

Солона О. В.

Вінницький  
державний  
аграрний  
університет

УДК 621.926.5

**ТЕОРЕТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ  
СИНХРОНІЗАЦІЇ  
ВІБРОЗБУДЖУВАЧІВ  
ВІБРАЦІЙНОГО МЛИНА  
З ЧОТИРМА  
ВІБРОЗБУДЖУВАЧАМИ**

*В данной статье рассмотрено решение конкретных прикладных задач про синхронизацию вибровозбудителей путем использования интегрального критерия стойкости синхронных движений.*

*The decision of concrete applied tasks of vibration exciter's synchronization by dint of integral steadiness criterion of synchronous motions is given in the following article.*

**Порядок знаходження умов існування стійких рухів вібраційних машин з використанням інтегрального критерію стійкості рухів.**

Основна задача про самосинхронізацію механічних вібровозбудувачів полягає у визначенні умов, при виконанні яких усі ротори вібровозбудувачів обертаються з однаковими за абсолютною величиною середніми кутовими швидкостями,

незважаючи на можливу різницю їх параметрів і сил, що діють на них, а несучі тіла здійснюють при цьому коливання з періодом  $T=2\pi/\omega$ .

Рішення конкретних прикладних задач про самосинхронізацію вібровозбудувачів найбільш ефективно може бути виконано шляхом використання інтегрального критерію стійких синхронних рухів [1]. Згідно з цим критерієм, фази обертання вібровозбудувачів у стійких синхронних рухах відповідають точкам мінімуму деякої функції  $D$  цих фаз, що називається потенціальною. З важливих для

практики задач (в тому числі й у розглядуваній) виявляється, що потенціальна функція дорівнює середньому за період значенню функції Лагранжа  $L$  коливальної частини системи

$$D = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} L dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (T - \Pi) dt, \quad (1)$$

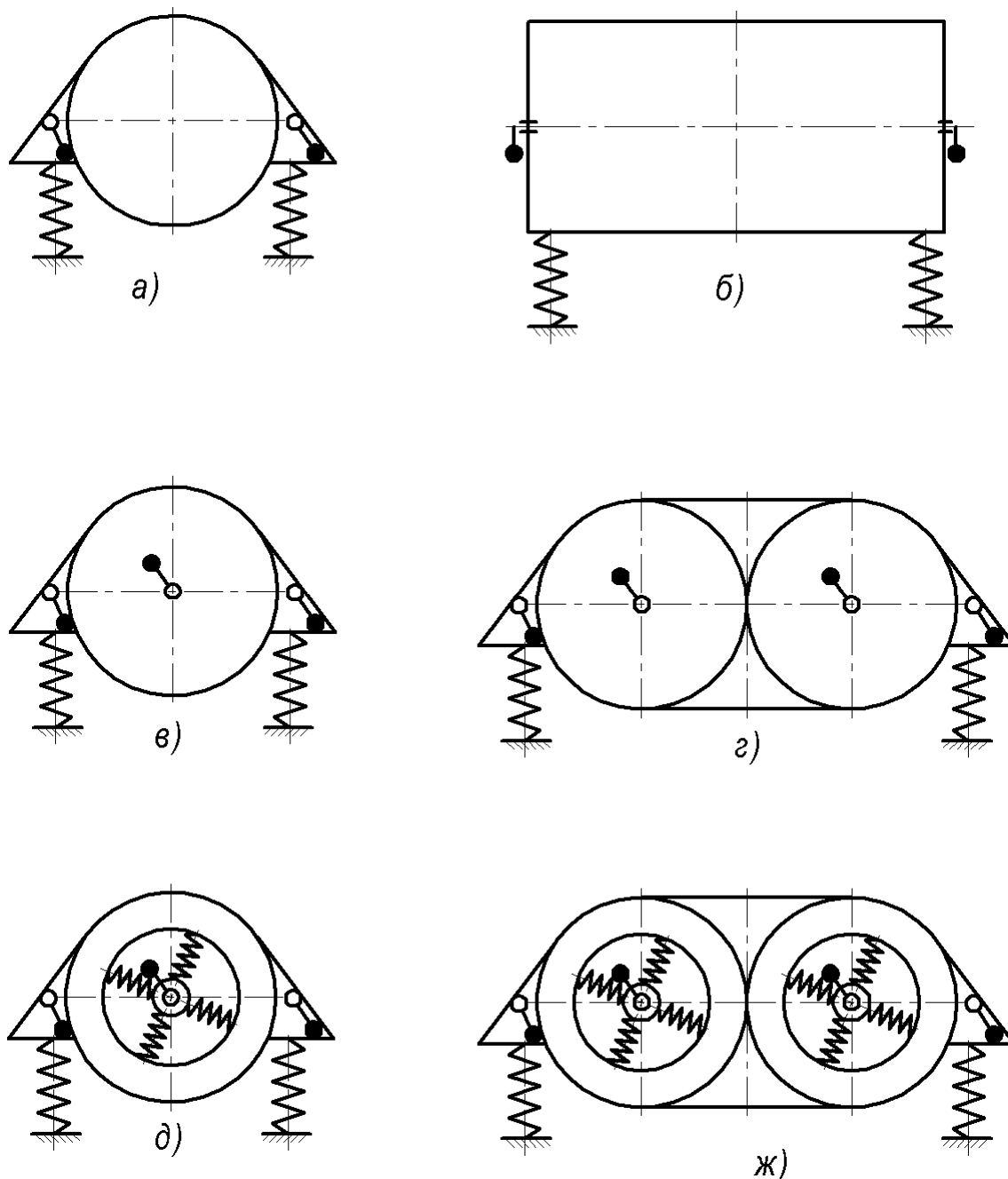
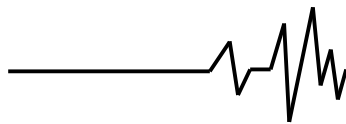
де  $T$ ,  $\Pi$  – відповідно кінетична і потенціальна енергії коливальної частини системи.

