

УДК 621.77

Михалевич В. М.

Краевский В. А.

Добранюк Ю. В.

(Винницький національний технічний університет)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ОСАДКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ

Математичний апарат, представлений у даній роботі, дозволяє описувати й вивчати закономірності зміни деформованого стану на вільній бічній поверхні циліндричних зразків при осадженні між плоскпаралельними плитами. Розроблений апарат необхідний для визначення напруженого стану і граничних деформацій. Сформульовано варіаційні задачі для визначення закону зміни швидкості деформації при гарячій осадці, при якому задана накопичена деформація досягається за найкоротший час та при якому за заданий час матеріал набуває найбільшої накопиченої деформації. Визначено, що розв'язок сформульованих варіаційних задач належить класу нестационарного деформування. Запропонований підхід використаний для визначення оптимальних режимів циклічної осадки із паузами.

The mathematical apparatus presented in this work, allows to describe and study laws of the deformed condition change on a free lateral surface of cylindrical billets during upsetting between plane-parallel plates. The developed apparatus is necessary for definition of the stress condition and limit deformations. Variation problems for definition of the strain rate law at hot upsetting at which the given strain is reached for the shortest time and at which for the given time the material acquires the greatest accumulated strain are formulated. It is defined, that the solution of the formulated variation problems belongs to a class of nonstationary deformation. The offered approach is used for definition of optimum modes cyclic upsetting with intervals.

Введение

Осесимметричная осадка цилиндрических образцов является не только распространенной технологической операцией, но и одним из способов лабораторных испытаний для определения важнейших технологических свойств материалов. Как известно [1-5], при осадке цилиндрических образцов из малопластичных материалов на боковой поверхности образуются трещины. Причем степень осадки, при которой появляются трещины, зависит от интенсивности бочкообразования на боковой поверхности. В свою очередь интенсивность бочкообразования определяется условиями трения на торцах заготовки [2, 5]. В работе [1] разработана экспериментально-аналитическая методика определения напряженно-деформированного состояния на боковой поверхности цилиндрических образцов при осесимметричной осадке между плоскими плитами. Отдельные части этой методики использовались и совершенствовались во многих работах, прежде всего в [2-5]. При этом развивая и совершенствуя, в первую очередь экспериментальную часть методики, а также применяя более сложные модели разрушения, авторы стремились упростить расчетную часть, что было, в некоторой степени, оправдано уровнем вычислительных средств того времени. В результате, по мнению авторов, представляющая научный и практический интерес аналитическая часть методики определения напряженно-деформированного состояния осталась фактически незамеченной.

Постановка задачи

Целью статьи является разработка информационных технологий определения деформированного состояния материала на свободной боковой поверхности цилиндрического образца при осадке между плоскими плитами.

Основная часть

На боковую поверхность цилиндрического образца в средней по высоте зоне наносится сетка. Сетка наносится типографским способом [1] либо с помощью алмазных отпечатков, выполненных на твердомере "Виккерс" [2]. По результатам измерений

искаженной делительной сетки на промежуточных стадиях деформирования устанавливается зависимость между осевой ε_z и окружной ε_φ деформациями

$$\varepsilon_z = f(\varepsilon_\varphi) \quad (1)$$

в виде таблично заданной функции. Деформации ε_z и ε_φ определяются как натуральные логарифмы отношений текущих размеров к начальным [1].

В работе [1] предложена аппроксимация зависимости (1) в виде решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2}{\varepsilon_\varphi^2 + m^2}, \quad (2)$$

где $m > 0$ – экспериментально определяемая константа. Уравнение (2) отражает следующие два важные граничные условия. В начальный момент, при $\varepsilon_\varphi = 0$ имеет место простое сжатие

$$\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} = -2. \quad (3)$$

С увеличением ε_φ , в связи с развитием бочкообразности боковой поверхности, отношение приращений осевой и окружной деформаций увеличивается (по абсолютной величине уменьшается), но на любой стадии осадки, в том числе и при неограниченном увеличении деформации имеет место следующее неравенство

$$\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} < -\frac{1}{2}. \quad (4)$$

Таким образом, в течение процесса осадки на свободной боковой поверхности должны выполняться условия

$$-2 \leq \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} < -\frac{1}{2}, \quad (5)$$

причем производная $\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi}$ монотонно увеличивается с ростом деформаций, что является

следствием постепенного увеличения бочкообразности боковой поверхности в процессе осадки цилиндрического образца.

