89637	0,91164	0,92318	0,93218	0,93943
∞	0,45494	0,69315	0,78866	0,83918	0,87029	0,89135	0,90654	0,91802	0,92698	0,93418

Продовження таблиці додатку Ж

Критичні точки розподілу Фішера (k_1 - число степенів вільності більшої дисперсії, k_2 - число степенів вільності меншої дисперсії)

k_2	Рівень значущості α = 0,95; k_1								
	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	2,0674	2,0931	2,1190	2,1321	2,1452	2,1584	2,1716	2,1848	2,1981
2	1,3610	1,3771	1,3933	1,4014	1,4096	1,4178	1,4261	1,4344	1,4427
3	1,1972	1,2111	1,2252	1,2322	1,2393	1,2464	1,2536	1,2608	1,2680
4	1,1255	1,1386	1,1517	1,1583	1,1649	1,1716	1,1782	1,1849	1,1916
5	1,0855	1,0980	1,1106	1,1170	1,1234	1,1297	1,1361	1,1426	1,1490
6	1,0600	1,0722	1,0845	1,0907	1,0969	1,1031	1,1093	1,1156	1,1219
7	1,0423	1,0543	1,0664	1,0724	1,0785	1,0846	1,0908	1,0969	1,1031
8	1,0293	1,0412	1,0531	1,0591	1,0651	1,0711	1,0771	1,0832	1,0893
9	1,0194	1,0311	1,0429	1,0489	1,0548	1,0608	1,0667	1,0727	1,0788
10	1,0116	1,0232	1,0349	1,0408	1,0467	1,0526	1,0585	1,0645	1,0705
11	1,0052	1,0168	1,0284	1,0343	1,0401	1,0460	1,0519	1,0578	1,0637
12	1,0000	1,0115	1,0231	1,0289	1,0347	1,0405	1,0464	1,0523	1,0582
13	0,99560	1,0071	1,0186	1,0243	1,0301	1,0360	1,0418	1,0476	1,0535
14	0,99186	1,0033	1,0147	1,0205	1,0263	1,0321	1,0379	1,0437	1,0495
15	0,98863	1,0000	1,0114	1,0172	1,0229	1,0287	1,0345	1,0403	1,0461
16	0,98582	0,99716	1,0086	1,0143	1,0200	1,0258	1,0315	1,0373	1,0431
17	0,98334	0,99466	1,0060	1,0117	1,0174	1,0232	1,0289	1,0347	1,0405
18	0,98116	0,99245	1,0038	1,0095	1,0152	1,0209	1,0267	1,0324	1,0382
19	0,97920	0,99047	1,0018	1,0075	1,0132	1,0189	1,0246	1,0304	1,0361
20	0,97746	0,98870	1,0000	1,0057	1,0114	1,0171	1,0228	1,0285	1,0343
21	0,97587	0,98710	0,99838	1,0040	1,0097	1,0154	1,0211	1,0268	1,0326
22	0,97444	0,98565	0,99692	1,0026	1,0082	1,0139	1,0196	1,0253	1,0311
23	0,97313	0,98433	0,99558	1,0012	1,0069	1,0126	1,0183	1,0240	1,0297
24	0,97194	0,98312	0,99436	1,0000	1,0057	1,0113	1,0170	1,0227	1,0284
25	0,97084	0,98201	0,99324	0,99887	1,0045	1,0102	1,0159	1,0215	1,0273
26	0,96983	0,98099	0,99220	0,99783	1,0035	1,0091	1,0148	1,0205	1,0262
27	0,96889	0,98004	0,99125	0,99687	1,0025	1,0082	1,0138	1,0195	1,0252
28	0,96802	0,97917	0,99036	0,99598	1,0016	1,0073	1,0129	1,0186	1,0243
29	0,96722	0,97835	0,98954	0,99515	1,0008	1,0064	1,0121	1,0177	1,0234
30	0,96647	0,97759	0,98877	0,99438	1,0000	1,0056	1,0113	1,0170	1,0226
40	0,96104	0,97211	0,98323	0,98880	0,99440	1,0000	1,0056	1,0113	1,0169
60	0,95566	0,96667	0,97773	0,98328	0,98884	0,99411	1,0000	1,0056	1,0112
120	0,95032	0,96128	0,97228	0,97780	0,98333	0,98887	0,99443	1,0000	1,0056
∞	0,94503	0,95593	0,96687	0,97236	0,97787	0,98339	0,98891	0,99445	1,0000

Продовження таблиці додатку Ж

Критичні точки розподілу Фішера (k_1 - число степенів вільності більшої дисперсії, k_2 - число степенів вільності меншої дисперсії)

k_2	Рівень значущості α = 0,25; k_1									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5,8285	7,5000	8,1999	8,5810	8,8198	8,9833	9,1021	9,1922	9,2631	9,3202
2	2,5714	3,0000	3,1534	3,2320	3,2799	3,3121	3,3352	3,3526	3,3661	3,3770
3	2,0239	2,2798	2,3555	2,3901	2,4095	2,4218	2,4302	2,4364	2,4410	2,4447
4	1,8074	2,0000	2,0467	2,0642	2,0723	2,0766	2,0790	2,0805	2,0814	2,0820
5	1,6925	1,8528	1,8843	1,8927	1,8947	1,8945	1,8935	1,8923	1,8911	1,8899
6	1,6214	1,7622	1,7844	1,7872	1,7852	1,7821	1,7789	1,7760	1,7733	1,7708
7	1,5732	1,7010	1,7169	1,7157	1,7111	1,7059	1,7011	1,6969	1,6931	1,6898
8	1,5384	1,6569	1,6683	1,6642	1,6575	1,6508	1,6448	1,6396	1,6350	1,6310
9	1,5121	1,6236	1,6315	1,6253	1,6170	1,6091	1,6022	1,5961	1,5909	1,5863
10	1,4915	1,5975	1,6028	1,5949	1,5863	1,5765	1,5688	1,5621	1,5563	1,5513
11	1,4749	1,5767	1,5798	1,5794	1,5598	1,5502	1,5418	1,5346	1,5284	1,5230
12	1,4613	1,5595	1,5609	1,5503	1,5389	1,5286	1,5197	1,5120	1,5054	1,4996
13	1,4500	1,5452	1,5451	1,5336	1,5214	1,5105	1,5011	1,4931	1,4861	1,4801
14	1,4403	1,5331	1,5317	1,5194	1,5066	1,4952	1,4854	1,4770	1,4697	1,4634
15	1,4321	1,5227	1,5202	1,5071	1,4938	1,4820	1,4718	1,4631	1,4556	1,4491
16	1,4249	1,5137	1,5103	1,4965	1,4827	1,4705	1,4601	1,4511	1,4433	1,4366
17	1,4186	1,5057	1,5015	1,4873	1,4730	1,4605	1,4497	1,4405	1,4325	1,4256
18	1,4130	1,4988	1,4938	1,4790	1,4644	1,4516	1,4406	1,4312	1,4230	1,4159
19	1,4081	1,4925	1,4870	1,4717	1,4568	1,4437	1,4325	1,4228	1,4145	1,4073
20	1,4037	1,4870	1,4808	1,4652	1,4500	1,4366	1,4252	1,4153	1,4069	1,3995
21	1,3997	1,4820	1,4753	1,4593	1,4438	1,4302	1,4186	1,4086	1,4000	1,3925
22	1,3961	1,4774	1,4703	1,4540	1,4382	1,4244	1,4126	1,4025	1,3937	1,3861
23	1,3928	1,4733	1,4657	1,4491	1,4331	1,4191	1,4072	1,3969	1,3880	1,3803
24	1,3898	1,4695	1,4615	1,4447	1,4285	1,4143	1,4022	1,3918	1,3828	1,3750
25	1,3870	1,4661	1,4577	1,4406	1,4242	1,4099	1,3976	1,3871	1,3780	1,3701
26	1,3845	1,4629	1,4542	1,4368	1,4203	1,4058	1,3935	1,3828	1,3737	1,3656
27	1,3,S22	1,4600	1,4510	1,4334	1,4166	1,4021	1,3896	1,3788	1,3696	1,3615
28	1,3800	1,4573	1,4480	1,4302	1,4133,	1,3986	1,3860	1,3752	1,3658	1,3576
29	1,3780	1,4547	1,4452	1,4272	1,4102	1,3953	1,3826	1,3717	1,3623	1,3541
30	1,3761	1,4524	1,4426	1,4244	1,4073	1,3923	1,3795	1,3685	1,3590	1,3507
40	1,3626	1,4355	1,4239	1,4045	1,3863	1,3706	1,3571	1,3455	1,3354	1,3266
60	1,3493	1,4188	1,4055	1,3848	1,3657	1,3491	1,3349	1,3226	1,3119	1,3026
120	1,3362	1,4024	1,3873	1,3654	1,3453	1,3278	1,3128	1,2999	1,2886	1,2787
∞	1,3233	1,3863	1,3694	1,3463	1,3251	1,3068	1,2910	1,2774	1,2654	1,2549

Критичні точки розподілу Фішера (k_1 - число степенів вільності більшої дисперсії, k_2 - число степенів вільності меншої дисперсії)

k_2	Рівень значущості α = 0,25; k_1								
	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	9,4064	9,4934	9,5813	9,6255	9,6698	9,7144	9,7591	9,8041	9,8492
2	3,3934	3,4098	3,4263	3,4345	3,4428	3,4511	3,4594	3,4677	3,4761
3	2,4500	2,4552	2,4602	2,4626	2,4650	2,4674	2,4697	2,4720	2,4742
4	2,0826	2,0829	2,0828	2,0827	2,0825	2,0821	2,0817	2,0812	2,0806
5	1,8877	1,8851	1,8820	1,8802	1,8784	1,8763	1,8742	1,8719	1,8694
6	1,7668	1,7621	1,7569	1,7540	1,7510	1,7477	1,7443	1,7407	1,7368
7	1,6843	1,6781	1,6712	1,6675	1,6635	1,6593	1,6548	1,6502	1,6452
8	1,6244	1,6170	1,6088	1,6043	1,5996	1,5945	1,5892	1,5836	1,5777
9	1,5788	1,5705	1,5611	1,5560	1,5506	1,5450	1,5389	1,5325	1,5257
10	1,5430	1,5338	1,5235	1,5179	1,5119	1,5056	1,4990	1,4919	1,4843
11	1,5140	1,5041	1,4930	1,4869	1,4805	1,4737	1,4664	1,4587	1,4504
12	1,4902	1,4796	1,4678	1,4613	1,4544	1,4471	1,4393	1,4310	1,4221
13	1,4701	1,4590	1,4465	1,4397	1,4324	1,4247	1,4164	1,4075	1,3980
14	1,4530	1,4414	1,4284	1,4212	1,4136	1,4055	1,3967	1,3874	1,3772
15	1,4383	1,4263	1,4127	1,4052	1,3973	1,3888	1,3796	1,3698	1,3591
16	1,4255	1,4130	1,3990	1,3913	1,3830	1,3742	1,3646	1,3543	1,3432
17	1,4142	1,4014	1,3869	1,3790	1,3704	1,3613	1,3514	1,3406	1,3290
18	1,4042	1,3911	1,3762	1,3680	1,3592	1,3497	1,3395	1,3284	1,3162
19	1,3953	1,3819	1,3666	1,3582	1,3492	1,3394	1,3289	1,3174	1,3048
20	1,3873	1,3736	1,3580	1,3494	1,3401	1,3301	1,3193	1,3074	1,2943
21	1,3801	1,3661	1,3502	1,3414	1,3319	1,3217	1,3105	1,2983	1,2848
22	1,3735	1,3593	1,3431	1,3341	1,3245	1,3140	1,3025	1,2900	1,2761
23	1,3675	1,3531	1,3366	1,3275	1,3176	1,3069	1,2952	1,2824	1,2681
24	1,3621	1,3474	1,3307	1,3214	1,3113	1,3004	1,2885	1,2754	1,2607
25	1,3570	1,3422	1,3252	1,3158	1,3056	1,2945	1,2823	1,2689	1,2538
26	1,3524	1,3374	1,3202	1,3106	1,3002	1,2889	1,2765	1,2628	1,2474
27	1,3481	1,3329	1,3155	1,3058	1,2953	1,2838	1,2712	1,2572	1,2414
28	1,3441	1,3288	1,3,112	1,3013	1,2906	1,2790	1,2662	1,2519	1,2358
29	1,3404	1,3249	1,3071	1,2971	1,2863	1,2745	1,2615	1,2470	1,2306
30	1,3369	1,3213	1,3033	1,2933	1,2823	1,2703	1,2571	1,2424	1,2256
40	1,3119	1,2952	1,2758	1,2649	1,2529	1,2397	1,2249	1,2080	1,1883
60	1,2870	1,2691	1,2481	1,2361	1,2229	1,2081	1,1912	1,1715	1,1474
120	1,2621	1,2428	1,2200	1,2068	1,1921	1,1752	1,1555	1,1314	1,0987
∞	1,2371	1,2163	1,1914	1,1767	1,1600	1,1404	1,1164	1,0838	1,0000