Практична методика досліджень пристроїв з самосинхронізуючими вібровозбудувачами характеризується такою послідовністю дій:

- складаються рівняння малих коливань несучих тіл з припущенням, що вали вібровозбудувачів обертаються рівномірно, за законом:

$$\varphi_s = \omega t + \alpha_s,$$

де  $\alpha_s$  – невідомі початкові фази обертання;  $\omega$  – кутова швидкість синхронного обертання.



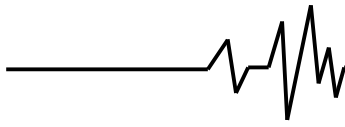
**Рис. 1. Схеми вібраційних млинів з агрегованими вібробудувачами:**  
**а) двовібраторний з паралельно розташованими вібробудувачами;**  
**б) двовібраторний із співвісно агрегованими вібробудувачами;**  
**в) тривібраторний з паралельно розташованими вібробудувачами;**  
**г) чотиривібраторний з паралельно розташованими вібробудувачами;**  
**д) двомасовий тривібраторний з пружно приєднаним вібробудувачем;**  
**ж) тримасовий чотиривібраторний з пружно приєднаними вібробудувачами**

- з цих рівнянь визначається закон руху несучих тіл, який відповідає усталеним вимушеним коливанням;

- далі знаходиться потенціальна функція. Значення фазових зміщень  $\alpha_S$ , які можуть

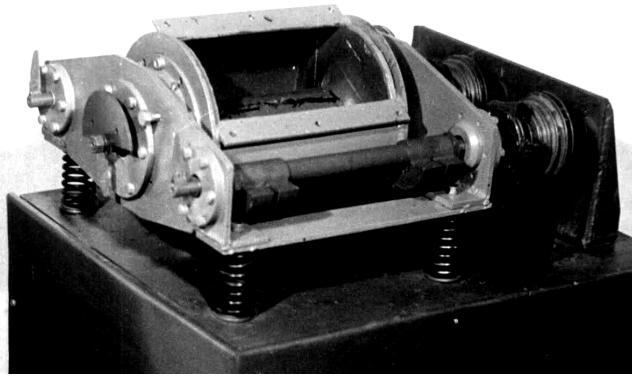
відповідати стійким синхронним рухам, і умови стійкості вираховуються з умов мінімуму потенціальної функції.