Решением дифференциального уравнения (2), с учетом начального условия

$$\varepsilon_z|_{\varepsilon_\varphi=0} = 0, \quad (6)$$

получим

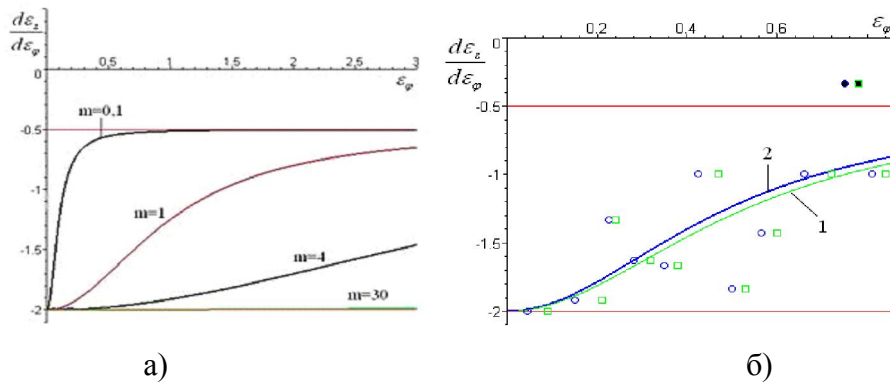
$$\varepsilon_z = -\frac{1}{2}\varepsilon_\varphi - \frac{3}{2}m \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon_\varphi}{m}\right). \quad (7)$$

Таким образом, сохраняя неизменными условия трения на торцах при осадке данного цилиндрического образца между плоскопараллельными плитами, но изменяя эти условия для разных образцов, будем экспериментально получать зависимости, которые могут быть аппроксимированы соотношением (7) при соответствующем подборе значения константы m . Здесь важно, что константа m полагается неизменной при описании результатов по испытанию данного образца. Графики, иллюстрирующие поведение соответствующих функций при различных значениях параметра аппроксимации m приведены на рис. 1 а).

Численные значения параметра m определяются на основании экспериментальных данных. На рис. 1 б) приведены результаты экспериментальных данных и их аппроксимация соотношением (2).

На каждом этапе деформирования по результатам измерения высоты и ширины делительной сетки определяются значения логарифмических деформаций $(\varepsilon_\varphi)_i, (\varepsilon_z)_i$. Ординаты экспериментальных точек, указанных на рис. 1 б) определялись как отношение

$\frac{((\varepsilon_z)_i - (\varepsilon_z)_{i-1})}{((\varepsilon_\phi)_i - (\varepsilon_\phi)_{i-1})}$; абсциссы определялись как $(\varepsilon_\phi)_i$ для точек, обозначенных квадратиками (кривая 1) и $0,5((\varepsilon_\phi)_i - (\varepsilon_\phi)_{i-1})$ (кривая 2).



а) расчет по соотношению (2) при различных значениях параметра m ;
б) определение параметра m методом наименьших квадратов, используя соотношение (2)

Рис. 1. - Графики изменения производной зависимости осевой деформации от окружной

Как видно из графика на рис. 1 б) одна точка выходит за пределы возможных значений (обозначена через \bullet или \blacksquare). Данную точку логично принять за выброс, после ее удаления на основании зависимости (7) методом наименьших квадратов получили значение параметра $m = 0,5$. Значения параметра m находили непосредственной минимизацией суммы квадратов отклонений с помощью стандартной команды дополнительного пакета Optimization системы Maple.

