Домрачев В. Е.

Винницкий торгово-экономический институт

УДК 530.18:531.12

НЕЛИНЕЙНОЕ ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Застосовуючи математичний формалізм загальної теорії відносності до електродинаміки будується загально коваріантна система нелінійних рівнянь електромагнітного поля, узагальнюючих рівняння Максвела. У відповідних наближеннях отримані рівняння переходять в рівняння класичної електродинаміки. Крім того, сформулювала геометрична модель, на базі якої здійснено об'єднання гравітаційних та електромагнітних полів в єдине граві - електромагнітне поле і отримані його рівняння.

By means of mathematical formality of common theory of relativity common – variance systems of nonlinear equations of electromagnetic field are build, which is generalized. In given approachings receipted equations are transformed in classical electrodinamic equations. Besides this geometrical foundation of unification gravitation and electromagnetic fields in common gravi – electromagnenic field and equations of him are received.

1. Введение.

Еще Эйнштейном [1] было отмечено, что уравнения слабого гравитационного поля эквивалентны уравнениям линейной электродинамики. Таким образом, в теории гравитации прослеживается последовательность обобщающих теорий: скалярная теория Ньютона, векторная линейная гравидинамика (уравнения поля в которой аналогичны уравнениям Максвелла) и тензорная нелинейная общая теория относительности (ОТО).

В работах [2-3] обосновывается теоретическая и экспериментальная необходимость обобщения линейной электродинамики Максвелла – Лоренца. В частности доказывается нарушение релятивистской инвариантности уравнений электродинамики в сильных электромагнитных полях и при ультрарелятивистских скоростях, а также делается оценка применимости классических представлений электромагнитными полями Е, Н $\leq 10^{16}$ ед. СГСЕ. В этих работах, по аналогии с теорией гравитации А.Эйнштейна, построена геометрическая модель уже нелинейной электродинамики с тензорным потенциалом, описывающая электромагнитные явления в сильных электромагнитных полях, при ультрарелятивистских скоростях и на сколь угодно малом расстоянии между взаимодействующими электрическими зарядами. Однако обсуждаемая теория имеет, по нашему мнению, ряд определённых недостатков. В нелинейном тензорном варианте теории в правой части полевых уравнений электромагнитный аналог постоянной Эйнштейна зависит от удельного заряда пробной частицы. Получается, что источником электромагнитного поля является не только заряд, но и масса. Причем чем меньше масса у пробной (?!) частицы, тем более мощным источником электромагнитного поля она является.

С этими положениями трудно согласиться. Кроме того, попытка объединения гравитации и электромагнетизма в работе [4] выглядит не достаточно обоснованной, и по существу с отсутствующим математическим формализмом такого объединения.

Впрочем, неизбежность такого описания в рамках единственного и единого для всех явлений природы пространства событий, определяемого теорией относительности (ТО), очевидна. Уравнения геодезических в этой теории должны приводить к уравнениям движения электрических зарядов, в которых фигурирует величина удельного заряда.

Поэтому и уравнения поля должны зависеть от этой величины. Целью настоящей работы является построение общековариантной системы нелинейных уравнений электромагнитного поля, обобщающих уравнения Максвелла, но свободных от указанных недостатков теории Г.И. Шипова, а также демонстрация правомерности и эффективности применения математического аппарата ОТО к решению задач классической электродинамики.

2. Нелинейное обобщение уравнений Максвелла.

Предлагаемая работа является продолжением работы [5]. Поэтому далее мы используем введенные там обозначения без дополнительных пояснений. Согласно развиваемой в ней концепции строятся два четырехмерных псевдоримановых пространства событий ускоренных локально лоренцевых систем отсчета: одно $\overline{M}^4$ - для описания движений пробных тел, характеризуемых только массой (m), в гравитационном поле, второе $\widetilde{M}^4$, пока гипотетическое, для описания движений пробных тел, характеризуемых только электрическим зарядом (q), в электромагнитном поле. Кроме того, для описания движения заряженных тел (m,q) и соответствующих им гравитационных и электромагнитных полей строится псевдориманово пространство $\hat{M}^4$, квадрат метрического интервала которого является линейной комбинацией квадратов метрических интервалов в пространствах $\overline{M}^4$ и $\widetilde{M}^4$:

$$d\hat{S}^2 = d\overline{S}^2 + \alpha \cdot d\widetilde{S}^2 = \hat{g}_{ik} d\hat{x}^i d\hat{x}^k = (\eta_{ik} + \hat{h}_{ik}) d\hat{x}^i d\hat{x}^k, \tag{1}$$

