Ловейкін В. С.

Човнюк Ю. В.

Ярошенко В. В.

Національний університет біоресурсів і природокористування України

УДК 62:534.031

АНАЛІТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ ДИНАМІЧНО НЕЛІНІЙНИХ ВІБРОСИСТЕМ ЗА НАЯВНОСТІ СУХОГО ТЕРТЯ

Получены точные аналитические решение уравнений динамически нелинейных вибросистем при наличии сил сухого трения. Проведена динамическая оптимизация режимов движения указанных систем в периоды пуска.

Are received exact analytical the decision of the equations dynamically nonlinear vibrosystem in the presence of forces of a dry friction. Dynamic optimisation of modes of movement of the specified systems is spent to the start-up periods.

Постановка проблеми.

Під динамічною нелінійністю зазвичай розуміють таку нелінійність, котра проявляє себе тільки у процесі руху [6]. До вібросистем з динамічною нелінійністю відносяться коливні системи більшості машин вібраційної дії, які застосовуються у будівництві, у котрих сили непружного опору (демпфування) змінюються непропорційно швидкості у першій степені.

У процесі роботи вібромашини виникають різноманітні за своєю природою непружні опори: оброблюваного матеріалу; оточуючого повітря; конструкцій машини; опори, обумовлені витратами енергії у з'єднаних металевих конструкцій, шарнірах, направляючих, у місцях опор і закріплення пружин тощо. Всі ці опори по-різному змінюються у залежності від переміщень елементів коливної системи вібромашини. Кожний з них впливає на форму й амплітуду коливань, а на витрати енергії.

Результуючу всіх непружних опорів вібросистеми можна подати як багатокомпонентний опір, який складається із суми одночасно діючих однокомпонентних опорів. У якості однокомпонентних опорів розглядаються: опір, що залежить від швидкості; гістерезисний опір, що є функцією переміщення і залежить від амплітуди; опір, що залежить від фази збурюючої сили; опір, що залежить тільки від переміщення, постійний за величиною опір сухого тертя. Напрямок результуючого багатокомпонентного опору, так само як і напрямок всіх його окремих компонентів, завжди зворотній до швидкості.

Вимушені коливання таких динамічно нелінійних вібросистем описуються рівнянням:

$$M\ddot{x} + F(x,\dot{x},\omega t)\cdot\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} + kx = Q\cos(\omega t + \alpha);$$
$$\dot{x}(0) = 0; \qquad (1)$$
$$x(\frac{\pi}{\omega}) = -x_0; \quad \dot{x}(\frac{\pi}{\omega}) = 0;$$

де M – загальна коливна маса вібросистеми; k - сумарна жорсткість пружини; Q – амплітуда збурюючої сили; ω - частота вимушених коливань;

F(x , $\dot{x}$, ωt) - додатня функція, що визначає величину сили непружного опору;

$\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$ - множник який вказує, що напрямок сили опору змінюється зі зміною напрямку швидкості ($\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \equiv sign\dot{x}$); X_0 – амплітуда коливань; α - фазовий кут збурюючої сили у момент максимального переміщення системи. Амплітуда коливань X_0 і фазовий кут α - невідомі.

Точного аналітичного розв'язку рівняння (1) немає. Опубліковані в літературі наближені методи можуть застосовані тільки до систем з малим опором, тобто з малою не лінійністю. Вказані вище наближені методи засновані на припущенні, що коливання гармонічні.

Проте, у багатьох вібраційних машинах, особливо у віброущільнювачах, демпфуючі сили змінюються непропорційно швидкості, відповідно, за формою є нелінійними. За величиною ці сили мають порядок збурюючої сили і можуть суттєво перевищувати величину сил пружності пружини, тобто є відносно

великими. Такі вібраційні машини неможливо розглядати як системи з малим опором.

Огляд основних публікацій за темою дослідження.

У роботах [5,7-9] розглянуті методи розв'язку рівнянь, що описують вимушені коливання вібраторів за наявності сухого тертя. Проте отримані розв'язки є неповними , оскільки лише наближено описують систему. (Логічною була б побудова розв'язків, що враховують силу сухого тертя, за допомогою узагальнених функцій, бо sign x – є такою саме функцією). У роботі [5] розглянуті вимушені коливання вібратора з синусоїдальною збурюючою силою за наявності сухого тертя. Вперше це питання досліджував Ден-Гартог [1,2], котрий показав, що у залежності від величини сили тертя коливання можуть відбуватися з паузами і без пауз. Він отримав точний аналітичний розв'язок для вібросистем, у котрих відношення частоти ω збурюючої сили до частоти ρ власних коливань вібросистеми $\frac{\omega}{\rho} \geq 0{,}5$. Для вібросистем, у котрих це відношення менше 0,5, Ден-Гартог отримав наближений розв'язок, обмежуючи його деяким діапазоном частот. В області малих значень $\frac{\omega}{\rho} < 0{,}3$, як він стверджує, рух має за півперіод більше однієї паузи і для цієї області не може бути отриманий аналітичний розв'язок.

У подальшому проблемою вимушених коливань за наявності сухого тертя займались інші вчені [3,9], котрі досліджували головним чином системи з несинусоїдальними збурюючими силами.

