Ковбаса В. П.

Коваль Я. В

Національний університет біоресурсів і природокористування

УДК 53.082.4

ВИЗНАЧЕННЯ МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛІВ ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ ЗРАЗКА

В статье приведена методика определения упругих свойств материала стержня, на основании обработки результатов измерения последовательных амплитуд колебаний данного стержня.

In article the technique of definition of elastic properties of a material of a core, as a result of processing of results of measurements of consecutive amplitudes of fluctuations is described.

У багатьох процесах, що пов'язані з взаємодією робочих органів машин з матеріалами та середовищами виникає необхідність визначення механічних властивостей останніх. Ці механічні властивості мають суттєвий вплив на умови руйнування матеріалів та середовищ. Зокрема при руйнуванні коренів дерев при корчуванні пнів важливе значення мають механічні властивості матеріалу останнього та амплітудо-частотні характеристики його вільних коливань.

Мета: Визначення зв'язків геометричних параметрів(момент інерції, площа перерізу, довжина кореня) з пружними та в'язкими властивостями (*E* – модуль пружності, μ - коефіцієнт в'язкості) та масою вимірювального датчика (згуртована маса *m*)

Кількість ступенів свободи *n=1*

Форми рівнянь руху можуть мати наступний вигляд.

Найбільш загальна форма – рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial g_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial \dot{g}_k}=Q_k, \qquad (1)$$

де *t* – час, g_k- узагальнені (*k = 1, 2,…n*) координати, *n* – число ступенів свободи, *T* – кінетична енергія системи, Q_k - узагальнені сили.

Кінетична енергія являється квадратичною функцією узагальнених швидкостей $\dot{g}_k$;

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,R=1}^{n}a_{ik}\dot{g}_i\dot{g}_k\,, \quad (i,k=1,2,\dots n),$$

де $a_{ik}=a_{ki}$ - інерційний коефіцієнт функції (маса, момент інерції та ін.)

У випадку вільних коливань (без збурюючої сили) Q_k можна визначити через потенціальну енергію *П* системи:

$$Q_k=-\frac{\partial \Pi}{\partial g_k}-\mu\dot{g}_k\,,$$

де *μ* – коефіцієнт в'язкого опору, при цьому потенціальна енергія системи (квадратична форма) [1]

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}c_{ik}g_i g_k\,, \quad (i,k=1,2,\dots,n),$$

де C_{ik} - пружні коефіцієнти.

Тоді диференціальне рівняння приймає вигляд:

$$\begin{aligned}
&a_{11}\dot{g}_1+a_{12}\ddot{g}_2+\dots+a_{1n}\ddot{g}_n=\\
&=-c_{11}g_1-c_{12}g_2-\dots-\mu_{1n}\dot{g}_n\,; \qquad (2)\\
&a_{21}\ddot{g}_1+a_{22}\ddot{g}_2+\dots+a_{2n}\ddot{g}_n=\\
&=-c_{21}g_1-c_{22}g_2-\dots-\\
&-c_{2n}g_n-\mu_{21}\dot{g}_1-\mu_{22}\dot{g}_2-\dots-\mu_{2n}\dot{g}_n\,;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{n1}\ddot{g}_1+a_{n2}\ddot{g}_2+\dots+a_{nn}\ddot{g}_n=\\
&=-c_{n1}g_1-c_{n2}g_2-\dots-\\
&-c_{nn}g_n-\mu_{n1}\dot{g}_1-\mu_{n2}\dot{g}_2-\dots-\mu_{nn}\dot{g}_n\,;
\end{aligned}$$

Простим лінійним перетворенням координат одну з квадратичних форм (*К*), (*П*) можна привести до суми квадратів.

Якщо до суми квадратів приведена кінетична енергія:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k\dot{g}_k^2\ ;$$

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\left(c_{ik}g_ig_k\right),$$

то система (2) переходить в форму диференціальних рівнянь, дозволених відносних прискорень:

$$\begin{aligned}&a_1\ddot{g}_1=-c_{11}g_1-c_{12}g_2-\ldots-\\&-c_{1n}g_n-\mu_{11}\dot{g}_1-\mu_{12}\dot{g}_2-\ldots-\mu_{1n}\dot{g}_n\ ;\\&a_2\ddot{g}_2=c_{21}g_1-c_{22}g_2-\ldots-\\&-c_{2n}g_n-\mu_{21}\dot{g}_1-\mu_{22}\dot{g}_2-\ldots-\mu_{2n}\dot{g}_n\ ;\\&a_n\ddot{g}_n=c_ng_1-c_{n2}g_n-\ldots-\\&-c_{nn}g_n-\mu_{n1}\dot{g}_1-\mu_{n2}\dot{g}_2-\ldots-\mu_{nn}\dot{g}_n\ ;\end{aligned}\qquad(3)$$

Це є пряма форма диференціальних рівнянь коливань.