где компоненты метрического тензора пространства $\hat{M}^4$ связаны с соответствующими компонентами метрических тензоров пространств $\overline{M}^4$ и $\widetilde{M}^4$ следующими формулами:

$$\hat{h}_{00} = \overline{h}_{00} \left(\frac{c_1}{c_\Sigma} \right)^2 + \alpha \cdot \left(\frac{c_2}{c_\Sigma} \right)^2 \widetilde{h}_{00}, \tag{2}$$

$$\hat{h}_{0\alpha} = \overline{h}_{0\alpha} \frac{c_1}{c_\Sigma \sqrt{1+\alpha}} + \alpha \cdot \frac{c_2}{c_\Sigma \sqrt{1+\alpha}} \widetilde{h}_{0\alpha}, \tag{3}$$

$$\hat{h}_{\alpha\beta} = \overline{h}_{\alpha\beta} \frac{1}{1+\alpha} + \alpha \cdot \frac{1}{1+\alpha} \widetilde{h}_{\alpha\beta}. \tag{4}$$

Здесь $c_\Sigma{}^2 = c_1{}^2 + \alpha \cdot c_2{}^2$, а 4- координаты пространства $\hat{M}^4$ принимают вид:

$$\hat{x}^i = (c_\Sigma t, \sqrt{1+\alpha} \cdot x^\alpha). \tag{5}$$

К пространству $\hat{M}^4$ и формулам (1-5) вернёмся несколько позже, а сейчас займёмся геометризацией пространства $\widetilde{M}^4$, которую осуществляем по аналогии с геометризацией пространства $\overline{M}^4$, реализованную А.Эйнштейном. Соответственно, в качестве тензорных нелинейных уравнений электромагнитного поля, обобщающих векторные линейные уравнения Максвелла, предлагаем уравнения, аналогичные полевым уравнениям ОТО:

$$\widetilde{R}_{ij} - \frac{1}{2} \cdot \widetilde{g}_{ij} \widetilde{R} = \widetilde{\aleph} \cdot \widetilde{T}_{ij}, \tag{6}$$

Левая часть этих уравнений выражается традиционным образом [6], через коэффициенты Кристоффеля $\widetilde{\Gamma}^i_{jk}$ и метрический тензор $\widetilde{g}_{ij}$ пространства событий $\widetilde{M}^4$. В правой части уравнений (6) представлены величины, характеризующие электрические заряды, являющиеся источником электромагнитного поля. Чтобы удовлетворить принципу соответствия следует принять $\widetilde{\aleph} = 8\pi \widetilde{G}_2 / c_2^4$. Здесь, мы вводим новую фундаментальную электромагнитную константу $\widetilde{G}_2$, имеющую смысл, аналогичный гравитационной постоянной G в пространстве $\overline{M}^4$.

Фигурирующий в правой стороне уравнений (6), симметричный тензор $\widetilde{T}_{ij}$ описывает состояние и взаимодействие электрических зарядов, являющихся источником электромагнитного поля. Вообще говоря, компоненты этого тензора должны определяться из геометрической модели пространства – времени [7], но для целей данной работы примем, что $\widetilde{T}_{ij}$ - тензор энергии-импульса системы электрических зарядов, компоненты которого имеют исключительно электромагнитное происхождение. Для случая системы невзаимодействующих электрических зарядов, распределенных в пространстве $\widetilde{M}^4$ с плотностью $\widetilde{\rho}$, тензор $\widetilde{T}_{ij}$ построим аналогично тензору энергии-импульса $\overline{T}_{ij}$ потока масс, в пространстве событий $\overline{M}^4$:

$$\widetilde{T}_{ij} = -k\widetilde{\rho}{c_2}^2\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j\,, \qquad (7)$$

где k – размерная константа, определяемая далее из принципа соответствия, $\widetilde{u}_i$ - компоненты 4 - скорости зарядов - источников поля.