Мета роботи полягає у розв'язку задачі вимушених коливань вібратора за наявністю сил сухого тертя у постановці Ден-Гартога, з тією різницею, що розв'язок задачі буде даний для всіх діапазонів частот і значень сили опору. Крім того, буде: 1) отриманий загальний розв'язок рівнянь руху вібросистеми для коливань з паузами і без пауз, у просторі узагальнених функцій [10-12]; 2) показано, що в усіх випадках коливання може мати тільки одну паузу за половину періоду. Слід зазначити, що на відміну від робіт [5,7-9], аналітичний розв'язок, отриманий у даній роботі, може бути легко проінтегрований у просторі перетворень Лапласа, Фур'є, Бесселя і для інших видів збурюючої сили, урахування інших різновидів сил тертя (наприклад, в'язкості), тобто має високий ступінь універсальності. Розглянуті також оптимальні закони руху системи методами [13].

Виклад основного змісту дослідження.

Рівняння руху нелінійної вібросистеми. Модель коливної системи з сухим тертям, наведена у [5], зводиться до наступної. Маса M, закріплена пружинами до нерухомої стінки, має можливість ковзати вздовж горизонтальної сухої поверхні. (Подібні моделі застосовуються, зокрема, при розгляді/моделюванні процесів поверхневого вібраційного ущільнення сумішей у виробництві будівельних матеріалів, при обробці сільськогосподарської продукції тощо). Коефіцієнт тертя ковзання μ. На масу M діє гармонічна вимушена сила $Q \cdot \cos(\omega t + \alpha)$, відновлюючи сила пружини kx та постійна за величиною, але завжди протилежна швидкості руху за напрямом сила тертя $F = Mg \cdot \mu$ (g – прискорення сили тяжіння).

Розглянемо тільки усталені вимушені коливання системи. Ці коливання здійснюються з частотою ω, яка дорівнює частоті вимушеної сили, й з розмахом $O_1 – O_2$, рівним подвійній амплітуді коливань $2X_0$. У кратних точках тертя O_1 та O_2, одночасно зі зміною швидкості, сила тертя F стрибкоподібно змінює свій знак на протилежний (рис.1).

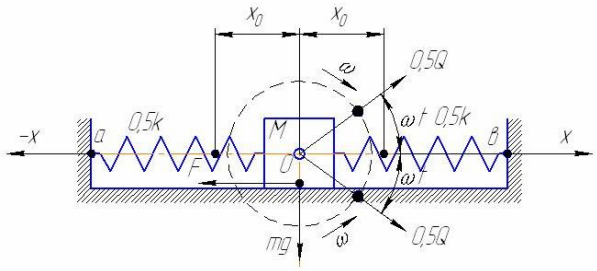

Рис. 1. Схема вібратора з сухим тертям

Умова руху системи у обидві сторони абсолютно однакові. Тому досить розглянути лише одну половину циклу коливань.

Припустимо, що маса M знаходиться у одному з крайніх положень. За початком відліку часу (t_0=0) приймаємо момент початку руху маси M з крайнього положення і припускають, що рух з одного кінцевого положення O_1 у інше кінцеве положення O_2 відбувається за час t_1 (половина циклу/періоду руху системи T). Назвемо цей час тривалістю руху. Зрозуміло, що тривалість руху не може бути більше половини періоду коливань вимушеної сили $\frac{\pi}{\omega}$, тобто $t_1 \leq \frac{\pi}{\omega}$.

Тепер диференціальне рівняння вимушених коливань систем з урахуванням результатів робіт [10-12] запишемо у вигляді:

$$M\ddot{x} + F\cdot[1+2\cdot\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\cdot\delta_0(t-j\cdot t_1)] + kx = $$
$$= Q\cos(\omega t+\alpha); \qquad (2)$$

$X(0)=X_0$; $\dot{X}(0)=0$; $X(t_1)=-X_0$: $\dot{X}(t_1)=0$,

де α - фазовий кут вимушеної сили при t=0; $\delta_0(z)$ – функція Хевісайда аргументу z, X_0 – амплітуда коливань.

Перш ніж приступити до дослідження цього рівняння, розглянемо деякі особливості системи. У крайніх точках швидкість маси M, а відповідно й кінетична енергія системи, дорівнює нулю. У процесі руху від прикладених до маси M сил кінетична енергія системи змінюється. Однак у даному випадку прикладені сили по-різному впливають на зміни кінетичної енергії. Так, збурююча сила $Q\cdot\cos(\omega t+\alpha)$ й сила пружності пружини kx можуть збільшувати й зменшувати кінетичну енергію системи. Це залежить від того, співпадає у даний момент напрямок цих сил з напрямком швидкості чи ні. Сила тертя за своєю природою здатна тільки зменшувати кінематичну енергію системи, тобто сповільнювати рух маси, і не здатна створювати пришвидшення.

Таким чином якщо у момент $t=t_1$ кінетична енергія системи стає рівною нулю, то у наступну мить збільшення кінетичної енергії можливе тільки за нерівності:

$$P = |Q\cdot\cos(\omega t+\alpha) - kx| > |F|, \qquad (3)$$

за якої сили P, здатні збільшувати кінетичну енергію, за абсолютною величиною більше сили тертя F.

При оберненій нерівності:

$$P = |Q\cdot\cos(\omega t+\alpha) - kx| < |F|, \qquad (4)$$

система продовжує залишатися у стані спокою, поки після деякого часу вимушена сила не досягне величини, при якій:

$$P = |Q\cdot\cos(\omega t+\alpha) - kx| = |F|.$$

Подальша зміна вимушеної сили створить умову (3), яка порушує стан спокою. Але оскільки вимушена сила змінюється неперервне, після паузи, рух почнеться з моменту (t), який відповідає рівності (5), тобто з нульового прискорення.

