Відомості про автора

ДЗІСЬ Віктор Григорович, к.т.н., доцент кафедри математики фізики та комп'ютерних технологій Вінницького національного аграрного університету (21008, м. Вінниця, вул. Сонячна, 3, e-mail: dzisvg@gmail.com)

DZIS Victor, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematics, Physics and Computer Technologies of Vinnytsia National Agrarian University (21008, 21008, м. Вінниця, 3, Soniachna Str.e-mail: dzisvg@gmail.com)

ДЗИСЬ Виктор Григорьевич, кандидат технических наук, доцент кафедры математики, физики и компьютерных технологий Винницкого национального аграрного университета (221008, г. Винница, ул. Солнечная, 3, e-mail: dzisvg@gmail.com)

УДК 330.4
DOI: 10.37128/2411-4413-2019-8-5

РОЗВИТОК ПОНЯТТЯ ЕЛАСТИЧНОСТІ ©

НАЙКО Д.А.,
к. фіз.-мат. н., доцент кафедри математики,
фізики та комп'ютерних технологій,
Вінницький національний аграрний університет

ШЕВЧУК О.Д.,
к. е. н., доцент кафедри аудиту та державного контролю,
Вінницький національний аграрний університет
(Вінниця)

Крім методів класичного математичного аналізу, які широко використовуються в економічному моделюванні, існують методи квантового аналізу або q-аналізу, які вже проникли у багато теоретичних і прикладних розділів математики. Принципова відмінність квантового аналізу від класичного полягає у тому, що в ньому поняття похідної не розглядається як границя відношення двох нескінченно малих величин.

Зміна підходу до визначення поняття похідної привела до іншого диференціального числення, яке названо q-численням.

У роботі ми показуємо який вигляд мають q-аналоги найпоширеніших математичних фактів класичного математичного аналізу та частково демонструємо методику їх отримання. Ми відзначаємо деякі напрямки впровадження q-аналізу в прикладній математиці та математичній фізиці.

Ми вводимо до розгляду q-аналогу такого поняття економічного аналізу як еластичність. Вивчаємо його властивості та обчислюємо q-еластичність деяких елементарних функцій. Проводимо порівняльний аналіз класичного коефіцієнта еластичності з коефіцієнтом q-еластичності. Поняття q-еластичності є новим і раніше в науковій літературі не зустрічалось.

Ключові слова: *q*-аналіз, *q*-аналог, *q*-похідна, *q*-експонента, *q*-еластичність, економічне моделювання.

Літ.: 11.

THE DEVELOPMENT OF THE CONCEPT OF ELASTICITY

NAIKO Dmytro,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor
Vinnytsia National Agrarian University
(Vinnytsia)

SHEVCHUK Olena,
Candidate of Economic Sciences,
Associate Professor
Vinnytsia National Agrarian University
(Vinnytsia)

In addition to the methods of classical mathematical analysis, which are widely used in economic modeling, there are methods of quantum analysis or q-analysis, which have already penetrated into many theoretical and applied branches of mathematics. The fundamental difference between quantum analysis and classical analysis is that in it the notion of derivative is not considered as the limit of the ratio of two infinitely small quantities.

Changing the approach to the definition of a derivative led to another differential calculus, which is called q-calculus.

In this paper, we show what kind of q-analogues of the most well-known mathematical facts of classical mathematical analysis have and we partially demonstrate the method of their derivations. We note some areas of q-analysis implementation in applied mathematics and mathematical physics.

We introduce into consideration the q-analogue of such a notion of an economic modelingaselasticity. We study its properties and calculate the q-elasticity of some elementary functions. We carry out a comparative analysis of the classical coefficient of elasticity with the q-coefficient of elasticity. The concept of q-elasticity is new and not previously encountered in the scientific literature.

Key words: q-analysis, q-analog, q-derivative, q-exponent, q-elasticity, economic modeling.

Lit.: 11.

РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ ЭЛАСТИЧНОСТИ

НАЙКО Д.А.,
кандидат физико-математических наук, доцент,

ШЕВЧУК Е.Д.,
кандидат экономических наук, доцент
Винницкий национальный аграрный університет
(г. Винница)

Кроме методов классического математического анализа, которые широко используются в экономическом моделировании, существуют методы квантового анализа или q-анализа, которые уже проникли во многие теоретические и прикладные разделы математики. Принципиальное отличие квантового анализа от классического состоит в том, что в нем понятие производной не рассматривается как предел отношения двух бесконечно малых величин.

Изменение подхода к определению понятия производной привело к другому дифференциальному исчислению, которое названо q-исчислением.

В работе мы показываем какой вид имеют q-аналоги самых известных математических фактов классического математического анализа и частично демонстрируем методику их получения. Мы отмечаем некоторые направления внедрения q-анализа в прикладной математике и математической физике.

Мы вводим в рассмотрение q-аналог такое понятие економического анализа как эластичность. Изучаем его свойства и вычисляем q-эластичность некоторых элементарных функций. Проводим сравнительный анализ классического коэффициента эластичности с коэффициентом q-эластичности. Понятие q-эластичности является новым и ранее в научной литературе не встречалось.

Ключевые слова: q-анализ, q-аналог, q-производная, q-экспонента, q-эластичность, економическое моделирование.

Лит.: 11.

Постановка проблеми. Широке впровадження методів математичного аналізу у різних сферах економічного моделювання є незаперечним. Серед макроекономічних моделей досить згадати, наприклад, статичну та динамічну моделі Леонтьєва, динамічні моделі Кейнса, Неймана, Самуельсона-Хікса, нелінійну динамічну модель Солоу [1, 2].

З мікроекономічних моделей найвідомішими є такі моделі, як модель поведінки споживачів (рівняння Слуцького), модель фірми (рівновага Курно), модель взаємодії споживачів та виробників (модель Еванса встановлення рівноважної ціни, модель Вальраса) [1, 2].

Серед моделей аналізу, прогнозування та регулювання економічних явищ доречно згадати модель фінансового ринку, модель інфляції, класичну модель ринкової економіки тощо [3].

В основі класичного математичного аналізу лежить поняття похідної неперервної функції. З цим поняттям випускники середньої загальноосвітньої школи знайомляться в курсі шкільної математики і глибше вивчають у курсі вищої математики вищого навчального закладу освіти.

Поняття похідної вводиться як границя відношення двох нескінченно малих величин. Проте, якщо границю такого відношення не обчислювати, і похідну розглядати як відношення приростів двох величин, то такий підхід приводить до несподівано цікавих результатів. Розвиток такого підходу призвів до появи так званого *квантового аналізу* або *q-аналізу*.

З появою q-аналізу виникла можливість узагальнити відоме поняття еластичності, що базується на понятті класичної похідної, і ввести нове поняття q-еластичності, перейшовши до q-похідної.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У класичному аналізі похідна $\frac{df}{dx}$ функції $f(x)$ визначається рівністю:

$$\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{1}$$

Цю рівність можна переписати у вигляді:

$$\frac{df}{dx}=\lim_{q\to 1}\frac{f(qx)-f(x)}{qx-x}=\lim_{q\to 1}\frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}. \tag{2}$$

Умовно можна вважати, що рівність (1) – це означення похідної в h-аналізі, а рівність (2) – означення похідної в q-аналізі.

Якщо в (2) границю не обчислювати, а вираз під знаком границі прийняти за означення похідної, то такий крок виявляється дуже вдалим і приводить до так званого *квантового аналізу* (*q-аналізу*). Робота [4] є певним посібником з «квантової арифметики».

В роботі [5] вивчаються q-аналоги спеціальних функцій, а в [6] автори подають велику кількість прикладів застосування q-аналізу в теорії апроксимації функцій лінійними операторами. Особливого розвитку набули q-аналоги класичних многочленів Бернштейна. З цього питання ми наводимо лише роботи [7 −11].