Нами були проаналізовані наступні схеми вібраційних млинів із горизонтальним

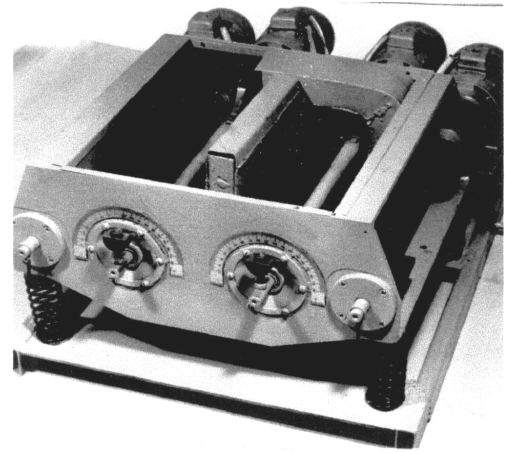


розташуванням робочої камери (рис. 1) і дійшли висновку, що забезпечити стійкість необхідного режиму синхронного обертання вібробудувачів можливо, наприклад:

- приєднанням до вихідного несучого твердого тіла за допомогою пружних елементів деякої додаткової маси;
- зміною кількості вібробудувачів.



а)



б)

**Рис. 2. Експериментальні вібраційні млини з самосинхронізуючими вібробудувачами:**  
**а) двомасний з трьома вібробудувачами;**  
**б) тримасний з чотирма вібробудувачами**

У зв'язку з цим були розроблені і виготовлені експериментальні вібраційні млини (рис. 2), у яких забезпечення необхідного режиму синхронного обертання вібробудувачів досягається сполученням двох цих способів одночасно [2,3]. У роботах [3,4,5,6] показується технологічна ефективність таких вібраційних установок. Дані системи становлять визначений інтерес у зв'язку з теорією вібраційних млинів, грохотів і конвеєрів [7].

**Тримасна вібраційна установка з чотирма вібробудувачами.**

Розглянемо задачу про самосинхронізацію чотирьох дебалансних вібробудувачів, що приводяться від незалежних асинхронних двигунів і мають

однакові і позитивні парціальні кутові швидкості, два з них установлені на додаткових тілах [8]. Таким чином, дана коливальна система відрізняється від розглянутої вище тим, що до робочої камери приєднане не одне, а два додаткових тіла, з вібробудувачем на кожному з них (рис. 3).

За узагальнені координати коливальної системи прийняті:  $x, y$  і  $\varphi$  – координати, що відповідають горизонтальному, вертикальному і кутовому переміщенням контейнера, а також  $x_1, y_1$  і  $x_2, y_2$  – координати, що відповідають горизонтальним і вертикальним переміщенням першого і другого додаткових тіл.

Рівняння для кінетичної і потенційної енергії коливальної частини системи мають вид:

$$T = \frac{1}{2} M_1 (\dot{y}^2 + \dot{x}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M_2 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2),$$

$$П = \frac{1}{2} c \left[ (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - l_1 \varphi - y_1)^2 + (y + l_1 \varphi - y_2)^2 \right]. \quad (2)$$

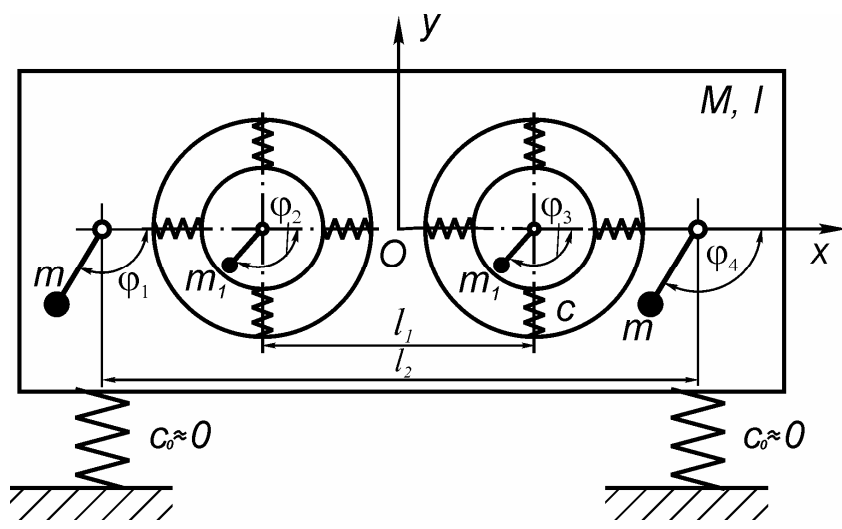
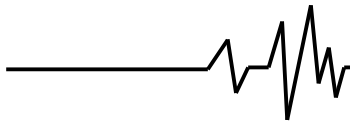