Таким чином, якщо у крайніх точках має місце нерівність (3), кінетична енергія, приймаючи нульове значення, потім миттєво збільшується, що відповідає випадку коливань без пауз, коли тривалість руху дорівнює півперіоду коливань вимушеної сили ($t_1=\pi/\omega$, $T=2t_1=2\pi/\omega$).

Якщо у момент приходу системи у кінцеве положення має місце нерівність (4), кінетична енергія системи, приймаючи нульове значення, залишається такою до моменту часу $t=\pi/\omega$, коли вимушена сила досягне величини зворотної/оберненої нерівності (3). Протягом цього часу виникає пауза у русі.

Оскільки у момент пауз:

$$t_1 \le t \le \frac{\pi}{\omega};\ x(t) = -x_0; \dot{x}(t) = 0; \ddot{x}(t) = 0, \qquad (6)$$

рух з крайніх/кінцевих точок починається з нульового прискорення. Для коливань з паузами розв'язок повинен задовольняти таким додатковим умовам:

$$x(\frac{\pi}{\omega}) = -x_0;\ \dot{x}(\frac{\pi}{\omega}) = 0;\ \ddot{x}(\frac{\pi}{\omega}) = 0;$$
$$x(0) = x_0;\ \dot{x}(0) = 0;\ \ddot{x}(0) = 0; \qquad (7)$$

Мета розв'язку. Із урахування вказаних вище властивостей сили тертя цю силу розглядаємо як зовнішню вимушену силу з від'ємною дією. Відносячи $F\cdot\sin(\ddot{x})$ до зовнішніх сил і позначаючи для скорочення запису:

$$Fsign(x) = F^* = F\cdot[1+2\cdot\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\cdot\delta_0(t-jt_1)], \qquad (8)$$

рівняння (2) запишемо у вигляді:

$$M\ddot{x} + kx = Q\cos(\varpi t+\alpha) - F^*. \qquad (9)$$

Вираз (9) можна розглядати як рівняння вимушених коливань лінійної системи без опору, під дією зовнішньої сили довільної форми. Розв'язок цього рівняння методом зміни довільних сталих відомий [4].

Загальний інтеграл рівняння (9):

$$x = C_1\cdot\cos\rho t + C_2\cdot\sin\rho t + $$
$$+\frac{1}{M\rho}\cdot\int_0^t[Q\cdot\cos(\omega\varepsilon+\alpha) - F^*]\cdot\sin[\rho(t-\varepsilon)]d\varepsilon, \qquad (10)$$

де C_1 і C_2 – постійні інтегрування; $\rho=\sqrt{\frac{k}{M}}$ - власна частота коливань пружної системи при відсутності опору; ε – змінна інтегрування.

Постійні інтегрування $C_1=x_0$ і $C_2=0$ знаходять з початкових умов. Підставляючи ці постійні у рівняння (10) й розкриваючи інтеграли, отримаємо:

$$x = x_0\cdot\cos\rho t - \frac{Q}{M\cdot(\omega^2-\rho^2)}\cdot[(\cos\omega t-\cos\rho t)\cdot\cos\alpha -$$
$$-(\sin\omega t - \frac{\omega}{\rho}\cdot\sin\rho t)\cdot\sin\alpha] -$$
$$-\frac{F^*}{M\rho^2}\cdot(1-\cos\rho t). \qquad (11)$$

Після диференціювання рівняння (11):

$$\dot{x} = -x_0 \cdot \rho \cdot \sin \rho t - \frac{Q}{M \cdot (\omega^2 - \rho^2)} \cdot [(-\omega \cdot \sin \omega t + \\ + \rho \sin \rho t) \cdot \cos \alpha - (\omega \cos \omega t - \\ - \omega \cos \rho t) \cdot \sin \alpha] - \frac{F^*}{M\rho^2} \cdot \rho \cdot \sin \rho t. \quad (12)$$

Рівняння (8) та (9) повинні відповідати умові у кінцевій точці:

$$x(t_1) = -x_0; \quad \dot{x}(t_1) = 0. \quad (13)$$

Використовуючи ці умови, з рівнянь (11) та (12) отримаємо наступну систему з двох рівнянь:

$$x_0(1 + \cos \rho t) = \frac{Q}{M \cdot (\omega^2 - \rho^2)} \cdot [(\cos \omega t_1 - \\ - \cos \rho t_1) \cdot \cos \alpha - (\sin \omega t_1 - \frac{\omega}{\rho} \cdot \sin \rho t_1) \cdot \sin \alpha] + \\ + \frac{F^*}{M\rho^2} \cdot (1 - \cos \rho t_1); \quad (14)$$

$$x_0 \cdot \sin \rho t_1 - \frac{Q}{M \cdot (\omega^2 - \rho^2)} \cdot [(\frac{\omega}{\rho} \cdot \sin \omega t_1 + \\ + \sin \rho t_1) \cdot \cos \alpha - (\cos \omega t_1 - \cos \rho t_1) \cdot \frac{\omega}{\rho} \cdot \sin \alpha] - \\ - \frac{F^*}{M\rho^2} \cdot \sin \rho t_1 \quad (15)$$

Рівняння (14) та (15) використано для визначення невідомих: амплітуди коливань x_0, фазового кута α та тривалості руху t_1. Але для цього перш за все необхідно встановити, у яких випадках будуть реалізовані коливання з паузами, а у яких – без пауз.