Следующей задачей данной работы является определение накопленной деформации на основании построенных зависимостей, обоснование преимущества данной меры в сравнении с интенсивностью логарифмических деформаций, а также выработка некоторых рекомендаций по упрощенному вычислению накопленной пластической деформации без существенной потери точности.

Накопленная пластическая деформация [1-7] определяется следующим образом

$$\varepsilon_u(t) = \int_0^t \dot{\varepsilon}_u(\tau) d\tau, \quad (8)$$

где t, τ – время; $\dot{\varepsilon}_u$ – интенсивность скоростей деформаций [1-5].

Переходя к параметрическому представлению [1] соотношения (7), получим

$$\begin{cases} \varepsilon_\phi = \operatorname{tg} x; \\ \varepsilon_z = -\frac{m}{2}(\operatorname{tg} x + 3x), \end{cases} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (9)$$

где x – параметр.

С учетом (9), после некоторого преобразования, выражение для накопленной деформации (8) примет вид

$$e_u(x, m) = m \int_0^x \sqrt{3 + \frac{1}{\cos^4(x)}} dx. \quad (10)$$

Интенсивность логарифмических деформаций

$$e_u(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{e_z^2(t) + e_z(t) \cdot e_\phi(t) + e_\phi^2(t)} \quad (11)$$

в данном случае определяется выражением

$$e_u(x, m) = m \sqrt{\operatorname{tg}^2(x) + 3x^2}. \quad (12)$$

В работе [8] показано, что накопленная деформация (8) с точностью до постоянного множителя равна длине дуги траектории деформаций в координатах e_z, e_ϕ, e_r , а интенсивность логарифмических деформаций (11) равна, с точностью до той же постоянной, длине радиус-вектора конечной точки указанной траектории. Строгое равенство между указанными мерами деформаций имеет место только для прямолинейных траекторий деформаций.

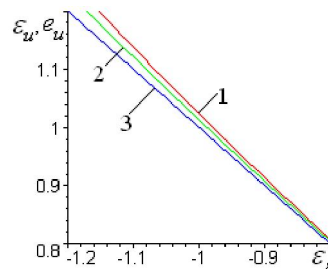
В свою очередь прямолинейные траектории порождаются процессами деформирования, при которых с ростом деформаций отношения приращений деформаций остаются неизменными. При осадке с бочкообразованием отношение приращений деформаций изменяется и, как было показано, может быть отражено, в частности, зависимостью (2). Различие в численных значениях величин накопленной деформации и интенсивности логарифмических деформаций, определенное на основе рассматриваемых в данной работе экспериментальных данных, представлено на рис. 2. Накопленная деформация мало отличается от интенсивности логарифмических деформаций для значений абсолютной величины осевой деформации не превышающей 0,6. С увеличением абсолютной величины осевой деформации и с уменьшением параметра m погрешность заметно увеличивается. Небольшое различие между накопленной деформацией и интенсивностью логарифмических деформаций, а также более простое выражение для вычисления последней, позволили авторам построить аппроксимацию для вычисления накопленной деформации, выраженную через элементарные функции [8]

$$m \cdot \int_0^x \sqrt{\cos^{-4} x + 3} dx = m \cdot \left[\sqrt{\operatorname{tg}^2(x) + 3} \cdot x^2 + h(x - x_0) \cdot \left(0,04305092296 \cdot (x - x_0) - 0,01108086209 \cdot (x - x_0)^2 + 0,8263531073 \cdot (x - x_0)^4 + 0,1620143791 \cdot (x - x_0)^6 \right) \right]. \quad (13)$$

Погрешность предложенной аппроксимации не превышает 0,08% для широкого диапазона изменения параметров m, x : $m \in [0,01; 20]$, $x \in [0; \pi/2 - 0,05]$.

Следует заметить, что представление в виде элементарной функции правой части соотношения (10), представляющего собой внешне негромоздкое выражение, является задачей не элементарной или, во всяком случае, не тривиальной. Это связано с тем, что данное соотношение представляет собой функцию двух аргументов, причем по одной из переменных является расходящимся несобственным интегралом второго рода.