Метою статті є висвітлення поняття q-еластичності, яке є новим поняттям у q-аналізі та інструментом аналізу категорії «еластичність». На цьому шляху ми знайомимо читача з елементами q-аналізу, проводячи порівняльну характеристику з класичним математичним аналізом та вказуємо на деякі його застосування. З метою вивчення властивостей нового поняття q-еластичності, ми також наводимо q-аналоги окремих відомих математичних фактів класичного математичного аналізу.

Виклад основного матеріалу дослідження.

1. ***Елементи диференціального q-числення.*** Розглянемо, насамперед, q-аналоги деяких понять класичного математичного аналізу.

q-Диференціал функції $f(x)$ визначається рівністю:

$$d_q f := f(qx)-f(x). \tag{3}$$

Зокрема, $d_q x = qx - x = (q-1)x$.

q-Похідна $\frac{d_q f}{d_q x}$ функції $f(x)$ визначається рівністю:

$$\frac{d_q f}{d_q x} := \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} \qquad (4)$$

Наприклад,

$$\frac{d_q}{d_q x}(x^n) = \frac{q^n x^n - x^n}{qx - x} = \frac{q^n - 1}{q - 1} x^{n-1} \qquad (5)$$

Порівнюючи (5) з класичним результатом: $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$, ми визначаємо q-аналог натурального числа n як

$$[n]_q := \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (6)$$

або

$$[n]_q := 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} \qquad (6')$$

Очевидно, що $q \cdot [n]_q + 1 = [n+1]_q$.

У такому разі формула (5) набуває вигляду:

$$\frac{d_q}{d_q x}(x^n) = [n]_q x^{n-1} \qquad (7)$$

Зокрема $\frac{d_q}{d_q x}(c) = 0$, коли $c = const$. Легко бачити, що

$$\frac{d_q}{d_q x}(x^{-n}) = -\frac{[n]_q}{q^n} x^{-(n+1)} \qquad (7')$$

Оскільки в класичному аналізі мають місце формули: $\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$ та $\frac{d^k}{dx^k}(x^n) = \binom{n}{k} k! x^{n-k}$, то це спричинює ввести наступні два означення.

q-факторіал натурального числа n визначається у вигляді: $[n]_q ! := [1]_q \cdot [2]_q \cdot ... \cdot [n]_q$ коли $n > 0$ і $[0]_q ! = 1$.

Якщо n та k натуральні числа, то q-*біноміальні коефіцієнти* визначаються у вигляді:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q !}{[k]_q ! [n-k]_q !} \qquad (8)$$

Подібно до класичного випадку, де

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

у q-аналізі мають місце формули:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q. \qquad (9)$$

q-*диференціювання добутку* обчислюється за допомогою рівності

$$\frac{d_q}{d_q x}\left(f(x) g(x) \right) = f(qx) \frac{d_q g}{d_q x} + g(x) \frac{d_q f}{d_q x} \qquad (10)$$

Очевидно, що коли $c = const$, то $\frac{d_q}{d_q x}(c \cdot f(x)) = c \cdot \frac{d_q}{d_q x} f(x)$, а також $\frac{d_q}{d_q x}\left(f(x) + g(x)\right) = \frac{d_q}{d_q x} f(x) + \frac{d_q}{d_q x} g(x)$ і $\frac{d_q}{d_q x}\left(f(x) - g(x)\right) = \frac{d_q}{d_q x} f(x) - \frac{d_q}{d_q x} g(x)$.