Припустимо, що величина сили тертя така, що коливання відбуваються з паузами ($t_1 < \frac{\pi}{\omega}$). У цьому випадку розв'язок повинен задовольняти додатковим умовам (6), (7). Підставляючи цю умову у рівняння (9), отримаємо формулу для амплітуди коливань з паузами:

$$x_0 = \frac{Q}{M\rho^2} \cdot (\cos \alpha - \frac{F^*}{Q}) \quad (16)$$

Розв'язуючи сумісно рівняння (15) та (16), виключаємо з них x_0. Для цього поділимо (15) на $\sin \rho t_1$ і віднімемо від отриманого виразу рівняння (16):

$$\frac{Q}{M \cdot (\omega^2 - \rho^2)} \times \\ \times \frac{[(\frac{\omega}{\rho} \cdot \sin \omega t_1 - \sin \rho t_1) \cdot \cos \alpha + (\cos \omega t_1 - \cos \rho t_1) \cdot \frac{\omega}{\rho} \cdot \sin \alpha]}{\sin \rho t_1} = \\ = \frac{Q}{M\rho^2} \cos \alpha, \quad (17)$$

звідси після елементарних перетворень отримаємо залежність між тривалістю руху t_1 і фазовим кутом α при коливаннях з паузами:

$$tg\alpha = -\frac{(\sin \omega t_1 - \frac{\omega}{\rho} \cdot \sin \rho t_1)}{(\cos \omega t_1 - \cos \rho t_1)}. \quad (18)$$

Тепер виключимо x_0 з рівняння (14), (15). Для цього помножимо (14) на $\sin \rho t_1$, а (15) на $(1+\cos \rho t_1)$, після чого, віднімаючи один вираз від іншого, отримаємо:

$$\frac{Q}{M(\omega^2 - \rho^2)} \cdot \{[(\cos \omega t_1 - \cos \rho t_1) \cdot \sin \rho t_1 - \\ - (\frac{\omega}{\rho} \cdot \sin \omega t_1 - \sin \rho t_1) \cdot (1 + \cos \rho t_1)] \cdot \cos \alpha + \\ + [-(\sin \omega t_1 - \frac{\omega}{\rho} \cdot \sin \rho t_1) \cdot \sin \rho t_1 - \\ - \frac{\omega}{\rho} \cdot (\cos \omega t_1 - \cos \rho t_1) \cdot (1 + \cos \rho t_1)] \cdot \sin \alpha\} + \frac{F^*}{M\rho^2} \cdot \\ \cdot [(1 - \cos \rho t_1) \cdot \sin \rho t_1 + \sin \rho t_1 \cdot (1 + \cos \rho t_1)] = 0. \quad (19)$$

Шляхом звичайних тригонометричних перетворень цей вираз приведемо до більш простого виду:

$$\frac{F^*}{Q} = \frac{1}{[1 - (\frac{\omega}{\rho})^2]} \times \\ \times \frac{\cos \frac{\omega t_1}{2} \cdot \sin \frac{\rho t_1}{2} - \frac{\omega}{\rho} \cdot \sin \frac{\omega t_1}{2} \cdot \cos \frac{\rho t_1}{2}}{\sin \frac{\rho t_1}{2}} \times \\ \times \cos(\alpha + \frac{\omega t_1}{2}). \quad (20)$$

Формули (18) та (20) використовуємо для визначення критичної сили тертя $F^*_{кр}$, за якої тривалість пауз зменшується до нуля, а тривалість руху t_1 прямує до напівперіоду коливань $\frac{\pi}{\omega}$. Такому критичному тертю $F^*_{кр}$ повинен відповідати певний критичний кут α, котрий позначимо $\alpha_{кр}$. Цей кут знайдемо з формули (18) як границю функції при $t_1 \to \frac{\pi}{\omega}$:

$$tg\alpha_{кр} = \lim_{t_1 \to \frac{\pi}{\omega}} \{-\frac{\sin \omega t_1 - \frac{\omega}{\rho} \sin \rho t_1}{\cos \omega t_1 - \cos \rho t_1}\} = \\ = -\frac{\omega}{\rho} \cdot \frac{\sin(\frac{\rho}{\omega} \cdot \pi)}{1 + \cos(\frac{\rho}{\omega} \cdot \pi)}, \quad (21)$$

або:

$$tg\alpha_{кр} = -\lambda \cdot tg(\frac{\pi}{2\lambda}), \qquad (22)$$

де $\lambda = \frac{\omega}{\rho}$ - відношення частоти вимушених коливань ω до частоти ρ власних коливань системи назвемо кратністю частот.

Аналітично з формули (20) знаходимо:

$$\frac{F^*_{кр}}{Q} = \lim_{t_1 \to \frac{\pi}{\omega}} \{ \frac{\cos\frac{\omega t_1}{2} \cdot \sin\frac{\rho t_1}{2} - \frac{\omega}{\rho} \cdot \sin\frac{\omega t_1}{2} \cdot \cos\frac{\rho t_1}{2}}{[1-(\frac{\omega}{\rho})^2] \cdot \sin\frac{\rho t_1}{2}} \times$$

$$\times \cos(\alpha + \frac{\omega t_1}{2}) \} = \frac{-\sin\alpha_{кр}}{[1-(\frac{\omega}{\rho})^2]} \times \qquad (23)$$

$$\times (-\frac{\omega}{\rho} \cdot \frac{\cos\frac{\pi\rho}{2\omega}}{\sin\frac{\pi\rho}{2\omega}}) = \frac{(\frac{\omega}{\rho})}{[1-(\frac{\omega}{\rho})^2]} \cdot \frac{tg\alpha_{кр}}{tg\frac{\pi\rho}{2\omega} \cdot \sqrt{1+tg^2\alpha_{кр}}}$$

Підставляючи у цей вираз (23) замість $tg\alpha_{кр}$ його значення з рівняння (22), отримаємо формулу для критичного тертя:

$$\frac{F^*_{кр}}{Q} = -\frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(\lambda \cdot tg\frac{\pi}{2\lambda})^2}}, \qquad (24)$$

котра показує, що величина критичного тертя залежить тільки від кратності частот λ й амплітуди вимушеної сили.