Переход к полевым уравнениям линейной электродинамики осуществляем по алгоритму, использованному в [3]. Для случая (7), свертывая уравнение (6) с $\widetilde{u}^i\widetilde{u}^j$ и учитывая, что $\widetilde{u}_j\widetilde{u}^j$ =1, находим

$$\widetilde{R}_{ij}\widetilde{u}^i\widetilde{u}^j - \frac{1}{2}\widetilde{R} = -\frac{8\pi\widetilde{G}_2}{{c_2}^4}\cdot k\widetilde{\rho}\cdot{c_2}^2\,. \qquad (8)$$

С другой стороны, свертывая (12) с $\widetilde{g}^{ij}$, имеем:

$$\widetilde{R} = \frac{8\pi\widetilde{G}_2}{{c_2}^4}k\widetilde{\rho}{c_2}^2\,. \qquad (9)$$

Подставляя (9) в (8), и обозначая $\widetilde{G} = k\widetilde{G}_2$, получаем:

$$\widetilde{R}_{ij}\widetilde{u}^i\widetilde{u}^j = -\frac{4\pi\widetilde{G}}{{c_2}^2}\cdot\widetilde{\rho}\,. \qquad (10)$$

В случае **слабых полей** всегда можно выбрать систему координат, в которой выполняются калибровочные соотношения:

$$\frac{\partial\widetilde{\psi}_i^k}{\partial\widetilde{x}^k} = 0,\ \widetilde{\psi}_i^k = \widetilde{h}_i^k - \frac{1}{2}\widetilde{h}\cdot\delta_i^k,\ \ \widetilde{h} = \widetilde{h}_k^k\,. \qquad (11)$$

При этом тензор Риччи принимает простой вид:

$$\widetilde{R}_{ik} = \frac{1}{2}\Box\widetilde{h}_{ik}\,, \qquad (12)$$

где $\Box$- оператор д'Аламбера. В выбранной таким образом системе координат уравнение (10) с учетом (16) может быть записано в следующем виде:

$$\Box\frac{{c_2}^2}{2\widetilde{G}}\widetilde{h}_{00}\widetilde{u}^0\widetilde{u}^0 + \Box\frac{{c_2}^2}{\widetilde{G}}\widetilde{h}_{0\alpha}\widetilde{u}^0\widetilde{u}^\alpha + \Box\frac{{c_2}^2}{2\widetilde{G}}\widetilde{h}_{\alpha\beta}\widetilde{u}^\alpha\widetilde{u}^\beta = -4\pi\widetilde{\rho},$$

или

$$\Box(\widetilde{A}_i\widetilde{u}^i) = -4\pi\widetilde{\rho}\,, \qquad (13)$$

где $\widetilde{A}_j$ - четырехмерный потенциал электромагнитного поля, связанный следующим образом с компонентами метрического тензора:

$$\widetilde{A}_j = \left(\frac{{c_2}^2}{2\widetilde{G}}\widetilde{h}_{00}\widetilde{u}^0, \widetilde{h}_{0\alpha}\frac{{c_2}^2}{\widetilde{G}}\widetilde{u}^0 + \widetilde{h}_{\alpha\beta}\frac{{c_2}^2}{2\widetilde{G}}\widetilde{u}^\alpha\right). \qquad (14)$$

Ограничимся рассмотрением полей, образованных **движущимися с малой скоростью** электрическими зарядами. Тогда второе слагаемое для компонент $\widetilde{A}_\alpha$ в (14) является величиной второго порядка малости по сравнению с первым слагаемым, и им, с принятой в электродинамике точностью, можем пренебречь. Используемое далее в этой работе выражение для 4 - потенциала с учетом отмеченного обстоятельства принимает вид:

$$\widetilde{A}_j = \left(\frac{{c_2}^2}{2\widetilde{G}}\widetilde{h}_{00}\widetilde{u}^0, \frac{{c_2}^2}{\widetilde{G}}\widetilde{h}_{0\alpha}\widetilde{u}^0\right) \approx$$

$$\approx \left(\frac{{c_2}^2}{2\widetilde{G}}\widetilde{h}_{00}, \frac{{c_2}^2}{\widetilde{G}}\widetilde{h}_{0\alpha}\right). \qquad (15)$$

Заметим, что выражение (11) с учётом (14-15) может быть записано в виде:

$$\frac{\partial\widetilde{A}^i}{\partial x^i} = 0\,, \qquad (16)$$

и представляет собой калибровку Лоренца в электродинамике.