Якщо до суми квадратів приведена потенціальна енергія:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\dot{g}_i\dot{g}_k\ ;$$

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}c_kg_k^2\ ,$$

То система (2) переходить в систему рівнянь вирішувану відносно узагальнених координат:

$$\begin{aligned}&c_1g_1=a_{11}\ddot{g}_1-a_{12}\ddot{g}_2-\ldots-\\&-a_{1n}\ddot{g}_n-\mu_{11}\dot{g}_1-\mu_{12}\dot{g}_2-\ldots-\mu_{m}\dot{g}_n\ ;\\&c_2g_2=a_{21}\ddot{g}_1-a_{22}\ddot{g}_2-\ldots-\\&a_{2n}\ddot{g}_n-\mu_{21}\dot{g}_1-\mu_{22}\dot{g}_2-\ldots-\mu_{2n}\dot{g}_n\ ;\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&c_ng_n=a_{n1}\ddot{g}_1-a_{n2}\ddot{g}_2-\ldots-\\&-a_{nn}\ddot{g}_n-\mu_{n1}\dot{g}_1-\mu_{n2}\dot{g}_2-\ldots-\mu_{nn}\dot{g}_n\end{aligned}\qquad(4)$$

Форма рівнянь (4) являє собою обернену форму рівнянь коливань за наявності пружних та в'язких сил.

Кінетична енергія балки

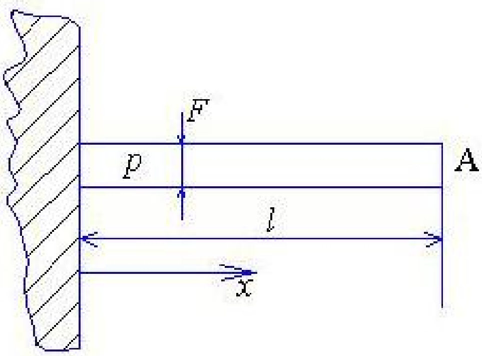


Рис. 1

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l\rho F\dot{y}(x)^2\,dx\qquad(5)$$

Для визначення приведеної маси

$$T=\int_0^l\frac{1}{2}\rho F\dot{y}^2dx=\frac{Mv^2}{2}$$

Рівняння вигнутої лінії

$$y=\frac{Pl^3}{24EI}\left(3-4\frac{x-l}{l}+\frac{(x-l)^4}{l^4}\right);$$

де *I* –момент інерції перерізу, *l* – довжина балки, *р* – густина матеріалу *F* – площа поперечного перерізу $P=F\rho\,\mathrm{lg}=\int_0^l F\rho g dx$,

g=9,81м/с²

Рівняння вигнутої лінії

$$y=\frac{F\rho l^4g}{24EI}\left(3-4\frac{l-x}{l}+\frac{(l-x)^4}{l^4}\right)$$

де *Е* – модуль пружності лінійних деформацій

Апріорі швидкість деформації буде виражена аналогічно деформації *у*

$$\dot{y}=v\frac{F\rho gl^3}{24EI}\left(3-4\frac{l-x}{l}+\frac{(l-x)^4}{l^4}\right)$$

тоді кінетична енергія балки виразиться наступним чином

$$T=\int_0^l F\rho\frac{F\rho gl^3}{24EI}\cdot$$

$$\cdot\left(v\rho F\left(3-4\left(\frac{l-x}{l}\right)+\frac{(l-x)^4}{l}\right)\right)^2dx$$

За умови незмінного перерізу *F* стержня і незмінної густини *р*, останній вираз набуває вигляду:

$$T = \frac{F^2 \rho^2 l^3 g}{24EI} v^2 \cdot$$

$$\cdot \int_0^l \left(3 - 4\frac{l-x}{l} + \frac{\left(l-x\right)^4}{l^4} \right) dx \qquad (6)$$

Приведена до точки *A* маса визначається з рівняння рівності кінетичних енергій системи в точці *A*:

$$T = \frac{Mv^2}{2},$$

де *M* – приведена маса.