Зі зміною λ величина $(\frac{F_{кр}}{Q})$ періодично змінюється від нуля до максимуму, причому величина максимумів поступово зменшується. Ця залежність представлена графіком на рис. 2.

За величиною критичного тертя встановлюється, чи відбуваються коливання без пауз чи з паузами.

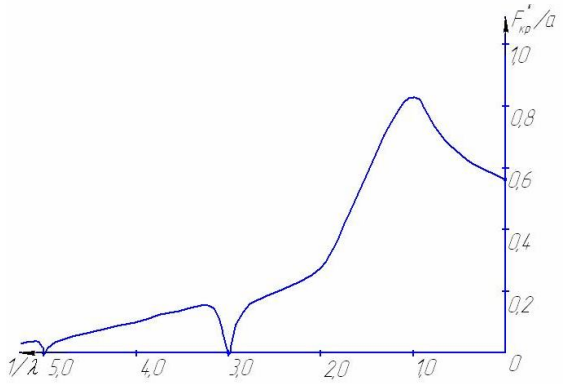

Рис. 2. Графік зміни величини критичної сили тертя від частоти вимушених коливань $(F^*_{кр}/Q = f(1/\lambda))$

Коливання без пауз відбуваються за умови $F^* < F^*_{кр}$. При цьому тривалість руху $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$, виведемо формулу для визначення фазового кута:

$$\frac{F^*}{Q} = \frac{1}{[1-(\frac{\omega}{\rho})^2]} \cdot \frac{(-\frac{\omega}{\rho} \cdot \cos\frac{\pi\rho}{2\omega}}{\sin\frac{\pi\rho}{2\omega}} \cdot \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) =$$

$$= \frac{\lambda}{(1-\lambda^2)} \cdot \frac{\sin\alpha}{tg(\frac{\pi}{2\lambda})}, \qquad (25)$$

Звідки:

$$\alpha_{F^*<F^*_{кр}} = \arcsin[\frac{F^*}{Q} \cdot \frac{(1-\lambda^2)}{\lambda} \cdot tg\frac{\pi}{2\lambda}]. \qquad (26)$$

При цих значеннях t_1 і α з рівняння (14) отримаємо наступний вираз для амплітуди коливань:

$$X_{\substack{\rho \\ F^*<F^*_{кр}}} = \frac{Q}{M\omega^2} \cdot \frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)} \times$$

$$\times \sqrt{1-(\frac{F}{Q} \cdot \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} \cdot tg\frac{\pi}{2\lambda})^2} = A \cdot \cos\alpha, \qquad (27)$$

де $A = \frac{Q}{M\omega^2} \cdot \cos\alpha$ - представляє собою амплітуду коливань даної системи при відсутності опору $(F \equiv 0)$.

Коливання з паузами відбуваються при $F^* > F^*_{кр}$. У цьому випадку тривалість руху $t_1 < \frac{\pi}{\omega}$. Величина t_1 знаходиться з рівнянь (18) та (20). Розв'язавши ці рівняння відносно α й прирівнюючи праві частини отриманих виразів, отримаємо наступні вирази для визначення тривалості руху t_1 чи її безрозмірної величини $T_1 = \widetilde{T}/2 = \omega t_1$.

$$\frac{T_1}{2} - \arccos[(\frac{F^*}{Q}) \times$$

$$\times \frac{(1-\lambda^2) \cdot \sin(\frac{T_1}{2\lambda})}{\cos(\frac{T_1}{2}) \cdot \sin(\frac{T_1}{2\lambda}) - \lambda \cdot \sin(\frac{T_1}{2}) \cdot \cos(\frac{T_1}{2\lambda})}] - \qquad (28)$$

$$- arctg(\frac{\sin(T_1) - \lambda \cdot \sin(\frac{T_1}{\lambda})}{\cos(T_1) - \cos(\frac{T_1}{\lambda})}) = 0,$$

де $T_1 = \widetilde{T}_1/2 = \omega t_1 < \pi$.

Отриманий вираз (28) дає залежність $T_1 = f(F^*/Q)$ при λ =const. Однак, у зв'язку з

трансцендентністю цього виразу тривалість руху T_1 не може бути представлена явною функцією, тому значення T_1 для цього конкретного випадку слід визначати чисельним методом.

Обчислюючи величину T_1, фазовий кут і амплітуду знаходять за формулами (16), (18):

$$\underset{F^*>F_{кр}}{\alpha} = -arctg(\frac{\sin T_1 - \lambda \cdot \sin\frac{T_1}{\lambda}}{\cos T_1 - \cos\frac{T_1}{\lambda}}); \quad (29)$$

$$\underset{F^*>F_{кр}}{X_0} = A \cdot (1-\lambda^2) \cdot (\cos\alpha - \frac{F^*}{Q}). \quad (30)$$

Для випадку, коли сила тертя дорівнює критичному тертю - $F^* = F_{кр}, T_1 \to \pi, \alpha = \alpha_{кр}$ - амплітуда коливань приймає значення:

$$\underset{F^*=F_{кр}}{X_0} = A \cdot \frac{(1-\lambda^2)}{\lambda^2} \cdot (\frac{F_{кр}}{Q}). \quad (31)$$

Таким чином, отриманий роз'вязок (повний) задачі про вимушені коливання з сухим тертям. Знайдені залежності для визначення амплітуди коливань X_0, фазового кута α й тривалості руху T_1 дійсні для усіх діапазонів частот. За виключенням виразу (28), ці залежності досить нескладні для практичного застосування. Відносно рівняння (28) для визначення тривалості руху T_1 зробимо дане зауваження.

