№ 2 (51) 2008
Вібрації в техніці та технологіях

**Надутый В. П.**

**Лапшин Е. С.**

***Институт геотехнической механики им. Н. С. Полякова НАН Украины***

*УДК 622.742.002.5*

# КИНЕТИКА ВИБРАЦИОННОГО ГРОХОЧЕНИЯ ВЛАЖНОГО СЫРЬЯ

*Запропоновано кінетику процесу грохочення вологої сировини моделювати ланцюгом Маркова змінної структури. Це дозволяє врахувати закономірності сегрегації, просівання й транспортування. Сформульовано критерій раціонального сполучення сегрегації й просівання.*

*It is offered to model a kinetics of process of a screen sizing of wet raw material network a Markov of variable structure. It allows to consider regularities of a segregation, sifting and transportation. Dependences for definition of probabilities of transition of corpuscles on altitude of a stratum and screening are gained. The criterion of a rational combination of a segregation and sifting is formulated.*

Почти 95 % добываемого и перерабатываемого сыпучего сырья подвергается классификации по крупности, которое осуществляется на вибрационных грохотах. Только в горной, металлургической и химической промышленностях грохотятся миллионы тонн сырья. От совершенства процесса грохочения зависит себестоимость и качество продукции. Особо следует отметить существенное влияние на экологию. Отсюда пристальное внимание к совершенствованию процесса грохочения. Для обеспечения высокой производительности грохочение производят при подаче сырья толстым слоем, когда высота слоя составляет более 2,5 диаметров крупных частиц [1, 2]. В этом случае грохочение происходит в результате сегрегации, просеивания и вибрационного транспортирования. Следствие сегрегации – перемещение мелких частиц по высоте слоя. Благодаря сегрегации обеспечивается доставка мелких частиц к просеивающей поверхностью. Под просеиванием понимается прохождение частиц через отверстия просеивающей поверхности. Все три составляющие процесса взаимосвязаны. На их интенсивность влияют физики-механические свойства сырья, форма частиц, изменение высоты слоя, конструктивные и динамические параметры грохота. Совершенствовать процесс экспериментально из наличия большого количества факторов чрезвычайно трудоемко. Поэтому с широким внедрением компьютерной техники одним из основных путей стало численное моделирование кинетики процесса грохочения. Разработано большое количество математических моделей кинетики, обзор которых приведен в монографии [2]. Показано, что моделирование кинетики вибрационного грохочения марковской цепью позволяет наиболее полно учесть физику процесса. Для сухого сырья кинетика исследована достаточно подробно. Что же касается грохочения влажного сырья, то здесь разработаны метод определения условий просеивания и описана сегрегация, а модель кинетики грохочения отсутствует. Об актуальности математического моделирования кинетики влажного сырья неоднократно говорилось в многочисленных публикациях [3]. В этой связи цель работы – разработка обобщенной математической модели кинетики грохочения влажного сырья.

В ИГТМ им. Н. С. Полякова НАН Украины предложено кинетику грохочения моделировать марковской цепью переменной структуры [2, 4]. Для этого в грохотимом сырье выделяют контрольный объем, который по высоте делят на элементарные слои. Их нумерацию $(i = 1, 2, 3, ..., n_m - 2)$ выполнятся сверху вниз. Просеивающую поверхность условно считают слоем $n_m - 1$, а подрешетное пространство – слоем $n_m$. Непрерывное изменение высоты контрольного объема моделируется дискретным изменением с шагом, равным толщине элементарного слоя $h$. При изменении высоты контрольного объема нумерацию последующих элементарных слоев сохраняют, а полагают, что поочередно устраняются слои 1, 2 и т. д. Величины, зависящие от высоты, записывают с индексом $m$, равным номеру верхнего элементарного слоя.