Из данных, представленных на рис. 2, следует также, что величина накопленной деформации мало отличается и от радиус-вектора в координатах $\varepsilon_u - \varepsilon_z$.



1 – накопленная деформация (10), 2 – интенсивность логарифмических деформаций (12); 3 – $-\varepsilon_z$.

Рис. 2. - Зависимость накопленной деформации и интенсивности логарифмических деформаций при осадке от величины осевой деформации ($m = 0,5$)

Усилие, которое необходимо для выполнения процесса осадки образца, можно уменьшить, если использовать процесс горячей осадки. При этом материалы имеют лучшие пластические свойства, что позволяет достичь большей накопленной деформации. Учитывая

то, что процессы горячего деформирования требуют расхода энергии на нагрев образца, то при этом на первое место выходит задача интенсификации данного процесса: определение условий при которых необходимая деформация достигается за кратчайшее время.

Из экспериментальных исследований [1, 2, 3, 7] при горячем деформировании следует, что предельная до разрушения деформация, которую приобретает материал, зависит от скорости деформации. Если деформирование происходит с постоянной скоростью, то чем выше скорость деформации тем меньшую деформацию до разрушения воспринимает материал. В работах [1, 2] отмечается, что при деформировании с переменной скоростью предельная деформация зависит от закона изменения скорости деформации. В частности, даже применение самой простой двухступенчатой схемы может привести как к увеличению предельной деформации, так и к ее уменьшению по сравнению с деформированием с постоянной скоростью.

На основе скалярной модели накопления повреждений при горячем деформировании

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(t-\tau; I(\tau)) \cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau)) \cdot d\tau, \quad (14)$$

(где $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(0) = 0$, $\psi(t_*) = 1$; t_* – предельное время, соответствующее разрушению образца; t, τ – время; $\varphi(t-\tau, I(\tau))$ – ядро наследственности; f – некоторая функция) и с учетом зависимости накопленной деформации ε_u от скорости деформации $\dot{\varepsilon}_u$ (8) сформулировано две важные с практической точки зрения вариационные задачи изопериметрического типа. Первая задача формулируется так: определить закон изменения скорости деформации $\dot{\varepsilon}_u = \dot{\varepsilon}_u(t)$ при котором заданная накопленная деформация ε_* достигается за кратчайшее время t_* при условии, что $\psi(t_*) = 1$

$$\begin{aligned} t_* &= t_*(\dot{\varepsilon}_u(t)) \rightarrow \min, \\ \varepsilon_* &= \int_0^{t_*} \dot{\varepsilon}_u(\tau) \cdot d\tau, \\ \int_0^{t_*} \varphi(t_* - \tau; I(\tau)) \cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau)) \cdot d\tau &= 1. \end{aligned} \quad (15)$$

В связи с тем, что значение определенного интеграла нам известно, а минимизируется функционал, который является верхним пределом определенного интеграла, задача (15) не является классической задачей изопериметрического типа.

Формулирование второй задачи: определить закон изменения скорости деформации $\dot{\varepsilon}_u = \dot{\varepsilon}_u(t)$ при котором за заданное время t_* материал приобретает наибольшую деформацию ε_* при условии, что $\psi(t_*) = 1$

$$\begin{aligned} \varepsilon_* &= \int_0^{t_*} \dot{\varepsilon}_u(\tau) \cdot d\tau \rightarrow \max, \\ \int_0^{t_*} \varphi(t - \tau; I(\tau)) \cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau)) \cdot d\tau &= 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Анализ задачи (16) показал, что в такой общей постановке решения не существует. В данной постановке не учтено важное условие, которое из физических представлений об исследуемом процессе, учитывает то, что разрушение материала не может произойти до времени t_* , то есть

$$\int_0^t \varphi(t-\tau; I(\tau)) \cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau)) \cdot d\tau \leq 1, \quad \forall t \in (0, t_*). \quad (17)$$

При сужении области допустимых функций к классу кусочно-постоянных функций, в частности, для двухступенчатой схемы

$$\dot{\varepsilon}_u(t) = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{u1}, & 0 \leq t \leq t_1; \\ \dot{\varepsilon}_{u2}, & t_1 < t \leq t_*, \end{cases} \quad (18)$$