Приведена маса *M* має значення:

$$M = \frac{26F^2 g l^4 \rho^2}{135EI}$$

або з врахуванням того, що $F = \frac{\pi d^2}{4}$, $I = \frac{\pi d^4}{32}$:

$$M = \frac{52 g l^4 \pi \rho^2}{135E} \qquad (7)$$

Враховуючи те, що коливання т. *A* можуть розглядатися лише для випадку вертикальних переміщень в напрямку осі *Oy,* можна розглядати коливання з одним ступенем свободи *n=1*. При цьому узагальненою координатою буде вертикальне переміщення *y*. В цьому випадку рівняння руху (2) набуде вигляду:

$$\left(m+M\right)\ddot{y} + k\dot{y} + cy = 0 \qquad (8)$$

де $M = \frac{52}{135} \cdot \frac{g l^4 \pi \rho^2}{E}$ - приведена до точки *A* маса стержня;

$k = \mu \frac{\pi d^2}{4l}$ - приведений в т. *A* коефіцієнт в'язкості стержня, де *μ* – коефіцієнт в'язкості [*Па·с*]; $c = \frac{EI}{l^3} = E\frac{\pi d^4}{32 l^3}$ - приведена жорсткість, де *E* – модуль пружності лінійних деформацій.

Розв'язок рівняння (8) має вигляд:

$$y = e^{\frac{1-k-\sqrt{k^2-4c\left(M+m\right)}}{2\left(m+M\right)}t} \cdot \qquad (9)$$

$$\cdot C1 + e^{\frac{1-k+\sqrt{k^2-4c\left(M+m\right)}}{2\left(m+M\right)}t} \cdot C2$$

Сталі інтегрування *C1* та *C2* можуть бути визначені з умов:

$$y\big|_{t=0} = 0; \quad \ddot{y}\big|_{t=0} = g$$

З системи рівнянь (початкових умов) визначається *C1* та *C2*:

$$C1 = \frac{g\left(M+m\right)^2}{k\sqrt{k^2 - 4c\left(M+m\right)}};$$

$$C2 = -\frac{g\left(M+m\right)^2}{k\sqrt{k^2 - 4c\left(M+m\right)}}.$$

З врахуванням значень *C1* та *C2* вираз (9) прийме вигляд:

$$y = \frac{g\left(M+m\right)^2}{k\sqrt{k^2 - 4c\left(M+m\right)}} \cdot$$

$$\cdot (\exp\left(\frac{-k - \sqrt{k^2 - 4c\left(M+m\right)}}{2\left(M+m\right)} \right) - \qquad (10)$$

$$-\exp\left(\frac{-k + \sqrt{k^2 - 4c\left(M+m\right)}}{2\left(M+m\right)} \right))$$

Після перетворення (10) в тригонометричні функції вираз набуває вигляду:

$$y = 2a(-\cosh\left(\frac{kt}{2\left(M+m\right)} \right) +$$

$$+\sinh\left(\frac{kt}{2\left(M+m\right)} \right)) \cdot \qquad (11)$$

$$\cdot \sinh\left(\frac{\sqrt{k^2 - 4c\left(M+m\right)t}}{2\left(M+m\right)} \right)$$

де $2a = 2\frac{g\left(M+m\right)^2}{k\sqrt{k^2 - 4c\left(M+m\right)}}$ - амплітуда коливань т. *A* стержня. Після перетворення суми тригонометричних функцій, що знаходиться в дужках, в експоненціальний вид, вираз (11) набуває вигляду:

$$y = 2a\left(-\exp\left(-\frac{kt}{2\left(M+m\right)} \right) \right) \cdot$$

$$y = 2a\left(-\exp\left(-\frac{kt}{2(M+m)}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\sinh\left(\frac{\sqrt{k^2-4c(M+m)}}{2(M+m)}t\right)$$

Аналіз структури рівняння 9 показує, що вираз:

$$2a = 2\frac{g\left(\frac{52}{135}\cdot\frac{gl^4\pi\rho^2}{E}+m\right)}{\mu\frac{\pi d^4}{4l}\sqrt{\mu\frac{\pi d^2}{4l}-}}\times$$

$$\times\overline{-4\frac{E\pi d^4}{32l^3}(\frac{52}{135}\cdot\frac{gl^4\pi\rho^2}{E}+m)}$$

$$2a = 2\frac{g\left(\frac{52}{135}\cdot\frac{gl^4\pi\rho^2}{E}+m\right)}{\mu\frac{\pi d^4}{4l}\sqrt{\mu\frac{\pi d^2}{4l}-}} \qquad (13)$$

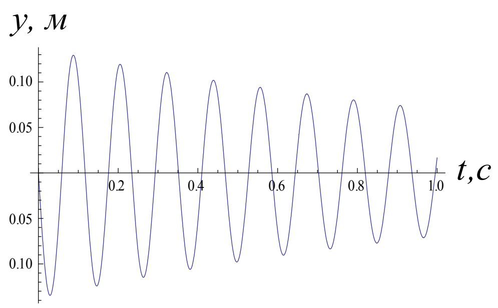
є амплітудою коливань т. *А* стержня;

$$\exp\left(-t\frac{\frac{\mu\pi d^2}{4l}}{2\left(\frac{52}{135}\cdot\frac{gl^4\pi\rho^2}{E}+m\right)}\right) - \qquad (14)$$