Справедлива рівність:

$$d_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(qx)d_q f(x) - f(qx)d_q g(x)}{g(qx)g(x)}. \qquad (11)$$

Її також можна записати у вигляді:

$$d_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)d_q f(x) - f(x)d_q g(x)}{g(qx)g(x)}. \qquad (11')$$

q-аналогом многочлена $(x-a)^n$ є многочлен

$$(x-a)_q^n := \prod_{k=0}^{n-1}(x - q^k a). \qquad (12)$$

Формулу (12) можна поширити і на від'ємний показник степеня у вигляді

$$(x-a)_q^{-n} := \frac{1}{(x - q^{-n}a)_q^n} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(x - q^{k-n}a)}.$$

q-Аналогом полінома $(x-a)^{-n}$ є поліном

$$(x-a)_q^{-n} := \frac{1}{\left(x - q^{-n}a\right)_q^n}. \qquad (13)$$

Справедлива, також, рівність:

$$\frac{d_q}{d_q x}\left(x-a\right)_q^{-n} = -\frac{[n]_q}{q^n}(x-a)_q^{-(n+1)}. \qquad (14)$$

Подібно до (12), визначаємо q-аналог многочлена $(x+a)^n$

$$(x+a)_q^n := \prod_{k=0}^{n-1}(x + q^k a). \qquad (15)$$

За допомогою методу математичної індукції легко встановлюється, що

$$\frac{d_q}{d_q x}\left(x+a\right)_q^n = [n]_q \,(x+a)_q^{n-1}. \qquad (16)$$

Многочлен $(x+a)_q^n$ не є симетричним відносно x та a. Якщо біноміальні коефіцієнти у розкладі бінома $(x+a)^n$, можна знайти з відомого «трикутника Паскаля»

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

то q-аналог «трикутника Паскаля» має вигляд

$$\begin{array}{c}
[1]_q \\
[1]_q \quad [1]_q \\
[1]_q \quad [2]_q \quad q[1]_q \\
[1]_q \quad [3]_q \quad q[3]_q \quad q^3[1]_q \\
[1]_q \quad [4]_q \quad q[6]_q \quad q^3[4]_q \quad q^6[1]_q \\
[1]_q \quad [5]_q \quad q[10]_q \quad q^3[10]_q \quad q^6[5]_q \quad q^{10}[1]_q \\
[1]_q \quad [6]_q \quad q[15]_q \quad q^3[20]_q \quad q^6[15]_q \quad q^{10}[6]_q \quad q^{15}[1]_q
\end{array}$$

Несиметричність q-біноміальних коефіцієнтів очевидна. Числовий множник при $x^k a^{n-k}$ дорівнює $q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.

Ми опускаємо цілий ряд q-аналогів основних формул диференціального та інтегрального числення.

В теорії наближення функцій лінійними додатними операторами широко відомим є многочлен С. Н. Бернштейна

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \le x \le 1, \qquad (17)$$

який неперервну на відрізку $[a;b]$ функцію $f(x)$ наближає зі швидкістю n^{-1} $(n \to \infty)$.

Упродовж двох останніх десятиліть з'явилась величезна кількість наукових робіт, присвячених q-аналогам операторів (17) та інших лінійних додатних операторів.

Узагальненим поліномом Бернштейна, побудованим на q-числах, називається поліном

$$B_n(f,q;x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-1-k}(1-q^s x), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Філіпс [7] показав, що

$$B_n(t^2, q; x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]_q}. \qquad (18)$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(t^2,q;x) = x^2$ тоді й тількитоді, коли $q \ge 1$.

Дослідження операторів $B_n(f,q;x)$ у випадку $q \ge 1$ можна знайти, наприклад, у [8,9].

Одним з авторів даної роботи встановлено [10,11] асимптотичне подання $B_n(t^i, q; x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, за степенями $[n]_q$.

4. ***q*-Еластичність.** Еластичністю функції $y = f(x)$ називаєтьсяграниця відношення відносної зміни величини y до відносної зміни величини x. Якщо еластичність зміни величини y за умови зміни величини x позначити через $E_x(y)$, то використовуючи означення похідної, отримуємо

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}\right)\Bigg/\left(\frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y}.$$

Аналогічно до цього вводимо поняття коефіцієнта q-еластичності.