Продовження таблиці додатку Ж

Критичні точки розподілу Фішера (k_1 - число степенів вільності більшої дисперсії, k_2 - число степенів вільності меншої дисперсії)

k_2	Рівень значущості $\alpha = 0{,}001$; k_1									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	405300	500000	540400	562500	576400	585900	592900	598100	602300	605600
2	998,5	999,0	999,2	999,2	999,3	999,3	999,4	999,4	999,4	999,4
1	167,0	148,5	141,1	137,1	134,6	132,8	131,6	130,6	129,9	129,2
4	74,14	61,25	56,18	53,44	51,71	50,53	49,66	49,00	48,47	48,05
5	47,18	37,12	33,20	31,09	29,75	28,54	28,16	27,64	27,24	26,92
6	35,51	27,00	23,70	21,92	20,81	20,03	19,46	19,03	18,69	18,41
7	29,25	21,69	18,77	17,19	16,21	15,52	15,02	14,63	14,33	14,08
8	25,42	18,49	15,83	14,39	13,49	12,86	12,40	12,04	11,77	11,54
9	22,86	16,39	13,90	12,56	11,71	11,13	10,70	10,37	10,11	9,89
10	21,04	14,91	12,55	11,28	10,48	9,92	9,52	9,20	8,96	8,75
11	19,69	13,81	11,56	10,35	9,58	9,05	8,66	8,35	8,12	7,92
12	18,64	12,97	10,80	9,63	8,89	8,38	8,00	7,71	7,48	7,29
13	17,81	12,31	10,21	9,07	8,35	7,86	7,49	7,21	6,98	6,80
14	17,14	11,78	9,73	8,62	7,92	7,43	7,08	6,80	6,58	6,40
15	16,59	11,34	9,34	8,25	7,57	7,09	6,74	6,47	6,26	6,08
16	16,12	10,97	9,00	7,94	7,27	6,81	6,46	6,19	5,98	5,81
17	15,72	10,66	8,73	7,68	7,02	6,56	6,22	5,96	5,75	5,58
18	15,38	10,39	8,49	7,46	6,81	6,35	6,02	5,76	5,56	5,39
19	15,08	10,16	8,28	7,26	6,62	6,18	5,85	5,59	5,39	5,22
20	14,82	9,95	8,10	7,10	6,46	6,02	5,69	5,44	5,24	5,08
21	14,59	9,77	7,94	6,95	6,32	5,88	5,56	5,31	5,11	4,95
22	14,38	9,61	7,80	6,81	6,19	5,76	5,44	5,19	4,99	4,83
23	14,19	9,47	7,67	6,69	6,08	5,65	5,33	5,09	4,89	4,73
24	14,03	9,34	7,55	6,59	5,98	5,55	5,23	4,99	4,80	4,64
25	13,88	9,22	7,45	6,49	5,88	5,46	5,15	4,91	4,71	4,56
26	13,74	9,12	7,36	6,41	5,80	5,38	5,07	4,83	4,64	4,48
27	13,61	9,02	7,27	6,33	5,73	5,31	5,00	4,76	4,57	4,41
28	13,50	8,93	7,19	6,25	5,66	5,24	4,93	4,69	4,50	4,35
29	13,39	8,85	7,12	6,19	5,59	5,18	4,87	4,64	4,45	4,29
30	13,29	8,77	7,05	6,12	5,53	5,12	4,82	4,58	4,39	4,24
40	12,61	8,25,	6,60	5,70	5,13	4,73	4,44	4,21	4,02	3,87
60	11,97	7,76	6,17	5,31	4,76	4,37	4,09	3,87	3,69	3,54
120	11,38	7,32	5,79	4,95	4,42	4,04	3,77	3,55	3,38	3,24
∞	10,83	6,91	5,42	4,62	4,10	3,74	3,47	3,27	3,10	2,96

Продовження таблиці додатку Ж

Критичні точки розподілу Фішера (k_1 - число степенів вільності більшої дисперсії, k_2 - число степенів вільності меншої дисперсії)

k_2	Рівень значущості $\alpha = 0{,}001$; k_1								
	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	610700	615800	620900	623500	626100	628700	631300	634000	636600
2	999,4	999,4	999,4	999,5	999,5	999,5	999,5	999,5	999,5
1	128,3	127,4	126,4	125,9	125,4	125,0	124,5	124,0	123,5
4	47,41	46,76	46,10	45,77	45,43	45,09	44,75	44,40	44,05
5	26,42	25,91	25,39	25,14	24,87	24,60	24,33	24,06	23,79
6	17,99	17,56	17,12	16,89	16,67	16,44	16,21	15,99	15,75
7	13,71	13,32	12,93	12,73	12,53	12,33	12,12	11,91	11,70
8	11,19	10,84	10,48	10,30	10,11	9,92	9,73	9,53	9,33
9	9,57	9,24	8,90	8,72	8,55	8,37	8,19	8,00	7,81
10	8,45	8,13	7,80	7,64	7,47	7,30	7,12	6,94	6,76
11	7,63	7,32	7,01	6,85	6,68	6,52	6,35	6,17	6,00
12	7,00	6,71	6,40	6,25	6,09	5,93	5,76	5,59	5,42
13	6,52	6,23	5,93	5,78	5,63	5,47	5,30	5,14	4,97
14	6,13	5,85	5,56	5,41	5,25	5,10	4,94	4,77	4,60
15	5,81	5,54	5,25	5,10	4,95	4,80	4,64	4,47	4,31
16	5,55	5,27	4,99	4,85	4,70	4,54	4,39	4,23	4,06
17	5,32	5,05	4,78	4,63	4,48	4,33	4,18	4,02	3,85
18	5,13	4,87	4,59	4,45	4,30	4,15	4,00	3,84	3,67
19	4,97	4,70	4,43	4,29	4,14	3,99	3,84	3,68	3,51
20	4,82	4,56	4,29	4,15	4,00	3,86	3,70	3,54	3,38
21	4,70	4,44	4,17	4,03	3,88	3,74	3,58	3,42	3,26
22	4,58	4,33	4,06	3,92	3,78	3,63	3,48	3,32	3,15
23	4,48	4,23	4,23	3,82	3,68	3,53	3,38	3,22	3,05
24	4,39	4,14	3,87	3,74	3,59	3,45	3,29	3,14	2,97
25	4,31	4,06	3,79	3,66	3,52	3,37	3,22	3,06	2,89
26	4,24	3,99	3,72	3,59	3,44	3,30	3,15	2,99	2,82
27	4,17	3,92	3,66	3,52	3,38	3,23	3,08	2,92	2,75
28	4,11	3,86	3,60	3,46	3,32	3,18	3,02	2,86	2,69
29	4,05	3,80	3,54	3,41	3,27	3,12	2,97	2,81	2,64
30	4,00	3,75	3,49	3,36	3,22	3,07	2,92	2,76	2,59
40	3,64	3,40	3,15	3,01	2,87	2,73	2,57	2,41	2,23
60	3,31	3,08	2,83	2,69	2,55	2,41	2,25	2,08	1,89
120	3,02	2,78	2,53	2,40	2,26	2,11	1,95	1,76	1,54
∞	2,74	2,51	2,27	2,13	1,99	1,84	1,66	1,45	1,00

Продовження таблиці додатку Ж

Критичні точки розподілу Фішера (k_1 - число степенів вільності більшої дисперсії, k_2 - число степенів вільності меншої дисперсії)

Рівень значущості $\alpha = 0{,}0005$; k_1												
k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1620000	2000000	2160000	2250000	2310000	2340000	2370000	2390000	2410000	2420000	2430000	2440000
2	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000
3	266	237	225	218	214	211	209	208	207	206	204	204
4	106	87,4	80,1	76,1	73,6	71,9	70,6	69,7	68,9	68,3	67,8	67,4
5	63,6	49,S	44,4	41,5	39,7	38,5	37,6	36,9	36,4	35,9	35,6	35,2
6	46,1	34,8	30,4	28,1	26,6	25,6	24,9	24,3	23,9	23,5	23,2	23,0
7	37,0	27,2	23,5	21,4	20,2	19,3	18,7	18,2	17,8	17,5	17,2	17,0
8	31,6	22,8	19,4	17,6	16,4	15,7	15,1	14,6	14,3	14,0	13,8	13,6
9	28,0	19,9	16,8	15,1	14,1	13,3	12,8	12,4	12,1	11,8	11,6	11,4
10	25,5	17,9	15,0	13,4	12,4	11,8	11,3	10,9	10,6	10,3	10,1	9,93
11	23,6	16,4	13,6	12,2	11,2	10,6	10,1	9,76	9,48	9,24	9,04	8,88
12	22,2	15,3	12,7	11,2	10,4	9,74	9,28	8,94	8,66	8,43	8,24	8,08
15	19,5	13,2	10,8	9,48	8,66	8,10	7,68	7,36	7,11	6,91	6,75	6,60
20	17,2	11,4	9,20	8,02	7,28	6,76	6,38	6,08	5,85	5,66	5,51	5,38
24	16,2	10,6	8,52	7,39	6,68	6,18	5,82	5,54	5,31	5,13	4,98	4,85
30	15,2	9,90	7,90	6,82	6,14	5,66	5,31	5,04	4,82	4,65	4,51	4,38
40	14,4	9,25	7,33	6,30	5,64	5,19	4,85	4,59	4,38	4,21	4,07	3,95
60	13,6	8,65	6,81	5,32	5,20	4,76	4,44	4,18	3,98	3,82	3,69	3,57
120	12,8	8,10	6,34	5,39	4,79	4,37	4,07	3,82	3,63	3,47	3,34	3,22
∞	12,1	7,60	5,91	5,00	4,42	4,02	3,72	3,48	3,30	3,14	3,02	2,90

Продовження таблиці додатку Ж

Критичні точки розподілу Фішера (k_1 - число степенів вільності більшої дисперсії, k_2 - число степенів вільності меншої дисперсії)

Рівень значущості $\alpha = 0{,}0005$; k_1												
k_2	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞
1	2460000	2480000	2490000	2500000	2510000	2520000	2520000	2530000	2530000	2530000	2540000	2540000
2	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000
3	203	201	200	199	199	198	198	197	197	197	196	196
4	66,5	65,5	65,1	64,6	64,1	63,8	63,6	63,2	63,1	62,9	62,7	62,6
5	34,6	33,9	33,5	33,1	32,7	32,5	32,3	32,1	32,0	31,8	31,7	31,6
6	22,4	21,9	21,7	21,4	21,1	20,9	20,7	20,5	20,4	20,3	20,2,	20,1
7	16,5	16,0	15,7	15,5	15,2	15,1	15,0	14,7	14,7	14,6	14,5	14,4
8	13,1	12,7	12,5	12,2	12,0	11,8	11,8	11,6	11,5	11,4	11,4	11,3
9	11,0	10,6	10,4	10,2	9,94	9,80	9,1	9,53	9,49	9,40	9,32	9,26
10	9,56	9,16	8,96	8,75	8,54	8,42	8,33	8,16	8,12	8,04	7,96	7,90
11	8,52	8,14	7,94	7,75	7,55	7,43	7,35	7,18	7,14	7,06	6,98	6,93
12	7,74	7,37	7,18	7,00	6,80	6,68	6,61	6,45	6,41	6,33	6,25	6,20
15	6,27	5,93	5,75	5,58	5,40	5,29	5,21	5,06	5,02	4,94	4,87	4,83
20	5,07	4,75	4,58	4,42	4,24	4,15	4,07	3,93	3,90	3,82	3,75	3,70
24	4,55	4,25	4,09	3,93	3,76	3,66	3,59	3,44	3,41	3,33	3,27	3,22
30	4,10	3,80	3,65	3,48	3,32	3,22	3,15	3,00	2,97	2,89	2,82	2,78
40	3,68	3,39	3,24	3,08	2,92	2,82	2,74	2,60	2,57	2,49	2,41	2,37
60	3,30	3,02	2,87	2,71	2,55	2,45	2,38	2,23	2,19	2,11	2,03	1,98
120	3,96	2,67	2,53	2,38	2,21	2,11	2,01	1,88	1,84	1,75	1,67	1,60
∞	2,65	2,37	2,22	2,07	1,91	1,79	1,71	1,53	1,48	1,36	1,22	1,00

Продовження таблиці додатку Ж

Критичні точки розподілу Фішера (k_1 - число степенів вільності більшої дисперсії, k_2 - число степенів вільності меншої дисперсії)