При $\lambda > \frac{1}{3}$ величина T_1 у рівнянні (28) є однозначною функцією F^*/Q. Для таких значень λ за заданою F^*/Q рівняння (28) має тільки один дійсний корінь T_1. При $\lambda > \frac{1}{3}$ рівняння (28) може мати кілька коренів, тобто для одного й того ж значення F^*/Q може існувати кілька різних значень T_1, які задовольняють рівнянню (28). Зі зменшенням λ число можливих коренів збільшується. Однак з усіх можливих значень T_{1i}, які задовольняють (28), існує тільки одне значення T_1, за котрого будуть мати місце усталені вимушені коливання. Всі інші значення T_1, хоча і є коренями рівняння (28), не відповідають режиму усталених коливань. Для таких коренів на ділянці від 0 до T_1 виникає нерівність (3), за якої змінюється знак F^* й тим самим порушується умова неперервності руху.

Динамічний коефіцієнт (коефіцієнт підсилення) коливань системи для різних режимів її руху.

Відношення амплітуди коливань X_0 до переміщення системи від дії статичної сили Q прийнято називати динамічним коефіцієнтом чи коефіцієнтом підсилення:

$$\chi = \frac{X_0}{(Q/k)} = \frac{X_0}{A \cdot (1-\lambda^2)}. \quad (32)$$

Згідно формул (27), (30), (31) динамічні коефіцієнти для коливної системи з сухим тертям будуть:

$$\chi_{F^*<F_{кр}} = \frac{\cos\alpha}{1-\lambda^2} = \frac{\sqrt{1-(\frac{F^*}{Q} \cdot \frac{1-\lambda^2}{\lambda} \cdot tg(\frac{\pi}{2\lambda}))^2}}{1-\lambda^2}; \quad (33)$$

$$\chi_{F^*=F_{кр}} = \frac{1}{\lambda} \cdot (\frac{F_{кр}}{Q}); \quad (34)$$

$$\chi_{F^*>F_{кр}} = \cos\alpha - \frac{F^*}{Q}. \quad (35)$$

Рівняння у безрозмірних величинах.

При дослідженні коливних систем всі величини доцільно подати у безрозмірному вигляді. Поділивши праву й ліву частини рівняння (1) або (2) на Q й зробивши підстановку: $\tau = \omega t; x = A \cdot z$, отримаємо диференціальне рівняння у безрозмірних величинах:

$$\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\ddot{z} + \frac{1}{1-\lambda^2} \cdot z + (\frac{F^*}{Q}) = \cos(\tau + \alpha). \quad (36)$$

Всі формули й залежності, отримані для рівняння (1) чи (2), залишаються справедливими й для безрозмірного рівняння (36). У останньому випадку тільки слід постійні параметри прийняти рівними:

$$Q = 1; \omega = 1; M = \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}; k = \frac{1}{1-\lambda^2}; \rho = \frac{1}{\lambda}; A = 1. \quad (37)$$

Загальний інтеграл безрозмірного рівняння (36) отримаємо з рівняння (11), підставляючи у останнє замість постійних параметрів їх значення з формул (37):

$$\begin{aligned} z = {} & z_0 \cdot \cos(\frac{\tau}{\lambda}) + \cos\tau \cdot \cos\alpha - \\ & - \cos(\frac{\tau}{\alpha}) \cdot \cos\alpha - \sin\tau \cdot \sin\alpha + \\ & + \lambda \cdot \sin(\frac{\tau}{\lambda}) \cdot \sin\alpha - (\frac{F^*}{Q}) \times \\ & \times (1-\lambda^2) \cdot \cos(\frac{\tau}{\lambda}). \end{aligned} \quad (38)$$

Після елементарних перетворень це рівняння приводиться до виду:

$$\begin{aligned} Z = {} & \cos(\tau + \alpha) + [B \cdot \cos(\frac{\tau}{\lambda}) + C \cdot \sin(\frac{\tau}{\lambda})] - \\ & - (1-\lambda^2) \cdot (\frac{F^*}{Q}), \end{aligned} \quad (39)$$

де

$$B = z_0 - \cos\alpha + (1-\lambda^2)\cdot\frac{F^*}{Q}; C = \lambda\cdot\sin\alpha.$$

Тут $z_0 = \frac{X_0}{A}$ - амплітуда коливань безрозмірної системи.

Рівняння (39) показує, що коливання системи з сухим тертям можна розглядати як суперпозицію трьох складових коливань, які подані трьома членами цього рівняння:

1) $\cos(\tau+\alpha)$ - складова вимушених коливань системи без опору під впливом одиничної вимушеної сили;

2) $[B\cdot\cos(\frac{\tau}{\lambda}) + C\cdot\sin(\frac{\tau}{\lambda})]$ - складова власни х коливань пружної системи без опору;

3) $(1-\lambda^2)\cdot(\frac{F^*}{Q})$ - постійна складова, яка дорівнює зміщенню системи від дії статично прикладеної сили ($\frac{F^*}{Q}$).