Под действием вибрации частицы с вероятностью $\pi_{ij}$ переходят из элементарного слоя $i$ в слой $j$. Переход совершается за время $t$, кратное периоду колебаний. Это событие названо шагом $k$. Распределение частиц на $k$-ом шаге описывается выражениями [2, 4]

$$\left.\begin{aligned} &H_m = H_1 - (m-1)h; \\ &\overline{P}(k_m, m) = \overline{P}(0, m)\left\|\pi_{ij}(m)\right\|^{k_m}; \\ &t = \sum_{f=1}^{m} t_f k_f; \\ &L_k = \sum_{f=1}^{m} V_f t_f, \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

где $H_m$ – высота слоя грохотимого сырья; $m$ – номер верхнего элементарного слоя; $h$ – высота элементарного слоя; $\overline{P}(0,m)$ и $\overline{P}(k_m,m)$ — вектор вероятностей начального и текущего распределения мелких частиц по высоте слоя; $\left\|\pi_{ij}(m)\right\|$ – стохастическая матрица размера $n_m \times n_m$; $t$ – время грохочения; $f$ – индекс суммирования; $L_k$ – путь, пройденный контрольным объемом $V_f$ – скорость вибротранспортирвания.

Применительно к грохочению сырья слоем, высота которого не больше десяти диаметров крупных частиц стохастическая матрица имеет вид [2]

$$\begin{Vmatrix} 1-p & p & 0 & ... & ... & ... & ... & 0 \\ q & p_o & p & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & q & p_o & p & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & q & p_o & p & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & ... & ... & 1-P_s & P_s & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & ... & ... & 0 & 1 \\ 0 & ... & ... & ... & ... & ... & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad (2)$$

где *p* и *q* вероятности переходов частиц вниз и верх по высоте слоя грохотимого сырья; $p_o = 1 - p - q$ – вероятность частицам остаться в элементарном слое; $P_s$ – вероятность просеивания.

Для описания сегрегации необходимо определить вероятности переходов *p* и *q*.

Введем ряд допущений. Рассмотрим мелкую частицу, окруженную крупными. В центр мелкой частицы поместим начало сферических координат. Положение произвольной крупной частицы будем характеризовать полярным радиусом $R_c$, углами $\theta_c$ и $\varphi_c$, которые называют широтой и долготой.

При вибровозбуждении в окрестности мелкой частицы находится случайное количество частиц, координаты которых также случайны.

Для перемещения мелкой частицы по высоте слоя необходимо выполнение следующих двух условий. Первое, расстояния между крупными частицами должны превышать диаметр мелкой частицы. Второе, кинетическая энергия частицы должна быть больше работы, затрачиваемой на разрыв капиллярных мостиков. Эти условия, соответственно, назовем геометрическим и энергетическим.

Для определения вероятности события, при котором выполняется геометрическое условие, частицы сырья будем моделировать шарами. Предположим, что случайные значения широты и долготы распределены по равномерному закону, а полярный радиус имеет нормальное распределение. Правомерность подобных допущений проверена экспериментально.

С учетом результатов, приведенных в работе [5], имеем

$$R_c = 2R_k \sqrt[3]{k_p},$$

где $R_k$ – радиус крупной частицы; $k_p = H_v / H_c$ – коэффициент разрыхления слоя; $H_v$ и $H_c$ – высота слоя при вибровозбуждении и в статическом состоянии, которые определяются из эксперимента.

Воспользуемся методом Монте-Карло. Пусть генератор случайных чисел, с учетом указанных распределений, задает координаты $R_s(i)$, $\theta_s(i)$ и $\varphi_s(i)$. Такая запись означает, что набор случайных координат получен при *i*-ом численном испытании. Будем считать, что мелкую частицу окружает *n* крупных частиц. Для каждой крупной частицы генерируется свой набор случайных сферических координат, которые обозначим $R_s(i,n)$, $\theta_s(i,n)$ и $\varphi_s(i,n)$.