задача (16) с учетом (17) сведена к задаче нелинейного программирования

$$\begin{aligned} \varepsilon_* &= \dot{\varepsilon}_{u1} \cdot t_1 + \dot{\varepsilon}_{u2} \cdot (t_* - t_1) \rightarrow \max, \\ \left(\frac{t_*}{t_{*1}}\right)^n + \left(\frac{t_* - t_1}{t_{*2}}\right)^n - \left(\frac{t_* - t_1}{t_{*1}}\right)^n &= 1, \\ t_1 &\leq t_{*1}, \end{aligned} \quad (19)$$

в которой целевая функция зависит от трех неизвестных $\dot{\varepsilon}_{u1}, \dot{\varepsilon}_{u2}, t_1$.

Здесь $t_{*i} = t_{*c}(\dot{\varepsilon}_{ui})$, $i=1,2$; t_{*c} – известная функция, характеризующая свойства материала. С помощью метода множителей Лагранжа задача (19) сведена к задаче определения оптимального значения функции одного аргумента. Согласно полученному решению оптимальной является схема, для которой $\dot{\varepsilon}_{u1} > \dot{\varepsilon}_{u2}$. Приведенные результаты позволяют предположить, что оптимальные решения поставленных вариационных задач (15) и (16) существуют и для многих других классов допустимых функций. На основе вариационной задачи (16) и условия (17) рассмотрена многоступенчатая осадка осесимметричных образцов с паузами и ее частный случай, циклическая осадка с паузами, когда время деформирования и длительность пауз, а также скорость деформирования, являются фиксированными величинами на каждой ступени.

Выводы

Математический аппарат, представленный в данной работе, позволяет описывать и изучать закономерности изменения деформированного состояния на свободной боковой поверхности цилиндрических образцов при осадке между плоскопараллельными плитами. Разработанный аппарат необходим для определения напряженного состояния и предельных деформаций. Сформулированы вариационные задачи для определения закона изменения скорости деформации при горячей осадке, при котором заданная накопленная деформация достигается за кратчайшее время и при котором за заданное время материал приобретает максимальную накопленную деформацию. Установлено, что решение сформулированных вариационных задач принадлежит классу нестационарного деформирования. Предложенный подход использован для определения оптимальных режимов циклической осадки с паузами.

Литература

1. Смирнов-Аляев Г. А. Сопротивление материалов пластическому деформированию. Инженерные методы расчета операций пластической обработки материалов / Смирнов-Аляев Г. А. – М.—Л.: Машизг, 1961. – 463 с.
2. Огородников В. А. Деформируемость и разрушение металлов при пластическом формоизменении. – К.: УМК ВО, 1989. – 152 с.
3. Колмогоров В.Л. Напряжения, деформации, разрушение / В.Л. Колмогоров. М.: Металлургия. 1970. – 230с.
4. Пластичность и разрушение / Под ред. В.Л.Колмогорова. М.: Металлургия. 1977. - 336с.
5. Матвийчук В.А. Совершенствование процессов локальной ротационной обработки давлением на основе анализа деформируемости металлов: монография / В.А. Матвийчук, И.С. Алиев. – Краматорск: ДГМА, 2009. - 268 с. ISBN 978-966-379-317-7.
6. Лебедев А.А., Михалевич В.М. О выборе инвариантов напряженного состояния при решении задач механики материалов // Пробл. прочности. - 2003. - № 3. - С. 5-14.
7. Михалевич В.М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень /Вінниця: "УНІВЕРСУМ-Вінниця", 1998 - 195 с.
8. Михалевич В. М. Накопичена деформація та інтенсивність логарифмічних деформацій при осадці циліндричних зразків з бочкоутворенням/ Михалевич В. М., Добранюк Ю. В. // Обработка металлов давлением: сборник научных трудов. - Краматорск: ДГМА - 2009 - №1(20) - С.129-134.