Приклади вимушених коливань з сухим тертям.

Приклад 1. Дослідимо вимушені коливання з сухим тертям при $\lambda = \frac{1}{4} = 0{,}25; \frac{F^*}{Q} = 0{,}260.$

Оскільки $\frac{F^*_{кр}}{Q} = -0{,}067$, то встановлюємо, що у даному випадку коливання відбуваються з паузами.

Для T_1 знаходимо три значення:

T_{11}=153° ж T_{12}=116°; T_{13}=80°31′.

Фазові кути α, які відповідають цим значенням T_1:

$\alpha_1 = 49{,}9^\circ$; $\alpha_2 = 73^\circ$; $\alpha_3 = 61^\circ 31'$.

Для всіх трьох значень T_{1i} й α_i у даному конкретному випадку F^*<0, а

z_{01}=0,847; z_{02}=0,509; z_{03}=0,695.

Підставляючи обчислені значення z_{0i} й α_i, а також значення ($\frac{F^*}{Q}$) й λ у рівняння (39), отримаємо три розв'язки задачі. Однак, будуючи графік руху системи, встановлюється, що усталені вимушені коливання можливі тільки при T_{13}=80°31′; $\alpha_3 = 61^\circ 31'$; z_{03}=0,695.

Рівняння руху системи при цих значеннях буде:

$$z = \cos(\tau + 61^\circ 21') - 0{,}221\cdot\cos(4\tau + 82^\circ 13') + 0{,}244;$$
$$0 \le \tau \le T_{13} = 80^\circ 30'.$$

Приклад 2. Задане $\lambda = 0{,}1; \frac{F^*}{Q} = 0{,}0936.$

Розв'язуючи цю задачу аналогічним чином, знайдено:

T_1=138°; $\alpha_3 = 31^\circ 16'$; z_0=0,9389.

Рівняння руху цієї системи:

$$z = \cos(\tau + 31^\circ 16') - 0{,}0526\cdot\cos(10\tau + 80^\circ 39') + 0{,}0927.$$

Характер такого руху наступний: він має на окремих ділянках різні сповільнення, котрі можна легко прийняти за паузи, хоча вони і не є справжніми паузами.

Оптимізація режимів руху вібросистеми у період розгону (за відсутності вимушеної сили).

Використаємо підхід автора [13] для оптимізації режимів руху вібросистеми у періоди розгону з кінцевого положення при відсутності вимушеної сили, $Q \equiv 0$. Виходячи з рівняння (1) сожна легко знайти:

$$X = -\frac{F}{k}\cdot\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} - \frac{M\dot{x}}{k} \qquad (40)$$

Нехай у період розгону t є$[0,t_p]$, де t_p – тривалість розгону вібросистеми, $\dot{x}$<0, тоді з (40) маємо:

$$X = -\frac{F}{k} - \frac{M\dot{x}}{k}. \qquad (41)$$

(Вважаємо, що під час розгону знак швидкості руху (sign ($\dot{x}$)) вібросистеми не змінюється).

У якості критерію якості руху вібросистеми оберемо наступний:

$$\int_0^{t_p} x^2 dt \Rightarrow \min \qquad (42)$$

Враховуючи (41), критерій (42) можна подати у вигляді:

$$\int_0^{t_p} [\frac{F}{R} - \frac{\ddot{x}}{\rho^2}]^2 dt \Rightarrow \min \qquad (43)$$

Рівняння Пуасона-Ейлера для (43) має вигляд:

$$x^{(IV)} = 0 \qquad (44)$$

Початкові умови для розгону вібросистеми отримаємо наступними:

$$x/_{t=0} = x_0; \dot{x}/_{t=0} = 0; \dot{x}/_{t=t_\rho} = -V_\rho; x/_{t=t_\rho} = x_\rho \qquad (45)$$

Закон оптимального руху $x(t)$ вібросистеми, який задовольняє (44) й умови (45) має вид:

$$x(t) = x_0 + \{\frac{3\cdot(-x_0+x_\rho)}{t_\rho^2} + \frac{V_\rho}{t_\rho}\}\cdot t^2 + \{-\frac{V_\rho}{t_\rho^2} - \frac{2\cdot(-x_0+x_\rho)}{t_\rho^3}\}\cdot t^3, \qquad (46)$$

тобто є кубічним атлайном по часу t.

Якщо необхідно забезпечити більш жорсткі умови гладкості руху вібросистеми у період її розгону, тоді можна розв'язати рівняння (44) для наступних початкових умов:

$$x/_{t=0} = x_0; \dot{x}/_{t=0} = 0; \dot{x}/_{t=t_\rho} = -V_\rho; \ddot{x}/_{t=t_\rho} = 0 \quad (47)$$

У (45) й (47) входить параметр V_ρ, який визначає модуль швидкості руху вібросистеми у кінці періоду розгону (при його завершенні), й визначається з міркувань нормативів експлуатації обладнання у нормальному (без перевантажень) режимі.

Для умов (47) оптимальний закон руху вібросистеми має вид:

$$x(t) = x_0 + (-\frac{V_\rho}{t\rho}) \cdot t^2 + \frac{V_\rho \cdot t^3}{3t^2{}_\rho}, \quad (48)$$

тобто теж є кубічним пілайном відносно часу t, але з іншими (на відміну від (46)) коефіцієнтами.