Будем рассматривать прохождение мелкой частицы между крупными по вертикали. Для этого перейдем к декартовым координатам [6]

$$x(i,n) = R_S(i,n)\sin\theta_S(i,n)\cos\varphi_S(i,n),$$
$$y(i,n) = R_S(i,n)\sin\theta_S(i,n)\sin\varphi_S(i,n),$$
$$z(i,n) = R_S(i,n)\cos\theta_S(i,n).$$

Определим три крупные частицы с минимальными апликатами. Для абсциссы и ординаты таких частиц примем обозначения $x_j$ и $y_j$ $(j = 1, 2, 3)$.

На основе формулы Герона вычислим радиус окружности $R_B(i,n)$, вписанной между проекциями этих частиц на горизонтальную плоскость

$$R_B = \frac{l_1 \cdot l_2 \cdot l_3}{4S_B} - R_k ,$$

где $l_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$,
$l_2 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$,
$l_3 = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}$ – расстояния между центрами крупных частиц;
$S_B = \sqrt{p_B(p_B - l_1)(p_B - l_2)(p_B - l_3)}$ – площадь треугольника, вершинами которого являются центры крупных частиц; $p_B = (l_1 + l_2 + l_3)/2$ – полупериметр треугольника.

Геометрическое условие прохождения мелкой частицы между крупными – соблюдение неравенства

$$r < R_B(i,n) , \tag{3}$$

где $r$ – радиус мелкой частицы.

Когда результат численного эксперимента – такое расположение частиц, при котором выполняется условие (3), то будем говорить, что происходит событие $C(i)$. Выполнив серию экспериментов $i = 1, 2, 3,..., N_c$ и подсчитав количество $n_c$ событий $C(i)$, имеем следующую оценку вероятности

$$P_1 = n_c / N_c . \tag{4}$$

Полученная вероятность описывает возможность образования такой конфигурации из крупных частиц, при которой между ними может пройти мелкая частица.

При соблюдении геометрических условий переход возможен, если кинетической энергии мелкой частицы достаточно для совершения работы по преодолению сил адгезии и когезии.

В работе [7] получена формула для вычисления вероятности того, что при колебаниях сырья с амплитудой $A$ и частотой $\omega$, будет разорван капиллярный мостик, (1)
соединяющий частицы

$$P_2 = \exp\left( -\frac{3\pi^2\sigma}{r\rho A^2\omega^2} \right), \tag{5}$$

где $\rho$ – плотность мелкой частицы; $\sigma$ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Перейдем к определению последнего элемента стохастической матрицы – вероятности просеивания $P_s$. Просеивание частицы влажного сырья происходит в (2)
результате двух событий. Первого, попадание частицы в отверстие просеивающей поверхности. Второго – преодоление частицей сил, действующих со стороны жидкости. Вероятность первого события совпадает с вероятностью просеивания частицы сухого сырья. Ее назовем геометрической вероятностью. Аналитические и численные методы вычисления последней подробно описаны в монографии [2]. В зависимости от интенсивности вибровозбуждения частицы при падении на просеивающую поверхность совершают стохастические вращения в плоскости либо в пространстве. Для первого случая аналитически на основе алгебры событий и теории геометрических вероятностей определены вероятности просеивания частиц произвольной формы через просеивающие поверхности с прямоугольными и квадратными отверстиями. При этом предполагается, что координаты частицы при падении на просеивающую поверхность имеют равномерное распределение. Применительно ко второму случаю разработан численный метод, позволяющий вычислять вероятности просеивания в самой общей постановке: форма частицы, контур отверстия, законы распределения случайных линейных и угловых координат – произвольные. Учет формы частиц особенно важен для "трудных" частиц, поскольку в этом случае погрешность классической формулы Годена-Магенсона превышает 100 %.

Определим условия, при которых происходит преодоление сил поверхностного натяжения, удерживающих частицу в отверстии просеивающей поверхности. Будем считать, что частица шаровая. Для вычисления максимального значения силы, обусловленной поверхностным натяжением, примем, что отверстие в просеивающей поверхности – прямой круговой цилиндр.