Рівень значущості $\alpha = 0{,}005$; k_1										
k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224
2	198,50	199,00	199,17	199,25	199,30	199,33	199,36	199,37	199,39	199,40
3	55,552	49,799	47,467	46,195	45,392	44,838	44,434	44,126	43,882	43,686
4	31,333	26,284	24,259	23,155	22,456	21,975	21,622	21,352	21,139	20,967
5	22,785	18,314	16,530	15,556	14,940	14,513	14,200	13,961	13,772	13,618
6	18,635	14,544	12,917	12,028	11,464	11,073	10,786	10,566	10,391	10,250
7	16,236	12,404	10,882	10,050	9,5221	9,1554	8,8854	8,6781	8,5138	8,3803
8	14,688	11,042	9,5965	8,8051	8,3018	7,9520	7,6942	7,4960	7,3386	7,2107
9	13,614	10,107	8,7171	7,9559	7,4711	7,1338	6,8849	6,6933	6,5411	6,4171
10	12,826	9,4270	8,0807	7,3428	6,8723	6,5446	6,3025	6,1159	5,9676	5,8467
11	12,226	8,9122	7,6004	6,8809	6,4217	6,1015	5,8648	5,6821	5,5368	5,4182
12	11,754	8,5096	7,2258	6,5211	6,0711	5,7570	5,5245	5,3451	5,2021	5,0855
13	11,374	8,1865	6,9257	6,2335	5,7910	5,4819	5,2529	5,0761	4,9351	4,8199
14	11,060	7,9216	6,6803	5,9984	5,5623	5,2574	5,0313	4,8566	4,7173	4,6034
15	10,798	7,7008	6,4760	5,8029	5,3721	5,0708	4,8473	4,6743	4,5364	4,4236
16	10,575	7,5138	6,3034	5,6378	5,2117	4,9134	4,6920	4,5207	4,3838	4,2719
17	10,384	7,3536	6,1556	5,4967	5,0746	4,7789	4,5594	4,3893	4,2535	4,1423
18	10,218	7,2148	6,0277	5,3746	4,9560	4,6627	4,4448	4,2759	4,1410	4,0305
19	10,073	7,0935	5,9161	5,2681	4,8526	4,5614	4,3448	4,1770	4,0428	3,9329
20	9,9439	6,9865	5,8177	5,1743	4,7616	4,4721	4,2569	4,0900	3,9564	3,8470
21	9,8295	6,8914	5,7304	5,0911	4,6808	4,3931	4,1789	4,0128	3,8799	3,7709
22	9,7271	6,8064	5,6524	5,0168	4,6088	4,3225	4,1094	3,9440	3,8116	3,7030
23	9,6348	6,7300	5,5823	4,9500	4,5441	4,2591	4,0469	3,8822	3,7502	3,6420
24	9,5513	6,6609	5,5190	4,8898	4,4857	4,2019	3,9905	3,8264	3,6949	3,5870
25	9,4753	6,5982	5,4615	4,8351	4,4327	4,1500	3,9394	3,7758	3,6447	3,5370
26	9,4059	6,5409	5,4091	4,7852	4,3844	4,1027	3,8928	3,7297	3,5989	3,4916
27	9,3423	6,4885	5,3611	4,7396	4,3402	4,0594	3,8501	3,6875	3,5571	3,4499
28	9,2838	6,4403	5,3170	4,6977	4,2996	4,0197	3,8110	3,6487	3,5186	3,4117
29	9,2297	6,3958	5,2764	4,6591	4,2622	3,9830	3,7749	3,6130	3,4832	3,3765
30	9,1797	6,3547	5,2388	4,6233	4,2276	3,9492	3,7416	3,5801	3,4505	3,3440
40	8,8278	6,0664	4,9759	4,3738	3,9860	3,7129	3,5088	3,3498	3,2220	3,1167
60	8,4946	5,7950	4,7290	4,1399	3,7600	3,4918	3,2911	3,1344	3,0083	2,9042
120	8,1790	5,5393	4,4973	3,9207	3,5482	3,2849	3,0874	2,9330	2,8083	2,7052
∞	7,8794	5,2983	4,2794	3,7151	3,3499	3,0913	2,8968	2,7444	2,6210	2,5188

Продовження таблиці додатку Ж

Критичні точки розподілу Фішера (k_1 - число степенів вільності більшої дисперсії, k_2 - число степенів вільності меншої дисперсії)

Рівень значущості $\alpha = 0{,}005$; k_1									
k_2	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	24426	24630	24836	24940	25044	25148	25253	25359	25465
2	199,42	199,43	199,45	199,46	199,47	199,47	199,48	199,49	199,51
3	43,387	43,085	42,778	42,622	42,466	42,308	42,149	41,989	41,829
4	20,705	20,438	20,167	20,030	19,892	19,752	19,611	19,468	19,325
5	13,384	13,146	12,903	12,780	12,656	12,530	12,402	12,274	12,144
6	10,034	9,8140	9,5888	9,4741	9,3583	9,2408	9,1219	9,0015	8,8793
7	8,1764	7,9678	7,7540	7,6450	7,5345	7,4225	7,3088	7,1933	7,0760
8	7,0149	6,8143	6,6082	6,5029	6,3961	6,2875	6,1772	6,0649	5,9505
9	6,2274	6,0325	5,8318	5,7292	5,6248	5,5186	5,4104	5,3001	5,1875
10	5,6613	5,4707	5,2740	5,1732	5,0705	4,9659	4,8592	4,7501	4,6385
11	5,2363	5,0489	4,8552	4,7557	4,6543	4,5508	4,4450	4,3367	4,2256
12	4,9063	4,7214	4,5299	4,4315	4,3309	4,2282	4,1229	4,0149	3,9039
13	4,6429	4,4600	4,2703	4,1726	4,0727	3,9704	3,8665	3,7577	3,6465
14	4,4281	4,2468	4,0585	3,9614	3,8619	3,7600	3,6553	3,5473	3,4359
15	4,2498	4,0698	3,8826	3,7859	3,6867	3,5850	3,4803	3,3722	3,2602
16	4,0994	3,9205	3,7342	3,6378	3,5388	3,4372	3,3324	3,2240	3,1115
17	3,9709	3,7929	3,6073	3,5112	3,4124	3,3107	3,2058	3,0971	2,9839
18	3,8599	3,6827	3,4977	3,4017	3,3030	3,2014	3,0962	2,9871	2,8732
19	3,7631	3,5866	3,4020	3,3062	3,2075	3,1058	3,0004	2,8908	2,7762
20	3,6779	3,5020	3,3178	3,2220	3,1234	3,0215	2,9159	2,8058	2,6904
21	3,6024	3,4270	3,2431	3,1474	3,0488	2,9467	2,8408	2,7302	2,6140
22	3,5350	3,3600	3,1764	3,0807	2,9821	2,8799	2,7736	2,6625	2,5455
23	3,4745	3,2999	3,1165	3,0208	2,9221	2,8198	2,7132	2,6016	2,4837
24	3,4199	3,2456	3,0624	2,9667	2,8679	2,7654	2,6585	2,5463	2,4276
25	3,3704	3,1963	3,0133	2,9176	2,8187	2,7160	2,6088	2,4960	2,3765
26	3,3252	3,1515	2,9685	2,8728	2,7738	2,6709	2,5633	2,4501	2,3297
27	3,2839	3,1104	2,9275	2,8318	2,7327	2,6296	2,5217	2,4079	2,2867
28	3,2460	3,0727	2,8899	2,7941	2,6949	2,5916	2,4834	2,3690	2,2469
29	3,2111	3,0379	2,8551	2,7594	2,6601	2,5565	2,4479	2,3331	2,2102
30	3,1787	3,0057	2,8230	2,7272	2,6278	2,5241	2,4151	2,2998	2,1760
40	2,9531	2,7811	2,5984	2,5020	2,4015	2,2958	2,1838	2,0635	1,9318
60	2,7419	2,5705	2,3872	2,2898	2,1874	2,0789	1,9622	1,8341	1,6885
120	2,5439	2,3727	2,1881	2,0890	1,9839	1,8709	1,7469	1,6055	1,4311
∞	2,3583	2,1868	1,9998	1,8983	1,7891	1,6691	1,5325	1,3637	1,0000

Продовження таблиці додатку Ж

Критичні точки розподілу Фішера (k_1 - число степенів вільності більшої дисперсії, k_2 - число степенів вільності меншої дисперсії)

Рівень значущості $\alpha = 0,1$; k_1										
k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	39,864	49,500	53,593	55,833	57,241	58,204	58,906	59,439	59,858	60,195
2	8,5263	9,0000	9,1618	9,2434	9,2926	9,3255	9,3491	9,3668	9,3805	9,3916
3	5,5383	5,4624	5,3908	5,3427	5,3092	5,2847	5,2662	5,2517	5,2400	5,2304
4	4,5448	4,3246	4,1908	4,1073	4,0506	4,0098	3,9790	3,9549	3,9357	3,9199
5	4,0604	3,7797	3,6195	3,5202	3,4530	3,4045	3,3679	3,3393	3,3163	3,2974
6	3,7760	3,4633	3,2888	3,1808	3,1075	3,0546	3,0145	2,9830	2,9577	2,9369
7	3,5894	3,2574	3,0741	2,9605	2,8833	2,8274	2,7849	2,7516	2,7247	2,7025
8	3,4579	3,1131	2,9238	2,8064	2,7265	2,6683	2,6241	2,5893	2,5612	2,5380
9	3,3603	3,0065	2,8129	2,6927	2,6106	2,5509	2,5053	2,4694	2,4403	2,4163
10	3,2850	2,9245	2,7277	2,6053	2,5216	2,4606	2,4140	2,3772	2,3473	2,3226
11	3,2252	2,8595	2,6602	2,5362	2,4512	2,3891	2,3416	2,3040	2,2735	2,2482
12	3,1765	2,8068	2,6055	2,4801	2,3940	2,3310	2,2828	2,2446	2,2135	2,1878
13	3,1362	2,7632	2,5603	2,4337	2,3467	2,2830	2,2341	2,1953	2,1638	2,1376
14	3,1022	2,7265	2,5222	2,3947	2,3069	2,2426	2,1931	2,1539	2,1220	2,0954
15	3,0732	2,6952	2,4898	2,3614	2,2730	2,2081	2,1582	2,1185	2,0862	2,0593
16	3,0481	2,6682	2,4618	2,3327	2,2438	2,1783	2,1280	2,0880	2,0553	2,0281
17	3,0262	2,6446	2,4374	2,3077	2,2183	2,1524	2,1017	2,0613	2,0284	2,0009
18	3,0070	2,6239	2,4160	2,2858	2,1958	2,1296	2,0785	2,0379	2,0047	1,9770
19	2,9899	2,6056	2,3970	2,2663	2,1760	2,1094	2,0580	2,0171	1,9836	1,9557
20	2,9747	2,5893	2,3801	2,2489	2,1582	2,0913	2,0397	1,9985	1,9649	1,9367
21	2,9609	2,5746	2,3649	2,2333	2,1423	2,0751	2,0232	1,9819	1,9480	1,9197
22	2,9486	2,5613	2,3512	2,2193	2,1279	2,0605	2,0084	1,9668	1,9327	1,9043
23	2,9374	2,5493	2,3387	2,2065	2,1149	2,0472	1,9949	1,9531	1,9189	1,8903
24	2,9271	2,5383	2,3274	2,1949	2,1030	2,0351	1,9826	1,9407	1,9063	1,3775
25	2,9177	2,5283	2,3170	2,1843	2,0922	2,0241	1,9714	1,9292	1,8947	1,8658
26	2,9091	2,5191	2,3075	2,1745	2,0822	2,0139	1,9610	1,9188	1,8841	1,8550
27	2,9012	2,5106	2,2987	2,1655	2,0730	2,0045	1,9515	1,9091	1,8743	1,8451
28	2,8939	2,5028	2,2906	2,1571	2,0645	1,9959	1,9427	1,9001	1,8652	1,8359
29	2,8871	2,4955	2,2831	2,1494	2,0566	1,9878	1,9345	1,8918	1,8568	1,8274
30	2,8807	2,4887	2,2761	2,1422	2,0492	1,9803	1,9269	1,8841	1,8490	1,8195
40	2,8354	2,4404	2,2261	2,0909	1,9968	1,9269	1,8725	1,8289	1,7929	1,7627
60	2,7914	2,3933	2,1774	2,0410	1,9457	1,8747	1,8194	1,7748	1,7380	1,7070
120	2,7478	2,3473	2,1300	1,9923	1,8959	1,8238	1,7675	1,7220	1,6843	1,6524
∞	2,7055	2,3026	2,0838	1,9449	1,8473	1,7741	1,7167	1,6702	1,6315	1,5987

Продовження таблиці додатку Ж

Критичні точки розподілу Фішера (k_1 - число степенів вільності більшої дисперсії, k_2 - число степенів вільності меншої дисперсії)