Означення. Коефіцієнтом q-еластичності називається число, що визначається рівністю:

$$[E_x(y)]_q = \left(\frac{d_q y}{y}\right)\Bigg/\left(\frac{d_q x}{x}\right) = \frac{d_q y}{d_q x}\cdot\frac{x}{y}.$$

Легко показати, що, наприклад, для функції $y = x^n, \quad n \in N$,

$$E_x(y) = nx^{n-1} \cdot \frac{x}{x^n} = n,$$

а

$$[E_x(y)]_q = \frac{q^n x^n - x^n}{qx - x} \cdot \frac{x}{x^n} = \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + ... + q^{n-1} = [n]_q.$$

Якщо $y = x^{-n}, \quad n \in N$, то $E_x(y) = -nx^{-n-1} \cdot \frac{x}{x^{-n}} = -n$, а

$$[E_x(y)]_q = \frac{q^{-n} x^{-n} - x^{-n}}{qx - x} \cdot \frac{x}{x^{-n}} = \frac{q^{-n} - 1}{q - 1} = -\frac{q^n - 1}{q^n (q-1)} = -\frac{[n]_q}{q^n}.$$

Якщо $y = kx + b$, то $E_x(y) = \frac{kx}{kx + b}$, а $[E_x(y)]_q = \frac{kx}{kx + b}$.

Величина $[E_x(y)]_q$, так само як і $E_x(y)$, не залежить від того, в яких одиницях вимірюються величини y та x. Справді,

$$[E_{kx}(ay)]_q = \frac{d_q(ay)}{d_q(kx)} \cdot \frac{kx}{ay} = \frac{ad_q y}{kd_q x} \cdot \frac{kx}{ay} = \frac{d_q y}{d_q x} \cdot \frac{x}{y} = [E_x(y)]_q.$$

Еластичність суми двох функцій $u(x)$ та $v(x)$ можна знайти за формулою: $E_x(u+v) = \frac{uE_x(u) + vE_x(v)}{u+v}$. Для *q*-еластичності ця властивість зберігається повністю:

$$[E_x(u+v)]_q = \frac{d_q(u+v)}{d_q x} \cdot \frac{x}{u+v} = \left(\frac{d_q u}{d_q x} + \frac{d_q v}{d_q x}\right) \cdot \frac{x}{u+v} = \frac{u \frac{d_q u}{d_q x} \cdot \frac{x}{u} + v \frac{d_q v}{d_q x} \cdot \frac{x}{v}}{u+v} =$$

$$= \frac{u[E_x(u)]_q + v[E_x(v)]_q}{u+v}.$$

Еластичність добутку двох функцій $u(x)$ та $v(x)$ дорівнює сумі їхніх еластичностей: $E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v)$. *q*-Аналог цієї рівності встановлюється так:

$$[E_x(uv)]_q = \frac{d_q(uv)}{d_q x} \cdot \frac{x}{uv} = \frac{u(qx)d_q v(x) + v(x) d_q u(x)}{d_q x} \cdot \frac{x}{uv} =$$

$$= \frac{u(qx)}{u(x)} [E_x(v)]_q + [E_x(u)]_q.$$

Або в рівносильній формі:

$$[E_x(uv)]_q = [E_x(v)]_q + \frac{v(qx)}{v(x)} [E_x(u)]_q.$$

Еластичність частки двох функцій $u(x)$ та $v(x)$ дорівнює різниці їхніх еластичностей: $E_x(u/v) = E_x(u) - E_x(v)$. *q*-Аналог цієї рівності встановлюється таким чином:

$$\left[E_x\left(\frac{u}{v}\right)\right]_q = \frac{d_q(u/v)}{d_q x} \cdot \frac{x}{u/v} = \frac{v(x)d_q u(x) - u(x) d_q v(x)}{v(qx)v(x)d_q x} \cdot \frac{x}{u/v} =$$

$$= \frac{v(x)d_q u(x) - u(x) d_q v(x)}{v(qx)d_q x} \cdot \frac{x}{u(x)} = \frac{v(x)}{v(qx)} [E_x(u)]_q - \frac{v(x)}{v(qx)} [E_x(v)]_q.$$