Суммарная вертикальная составляющая силы поверхностного натяжения, действующая на частицу вычисляется по формуле [7]

$$F = \frac{2\pi\sigma}{r}\Big[\left(r^2 - a^2\right)\cos\theta_a - \left(r^2 - b^2\right)\cos\theta_b + a\sqrt{r^2 - a^2}\sin\theta_a + b\sqrt{r^2 - b^2}\sin\theta_b\Big], \quad (6)$$

где $a$ и $b$ – ординаты верхней и нижней линии контакта жидкости с частицей; $\theta_a$ и $\theta_b$ – краевые углы в точках с соответствующими ординатами.

При различных значениях ординаты $y$ значение силы (6) аппроксимируется выражением

$$F(y) = k_1 th(k_2 y)$$

где $k_1$ и $k_2$ – коэффициенты, обеспечивающие минимальную сумму квадратических отклонений.

Колебания частицы в отверстие просеивающей поверхности описывается уравнением [7]

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -gm - k_1 th(k_2 y) - \frac{2\pi r\mu(a+b)}{R-r}\frac{dy}{dt} + A\omega^2\sin\omega t \quad (7)$$

где $g$ – ускорение свободного падения; $\mu$ – коэффициент динамической вязкости; $R$ – радиус отверстия.

Уравнение решалось численно с помощью метода Рунге-Кутта-Фальберга порядка 4-5 и строились амплитудно-частотные характеристики.

Сравнение результатов расчетов по уравнению (7) с экспериментальными данными показали, что частица отрывается от жидкости при смещении нижней линии контакта $a$ за экватор частицы, т. е. при таких амплитудах и частотах, при которых выполняется неравенство

$$a > 0. \quad (8)$$

Таким образом, просеивание частицы произойдет с геометрической вероятностью $P_s$ в том случае, когда выполняется условие (8).

Разработана феноменологическая модель вибротранспортирования слоя сырья высота, которой уменьшается в результате просеивания.

При вибротранспортировании в режиме с подбрасыванием отрыв сыпучего сырья от просеивающей поверхности по сравнению с частицей происходит с запаздыванием. И. Ф. Гончаревич учитывал запаздывание за счет введения дополнительной силы, пропорциональной силе тяжести, а А. Г. Червоненко считал эту силу зависящей от переносного ускорения [2]. В разработанной математической модели рассмотрен общий случай, при котором не вводятся указанные допущения относительно силы сопротивления отрыву сырья от просеивающей поверхности. Сопротивление на этапе полета моделировалось вязким трением, а инерционные свойства сосредоточенной массой. Предполагалось, что при падении слоя сырья на просеивающую поверхность происходит полная потеря импульса.

В результате решения дифференциальных уравнений получены зависимости, позволяющие определить скорость $V_f$ перемещения сырья при круговых и направленных колебаниях короба грохота, которые приведены в работах [2, 8].

Неизвестные параметры (коэффициент вязкости и сила сопротивления отрыву) определяются на основе замеров фазы отрыва и падения, поскольку эксперименты сравнительно простые, то это позволяет учесть влияние изменения толщины слоя на скорость вибротранспортирования. Для этого достаточно замерить фазы отрыва и падения при различных значениях высоты слоя сыпучего сырья, идентифицировать коэффициенты вязкости и силы сопротивления, рассчитать скорости и выполнить аппроксимацию, например, полиномом. В результате получим функцию, описывающую влияние высоты слоя на скорость вибротранспортирования.

Фазы отрыва и падения сыпучего сырья являются коррелированными случайными величинами, распределенными по нормальному закону [9, 10]. Учет влияния на скорость вибротранспортирования случайной природы фаз отрыва и падения выполнен методом Монте-Карло. Установлено, что скорость вибротранспортирования имеет отличный от нормального закон распределения. Пренебрежение этим фактом приводит к существенным погрешностям в определении технологических показателей.

Например, при грохочении щебня и вероятности просеивания 0,1 погрешность составляет 38 % [9, 10] .