Рівень значущості $\alpha = 0{,}1$; k_1									
k_2	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	60,705	61,220	61,740	62,002	62,265	62,529	62,794	63,061	63,328
2	9,4081	9,4247	9,4413	9,4496	9,4579	9,4663	9,4746	9,4829	9,4913
3	5,2156	5,2003	5,1845	5,1764	5,1681	5,1597	5,1512	5,1425	5,1337
4	3,8955	3,S703	3,8443	3,8310	3,8174	3,8036	3,7896	3,7753	3,7607
5	3,2682	3,2380	3,2067	3,1905	3,1741	3,1573	3,1402	3,1228	3,1050
6	2,9047	2,8712	2,8363	2,8183	2,8000	2,7812	2,7620	2,7423	2,7222
7	2,6681	2,6322	2,5947	2,5753	2,5555	2,5351	2,5142	2,4928	2,4708
8	2,5020	2,4642	2,4246	2,4041	2,3830	2,3614	2,3391	2,3162	2,2926
9	2,3789	2,3396	2,2983	2,2768	2,2547	2,2320	2,2085	2,1843	2,1592
10	2,2841	2,2435	2,2007	2,1784	2,1554	2,1317	2,1072	2,0818	2,0554
11	2,2087	2,1671	2,1230	2,1000	2,0762	2,0516	2,0261	1,9997	1,9721
12	2,1474	2,1049	2,0597	2,0360	2,0115	1,9861	1,9597	1,9323	1,9036
13	2,0966	2,0532	2,0070	1,9827	1,9576	1,9315	1,9043	1,8759	1,8462
14	2,0537	2,0095	1,9625	1,9377	1,9119	1,8852	1,8572	1,8280	1,7973
15	2,0171	1,9722	1,9243	1,8990	1,8728	1,8454	1,8168	1,7867	1,7551
16	1,9854	1,9399	1,8913	1,8656	1,8388	1,8108	1,7816	1,7507	1,7182
17	1,9577	1,9117	1,8624	1,8362	1,8090	1,7805	1,7506	1,7191	1,6856
18	1,9333	1,8868	1,8368	1,8103	1,7827	1,7537	1,7232	1,6910	1,6567
19	1,9117	1,8647	1,8142	1,7873	1,7592	1,7298	1,6988	1,6659	1,6308
20	1,8924	1,8449	1,7938	1,7667	1,7382	1,7083	1,6768	1,6433	1,6074
21	1,8750	1,8272	1,7756	1,7481	1,7193	1,6890	1,6569	1,6228	1,5862
22	1,8593	1,8111	1,7590	1,7312	1,7021	1,6714	1,6389	1,6042	1,5668
23	1,8450	1,7964	1,7439	1,7159	1,6864	1,6554	1,6224	1,5871	1,5490
24	1,8319	1,7831	1,7302	1,7019	1,6721	1,6407	1,6073	1,5715	1,5327
25	1,8200	1,7708	1,7175	1,6890	1,6589	1,6272	1,5934	1,5570	1,5176
26	1,8090	1,7596	1,7059	1,6771	1,6468	1,6147	1,5805	1,5437	1,5036
27	1,7989	1,7492	1,6951	1,6662	1,6356	1,6032	1,5686	1,5313	1,4906
28	1,7895	1,7395	1,6852	1,6560	1,6252	1,5925	1,5575	1,5198	1,4784
29	1,7808	1,7306	1,6759	1,6465	1,6155	1,5825	1,5472	1,5090	1,4670
30	1,7727	1,7223	1,6673	1,6377	1,6065	1,5732	1,5376	1,4989	1,4564
40	1,7146	1,6624	1,6052	1,5741	1,5411	1,5056	1,4672	1,4248	1,3769
60	1,6574	1,6034	1,5435	1,5107	1,4755	1,4373	1,3952	1,3476	1,2915
120	1,6012	1,5450	1,4821	1,4472	1,4094	1,3676	1,3203	1,2646	1,1926
∞	1,5458	1,4871	1,4206	1,3832	1,3419	1,2951	1,2400	1,1686	1,0000

Додаток И

Таблиця для біноміального розподілу

p	$n=2, m=2$	$n=2, m=1$	$n=3, m=3$	$n=3, m=2$	$n=3, m=1$
0,01	0,0001000	0,0199000	0,0000010	0,0002980	0,0297010
0,02	0,0004000	0,0396000	0,0000080	0,0011840	0,0588080
0,03	0,0009000	0,0591000	0,0000270	0,0026460	0,0873270
0,04	0,0016000	0,0784000	0,0000640	0,0046720	0,1152640
0,05	0,0025000	0,0975000	0,0001250	0,0072500	0,1426250
0,06	0,0036000	0,1164000	0,0002160	0,0103680	0, 1694160
0,07	0,0049000	0,1351000	0,0003430	0,0140140	0,1956430
0,08	0,0064000	0,1536000	0,0005120	0,0181760	0,2213120
0,09	0,0081000	0,1719000	0,0007290	0,0228420	0,2464290
0,10	0,0100000	0,1900000	0,0010000	0,0280000	0,2710000
0,11	0,0121000	0,2079000	0,0013310	0,0336380	0,2950310
0,12	0,0144000	0,2256000	0,0017280	0,0397440	0,3185280
0,13	0,0169000	0,2431000	0,0021970	0,0463060	0,3414970
0,14	0,0196000	0,2604000	0,0027440	0,0533120	0,3639440
0,15	0,0225000	0,2775000	0,0033750	0,0607500	0,3858750
0,16	0,0256000	0,2944000	0,0040960	0,0686080	0,4072960
0,17	0,0289000	0,3111000	0,0049130	0,0768740	0,4282130
0,18	0,0324000	0,3276000	0,0058320	0,0855360	0,4486320
0,19	0,0361000	0,3439000	0,0068590	0,0945820	0,4685590
0,20	0,0400000	0,3600000	0,0080000	0,1040000	0,4880000
0,21	0,0441000	0,3759000	0,0092610	0,1137780	0,5069610
0,22	0,0484000	0,3916000	0,0106480	0,1239040	0,5254480
0,23	0,0529000	0,4071000	0,0121670	0,1343660	0,5434670
0,24	0,0576000	0,4224000	0,0138240	0,1451520	0,5610240
0,25	0,0625000	0,4375000	0,0156250	0,1562500	0,5781250
0,26	0,0676000	0,4524000	0,0175760	0,1676480	0,5947760
0,27	0,0729000	0,4671000	0,0196830	0,1793340	0,6109830
0,28	0,0784000	0,4816000	0,0219520	0,1912960	0,6267520
0,29	0,0841000	0,4959000	0,0243890	0,2035220	0,6420890
0,30	0,0900000	0,5100000	0,0270000	0,2160000	0,6570000
0,31	0,0961000	0,5239000	0,0297910	0,2287180	0,6714910
0,32	0,1024000	0,5376000	0,0327680	0,2416640	0,6855680
0,33	0,1089000	0,5511000	0,0359370	0,2548260	0,6992370
0,34	0,1156000	0,5644000	0,0393040	0,2681920	0,7125040
0,35	0,1225000	0,5775000	0,0428750	0,2817500	0,7253750
0,36	0,1296000	0,5904000	0,0466560	0,2954880	0,7378560
0,37	0,1369000	0,6031000	0,0506530	0,3093940	0,7499530
0,38	0,1444000	0,6156000	0,0548720	0,3234560	0,7616720
0,39	0,1521000	0,6279000	0,0593190	0,3376620	0,7730190
0,40	0,1600000	0,6400000	0,0640000	0,3520000	0,7840000
0,41	0,1681000	0,6519000	0,0689210	0,3664580	0,7946210
0,42	0,1764000	0,6636000	0,0740880	0,3810240	0,8048880
0,43	0,1849000	0,6751000	0,0795070	0,3956860	0,8148070
0,44	0,1936000	0,6864000	0,0851840	0,4104320	0,8243840
0,45	0,2025000	0,6975000	0,0911250	0,4252500	0,8336250
0,46	0,2116000	0,7084000	0,0973360	0,4401280	0,8425360
0,47	0,2209000	0,7191000	0,1038230	0,4550540	0,851 1230
0,48	0,2304000	0,7296000	0,1105920	0,4700160	0,8593920
0,49	0,2401000	0,7399000	0,1176490	0,4850020	0,8673490
0,50	0,2500000	0,7500000	0,1250000	0,5000000	0,8750000

Продовження таблиці додатку И

p	$n=4, m=4$	$n=4, m=3$	$n=4, m=2$	$n=4, m=1$	$n=5, m=5$
0,01	0,0000000	0,0000040	0,0005920	0,0394040	0,0000000
0,02	0,0000002	0,0000315	0,0023365	0,0776318	0,0000000
0,03	0,0000008	0,0001056	0,0051864	0,1147072	0,0000000
0,04	0,0000026	0,0002483	0,0090957	0,1506534	0,0000001
0,05	0,0000062	0,0004812	0,0140188	0,1854938	0,0000003
0,06	0,0000130	0,0008251	0,0199109	0,2192510	0,0000008
0,07	0,0000240	0,0013000	0,0267280	0,2519480	0,0000017
0,08	0,0000410	0,0019251	0,0344269	0,2836070	0,0000033
0,09	0,0000656	0,0027192	0,0429648	0,3142504	0,0000059
0,10	0,0001000	0,0037000	0,0523000	0,3439000	0,0000100
0,11	0,0001464	0,0048848	0,0623912	0,3725776	0,0000161
0,12	0,0002074	0,0062899	0,0731981	0,4003046	0,0000249
0,13	0,0002856	0,0079312	0,0846808	0,4271024	0,0000371
0,14	0,0003842	0,0098235	0,0968005	0,4529918	0,0000538
0,15	0,0005062	0,0119812	0,1095188	0,4779938	0,0000759
0,16	0,0006554	0,0144179	0,1227981	0,5021286	0,0001049
0,17	0,0008352	0,0171464	0,1366016	0,5254168	0,0001420
0,18	0,0010498	0,0201787	0,1508933	0,5478782	0,0001890
0,19	0,0013032	0,0235264	0,1656376	0,5695328	0,0002476
0,20	0,0016000	0,0272000	0,1808000	0,5904000	0,0003200
0,21	0,0019448	0,0312096	0,1963464	0,6104992	0,0004084
0,22	0,0023426	0,0355643	0,2122437	0,6298494	0,0005154
0,23	0,0027984	0,0402728	0,2284592	0,6484696	0,0006436
0,24	0,0033178	0,0453427	0,2449613	0,6663782	0,0007963
0,25	0,0039062	0,0507812	0,2617188	0,6835938	0,0009766
0,26	0,0045698	0,0565947	0,2787013	0,7001342	0,0011881
0,27	0,0053144	0,0627888	0,2958792	0,7160176	0,0014349
0,28	0,0061466	0,0693683	0,3132237	0,7312614	0,0017210
0,29	0,0070728	0,0763376	0,3307064	0,7458832	0,0020511
0,30	0,0081000	0,0837000	0,3483000	0,7599000	0,0024300
0,31	0,0092352	0,0914584	0,3659776	0,7733288	0,0028629
0,32	0,0104858	0,0996147	0,3837133	0,7861862	0,0033554
0,33	0,0118592	0,1081704	0,4014816	0,7984888	0,0039135
0,34	0,0133634	0,1171259	0,4192581	0,8102526	0,0045435
0,35	0,0150063	0,1264312	0,4370188	0,8214938	0,0052522
0,36	0,0167962	0,1362355	0,4547405	0,8322278	0,0060466
0,37	0,0187416	0,1463872	0,4724008	0,8424704	0,0069344
0,38	0,0208514	0,1569339	0,4899781	0,8522366	0,0079235
0,39	0,0231344	0,1678728	0,5074512	0,8615416	0,0090224
0,40	0,0256000	0,1792000	0,5248000	0,8704000	0,0102400
0,41	0,0282576	0,1909112	0,5420048	0,8788264	0,0115856
0,42	0,0311170	0,2030011	0,5590469	0,8868350	0,0130691
0,43	0,0341880	0,2154640	0,5759080	0,8944400	0,0147008
0,44	0,0374810	0,2282931	0,5925709	0,9016550	0,0164916
0,45	0,0410062	0,2414812	0,6090188	0,9084937	0,0184528
0,46	0,0447746	0,2550200	0,6252357	0,9149694	0,0205963
0,47	0,0487968	0,2689016	0,6412064	0,9210952	0,0229345
0,48	0,0530842	0,2831155	0,6569165	0,9268838	0,0254804
0,49	0,0576480	0,2976520	0,6723520	0,9323480	0,0282475
0,50	0,0625000	0,3125000	0,0875000	0,9375000	0,0312500