Рис. 3. Тримасний вібраційний млин з чотирма віброзбудувачами

Диференціальні рівняння руху вібраційної установки при рівномірному обертанні віброзбудувачів будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned}
 M_1 \ddot{y} + c(y - y_1) + c(y - y_2) &= -F [\sin(\omega t + \alpha_1) + \sin(\omega t + \alpha_4)]; \\
 M_1 \ddot{x} + c(x - x_1) + c(x - x_2) &= F [\cos(\omega t + \alpha_1) + \cos(\omega t + \alpha_4)]; \\
 I \ddot{\varphi} + cl_1(l_1 \varphi + y_1) + cl_1(l_1 \varphi - y_2) &= Fl_2 [\sin(\omega t + \alpha_1) - \sin(\omega t + \alpha_4)]; \\
 M_2 \ddot{x}_1 - c(x - x_1) &= F_1 \cos(\omega t + \alpha_2); \\
 M_2 \ddot{x}_2 - c(x - x_2) &= F_1 \cos(\omega t + \alpha_3); \\
 M_2 \ddot{y}_1 - c(y - y_1) + cl_1 \varphi &= -F_1 \sin(\omega t + \alpha_2); \\
 M_2 \ddot{y}_2 - c(y - y_2) - cl_1 \varphi &= -F_1 \sin(\omega t + \alpha_3),
 \end{aligned} \tag{3}$$

де  $F = mr\omega^2$ ,  $F_1 = m_1 r_1 \omega^2$  – амплітуди сили, що змушує, яка розвивається кожним віброзбудувачем  $m, r$ ;  $m_1, r_1$  і – маси й ексцентриситети віброзбудувачів, встановлених відповідно на контейнері і додаткових тілах.

Визначники для обчислення частот вільних коливань, які відповідають двом незалежним групам однорідних рівнянь, що відповідають системі (3), можуть бути представлені в наступній формі [9]:

$$\begin{vmatrix}
 2c - M_1 p^2 & -c & -c \\
 -c & c - M_2 p^2 & 0 \\
 -c & 0 & c - M_2 p^2
 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

де

$$\begin{vmatrix}
 2c - M_1 p^2 & -c & -c & 0 \\
 -c & c - M_2 p^2 & 0 & cl_1 \\
 -c & 0 & c - M_2 p^2 & -cl_1 \\
 0 & cl_1 & -cl_1 & 2cl_1^2 - Ip^2
 \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

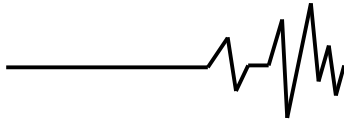
Згідно з (4) запишемо частотне рівняння

$$(c - M_2 p^2)(M_1 M_2 p^2 - 2cM_2 - cM_1) p^2 = 0$$

У результаті знаходимо

$$p_1 \approx 0, \quad p_2^2 = \frac{c}{M_2}, \quad p_3^2 = \frac{c}{M^*},$$

$$M^* = \frac{M_1 M_2}{2M_2 + M_1}$$



З огляду на більш високий порядок визначника (5) і, як наслідок, дуже велику трудомісткість обчислень, що відповідають власній частоті, визначеній на ПК за допомогою стандартного пакета комп'ютерних програм Maple V:

$$p_7^2 = \frac{c(I + 2M_2 l_1^2)}{M_2 I}$$

Рішення диференціальних рівнянь (6), що відповідає сталим змушеним коливанням, може бути записане у вигляді