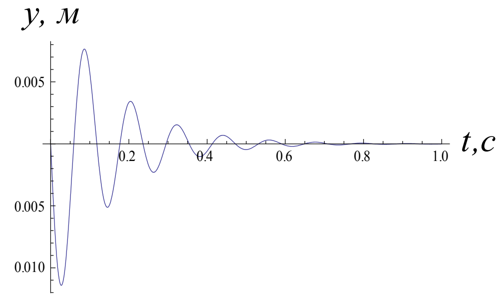
являється декриментом затухання коливань.

Колова частота коливань т. *А* стержня.

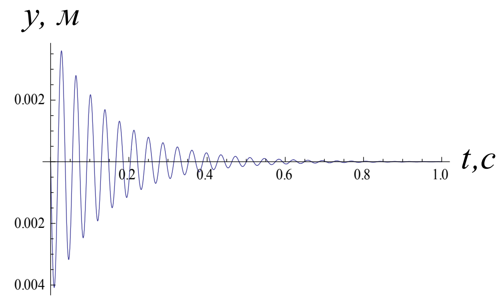
Графічно залежність 12 наведена на рис.2.



а



б



в

Рис. 2

Коливання стержня діаметром *d=0,02 м*, довжиною *0,5 м*, зосередженою масою *м=0,5 кг*, густина тіла стержня *р=800 кг/м³* :

а-Е=1·10¹⁰ Па, μ=1·10³ Па·с;

б-Е=1·10¹⁰ Па, μ=1·10⁴ Па·с;

в-Е=1·10¹¹ Па, μ=1·10⁴ Па·с.

Досліджуючи зареєстровані коливання т. *А* стержня, можна визначити механічні характеристики матеріалу стержня та його нижчі частоти власних коливань.

Частота власних коливань:

$$\omega = \frac{\sqrt{\left(\mu\frac{\pi d^2}{4l}\right)-4\frac{E\pi d^4}{32l^3}(\frac{52}{135}\cdot\frac{gl^4\pi\rho^2}{E}+m)^2}}{2\left(\frac{52}{135}\cdot\frac{gl^4\pi\rho^2}{E}+m\right)} \qquad (15)$$

Враховуючи те, що декримент затухання залежить від періоду коливань і від складання послідовних амплітуд, то з виразів (14) та (15) можна скласти систему рівнянь (час послідовних амплітуд *τ=2π/ω*)

$$\left.\begin{aligned} \frac{a2}{a1} &= -\exp\left(-\frac{kt}{2(m+M)}\right) \\ \tau &= \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{k^2-4c(M+m)}}{2(m+M)}} \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Розв'язуючи систему відносно *k* та *c* можна отримати наступні вирази

$$c = \frac{\left(M+m\right)\left(4\pi^2 - \ln\frac{a2}{a1}\right)^2}{\tau^2}; \qquad (17)$$

$$k = \frac{2(m+mp)\ln\left(\frac{a2}{a1}\right)}{\tau}.$$

В розгорнутому вигляді вирази (17) (при підстановці значень *k* та *c*) будуть мати вигляд:

$$E = \frac{8}{45d^4\pi\tau^2}(360l^3m\pi^2 - 90l^3m\left(\ln\left(\frac{a2}{a1}\right)\right)^2 + +\sqrt{30}\sqrt{\begin{array}{l} l^6(4\pi^2-(\ln\left(\frac{a2}{a1}\right))^2)\times \\ \times(\pi^2(1080m^2+13d^4gl\tau^2\rho^2)- \\ -270m^2(\ln(\frac{a2}{a1}))^2)) \end{array}} \qquad (18)$$

$$\mu = -\frac{8l\left(135Em+52gl^4\pi\rho^2\right)\ln\left(\frac{a2}{a1}\right)}{135d^2E\pi\tau} \qquad (19)$$

Вимірювання послідовних амплітуд (відношення $\frac{a2}{a1}$) в будь якому масштабі і реальному періоді коливань *τ*, при виміряних величинах геометричних характеристик стержня, дозволяє по співвідношенням 18 та 19 визначити пружні *E* та дисипативні*µ* властивості матеріалу стержня.

Література

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л. Меркин Д.Р. Курс теоретической механики т II.М.: «Наука», 1985 – 496с.

2. Биргир И.А. Поновко Я.Г. Прочность устойчивость. Колебания т. 3, М.: Машиностроение 19868 – 568 с.

3. Тимошенко С.П. Курс теории упру гости. Киев. «Наукова думка2 1972 – 508 с.