Продовження таблиці додатку И

p	$n=5, m=4$	$n=5, m=3$	$n=5, m=2$	$n=5, m=1$	$n=6, m=6$
0,01	0,0000000	0,0000099	0,0009801	0,0490100	0,0000000
0,02	0,0000008	0,0000776	0,0038424	0,0960792	0,0000000
0,03	0,0000040	0,0002580	0,0084721	0,1412660	0,0000000
0,04	0,0000124	0,0006022	0,0147580	0,1846273	0,0000000
0,05	0,0000300	0,0011581	0,0225925	0,2261191	0,0000000
0,06	0,0000617	0,0019703	0,0318713	0,2660960	0,0000000
0,07	0,0001133	0,0030799	0,0424934	0,3043116	0,0000001
0,08	0,0001917	0,0045253	0,0543613	0,3409185	0,0000003
0,09	0,0003044	0,0063413	0,0673805	0,3759679	0,0000005
0,10	0,0004600	0,0085600	0,0814600	0,4095100	0,0000010
0,11	0,0006676	0,0112105	0,0965117	0,4415941	0,0000018
0,12	0,0009373	0,0143189	0,1124509	0,4722681	0,0000030
0,13	0,0012795	0,0179086	0,1291956	0,5015791	0,0000048
0,14	0,0017057	0,0220003	0,1466673	0,5295730	0,0000075
0,15	0,0022275	0,0266119	0,1647900	0,5562947	0,0000114
0,16	0,0028574	0,0317587	0,1834910	0,5817881	0,0000168
0,17	0,0036081	0,0374538	0,2027002	0,6060959	0,0000241
0,18	0,0044930	0,0437073	0,2223506	0,6292602	0,0000340
0,19	0,0055256	0,0505275	0,2423777	0,6513216	0,0000470
0,20	0,0067200	0,0579200	0,2627200	0,6723200	0,0000640
0,21	0,0080904	0,0658883	0,2833185	0,6922944	0,0000858
0,22	0,0096513	0,0744338	0,3041169	0,7112826	0,0001134
0,23	0,0114175	0,0835557	0,3250616	0,7293216	0,0001480
0,24	0,0134038	0,0932512	0,3461014	0,7464475	0,0001911
0,25	0,0156250	0,1035156	0,3671875	0,7626953	0,0002441
0,26	0,0180962	0,1143424	0,3882738	0,7780993	0,0003089
0,27	0,0208325	0,1257232	0,4093166	0,7926928	0,0003874
0,28	0,0238487	0,1376478	0,4302743	0,8065082	0,0004819
0,29	0,0271596	0,1501045	0,4511077	0,8195771	0,0005948
0,30	0,0307800	0,1630800	0,4717800	0,8319300	0,0007290
0,31	0,0347244	0,1765593	0,4922565	0,8435969	0,0008875
0,32	0,0390070	0,1905263	0,5125046	0,8546066	0,0010737
0,33	0,0436419	0,2049631	0,5324940	0,8649875	0,0012915
0,34	0,0486426	0,2198500	0,5521962	0,8747667	0,0015448
0,35	0,0540225	0,2351094	0,5715850	0,8839709	0,0018383
0,36	0,0597943	0,2508973	0,5906359	0,8926258	0,0021768
0,37	0,0659705	0,2670122	0,6093266	0,9007563	0,0025657
0,38	0,0725627	0,2834907	0,6276363	0,9083867	0,0030109
0,39	0,0795824	0,3003084	0,6455465	0,9155404	0,0035187
0,40	0,0870400	0,3174400	0,6630400	0,9222400	0,0040960
0,41	0,0949456	0,3348596	0,6801017	0,9285076	0,0047501
0,42	0,1033083	0,3525403	0,6967179	0,9343643	0,0054890
0,43	0,1121367	0,3704549	0,7128768	0,9398308	0,0063214
0,44	0,1214383	0,3885753	0,7285679	0,9449268	0,0072563
0,45	0,1312200	0,4068731	0,7437825	0,9496716	0,0083038
0,46	0,1414876	0,4253194	0,7585132	0,9540835	0,0094743
0,47	0,1522460	0,4438849	0,7727541	0,9581805	0,0107792
0,48	0,1634992	0,4625400	0,7865008	0,9619796	0,0122306
0,49	0,1752500	0,4812550	0,7997501	0,9654975	0,0138413
0,50	0,1373000	0,5000000	0,8125000	0,9687500	0,0156250

Продовження таблиці додатку И

p	$n=6, m=5$	$n=6, m=4$	$n=6, m=3$	$n=6, m=2$	$n=6, m=1$
0,01	0,0000000	0,0000001	0,0000196	0,0014604	0,0585199
0,02	0,0000000	0,0000023	0,000153	0,0056871	0,1141576
0,03	0,0000001	0,0000116	0,0005044	0,0124559	0,1670280
0,04	0,0000006	0,0000360	0,0011684	0,0215528	0,2172422
0,05	0,0000018	0,0000864	0,0022298	0,0327738	0,2649081
0,06	0,0000044	0,0001762	0,0037643	0,0459248	0,3101302
0,07	0,0000095	0,0003210	0,0058389	0,0608207	0,3530098
0,08	0,0000184	0,0005384	0,0085121	0,0772859	0,3936450
0,09	0,0000328	0,0008477	0,0118348	0,0951534	0,4321307
0,10	0,0000550	0,0012700	0,0158500	0,1142650	0,4685590
0,11	0,0000878	0,0018273	0,0205936	0,1344708	0,5030187
0,12	0,0001344	0,0025431	0,0260947	0,1556289	0,5355959
0,13	0,0001986	0,0034413	0,0323759	0,1776055	0,5663738
0,14	0,0002850	0,0045469	0,0394537	0,2002741	0,5954328
0,15	0,0003987	0,0058852	0,0473386	0,2235157	0,6228505
0,16	0,0005453	0,0074816	0,0560359	0,2472185	0,6487020
0,17	0,0007312	0,0093619	0,0655457	0,2712775	0,6730596
0,18	0,0009637	0,0115516	0,0758631	0,2955943	0,6959933
0,19	0,0012504	0,0140760	0,0869790	0,3200770	0,7175705
0,20	0,0016000	0,0169600	0,0988800	0,3446400	0,7378560
0,21	0,0020216	0,0202280	0,1115487	0,3692034	0,7569125
0,22	0,0025253	0,0239035	0,1249641	0,3936934	0,7748004
0,23	0,0031216	0,0280093	0,1391020	0,4180414	0,7915776
0,24	0,0038221	0,0325671	0,1539352	0,4421844	0,8073001
0,25	0,0046387	0,0375977	0,1694336	0,4660645	0,8220215
0,26	0,0055842	0,0431203	0,1855646	0,4896285	0,8357935
0,27	0,0066722	0,0491530	0,2022934	0,5128282	0,8486658
0,28	0,0079168	0,0557124	0,2195832	0,5356198	0,8606859
0,29	0,0093326	0,0628136	0,2373955	0,5579638	0,8718997
0,30	0,0109350	0,0704700	0,2556900	0,5798250	0,8823510
0,31	0,0127400	0,0786932	0,2744255	0,6011720	0,8920818
0,32	0,0147640	0,0874932	0,2935593	0,6219773	0,9011325
0,33	0,0170239	0,0968779	0,3130483	0,6422168	0,9095416
0,34	0,0195372	0,1068534	0,3328483	0,6618702	0,9173460
0,35	0,0223218	0,1174239	0,3529148	0,6809201	0,9245811
0,36	0,0253958	0,1285914	0,3732032	0,6993523	0,9312805
0,37	0,0287777	0,1403559	0,3936685	0,7171556	0,9374765
0,38	0,0324864	0,1527154	0,4142660	0,7343215	0,9431998
0,39	0,0365408	0,1656655	0,4349512	0,7508441	0,9484796
0,40	0,0409600	0,1792000	0,4556800	0,7667200	0,9533440
0,41	0,0457632	0,1933103	0,4764088	0,7819481	0,9578195
0,42	0,0509696	0,2079858	0,4970949	0,7965294	0,9619313
0,43	0,0565983	0,2232135	0,5176963	0,8104670	0,9657036
0,44	0,0626682	0,2389786	0,5381721	0,8237658	0,9691590
0,45	0,0691980	0,2552639	0,5584823	0,8364326	0,9723194
0,46	0,0762063	0,2720502	0,5785885	0,8484755	0,9752051
0,47	0,0837109	0,2893163	0,5984534	0,8599045	0,9778356
0,48	0,0917294	0,3070388	0,6180412	0,8707306	0,9802294
0,49	0,1002787	0,3251942	0,6373176	0,8809663	0,9824037
0,50	0,1093750	0,3437500	0,6562500	0,8906250	0,9843750

Продовження таблиці додатку И

p	$n=7, m=7$	$n=7, m=6$	$n=7, m=5$	$n=7, m=4$	$n=7, m=3$
0,01	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000003	0,0000340
0,02	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000053	0,0002636
0,03	0,0000000	0,0000000	0,0000005	0,0000264	0,0008630
0,04	0,0000000	0,0000000	0,0000020	0,0000813	0,0019838
0,05	0,0000000	0,0000001	0,0000060	0,0001936	0,0037570
0,06	0,0000000	0,0000003	0,0000147	0,0003915	0,0062940
0,07	0,0000000	0,0000008	0,0000313	0,0007072	0,0096876
0,08	0,0000000	0,0000017	0,0000600	0,0011763	0,0140140
0,09	0,0000000	0,0000034	0,0001061	0,0018366	0,0193335
0,10	0,0000001	0,0000064	0,0001765	0,0027280	0,0256915
0,11	0,0000002	0,0000112	0,0002791	0,0038916	0,0331201
0,12	0,0000004	0,0000188	0,0004234	0,0053693	0,0416388
0,13	0,0000006	0,0000300	0,0006202	0,0072028	0,0512558
0,14	0,0000011	0,0000464	0,0008817	0,0094339	0,0619685
0,15	0,0000017	0,0000695	0,0012216	0,0121032	0,0737652
0,16	0,0000027	0,0001013	0,0016551	0,0152503	0,0866251
0,17	0,0000041	0,0001443	0,0021984	0,0189131	0,1005201
0,18	0,0000061	0,0002014	0,0028695	0,0231276	0,1154147
0,19	0,0000089	0,0002757	0,0036873	0,0279276	0,1312677
0,20	0,0000128	0,0003712	0,0046720	0,0333440	0,1480320
0,21	0,0000180	0,0004923	0,0058450	0,0394053	0,1656562
0,22	0,0000249	0,0006440	0,0072285	0,0461368	0,1840845
0,23	0,0000340	0,0008320	0,0088458	0,0535606	0,2032581
0,24	0,0000459	0,0010625	0,0107209	0,0616955	0,2231150
0,25	0,0000610	0,0013428	0,0128784	0,0705566	0,2435913
0,26	0,0000803	0,0016805	0,0153436	0,0801558	0,2646212
0,27	0,0001046	0,0020843	0,0181420	0,0905009	0,2861378
0,28	0,0001349	0,0025637	0,0212996	0,1015962	0,3080735
0,29	0,0001725	0,0031288	0,0248421	0,1134424	0,3303603
0,30	0,0002187	0,0037908	0,0287955	0,1260360	0,3529305
0,31	0,0002751	0,0045618	0,0331855	0,1393702	0,3757169
0,32	0,0003436	0,0054546	0,0380373	0,1534344	0,3986531
0,33	0,0004262	0,0064832	0,0433757	0,1682141	0,4216739
0,34	0,0005252	0,0076622	0,0492247	0,1836917	0,4447157
0,35	0,0006434	0,0090075	0,0556075	0,1998457	0,4677167
0,36	0,0007836	0,0105356	0,0625462	0,2166517	0,4906169
0,37	0,0009493	0,0122642	0,0700617	0,2340816	0,5133587
0,38	0,0011442	0,0142116	0,0781734	0,2521046	0,5358871
0,39	0,0013723	0,0163973	0,0868994	0,2706869	0,5581494
0,40	0,0016384	0,0188416	0,0962560	0,2897920	0,5800960
0,41	0,0019475	0,0215655	0,1062575	0,3093807	0,6016799
0,42	0,0023054	0,0245909	0,1169164	0,3294116	0,6228574
0,43	0,0027182	0,0279404	0,1282428	0,3498411	0,6435877
0,44	0,0031928	0,0316375	0,1402448	0,3706237	0,6638333
0,45	0,0037367	0,0357062	0,1529277	0,3917222	0,6835599
0,46	0,0043582	0,0401710	0,1662945	0,4130579	0,7027366
0,47	0,0050662	0,0450571	0,1803454	0,4346107	0,7213354
0,48	0,0058707	0,0503900	0,1850779	0,4563199	0,7393321
0,49	0,0067822	0,0561956	0,2104864	0,4781337	0,7567054
0,50	0,0078125	0,0625000	0,2265625	0,5000000	0,7934375