Тобто,

$$\left[E_x(u/v)\right]_q = \frac{v(x)}{v(qx)}\left[E_x(u)\right]_q - \frac{v(x)}{v(qx)}\left[E_x(v)\right]_q,$$

якщо скористатися $(11')$. Якщо скористатися (11), то

$$\left[E_x(u/v)\right]_q = \left[E_x(u)\right]_q - \frac{v(x)u(qx)}{v(qx)u(x)}\left[E_x(v)\right]_q.$$

Очевидно, що всі властивості $E_x(y)$ та $\left[E_x(y)\right]_q$ збігаються, коли $q=1$.

Зауваження. Оскільки в класичному математичному аналізі для двох взаємно обернених функцій $y=y(x)$ та $x=x(y)$

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left(1\Big/\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)=\frac{1}{x'(y)}, \tag{19}$$

то для класичних коефіцієнтів еластичності цих функцій

$$E_x(y)\cdot E_y(x)=1. \tag{20}$$

Оскільки в q-аналізі рівність (19), взагалі кажучи, не має аналогу, то q-аналоги рівності (20) існують лише для окремих класів функцій.

Наприклад, якщо $y=ax+b$, то $x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$, звідки знаходимо, що $\left[E_x(y)\right]_q\cdot\left[E_y(x)\right]_q=1$.

Якщо, $y=x^n,\ n\in N$, то $x=y^{\frac{1}{n}}$, а тоді

$$\left[E_x(x^n)\right]_q=\left[n\right]_q x^{n-1}\cdot\frac{x}{y}=\left[n\right]_q x^{n-1}\cdot\frac{x}{x^n}=\left[n\right]_q,\quad \left[E_y(\sqrt[n]{y})\right]_q=\frac{1}{\left[n\right]_{\sqrt[n]{q}}},$$

де $\left[n\right]_{\sqrt[n]{q}}=1+q^{1/n}+q^{2/n}+\cdots+q^{n-1/n}$. Отже, $\left[E_x(x^n)\right]_q\cdot\left[E_y(\sqrt[n]{y})\right]_q=\frac{\left[n\right]_q}{\left[n\right]_{\sqrt[n]{q}}}$.

Якщо $y=x^{-n},\ n\in N$, то $x=y^{-\frac{1}{n}}$, а тоді

$$\left[E_x(y)\right]_q=-\frac{\left[n\right]_q}{q^n x^{n+1}}\cdot\frac{x}{x^{-n}}=-\frac{\left[n\right]_q}{q^n},\quad \left[E_y(x)\right]_q=\frac{1\Big/\sqrt[n]{qy}-1\Big/\sqrt[n]{y}}{qy-y}\cdot\frac{y}{x}=-\frac{1}{\sqrt[n]{q}\left[n\right]_{\sqrt[n]{q}}}.$$

Звідси

$$\left[E_x(y)\right]_q\cdot\left[E_y(x)\right]_q=\frac{\left[n\right]_q}{\left[n\right]_{\sqrt[n]{q}}\,q^n\sqrt[n]{q}}.$$

Висновки. Поняття похідної, визначене у класичному математичному аналізі рівністю (1) як *границя відношення двох нескінченно малих величин*, є фундаментальним не лише у математиці. Воно є базисним і для цілого ряду інших теоретичних та прикладних наукових напрямків. З означенням цього поняття знайомі навіть випускники середньої загальноосвітньої школи. Поняття похідної широко впроваджене в математичній економіці, зокрема, воно лежить в основі такого поняття як *еластичність*.

Оскільки поняття q-похідної (4) узагальнює поняття похідної для q-аналізу (1), то автори, замінивши похідну на q-похідну, зробили спробу узагальнити таким чином поняття еластичності та вивчити властивості нового поняття q-еластичність. З метою розуміння перетворень та перенесення q-аналізу в математичну економіку, нам довелося частково розкрити методику q-аналізу.