Чтобы получить из выражения (13) уравнения Максвелла, следует принять условие гармоничности для 4- скорости заряда - источника поля, верное лишь для электрических зарядов, **движущихся с постоянной скоростью:**

$$\Box\widetilde{u}^i = 0\,. \qquad (17)$$

Это условие может рассматриваться как приближенно верное для электрических зарядов, **движущихся с малым ускорением.** Из (13) и (17) получаем уравнения Максвелла:

$$\Box\widetilde{A}_k = -\frac{4\pi}{c_2}\widetilde{j}_k\,, \qquad (18)$$

где четырехмерный вектор тока:

$$\widetilde{j}_k = c_2\widetilde{\rho}\widetilde{u}_k\,. \qquad (19)$$

Вводя традиционным образом тензор электромагнитного поля:

$$\widetilde{F}_{ik} = \frac{\partial\widetilde{A}_k}{\partial\widetilde{x}^i} - \frac{\partial\widetilde{A}_i}{\partial\widetilde{x}^k}\,, \qquad (20)$$

уравнение (18) можно записать в виде второй пары уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial\widetilde{F}^{ik}}{\partial\widetilde{x}^k} = -\frac{4\pi}{c_2}\widetilde{j}^i\,. \qquad (21)$$

Из определения (20) также следует первая пара уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial \widetilde{F}_{ik}}{\partial \widetilde{x}^{l}} + \frac{\partial \widetilde{F}_{kl}}{\partial \widetilde{x}^{i}} + \frac{\partial \widetilde{F}_{li}}{\partial \widetilde{x}^{k}} = 0\,. \qquad (22)$$

Таким образом, становится понятным, что нелинейные уравнения (6) являются общековариантным обобщением линейных уравнений Максвелла. Кроме того, при выводе уравнений (21-22) из более общей теории (6) становятся очевидными выделенные выше жирным текстом ограничения применимости уравнений Максвелла, которые оказались незамеченными при их постулировании.

Вернёмся к пространству $\hat{M}^4$. Согласно развиваемой здесь концепции, высказанной в работах [8-9], математический формализм как ОТО, так и СТО, имеет «общегеометрический» характер и может быть применён к геометризации пространства $\hat{M}^4$. Соответственно, в качестве тензорных нелинейных уравнений объединённого грави-электромагнитного поля, предлагаем уравнения, аналогичные полевым уравнениям ОТО:

$$\hat{R}_{ij} - \frac{1}{2}\cdot \hat{g}_{ij}\hat{R} = \hat{\aleph}\cdot \hat{T}_{ij}\,, \qquad (23)$$

Левая часть этих уравнений выражается аналогично уравнениям (6) через коэффициенты Кристоффеля $\hat{\Gamma}^{k}_{ij}$ и метрический тензор $\hat{g}_{ij}$ пространства событий $\hat{M}^4$.

Рассмотрим, к примеру, сферически – симметричное решение вакуумных уравнений $\hat{R}_{ik} = 0$. В квазидекартовых координатах на больших расстояниях от источника грави-электромагнитного поля оно приводит к метрике, аналогичной метрике Шварцшильда:

$$d\hat{S}^2 = \left(1 - \frac{\hat{r}_g}{\hat{r}}\right)\left(d\hat{x}^0\right)^2 - \left(1 + \frac{\hat{r}_g}{\hat{r}}\right)\left(d\hat{x}^2 + d\hat{y}^2 + d\hat{z}^2\right)^2, \qquad (24)$$

где $\dfrac{\hat{r}_g}{\hat{r}} = -\dfrac{2\hat{A}_0}{{c_\Sigma}^2}$

Здесь мы ввели потенциалы «суммарного» поля:

$$\hat{A}^{i} = \left(\frac{{c_\Sigma}^2}{2}\hat{h}_{00}, {c_\Sigma}^2\hat{h}_{0\alpha}\right), \qquad (25)$$