$$p_4 \approx 0, p_5 \approx 0, p_6^2 = \frac{c}{M^*},$$

$$\begin{aligned} x &= A_1 [\cos(\omega t + \alpha_1) + \cos(\omega t + \alpha_4)] + A_3 [\cos(\omega t + \alpha_2) + \cos(\omega t + \alpha_3)], \\ x_1 &= A_2 [\cos(\omega t + \alpha_1) + \cos(\omega t + \alpha_4)] + A_4 \cos(\omega t + \alpha_2) + A_5 \cos(\omega t + \alpha_3), \\ x_2 &= A_2 [\cos(\omega t + \alpha_1) + \cos(\omega t + \alpha_4)] + A_5 \cos(\omega t + \alpha_2) + A_4 \cos(\omega t + \alpha_3), \\ \varphi &= -A_{10} [\sin(\omega t + \alpha_1) - \sin(\omega t + \alpha_4)] - A_5 [\sin(\omega t + \alpha_2) - \sin(\omega t + \alpha_3)], \\ y &= -A_1 [\sin(\omega t + \alpha_1) + \sin(\omega t + \alpha_4)] - A_3 [\sin(\omega t + \alpha_2) + \sin(\omega t + \alpha_3)], \\ y_1 &= A_6 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_7 \sin(\omega t + \alpha_4) + A_8 \sin(\omega t + \alpha_2) + A_9 \sin(\omega t + \alpha_3), \\ y_2 &= A_7 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_6 \sin(\omega t + \alpha_4) + A_9 \sin(\omega t + \alpha_2) + A_8 \sin(\omega t + \alpha_3). \end{aligned} \quad (6)$$

Тут позначено:

$$A_1 = \frac{bF}{ba - 2c^2}; \quad A_2 = \frac{cF}{ba - 2c^2}; \quad A_3 = \frac{cF_1}{ba - 2c^2}; \quad A_4 = \frac{F_1(ba - c^2)}{b(ba - 2c^2)}; \quad A_5 = \frac{F_1 c^2}{b(ba - 2c^2)};$$

$$A_6 = \frac{cF [(db - 2c^2 l_1^2) - l_1 l_2 (2c^2 - ab)]}{(db - 2c^2 l_1^2)(2c^2 - ab)}; \quad A_7 = \frac{cF [(db - 2c^2 l_1^2) + l_1 l_2 (2c^2 - ab)]}{(db - 2c^2 l_1^2)(2c^2 - ab)};$$

$$A_8 = -\frac{F_1 [a(db - 2c^2 l_1^2) + c^2(2c^2 - ab)]}{(db - 2c^2 l_1^2)(2c^2 - ab)}; \quad A_9 = -\frac{c^2 F_1 (a l_1^2 - d)}{(db - 2c^2 l_1^2)(2c^2 - ab)};$$

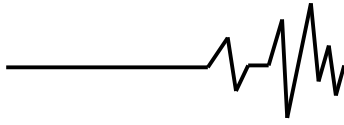
$$A_{10} = \frac{F l_2 b}{2c^2 l_1^2 - db}; \quad A_{11} = \frac{F_1 c l_1}{2c^2 l_1^2 - db};$$

$$a = 2c - M_1 \omega^2; \quad b = c - M_2 \omega^2; \quad d = 2c l_1^2 - I \omega^2.$$

Для рішення задачі використовуємо інтегральний критерій стійкості, причому як потенційну функцію, як і в попередньому прикладі можна прийняти середнє за період

значення функції Лагранжа коливальної системи. Середнє за період значення функції Лагранжа при обчисленні рівнянь (2), для кінетичної і потенційної енергії і рішень (6)

$$\begin{aligned} D &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (T - \Pi) dt = D_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_4) + D_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + D_3 \cos(\alpha_1 - \alpha_3) + \\ &+ D_4 \cos(\alpha_2 - \alpha_3) + D_3 \cos(\alpha_2 - \alpha_4) + D_2 \cos(\alpha_3 - \alpha_4) + C_1, \end{aligned}$$