На цьому шляху нам довелося встановити q-аналоги формул та правил диференціювання, q-аналоги многочленів $(x-a)^n$, $(x+a)^n$, $(x-a)^{-n}$, $(x+a)^{-n}$, ряду Тейлора, «трикутника Паскаля» тощо.

Наведені приклади та доведені твердження демонструють існування як певних аналогій у квантовому та класичному математичних аналізах, так і принципових відмінностей. Наприклад, банальне твердження: «від перестановки доданків сума не змінюється» є істинним у класичному аналізі, проте не є істинним у квантовому аналізі.

Насправді, q-числення застосовується і в інших теоретичних та прикладних дослідженнях, зокрема в математичній фізиці.

Опосередковано квантовий аналіз вже давно використовується в економічному моделюванні. Наприклад, швидкість зміни величини y, залежної від величини x, оцінюється через відношення приросту величини y до приросту величини x, а не через відношення відповідних диференціалів цих величин, як це робиться в класичному аналізі.

Поняття q-еластичності є новим і раніше в науковій літературі не зустрічалось. Напрями перспективних досліджень передбачають висвітлення геометричного змісту коефіцієнта q-еластичності та ряд інших питань.

Список використаних джерел

1. Колемаев В. А. Математическая економика: учебник для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА. 2012. 399 с.

2. Колемаев В. А.,Малыхин В. И.Математические методы принятия решений в економике: учебник для вузов. М.: Финстатинформ, 1999. 386 с.

3. Шевчук О. Д., Найко Д. А. Методи математичного аналізу та контролю різних етапів інфляційного процесу. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методи навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Зб. наук. пр. Випуск 49. 2017. С. 171 – 177.

4. V. G. Kac,P. Cheung.QuantumCalculus.Universitext, Sprinqer-Verlag, New-York, 2002.

5. Aral Ali, Gupta Vijay, Agarwal Ravi P. Applications of q-Calculus in Operator Theory. Sprinqer-Verlag, New-York, 2013.

6. George E. Andrews, Richard Askey, Ranjan Roy.Special Functions. Cambridge U. Press, Cambridge, 1999.

7. Phillips G. M. Bernstein polynomials based on the q-integers.*Ann. Numer. Math*. 1997. 4. P. 258–264.

8. Oruc H.,TuncerN. On the convergence and iterates of q-Bernstein polynomials. *J. Approx. Theory*. 2002. 117. P. 301–313.

9. Ostrovska S. On the improvement of analytic properties under the limit q-Bernstein operator .*J. Approx*. *Theory*. 2006. 138.P. 37–53.

10. Найко Д. А. Про деякі апроксимаційні властивості q-параметричних многочленів Бернштейна. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України*. 2016. 13, № 2. С. 214−226.

11. Найко Д. А. Додатні оператори класу *B* та їхні комбінації: монографія. Вінниця: ВНАУ. 2018. 150 с.

References

1. KolemaevV. A. (2012). *Matematycheskaia ekonomyka [Mathematical economics]* .M.: YuNYTY-DANA (in Russian).

2. Kolemaev V. A. & V. Y. Malykhyn (1999). *Matematycheskye metody pryniatyia reshenyi v ekonomyke [Mathematical methods of decision-making in the economy]*. M.: Fynstatynform (in Russian).

3. Shevchuk O. D.& D. A. Naiko. (2017). Metody matematychnoho analizu ta kontroliu riznykh etapiv infliatsiinoho protsesu [Methods of mathematical analysis and control of various stages of the inflation process]. *Suchasni informatsiini tekhnolohii ta innovatsiini metody navchannia u pidhotovtsi fakhivtsiv: metodolohiia, teoriia, dosvid, problemy*–*Modern information technologies and innovative methods of training in the training of specialists: methodology, theory, experience, problems*.49. 171 – 177 (in Ukrainian).