которые, с учётом (2-4), выражаются через потенциалы гравитационного:

$$\overline{A}_{j} = \left(\frac{{c_1}^2}{2}\overline{h}_{00}, {c_1}^2\overline{h}_{0\alpha}\right), \qquad (26)$$

и электромагнитного (15) полей:

$$\hat{A}^0 = \overline{A}^0 + (\alpha\widetilde{G})\widetilde{A}^0\,, \qquad (27)$$

$$\hat{\mathrm{A}}^{\alpha} = \overline{\mathrm{A}}^{\alpha}\,\frac{\hat{c}}{\mathrm{c}_1} + (\alpha\widetilde{G})\cdot\widetilde{\mathrm{A}}^{\alpha}\,\frac{\hat{c}}{\mathrm{c}_2}\,. \qquad (28)$$

Уравнение (24) с учётом выражений (25-28) можно привести к следующему виду:

$$d\hat{S}^2 = \left\{\left(1 + \frac{2}{{c_1}^2}\overline{A}_0\right){c_1}^2dt^2 - \left(1 - \frac{2}{{c_1}^2}\overline{A}_0\right)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)^2\right\} + .$$
$$+\alpha\left\{\left(1 + \frac{2\widetilde{G}}{{c_2}^2}\widetilde{A}_0\right){c_2}^2dt^2 - \left(1 - \frac{2\widetilde{G}}{{c_2}^2}\widetilde{A}_0\right)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)^2\right\} \qquad (29)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае мы пришли к линейной комбинации квадратов интервалов соответствующих гравитационному и электромагнитному полям.

В общем случае возникает проблема конструирования правой части уравнений (23) и в том числе тензора энергии - импульса $\hat{T}_{ij}$ тел (m,q), являющихся источником грави-электромагнитного поля. Однако заметим, что в силу малого значения гравитационной постоянной, значительные гравитационные поля порождаются большими массами и в этом смысле источники сравнимых по интенсивности гравитационных и электромагнитных полей могут рассматриваться как независимые источники, по крайней мере, для широкого круга задач. В этих случаях гравитационные поля могут быть рассчитаны по формулам ОТО, а электромагнитные - по формулам (6,18). При этом объединение гравитационных и электромагнитных полей будет осуществляться с помощью формул (2-4), а соответствующих им метрик аналогично (29).

Использование результатов развиваемой здесь теории в общих случаях предполагает знание величины, введенной в работе фундаментальной электромагнитной постоянной $\widetilde{G}$ 2, определение которой - эмпирическая задача.

3. Заключение.

Используя введенные в работах [8-9] гипотезы, обосновывающие возможность применения математического формализма ОТО к электромагнитным явлениям, мы не только преодолеваем указанные там противоречия теории относительности, но и получаем новые физические результаты. В работе построены нелинейные уравнения электромагнитного поля, обобщающие уравнения Максвелла и переходящие в них в соответствующих приближениях. Кроме того, осуществлено объединение гравитационных и электромагнитных полей в единое грави–электромагнитное поле и получены его уравнения.

Литература

1. Эйнштейн А. Собрание научных трудов, т. 1, // "Наука", 1965, с. 297.

2. Шипов Г.И. Общековариантная нелинейная электродинамика с тензорным потенциалом. // Известия Вузов. Физика, 1972, т. 10, с. 98.

3. Шипов Г.И. Теория физического вакуума.// М., Наука, 1997, с. 450.

4. Шипов Г.И. О решении первой проблемы Эйнштейна.// М., «Кириллица», 2007. с.38.

5. В.Е. Домрачев. К вопросу совместного описания гравитации и электромагнетизма. //"Вібрації в техніці та технологіях", № 1(53), 2009, С. 15-19.

6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. // "Наука", ГР ФМЛ, М., 1973, с. 504.

7. Домрачев В.Е Интерпретация и некоторые обобщения теории относительности механики и электродинамики // М., «Кириллица-1», 2002. с. 54.

8. Домрачев В.Е. Структурно иерархическая модель пространства - времени.// "Доповіді Національної академії наук України", № 1, 2006, С. 67-72

9. Домрачев В.Е. Некоторые обобщения линейных полевых уравнений теории гравитации и электродинамики.// "Доповіді Національної академії наук України", № 2, 2006, С. 71-76.