де  $C_1$  – не залежна від кутів  $\alpha_s$  величина;

$$D_1 = m\varepsilon\omega^2 \left( A_1 + \frac{A_{10}l_2}{2} \right);$$

$$D_2 = m\varepsilon\omega^2 \left( A_3 - \frac{A_{11}l_2}{2} \right);$$

$$D_3 = m\varepsilon\omega^2 \left( A_3 + \frac{A_{11}l_2}{2} \right);$$

$$D_4 = \frac{m_1\varepsilon_1\omega^2}{2} (A_5 - A_9)$$

Прирівнюючи до нуля похідні  $\frac{\partial D}{\partial \alpha_s}$ , одержимо рівняння для визначення значень постійних  $\alpha_s$  у можливих синхронних рухах.

При цьому, оскільки розглядається задача про самосинхронізацію, одну з фаз (наприклад  $\alpha_4$ ) прирівнюємо до нуля.

$$\begin{aligned} D_1 \sin \alpha_1 + D_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + D_5 \sin(\alpha_1 - \alpha_3) &= 0, \\ D_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - D_4 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) - D_3 \sin \alpha_2 &= 0, \\ D_4 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) - D_2 \sin \alpha_3 + D_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_3) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Рівнянням (7) можуть задовольняти п'ять наступних комбінацій фаз  $\alpha_s$ :

$$\begin{aligned} 1) \alpha_1^* = \alpha_2^* = \alpha_3^* = 0; \quad 2) \alpha_1^* = 0; \alpha_2^* = \alpha_3^* = \pi; \quad 3) \alpha_1^* = \alpha_2^* = \pi; \alpha_3^* = 0; \\ 4) \alpha_1^* = \pi; \alpha_2^* = \alpha_3^* = 0; \quad 5) \alpha_1^* = \alpha_2^* = 0; \alpha_3^* = \pi. \end{aligned} \quad (8)$$

Умовою стійкості синхронних рухів, відповідно до інтегрального критерію, є умова мінімуму потенційної функції.

Розглянемо можливість стабілізації синхронно-синфазного обертання двох основних вібробудувачів за допомогою двох додаткових вібробудувачів на пружно

підвішених тілах [10]. З огляду на результати рішення попередньої задачі, а також [7], позитивний ефект передбачається одержати при обертанні додаткових вібробудувачів у протифазі відносно основного (друга група рішень (8)). У цьому випадку остання нерівність буде мати такий вигляд

$$\begin{vmatrix} -D_1 + D_2 + D_3 & -D_2 & -D_3 \\ -D_2 & D_2 + D_3 - D_4 & D_4 \\ -D_3 & D_4 & D_2 + D_3 - D_4 \end{vmatrix} > 0$$

Тоді приходимо до наступної умови стійкості розглянутого руху:

$$\begin{aligned} -D_1 + D_2 + D_3 &> 0, \\ D_5 &> 0, \\ D_2 + D_3 &> 0 \quad \text{чи} \quad \frac{1}{\lambda_3^2 - 1} > 0, \\ D_6 &> 0, \end{aligned}$$

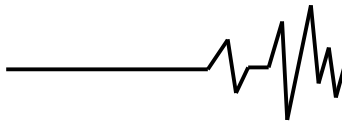
де

$$D_5 = -(D_2 + D_3)(D_1 + D_4) + 2D_2D_3 + D_1D_4 + D_3^2$$

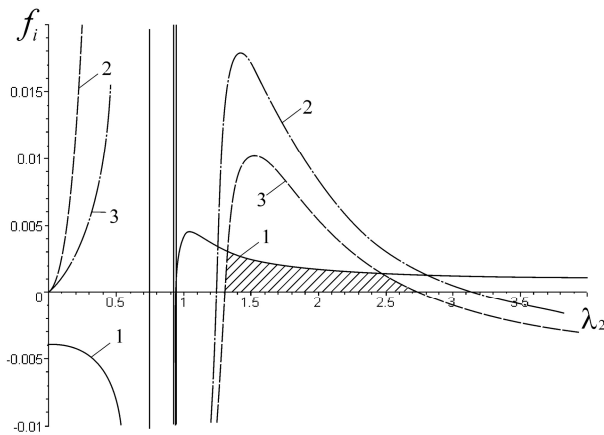
$$D_6 = -(D_2 + D_3)(D_1 + D_4) + 2D_2D_3 + 2D_1D_4$$