Продовження таблиці додатку И

p	$n=7,m=2$	$n=7,m=1$	$n=8,m=8$	$n=8,m=7$	$n=8,m=6$
0,01	0,0020310	0,0679347	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,02	0,0078565	0,1318745	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,03	0,0170930	0,1920172	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,04	0,0293803	0,2485525	0,0000000	0,0000000	0,0000001
0,05	0,0443805	0,3016627	0,0000000	0,0000000	0,0000004
0,06	0,0617771	0,3515224	0,0000000	0,0000000	0,0000012
0,07	0,0812739	0,3982991	0,0000000	0,0000001	0,0000029
0,08	0,1025946	0,4421534	0,0000000	0,0000002	0,0000064
0,09	0,1254814	0,4832390	0,0000000	0,0000004	0,0000127
0,10	0,1496944	0,5217031	0,0000000	0,0000007	0,0000234
0,11	0,1750111	0,5576867	0,0000000	0,0000014	0,0000407
0,12	0,2012250	0,5913244	0,0000000	0,0000026	0,0000673
0,13	0,2281454	0,6227452	0,0000001	0,0000044	0,0001067
0,14	0,2555963	0,6520722	0,0000001	0,0000074	0,0001633
0,15	0,2834159	0,6794229	0,0000003	0,0000119	0,0002423
0,16	0,3114559	0,7049097	0,0000004	0,0000185	0,0003499
0,17	0,3395804	0,7286395	0,0000007	0,0000279	0,0004891
0,18	0,3676661	0,7507145	0,0000011	0,0000413	0,0006816
0,19	0,3956008	0,7712321	0,0000017	0,0000596	0,0009239
0,20	0,4232832	0,7902848	0,0000026	0,0000845	0,0012314
0,21	0,4506224	0,8079609	0,0000038	0,0001176	0,0016164
0,22	0,4775369	0,8243443	0,0000055	0,0001611	0,0020926
0,23	0,5039547	0,8395148	0,0000078	0,0002176	0,0026751
0,24	0,5298122	0,8535481	0,0000110	0,0002899	0,0033805
0,25	0,5550537	0,8665161	0,0000153	0,0003815	0,0042267
0,26	0,5796314	0,8734872	0,0000209	0,0004964	0,0052329
0,27	0,6035043	0,8895260	0,0000282	0,0006391	0,0064109
0,28	0,6266383	0,8996939	0,0000378	0,0008150	0,0078097
0,29	0,6490053	0,9090488	0,0000500	0,0010298	0,0094256
0,30	0,6705828	0,9176457	0,0000656	0,0012903	0,0112922
0,31	0,6913541	0,9255365	0,0000853	0,0016040	0,0134351
0,32	0,7113070	0,9327701	0,0001100	0,0019971	0,0158811
0,33	0,7304340	0,9393929	0,0001406	0,0024250	0,0186577
0,34	0,7487320	0,9454484	0,0001786	0,0029518	0,0217935
0,35	0,7662014	0,9509777	0,0002252	0,0035708	0,0253175
0,36	0,7828465	0,9560195	0,0003512	0,0042944	0,0292594
0,37	0,7986743	0,9606102	0,0003512	0,0051358	0,0336492
0,38	0,8136952	0,9647839	0,0004348	0,0061098	0,0385171
0,39	0,8279219	0,9685726	0,0005352	0,0072321	0,0438932
0,40	0,8413696	0,9720064	0,0006554	0,0085197	0,0498074
0,41	0,8540554	0,9751135	0,0007985	0,0099909	0,0562892
0,42	0,8659982	0,9779202	0,0009683	0,0116653	0,0633676
0,43	0,8772187	0,9804510	0,0011688	0,0135637	0,0710705
0,44	0,8877388	0,9827291	0,0014048	0,0157085	0,0794247
0,45	0,8975816	0,9847756	0,0016815	0,0181230	0,0884559
0,46	0,9067711	0,9866107	0,0020048	0,0208321	0,0981878
0,47	0,9153321	0,9882529	0,0023811	0,0238619	0,1086426
0,48	0,9232900	0,9897193	0,0028179	0,0272400	0,1218402
0,49	0,9306706	0,9910259	0,0033233	0,0309948	0,1317981
0,50	0,9375000	0,9921875	0,0039062	0,0351562	0,1445312

Продовження таблиці додатку И

p	$n=8, m=5$	$n=8, m=4$	$n=8, m=3$	$n=8, m=2$	$n=8, m=1$
0,01	0,0000000	0,0000007	0,0000539	0,0026901	0,0772553
0,02	0,0000002	0,0000105	0,0004155	0,0103369	0,1492370
0,03	0,0000013	0,0000515	0,0013499	0,0223408	0,2162566
0,04	0,0000052	0,0001574	0,0030797	0,0381472	0,2786104
0,05	0,0000154	0,0003718	0,0057882	0,0572447	0,3365796
0,06	0,0000373	0,0007456	0,0096229	0,0791618	0,3904311
0,07	0,0000786	0,0013359	0,0146987	0,1034657	0,4404192
0,08	0,0001493	0,0022033	0,0211005	0,1297593	0,4867811
0,09	0,0002619	0,0034113	0,0288868	0,1576795	0,5927475
0,10	0,0004316	0,0050244	0,0380918	0,1868953	0,5695328
0,11	0,0006765	0,0071068	0,0487281	0,2171054	0,6063411
0,12	0,0010169	0,0097216	0,0607892	0,2480369	0,6403655
0,13	0,0014759	0,0129297	0,0742514	0,2794433	0,6717883
0,14	0,0020790	0,0167887	0,0890764	0,3111029	0,7007821
0,15	0,0028539	0,0213525	0,1052128	0,3428170	0,7275095
0,16	0,0038303	0,0266703	0,1225980	0,3744085	0,7521241
0,17	0,0050399	0,0327863	0,1411603	0,4057205	0,7747708
0,18	0,0065160	0,0397393	0,1608200	0,4366148	0,7955859
0,19	0,0082999	0,0475622	0,1814910	0,4669707	0,8146980
0,20	0,0104064	0,0562816	0,2030322	0,4966835	0,8322278
0,21	0,0128926	0,0659180	0,2254991	0,5256634	0,8482891
0,22	0,0157883	0,0764853	0,2486441	0,5538346	0,8629886
0,23	0,0191302	0,0879910	0,2724183	0,5811335	0,8764264
0,24	0,0229548	0,1004362	0,2967223	0,6075088	0,8886965
0,25	0,0272980	0,1138153	0,3214569	0,6329193	0,8998871
0,26	0,0321948	0,1281168	0,3465239	0,6573339	0,9100805
0,27	0,0376789	0,1433229	0,3718268	0,6807302	0,9193540
0,28	0,0437826	0,1594099	0,3972716	0,7030939	0,9277796
0,29	0,0505362	0,1763486	0,4227673	0,7244179	0,9354246
0,30	0,0579676	0,1941044	0,4482262	0,7447017	0,9423520
0,31	0,0661027	0,2126377	0,4735644	0,7639506	0,9486202
0,32	0,0749644	0,2319043	0,4987023	0,7821752	0,9542837
0,33	0,0845724	0,2518558	0,5235647	0,7993904	0,9593932
0,34	0,0949435	0,2724899	0,5480813	0,8156156	0,9639959
0,35	0,1060909	0,2936008	0,5721863	0,8308731	0,9681355
0,36	0,1180242	0,3152791	0,5958195	0,8451888	0,9718525
0,37	0,1307490	0,3374141	0,6189255	0,8585906	0,9751844
0,38	0,1442673	0,3599420	0,6414542	0,8711089	0,9781660
0,39	0,1585766	0,3827973	0,6633607	0,8827757	0,9808293
0,40	0,1736704	0,4059136	0,6846054	0,8936243	0,9832038
0,41	0,1895380	0,4292234	0,7051539	0,9036892	0,9853170
0,42	0,2061644	0,4526588	0,7249765	0,9130054	0,9871937
0,43	0,2235301	0,4761522	0,7440490	0,9216086	0,9888571
0,44	0,2416115	0,4996359	0,7623517	0,9295345	0,9903283
0,45	0,2603807	0,5230437	0,7798697	0,9368189	0,9916266
0,46	0,2798058	0,5463101	0,7965925	0,9434974	0,9927698
0,47	0,2998501	0,5693713	0,8125139	0,9496049	0,9937740
0,48	0,3204741	0,5921653	0,8276319	0,9551761	0,9946540
0,49	0,3416335	0,6146339	0,8419484	0,9602447	0,9954232
0,50	0,3632812	0,6367188	0,8554688	0,9648438	0,9950938

Продовження таблиці додатку И

p	$n=9, m=9$	$n=9, m=8$	$n=9, m=7$	$n=9, m=6$	$n=9, m=5$
0,01	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,02	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000004
0,03	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000028
0,04	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000003	0,0000113
0,05	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000012	0,0000332
0,06	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000033	0,0000798
0,07	0,0000000	0,0000000	0,0000003	0,0000082	0,0001666
0,08	0,0000000	0,0000000	0,0000007	0,0000178	0,0003136
0,09	0,0000000	0,0000000	0,0000015	0,0000351	0,0005453
0,10	0,0000000	0,0000001	0,0000030	0,0000642	0,0008909
0,11	0,0000000	0,0000002	0,0000057	0,0001106	0,0013838
0,12	0,0000000	0,0000003	0,0000103	0,0001813	0,0020615
0,13	0,0000000	0,0000006	0,0000177	0,0002847	0,0029647
0,14	0,0000000	0,0000012	0,0000292	0,0004315	0,0041384
0,15	0,0000000	0,0000020	0,0000464	0,0006340	0,0056287
0,16	0,0000001	0,0000033	0,0000715	0,0009068	0,0074847
0,17	0,0000001	0,0000053	0,0001071	0,0012664	0,0097568
0,18	0,0000002	0,0000083	0,0001565	0,0017318	0,0124962
0,19	0,0000003	0,0000127	0,0002238	0,0023240	0,0157541
0,20	0,0000005	0,0000189	0,0003139	0,0030664	0,0039844
0,21	0,0000008	0,0000277	0,0004323	0,0039844	0,0240280
0,22	0,0000012	0,0000379	0,0005861	0,0051056	0,0291417
0,23	0,0000018	0,0000561	0,0007828	0,0064598	0,0349682
0,24	0,0000026	0,0000779	0,0010316	0,0080784	0,0415503
0,25	0,0000038	0,0001068	0,0013428	0,0099945	0,0489273
0,26	0,0000054	0,0001445	0,0017279	0,0122430	0,0571345
0,27	0,0000076	0,0001932	0,0021999	0,0148598	0,0662028
0,28	0,0000106	0,0002554	0,0027735	0,0178821	0,0761583
0,29	0,0000145	0,0003342	0,0034646	0,0213477	0,0870218
0,30	0,0000197	0,0004330	0,0042909	0,0252948	0,0988087
0,31	0,0000264	0,0005561	0,0052716	0,0297621	0,1115286
0,32	0,0000352	0,0007081	0,0064277	0,0347877	0,1251852
0,33	0,0000464	0,0008945	0,0077818	0,0404096	0,1397759
0,34	0,0000607	0,0011215	0,0093580	0,0466645	0,1552923
0,35	0,0000788	0,0013962	0,0111822	0,0535882	0,1717193
0,36	0,0001016	0,0017265	0,0132818	0,0612147	0,1890360
0,37	0,0001300	0,0021215	0,0156858	0,0695762	0,2072151
0,38	0,0001652	0,0025913	0,0184246	0,0787022	0,2262237
0,39	0,0002087	0,0031470	0,0215299	0,0886197	0,2460227
0,40	0,0002621	0,0038011	0,0250348	0,0993526	0,2665677
0,41	0,0003274	0,0045674	0,0289732	0,1109212	0,2878090
0,42	0,0004067	0,0054610	0,0333803	0,1233422	0,2096920
0,43	0,0005026	0,0064986	0,0382916	0,1366281	0,3321576
0,44	0,0006181	0,0076984	0,0437436	0,1507869	0,3551423
0,45	0,0007567	0,0090802	0,0497728	0,1658220	0,3785791
0,46	0,0009222	0,0106653	0,0564157	0,1817320	0,4023977
0,47	0,0011191	0,0124771	0,0637089	0,1985102	0,4265251
0,48	0,0013526	0,0145405	0,0716881	0,2161445	0,4508861
0,49	0,0016284	0,0168823	0,0803884	0,2346175	0,4754037
0,50	0,0019531	0,0195312	0,0898437	0,2539062	0,5000000