Процесс грохочения существенно зависит от интенсивности сегрегации. Для анализа организации процесса грохочения предложено использовать такую характеристику марковской цепи, как поток вероятности $Q_v = P_i \pi_{ij}$ перехода из состояния $i$ в $j$ [2, 11]. Если сегрегация недостаточно интенсивна, то падает производительность за счет дефицита мелких частиц в контактном слое. Когда же сегрегация излишне интенсивна, возникает конкуренция частиц для просеивания, что так же приводит к снижению производительности [2, 11]. При согласованных потоках сегрегации и просеивания, сколько частиц просеялось, столько их и поступило из верхних элементарных слоев в контактный слой.

Критерием рационального вибровозбуждения просеивающей поверхности, при котором достигается максимальное извлечение за минимальное время, является равенство нулю разности между входящим и выходящими из контактного слоя потоков вероятностей при максимальном потоке вероятностей просеивания [2, 9] .

На основе полученных зависимостей (1–8) создана математическая программа «Кинетики 2».

Итак, разработана обобщенная модель кинетики вибрационного грохочения влажного сырья, учитывающая закономерности сегрегации, просеивания и вибротранспортирования.

Модель может быть использована для оптимизации процесса грохочения [12]. Рациональная организация процесса грохочения обеспечивается согласованием сегрегации и просеивания.

### *Литература*


1. Вайсберг Л. А., Рубисов Д. Г. Вибрационное грохочение сыпучих материалов: моделирование процесса и технологический расчет. – СПб: Механобр, 1994. – 47 с.
2. Надутый В. П., Лапшин Е. С. Вероятностные процессы вибрационной классификации минерального сырья. – Киев: Наукова думка, 2005. – 180 с.
3. Надутый В.П., Калиниченко В.В. Вибрационное грохочение горной массы повышенной влажности. – Днепропетровск: НГУ Украины. 2004. – 135 с.
4. Лапшин Е.С. Математическое моделирование процесса грохочения с использованием цепи Маркова // Збагачення корисних копалин: Наук. техн. зб. НГА України. – Дніпропетровськ, 1999. – № 5(46). – С. 30–34.
5. Надутый В.П., Лапшин Е.С. Математическое моделирование сегрегации при вибрационном грохочении влажного минерального сырья // Збагачення корисних копалин: Наук. техн. зб. НГА України. – Дніпропетровськ, 2008. – № 33(74). – С. 26–32.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1974. – 832 с.
7. Надутый В.П., Лапшин Е.С. Моделирование процесса просеивания влажного минерального сырья // Вісник національного технічного університету "ХПІ". – Харків, 2007.– №26. – С. 93 – 98.
8. Надутый В. П., Лапшин Е. С. Модельное представление виброперемещения сыпучего материала по ситу грохота // Вибрации в технике и технологиях: Всеукр. науч.-техн. журн. – Винница, 2001. – № 2(18). – С. 183–186.
9. Лапшин Е. С. Влияние на скорость вибротранспортирования при грохочении изменения толщины слоя сыпучего материала // Геотехнічна механіка: Межвід. зб. наук. праць Ін-та геотехнічної механіки ім. М. С. Полякова НАН України. – Дніпропетровськ, 2004. – Вип.50. – С. 123–128.
10. Лапшин Е. С. Вероятностная оценка скорости вибротранспортирования слоя сыпучего материала // Вибрации в технике и технологиях: Всеукр. науч.-техн. журн. – Винница, 2004. – № 3(35). – С. 64–67.
11. Лапшин Е. С. Вероятностный критерий согласования процессов сегрегации и просеивания при вибрационном грохочении // Вибрации в технике и технологиях: Всеукр. науч.-техн. журн. – Винница, 2002. – № 1(22). – С. 36–38.
12. Надутый В. П., Лапшин Е. С. Повышение эффективности вибрационного грохочения за счет применения программного обеспечения расчетов параметров процесса // Материалы V промышленной конф. с междунар. участ. и выставкой "Эффективность реализации научного, ресурсного и промышленного потенциала в современных условиях". – Славское, 2005. – С. 113–115.