4. V.G. Kac& P. Cheung. (2002). *Quantum Calculus*. Universitext, Sprinqer-Verlag, New-York.

5. Aral Ali, Gupta Vijay & Agarwal Ravi P. (2013). *Applicationsof q-Calculus in Operator Theory*. Sprinqer-Verlag, New-York.

6. George E. Andrews, Richard Askey & Ranjan Roy. (1999). *Special Functions*. Cambridge U. Press, Cambridge.

7. Phillips G. M.(1997). Bernstein polynomials based on the q-integers.*Ann. Numer. Math*. 4.258–264.

8. Oruc H. & Tuncer N. (2002). On the convergence and iterates of q-Bernstein polynomials . *J. Approx. Theory*. 117. 301–313.

9. Ostrovska S. (2006). On the improvement of analytic properties under the limit q-Bernstein operator. *Approx. Theory*. 138. 37–53.

10. Naiko D.A. (2016). Pro deiaki aproksymatsiini vlastyvosti *q*-parametrychnykh mnohochleniv Bernshteina [On some approximation properties of *q*-Bernstein polynomials]. *Zbirnyk prats In-tu matematyky NAN Ukrainy–Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine*. 13(2). 214–226 (in Ukrainian).

11. Naiko D. A. (2018). *Dodatni operatory klasu B ta yikhni kombinatsii: Monohrafiia [Positive operators of B-class and their combinations: Monograph]*. Vinnytsia: VNAU (in Ukrainian).\

Відомості про авторів

НАЙКО Дмитро Антонович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Вінницький національний аграрний університет (21008, м. Вінниця, вул. Сонячна, 3, e-mail: dmnaiko@ukr.net). тел. 0977226276.

ШЕВЧУК Олена Дмитрівна – кандидат економічних наук, доцент, Вінницький національний аграрний університет (21008, м. Вінниця, вул. Сонячна, 3, e-mail: lsd77@ukr.net). тел. 0637226858.

NAIKO Dmytro – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,Vinnytsia National Agrarian University (21008, Vinnytsia, 3, Soniachna Str: e-mail: dmnaiko@ukr.net).

SHEVCHUK Olena – Candidate of Economic Sciences, Associate Professor,Vinnytsia National Agrarian University (21008, Vinnytsia, 3, Soniachna Str: e-mail: lsd77@ukr.net).

НАЙКО Дмитрий Антонович – кандидат физико-математических наук, доцент, Винницкий национальный аграрный університет (21008, г. Винница, ул. Солнечная, 3, e-mail: dmnaiko@ukr.net).

ШЕВЧУК Елена Дмитриевна – кандидат экономических наук, доцент, Винницкий национальный аграрный университет (21008, г. Винница, ул. Солнечная, 3, e-mail:lsd77@ukr.net).

УДК 37.02
DOI: 10.37128/2411-4413-2019-8-6

УМОВИ ФОРМУВАННЯ ПРОФЕСІЙНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІХ ФАХІВЦІВ СФЕРИ ТУРИЗМУ В ПРОЦЕСІ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ ©

ЛЕВЧУК О.В.,
к.пед. н., доцент
Вінницький національний аграрний університет
(Вінниця)

В статті розглянуто сутність понять «професійна компетентність» та «математична компетентність» фахівців сфери туризму. Аргументовано, що математична підготовка є вагомою складовою професійної компетентності.

Доведено, що поєднання аудиторного навчання з одночасним проходженням навчальних та виробничих практик дозволить створити модель професійної освіти фахівців, як своєрідного соціокультурного середовища.

Обґрунтувано, що за нових вимог до фахівців має здійснюватися трансформація змісту математичної підготовки. В якості ефективного засобу є викладення змісту в контексті професійно-практичних задач, які передбачають математичне моделювання з використанням інформаційних технологій. Під час цього варто дотримувались наступних умов: структурування змісту математичних дисциплін з врахуванням сучасних запитів науки та практики; оптимізація змісту за критерієм значимості основних положень у формуванні професійної компетентності фахівця; інтеграція змісту математичних дисциплін на основі професійної спрямованості;