Продовження таблиці додатку И

p	$n=9, m=4$	$n=9, m=3$	$n=9, m=2$	$n=9, m=1$	$n=10, m=10$
0,01	0,0000012	0,0000803	0,0034357	0,0864828	0,0000000
0,02	0,0000186	0,0006139	0,0131149	0,1662522	0,0000000
0,03	0,0000904	0,0019796	0,0281582	0,2397689	0,0000000
0,04	0,0002743	0,0044824	0,0477658	0,3074660	0,0000000
0,05	0,0006426	0,0083610	0,0712114	0,3697506	0,0000000
0,06	0,0012783	0,0137953	0,0978380	0,4370052	0,0000000
0,07	0,0022713	0,0209123	0,1270524	0,4795889	0,0000000
0,08	0,0037151	0,0297932	0,1583210	0,5278386	0,0000000
0,09	0,0057041	0,0404781	0,1911657	0,5720702	0,0000000
0,10	0,0083311	0,0529721	0,2251590	0,6125795	0,0000000
0,11	0,0116851	0,0672496	0,2599213	0,6496436	0,0000000
0,12	0,0158497	0,0832589	0,2951163	0,6835216	0,0000000
0,13	0,0209015	0,1009264	0,3304482	0,7144558	0,0000000
0,14	0,0269090	0,1201601	0,3656580	0,7426726	0,0000000
0,15	0,0339315	0,1408534	0,4005208	0,7683831	0,0000000
0,16	0,0420187	0,1628877	0,4348430	0,7917843	0,0000000
0,17	0,0512099	0,1861356	0,4684590	0,8130597	0,0000000
0,18	0,0615338	0,2104631	0,5012296	0,8323804	0,0000000
0,19	0,0730086	0,2357321	0,5330389	0,8499054	0,0000001
0,20	0,0856417	0,2618025	0,5637924	0,8657823	0,0000001
0,21	0,0994300	0,2885336	0,5934148	0,8801484	0,0000002
0,22	0,1143602	0,3157860	0,6218484	0,8931311	0,0000003
0,23	0,1304093	0,3434228	0,6490509	0,9048483	0,0000004
0,24	0,1475448	0,3713111	0,6749938	0,9154094	0,0000006
0,25	0,1657257	0,3993225	0,6996613	0,9249153	0,0000010
0,26	0,1849026	0,4273345	0,7230480	0,9334596	0,0000014
0,27	0,2050189	0,4552307	0,7451586	0,9411284	0,0000021
0,28	0,2260112	0,4829018	0,7660059	0,9480013	0,0000030
0,29	0,2478100	0,5102460	0,7856098	0,9541515	0,0000042
0,30	0,2703409	0,5371688	0,8039968	0,9596464	0,0000059
0,31	0,2935250	0,5635841	0,8211982	0,9646479	0,0000082
0,32	0,3172797	0,5894136	0,8372499	0,9689129	0,0000113
0,33	0,3415198	0,6145872	0,8521914	0,9727935	0,0000153
0,34	0,3661579	0,6390429	0,8660649	0,9762373	0,0000206
0,35	0,3911056	0,6627267	0,8789150	0,9792881	0,0000276
0,36	0,4162737	0,6855925	0,8907877	0,9819856	0,0000366
0,37	0,4415733	0,7076016	0,9017303	0,9843662	0,0000481
0,38	0,4669166	0,7287230	0,9117906	0,9864629	0,0000628
0,39	0,4922170	0,7489326	0,9210166	0,9883059	0,0000814
0,40	0,5173903	0,7682130	0,9294561	0,9899223	0,0001049
0,41	0,5423549	0,7865533	0,9371566	0,9913370	0,0001342
0,42	0,5670323	0,8039487	0,9441645	0,9925723	0,0001708
0,43	0,5913478	0,8203997	0,9505255	0,9936485	0,0002161
0,44	0,6152309	0,8359122	0,9562838	0,9945838	0,0002720
0,45	0,6386154	0,8504969	0,9614824	0,9953946	0,0003405
0,46	0,6614400	0,8641687	0,9661627	0,9960957	0,0004242
0,47	0,6836483	0,8769467	0,9703644	0,9967002	0,0005260
0,48	0,7051895	0,8888531	0,9741255	0,9972201	0,0006493
0,49	0,7260180	0,8999136	0,9774822	0,9976658	0,0007979
0,50	0,7460938	0,9101563	0,9804688	0,9980469	0,0009766

Продовження таблиці додатку И

p	$n=10, m=9$	$n=10, m=8$	$n=10, m=7$	$n=10, m=6$	$n=10, m=5$
0,01	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,02	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000007
0,03	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000054
0,04	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000007	0,0000218
0,05	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000028	0,0000637
0,06	0,0000000	0,0000000	0,0000003	0,0000079	0,0001517
0,07	0,0000000	0,0000000	0,0000008	0,0000193	0,0003139
0,08	0,0000000	0,0000001	0,0000020	0,0000415	0,0005857
0,09	0,0000000	0,0000002	0,0000045	0,0000810	0,0010096
0,10	0,0000000	0,0000004	0,0000091	0,0001469	0,0016349
0,11	0,0000000	0,0000008	0,0000173	0,0002507	0,0025170
0,12	0,0000000	0,0000015	0,0000308	0,0004069	0,0037161
0,13	0,0000001	0,0000029	0,0000525	0,0006332	0,0052967
0,14	0,0000002	0,0000051	0,0000856	0,0009505	0,0073263
0,15	0,0000003	0,0000087	0,0001346	0,0013832	0,0098741
0,16	0,0000006	0,0000142	0,0002051	0,0019593	0,0130101
0,17	0,0000010	0,0000227	0,0003042	0,0027098	0,0168038
0,18	0,0000017	0,0000350	0,0004401	0,0036694	0,0213229
0,19	0,0000027	0,0000528	0,0006229	0,0048757	0,0266325
0,20	0,0000042	0,0000779	0,0008644	0,0063694	0,0327935
0,21	0,0000064	0,0001127	0,0011783	0,0081935	0,0398624
0,22	0,0000097	0,0001599	0,0015804	0,0103936	0,0478897
0,23	0,0000143	0,0002232	0,0020885	0,0130167	0,0569196
0,24	0,0000207	0,0003068	0,0027228	0,0161116	0,0669890
0,25	0,0000296	0,0004158	0,0035057	0,0197277	0,0781269
0,26	0,0000416	0,0005362	0,0044618	0,0239148	0,0903542
0,27	0,0000577	0,0007350	0,0056181	0,0237224	0,1036831
0,28	0,0000791	0,0009605	0,0070039	0,0341994	0,1181171
0,29	0,0001072	0,0012420	0,0086507	0,0403932	0,1336503
0,30	0,0001437	0,0015904	0,0105921	0,0473490	0,1502683
0,31	0,0001906	0,0020179	0,0128637	0,0551097	0,1679475
0,32	0,0002505	0,0025384	0,0155029	0,0637149	0,1866554
0,33	0,0003263	0,0031673	0,0185489	0,0732005	0,2063514
0,34	0,0004214	0,0039219	0,0220422	0,0835979	0,2269866
0,35	0,0005399	0,0048213	0,0260243	0,0949341	0,2485045
0,36	0,0006865	0,0058864	0,0305376	0,1072304	0,2708415
0,37	0,0008668	0,0071403	0,0356252	0,1205026	0,2939277
0,38	0,0010871	0,0086079	0,0413301	0,1347603	0,3176870
0,39	0,0013546	0,0103163	0,0476949	0,1500068	0,3420385
0,40	0,0016777	0,0122946	0,0547619	0,1662386	0,3668967
0,41	0,0020658	0,0145738	0,0625719	0,1834452	0,3921728
0,42	0,0025295	0,0171871	0,0711643	0,2016094	0,4177749
0,43	0,0030809	0,0201696	0,0805763	0,2207058	0,4436094
0,44	0,0037335	0,0235583	0,0908427	0,2407033	0,4965813
0,45	0,0045022	0,0273918	0,1019949	0,2615627	0,4955954
0,46	0,0054040	0,0317105	0,1140612	0,2832382	0,5215571
0,47	0,0064574	0,0365560	0,1270655	0,3056772	0,5473730
0,48	0,0076828	0,0419713	0,1410272	0,3288205	0,5729517
0,49	0,0091028	0,0480003	0,1559607	0,3526028	0,5982047
0,50	0,0107422	0,0546875	0,1718750	0,3769531	0,6230469

Продовження таблиці додатку И

p	$n=10, m=4$	$n=10, m=3$	$n=10, m=2$	$n=10, m=1$
0,01	0,0000020	0,0001138	0,0042662	0,0956179
0,02	0,0000305	0,0008639	0,0161776	0,1829272
0,03	0,0001471	0,0027650	0,0345066	0,2625759
0,04	0,0004426	0,0062137	0,0581538	0,3351674
0,05	0,0010285	0,0115036	0,0861384	0,4012631
0,06	0,0020293	0,0188378	0,1175880	0,4613849
0,07	0,0035761	0,0283421	0,1517299	0,1560177
0,08	0,0058013	0,0400754	0,1878825	0,5656115
0,09	0,0088338	0,0540400	0,2254471	0,6105839
0,10	0,0127952	0,0701908	0,2639011	0,6513216
0,11	0,0177972	0,0884435	0,3027908	0,6881828
0,12	0,0239388	0,1086818	0,3417250	0,7214990
0,13	0,0313048	0,1307642	0,3803692	0,7515766
0,14	0,0399642	0,1535298	0,4184400	0,7786984
0,15	0,0499698	0,1789035	0,4557002	0,8031256
0,16	0,0613577	0,2064005	0,4919536	0,8250988
0,17	0,0741472	0,2341305	0,5270412	0,8448396
0,18	0,0883411	0,2628010	0,5608368	0,8625520
0,19	0,1039261	0,2922204	0,5932435	0,8784233
0,20	0,1208739	0,3222005	0,6241904	0,8926258
0,21	0,1391418	0,3525586	0,6536289	0,9053172
0,22	0,1586739	0,3831197	0,6815306	0,9166422
0,23	0,1794024	0,4137173	0,7078843	0,9267332
0,24	0,2012487	0,4441949	0,7326936	0,9357111
0,25	0,2241249	0,4744072	0,7559748	0,9436865
0,26	0,2479349	0,5042200	0,7777550	0,9507601
0,27	0,2725761	0,5335112	0,7980705	0,9570237
0,28	0,2979405	0,5621710	0,8169646	0,9625609
0,29	0,3239164	0,5901015	0,8344869	0,9674476
0,30	0,3503893	0,6172172	0,8506917	0,9717525
0,31	0,3772433	0,6434445	0,8656366	0,9755381
0,32	0,4043626	0,6687212	0,8793821	0,9788608
0,33	0,4316320	0,6929966	0,8919901	0,9817716
0,34	0,4589388	0,7162304	0,9035235	0,9843166
0,35	0,4861730	0,7383926	0,9140456	0,9865373
0,36	0,5132284	0,7594627	0,9236190	0,9884708
0,37	0,5400038	0,7794292	0,9323056	0,9901507
0,38	0,5664030	0,7982887	0,9401661	0,9916070
0,39	0,5923361	0,8160453	0,9472594	0,9928666
0,40	0,6177194	0,8327102	0,9536426	0,9939534
0,41	0,6424762	0,8483007	0,9593705	0,9948888
0,42	0,6665372	0,8628393	0,9644958	0,9956920
0,43	0,6898401	0,8763538	0,9690684	0,9963797
0,44	0,7123307	0,8888757	0,9731358	0,9969669
0,45	0,7339621	0,9004403	0,9767429	0,9974670
0,46	0,7546952	0,9110859	0,9799319	0,9978917
0,47	0,7744985	0,9208530	0,9827422	0,9982511
0,48	0,7933480	0,9297839	0,9852109	0,9985544
0,49	0,8112268	0,9379222	0,9873722	0,9988096
0,50	0,8281250	0,9453125	0,9892578	0,9990234

Додаток К

Значення функції $\rho = thz$

z	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08
0,0	0,000	0,020	0,040	0,060	0,080
0,1	0,100	0,119	0,139	0,159	0,178
0,2	0,197	0,217	0,236	0,254	0,273
0,3	0,291	0,310	0,328	0,345	0,363
0,4	0,380	0,397	0,414	0,430	0,440
0,5	0,462	0,478	0,493	0,508	0,523
0,6	0,537	0,551	0,565	0,578	0,592
0,7	0,604	0,617	0,629	0,641	0,653
0,8	0,664	0,675	0,686	0,696	0,706
0,9	0,716	0,726	0,735	0,744	0,753
1,0	0,762	0,770	0,778	0,786	0,793
1,1	0,801	0,808	0,814	0,821	0,828
1,2	0,834	0,840	0,846	0,851	0,852
1,3	0,862	0,867	0,872	0,876	0,881
1,4	0,885	0,890	0,894	0,898	0,902
1,5	0,905	0,909	0,912	0,915	0,919
1,6	0,922	0,925	0,928	0,939	0,933
1,7	0,936	0,938	0,940	0,943	0,945
1,8	0,947	0,949	0,951	0,953	0,955
1,9	0,956	0,958	0,960	0,961	0,963

Додаток Л

Критичні точки розподілу Вілкоксона

Об'єми вибірок		Q				Об'єми вибірок		Q			
n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05	n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05
6	6	23	24	26	28	9	12	63	66	71	75
	7	24	25	27	30		13	65	68	73	78
	8	25	27	29	31		14	67	71	76	81
	9	26	28	31	33		15	69	73	79	84
	10	27	29	32	35		16	72	76	82	87
	11	28	30	34	37		17	74	78	84	90
	12	30	32	35	38		18	76	81	87	93
	13	31	33	37	40		19	78	83	90	96
	14	32	34	38	42		20	81	85	93	99
	15	33	36	40	44		21	83	88	95	102
	16	34	37	42	46		22	85	90	98	105
	17	36	39	43	47		23	88	93	101	108
	18	37	40	45	49		24	90	95	104	111
	19	38	41	46	51		25	92	98	107	114
	20	39	43	48	53	10	10	71	74	78	82
	21	40	44	50	55		11	73	77	81	86
	22	42	45	51	57		12	76	79	84	89
	23	43	47	53	58		13	79	82	88	92
	24	44	48	54	60		14	81	85	91	96
	25	45	50	56	62		15	84	88	94	99
7	7	32	34	36	39		16	86	91	97	103
	8	34	35	38	41		17	89	93	100	106
	9	35	37	40	43		18	92	96	103	110
	10	37	39	42	45		19	94	99	107	113
	11	38	40	44	47		20	97	102	110	117
	12	40	42	46	49		21	99	105	113	120
	13	41	44	48	52		22	102	108	116	123
	14	43	45	50	54		23	105	110	119	127
	15	44	47	52	56		24	107	113	122	130
	16	46	49	54	58		25	110	116	126	134
	17	47	51	56	61	11	11	87	91	96	100
	18	49	52	58	63		12	90	94	99	104
	19	50	54	60	65		13	93	97	103	108
	20	52	56	62	67		14	96	100	106	112
	21	53	58	64	69		15	99	103	110	116
	22	55	59	66	72		16	102	107	113	120
	23	57	61	68	74		17	105	110	117	123
	24	58	63	70	76		18	108	113	121	127
	25	60	64	72	78		19	111	116	124	131