На рис. 3.9 представлені графіки функцій  $f_1(\lambda_2) = -D_1 + D_2 + D_3$ ,  $f_2(\lambda_2) = D_5$ ,  $f_3(\lambda_2) = D_6$ . Побудови виконані за допомогою стандартного пакета програм Maple V при таких параметрах системи:

$$\begin{aligned} M_1 = 120 \text{ кг}, \quad M_2 = 20 \text{ кг}, \quad l_2 = 0,325 \text{ м}, \\ l_1 = 0,16 \text{ м} \varepsilon = m_1 \varepsilon_1 = 0,2 \text{ кг} \cdot \text{м}, \quad I = 7,6 \\ \text{кг} \cdot \text{м}^2; \quad (Ml_2^2 / I = 2,22). \end{aligned}$$



## Література



**Рис. 8. Графіки функцій для визначення області існування стійких рухів віброзбуджувачів ( $MI_2^2 / I = 1.44$ ) –  $f_i(\lambda_2)$**

З приведених результатів випливає, що при зазначених параметрах системи і  $\lambda_2 \geq 1,25$ , рух, що відповідає другій групі рішень (8) буде стійким. Причому, зі збільшенням моменту інерції  $I$  стійкість розглянутого руху зберігається до значення  $MI_2^2 / I \approx 1,4$  (рис. 4). Необхідно відзначити, що розглянутий рух буде стійким і при трохи менших значеннях  $MI_2^2 / I$ , але при цьому помітно звужується область існування стійкості руху (рис. 4).

Таким чином, успішне використання самосинхронізації більше двох віброзбуджувачів (трьох, чотирьох) можливо при установці додаткових збудників на пружно підвішених тілах; такі збудники можуть стабілізувати синхронно-синфазне обертання двох основних віброзбуджувачів. Відзначимо, що отримані результати досліджень узгодяться з [6] (де приведений лише остаточний результат у вигляді графіків рішення задачі на Фортрані для системи з конкретними параметрами) і у визначеному змісті доповнюють і уточнюють їх.

1. Ярошевич Н.П., Денисов П.Д. К вопросу о динамической синхронизации агрегатированных вибровозбудителей в вибрационных станках // Межвузовский сборник «Прогрессивная отделочно–упрочняющая технология», – Ростов-на-Дону, 1984. – 168 с.

2. А.С. № 1034776 (СССР). Вибрационная мельница. Денисов П.Д., Величко Л.Д., Берник П.С. Оpubл. в Б.И. 1983, № 30, МКИ ВО2С 19/16.

3. Денисов П.Д. Ярошевич Н.П. Новая вибрационная установка // Машиностроитель. – 1982. – №6. – С.5.

4. Денисов П.Д., Берник П.С., Солоня Е.В. Вибрационные мельницы непрерывного действия // Вибрации в технике и технологиях. – 2000. – №1(13).–С. 27–31.

5. Денисов П.Д., Берник П.С., Паламарчук І.П., Солоня О.В. Особливості проектування тримасових вібраційних машин з опозитно розташованими віброзбуджувачами // Вибрации в технике и технологиях. – 2000. – №2 (14). – С. 15–17.

6. Опирский Б.Я., Денисов П.Д. Новые вибрационные станки. Конструирование и расчет. – Львов: Свит, 1991. –160с.

7. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. – М.: Наука, 1971. – 896 с.

8. Денисов П.Д., Берник П.С., Солоня Е.В. К вопросу о динамической синхронизации вибровозбудителей в вибрационной мельнице // Збірник наукових праць / ХТУ «ХПІ». – Харків, 2001. – Вип. 1 (14). – С.64–67.

9. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа. 1980.– 408с.

10. Ярошевич Н.П., Солоня Е.В., Денисов П.Д. К вопросу о динамической синхронизации агрегатированных вибровозбудителей в трёхмассной четырёхвibratorной вибрационной мельнице // Вибрации в технике и технологиях. – 2003. – №6 (32). – с. 77–81.