Оберемо далі у якості критерію руху вібросистеми у період її розгону наступні:

$$\int_0^{t_\rho} (\dot{x})^2 dt \Rightarrow \min \quad (49)$$

Якщо вираз (41) продиференціювати по часу t й підставити у (49), матимемо:

$$\int_0^{t_\rho} (\ddot{x})^2 dt \Rightarrow \min \quad (50)$$

Рівняння Ейлера-Пуасона для (50) має вид:

$$x^{(vi)} = 0 \quad (51)$$

Для початкових умов руху вібросистеми (з високим ступенем гладкості цього руху в кінці розгону):

$$x/_{t=0} = x_0; \dot{x}/_{t=0} = 0; x/_{t=t_\rho} = x_\rho; \dot{x}/_{t=t_\rho} = \\ = -V_\rho; \ddot{x}/_{t=t_p} = 0; \dddot{x}/_{t=t_p} = 0, \quad (52)$$

Матимемо закон оптимального руху у вигляді:

$$x(t) = x_0 + ct^2 + dt^3 + e \cdot t^4 + f \cdot t^5, \quad (53)$$

(тобто сітлайн п'ятого порядку по t), де (c,d,e,f) – коефіцієнти визначаються з наступної лінійної системи рівнянь (за правилом Крамера):

$$\begin{aligned} & c \cdot t_p^2 + dt_p^3 + et_p^4 + ft_p^5 = x_p - x_0; \\ & 2ct_p + 3dt_p^2 + 4et_p^3 + 5ft_p^4 = -V_p; \\ & 2c + 6dt_p + 12et_p^2 + 20ft_p^3 = 0; \\ & 6d + 24et_p + 60ft_p^2 = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Якщо необхідно у кінці періоду розгону забезпечити ще більш гладкий рух, ніж за умов (52), то можна використати наступні початкові умови:

$$x/_{t=0} = x_0; \dot{x}/_{t=0} = 0; \dot{x}/_{t=t_\rho} = -V_\rho; \ddot{x}/_{t=t_p} = 0; \\ \dddot{x}/_{t=t_p} = 0; x^{(IV)}/_{t=t_p} = 0. \quad (55)$$

Оптимальний закон руху вібросистеми у цьому випадку має наступний вид:

$$x(t) = x_0 + (-\frac{2V_p}{t_p}) \cdot t^2 + \frac{2V_\rho}{t_p^2} \cdot t^3 + (-\frac{V_\rho}{t_p^3}) \cdot t^4 + \\ + \frac{V_p \cdot t^5}{5 \cdot t_p^4}, \quad (56)$$

тобто знову є сілайном пя'того порядку по часу t.

Висновки

1. Отримані точні розв'язки задачі про вимушені коливання вібросистеми з сухим тертям.
2. Показано, що усталені коливання можуть відбуватись без пауз і з паузами.
3. При силі тертя меншій критичної коливання відбуваються без пауз, при силі тертя більшій за критичну – з паузами. Паузи виникають тільки у кінцевих точках, які відповідають максимальному відхиленню системи, причому у одній половині періоду може бути лише одна пауза.
4. Усталені вимушені коливання у всьому діапазоні частот підкоряються одному і тому ж загальному закону й описуються одним і тим самим рівнянням (39).
5. Визначені закони оптимального руху вібросистеми у періоди її розгону з кінцевих положень (у яких $\dot{x} \equiv 0$) за відсутності вимушеної сили ($Q \equiv 0$)/
6. Отримані результати можуть у подальшому слугувати для уточнення і удосконалення існуючих інженерних методів розрахунку нелінійних вібросистем за наявності сил сухого тертя й у періоди їх пуску/гальмування з метою оптимізації кінематичних та динамічних характеристик останніх (досягнення певних умов гладкості руху).

Література

1. Ден-Гартог Дж.П. Механические колебания. Физматгаз, 1960. – 235 с.
2. Den-Hartog I.P. Forced Vibrations With Combined Coulomb and Viscous II Transactions of ASME – 1981. – Vol. APM-53. – no.9. – P. 107–115.
3. Стрекис А.М. Вынуждение колебания с одной степенью свободы при наличии сухого трения и при произвольной возмущающей силе // Вопроси динамики и динамической прочности. – Рига, 1956. - Вып.IV. – С. 104–112.

4. Крилов А.М. О некоторых дифференциальных уравнениях матиматической физики. – М.-Л.: Физматгиз, 1950. – 160 с.

5. Сакович В.Л. Вынуждение колебания вибратора при наличии сухого трения // Научные труди Киевского инженерностроительного института. – 1964. – Вып.20. – С. 116–126.

6. Курдюпов А.А. Вибрация корабля. – Л: Машгиз, 1961. – 208 с.

7. Сакович В.Л. Об учете сил сопротивления у вибраторах для бетона // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1961. – №6. – С. 68–73.

8. Сакевич В.Л. Исследование машин вибрационного действия // Научные труды Киевского инженерно-строительного институтв. – К.,1961. – Вып.17. – С. 204–209.

9. Сакевич В.Л. Метод решения уравнений динамически нелинейных вибросистем // Научные труды Киевского инженерно-строительного института. – К.,1964. – Вып.20. – С. 91–105.

10. Дег Г. Руководство по практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Наука, 1965. – 287 с.

11. Лурье А.И. Операционное исчисление и его применения к задачам механики. – М.-Л.: Физматгаз, 1951. – 451 с.

12. Овчинников П.Ф. Виброреология. – К.: Наукова думка, 1983. – 272 с.

13. Ловейкін В.С. Оптимізація режимів руху машин і механізмів // Машинознавство. – 2001. – №7(25). – С. 24–31.