Продовження таблиці додатку Л

Об’єми вибірок		Q				Об’єми вибірок		Q			
n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05	n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05
8	8	43	45	49	51	11	20	114	119	128	135
	9	45	47	51	54		21	117	123	131	139
	10	47	49	53	56		22	120	126	135	143
	11	49	51	55	59		23	123	129	139	147
	12	51	53	58	62		24	126	132	142	151
	13	53	56	60	64		25	129	136	146	155
	14	54	58	62	67	12	12	105	109	115	120
	15	56	60	65	69		13	109	113	119	125
	16	58	62	67	72		14	112	116	123	129
	17	60	64	70	75		15	115	120	127	133
	18	62	66	72	77		16	119	124	131	138
	19	64	68	74	80		17	122	127	135	142
	20	66	70	77	83		18	125	131	139	146
	21	68	72	79	85		19	129	134	143	150
	22	70	74	81	88		20	132	138	147	155
	23	71	76	84	90		21	136	142	151	159
	24	73	78	86	93		22	139	145	155	163
	25	75	81	89	96		23	142	149	159	168
9	9	56	59	62	66		24	146	153	163	172
	10	58	61	65	69		25	149	156	167	176
	11	61	63	68	72	13	13	125	130	136	142

Продовження таблиці додатку Л

Об'єми вибірок		Q				Об'єми вибірок		Q			
n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05	n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05
13	14	129	134	141	147	18	18	252	259	270	280
	15	133	138	145	152		19	258	265	277	287
	16	136	142	150	156		20	263	271	283	294
	17	140	146	154	161		21	269	277	290	301
	18	144	150	158	166		22	275	283	296	307
	19	148	154	163	171		23	280	289	303	314
	20	151	158	167	175		24	286	295	309	321
	21	155	162	171	180		25	292	301	316	328
	22	159	166	176	185	19	19	283	291	303	313
	23	163	170	180	189		20	289	297	309	320
	24	166	174	185	194		21	295	303	316	328
	25	170	178	189	199		22	301	310	323	335
14	14	147	152	160	166		23	307	316	330	342
	15	151	156	164	171		24	313	323	337	350
	16	155	161	169	176		25	319	329	344	357
	17	159	165	174	182	20	20	315	324	337	348
	18	163	170	179	187		21	322	331	344	356
	19	168	174	183	192		22	328	337	351	364
	20	172	178	188	197		23	335	344	359	371
	21	176	183	193	202		24	341	351	366	379
	22	180	187	198	207		25	348	358	373	387
	23	184	192	203	212	21	21	349	359	373	385
	24	188	196	207	218		22	356	366	381	393
	25	192	200	212	223		23	363	373	388	401
15	15	171	176	184	192		24	370	381	396	410
	16	175	181	190	197		25	377	388	404	418
	17	180	186	195	203	22	22	386	396	411	424
	18	184	190	200	208		23	393	40,3	419	432
15	19	189	195	205	214	22	24	400	411	427	441
	20	193	200	210	220		25	408	419	435	450
	21	198	205	216	225	23	23	424	434	451	465
	22	202	210	221	231		24	431	443	459	474
	23	207	214	226	236		25	439	451	468	483
	24	211	219	231	242	24	24	464	475	492	507
	25	216	224	237	248		25	472	484	501	517
16	16	196	202	211	219	25	25	505	517	536	552
	17	201	207	217	225						
	18	206	212	222	231						
	19	210	218	228	237						
	20	215	223	234	243						
	21	220	228	239	249						
	22	225	233	245	255						
	23	23O	238	251	261						
	24	235	244	256	267						
	25	240	249	262	273						
17	17	223	230	240	249						
	18	228	235	246	255						
	19	234	241	252	262						
	20	239	246	258	268						
	21	244	252	264	274						
	22	249	258	270	281						
	23	255	263	276	287						
	24	260	269	282	294						
	25	265	275	288	300						

Додаток М

Критичні точки розподілу Кочрена

(k — число степенів вільності, l — кількість вибірок)

Рівень значущості $\alpha = 0{,}01$							
l	k						
	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9999	0,9950	0,9794	0,9586	0,9373	0,9172	0,8988
3	9933	9423	8831	8335	7933	7606	7335
4	9676	8643	7814	7212	6761	6410	,6129
5	0,9279	0,7885	0,6957	0,6329	0,5875	0,5531	0,5259
6	8828	7218	6258	5635	5195	4866	4608
7	8376	6644	5685	5080	4659	4347	4105
8	0,7945	0,6152	0,5209	0,4627	0,4226	0,3932	0,3704
9	7544	5727	4810	4251	3870	3592	3378
10	7175	5358	4469	3934	3572	3308	3106
12	0,6528	0,4751	0,3919	0,3428	0,3099	0,2861	0,2680
15	5747	4069	3317	2882	2593	2386	2228
20	4799	3297	2654	2288	2048	1877	1748
24	0,4247	0,2871	0,2295	0,1970	0,1759	0,1608	0,1495
30	3632	2412	1913	1635	1454	1327	1232
40	2940	1915	1508	1281	1135	1033	0957
60	0,2151	0,1371	0,1069	0,0902	0,0796	0,0722	0,0668
120	1225	-0759	0585	0489	0429	0387	0357
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Рівень значущості $\alpha = 0{,}01$							
l	k						
	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8823	0,8674	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0,5000
3	7107	6912	6743	G059	5153	4230	3333
4	5897	5702	5536	4884	4057	3251	2500
5	0,5037	0,4854	0,4697	0,4094	0,3351	0,2644	0,2000
6	4401	4229	4084	3529	2858	2229	1667
7	3911	3751	3616	3105	2494	1929	1429
8	0,3522	0,3373	0,3248	0,2779	0,2214	0,1700	0,1250
9	3207	3067	2950	2514	1992	1521	1111
10	2945	2813	2704	2297	1811	1376	1000
12	0,2535	0,2419	0,2320	0,1961	0,1535	0,1157	0,0833
15	2104	2002	1918	1612	1251	09314	0667
20	1646	1567	1501	1248	09GO	0709	0500
24	0,1406	0,1338	0,1283	0,1060	0,0810	0,0595	0,0417
30	1157	1100	1054	0867	0658	0480	0333
40	0898	0853	0816	0668	0503	0363	0250
60	0,0625	0,0594	0,0537	0,0461	0,0344	0,0245	0,0167
120	0334	0316	0302	0242	0178	0125	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Продовження таблиці додатку М

Рівень значущості $\alpha = 0,05$							
l	*k*						
	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530
4	9065	7679	6841	6287	5895	0,5598	5365
5	0,8412	0,6338	0,5981	0,5440	0,5063	4783	0,4564
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3535
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666
12	0,5410	0,3924	0,3624	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1911
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1061
40	2370	1576	1259	10S2	0968	0887	0827
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0312
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
Рівень значущості $\alpha = 0,05$							
l	*k*						
	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	6333	6167	6025	5466	4748	4031	3333
4	5175	5017	4884	4366	3720	3093	2500
5	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2013	0,2000
6	3817	3682	3568	3135	2612	2119	1667
7	3384	3259	3154	2756	2278	1833	1429
8	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	2768	2659	2568	2226	1820	1446	1111
10	2541	2439	2353	2032	1655	1308	1000
12	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	1815	1736	1671	1429	1144	0889	0667
20	1422	1357	1303	1108	0879	0675	0500
24	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	1002	0958	0921	0771	0604	0457	0333
40	0780	0745	0713	0595	0462	0347	0250
60	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0292	0279	0266	0218	0165	0120	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Додаток Н

Критичні значення N_1 **та** N_2 **для критерію серій** на рівні значущості $\alpha = 0{,}05$.

В заголовку стовпця стоїть найбільше з чисел n_1 та n_2, які дорівнюють кількостям однакових знаків у послідовності знаків. Номер рядка відповідає меншому з чисел n_1 та n_2.

	5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
2	– –	– –	– –	– –	– –	– –	– –	2 –	2 –	2 –	2 –	2 –	2 –	2 –	2 –	2 –
3	– –	2 –	2 –	2 –	2 –	2 –	2 –	2 –	2 –	2 –	3 –	3 –	3 –	3 –	3 –	3 –
4	2 9	2 9	2 –	3 –	3 –	3 –	3 –	3 –	3 –	3 –	3 –	4 –	4 –	4 –	4 –	4 –
5	2 10	3 10	3 11	3 11	3 –	3 –	4 –	4 –	4 –	4 –	4 –	4 –	4 –	5 –	5 –	5 –
6		3 11	3 12	3 12	4 13	4 13	4 13	4 13	5 –	5 –	5 –	5 –	5 –	5 –	6 –	6 –
7			3 13	4 13	4 14	5 14	5 14	5 14	5 15	5 15	6 15	6 –	6 –	6 –	6 –	6 –
8				4 14	5 14	5 15	5 15	6 16	6 16	6 16	6 16	6 17	7 17	7 17	7 17	7 17
9					5 15	5 16	6 16	6 16	6 17	7 17	7 18	7 18	7 18	8 18	8 18	8 18
10						6 16	6 17	7 17	7 18	7 18	7 18	8 19	8 19	8 19	8 20	9 20
11							7 17	7 18	7 19	8 19	8 19	8 20	9 20	9 20	9 21	9 21
12								7 19	8 19	8 20	8 20	9 21	9 21	9 21	10 22	10 22
13									8 20	9 20	9 21	9 21	10 22	10 22	10 23	10 23
14										9 21	9 22	10 22	10 23	10 23	11 23	11 24
15											10 22	10 23	11 23	11 24	11 24	12 25
16												11 23	11 24	11 25	12 25	12 25
17													11 25	12 25	12 26	13 26
18														12 26	13 26	13 27
19															13 27	13 27
20																14 28

Додаток П

Рівномірно розподілені випадкові числа

1009732533	7652013586	3467354876	8095909117
3754204805	6489474296	2480524037	2063610402
0842268953	1964509303	2320902560	1595334764
9901902529	0937670715	3831131165	8867674397
1280799970	8015736147	6403236653	9895116877
6606574717	3407276850	3669736170	6581339885
3106010805	4557182406	3530342614	8679907439
8526977602	0205165692	6866574818	7305385247
6357332135	0532547048	9055357548	2846828709
7379645753	0352964778	3580834282	6093520344
9852017767	1490568607	2210940558	6097093433
1180505431	3980827732	5072568248	2940524201
8345299634	0628898083	1374670078	1847540610
8868540200	8650758401	3676667951	9036476493
9959467348	8751764969	9182608928	9378561368
6548117674	1746850950	5804776974	7303957186
8012435635	1772708015	4531822374	2111578253
7435099817	7740277214	4323600210	4552164237
6991626803	6625229148	3693687203	7662113990
0989320505	1422568514	4642756788	9629778822
9149914523	6847927686	4516283554	9475089923
8033694598	2694036858	7029734135	5314033340
4410481949	8515747954	3297926575	5760040881
1255073742	1110002040	1286074697	9664489439
6360649329	1650534484	4021952563	4365177082
6119690446	2645747774	5192433729	6539459593
1547445266	9527079953	5936783848	8239610118
9455728573	6789754387	5462244431	9119042592
4248116213	9734408721	1686848767	0307112059
2352378317	7320889837	6893591416	2625229663
0449352494	7524633824	4586251025	6196279335
0054997654	6405188159	9611963896	5469282391
3596315307	2689809354	3335135462	7797450024
5980808391	4542726842	8360949700	1302124892
4605885236	0139092286	7728144077	9391083647
3217900597	8737925241	0556707007	8674317157
6923461406	2011745204	1595660000	1874392423
1956541430	0175875379	4041921585	6667436806
4515514938	1947607246	4366794543	5904790033
9486431994	3616810851	3488881553	0154035456
9808624826	4524028404	4499908896	3909473407
3318516232	4194150949	8943548581	8869541994
8095100406	9638270774	2015123387	2501625298
7975249140	7196128296	6986102591	7485220539
1863332537	9814506571	3101024674	0545561427
7402943902	7755732270	9779017119	5252758021
5417845811	8099337143	0533512969	5612719255
1166449883	5207984827	5938171539	0997333440
4832477928	3124964710	0229536870	3230757546
6907494138	8763791976	3558404401	1051821615