

УДК 539.3

Юрков В.Н.

(Нежинский агротехнический институт, НУБиП Украины)

КОМПЛЕКСНЫЕ ПОДХОДЫ В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК С РАЗРЕЗАМИ-ТРЕЩИНАМИ

В роботі показано розвиток комплексних підходів до чисельного розв'язку складних задач теорії тріщин в оболонках. Розглядаються фізично, геометрично та фізично, а також конструктивно нелінійні теорії оболонок з розрізами-тріщинами. Показано вплив усіх видів нелінійностей на КИИ.

Development of complex approaches is in-process rotated to the numeral decision of intricate problems of theory of cracks in shells. It is examined physically, geometrically and physically, and also structurally nonlinear theories of shells with the cracks of cuts.

Введение

В настоящей работе развиваются, предложенные в [1–3] комплексные подходы, получившие теоретическое обоснование в [4], к расчету оболочек с разрезами-трещинами, описываемых очень сильно нелинейными теориями в двухмерной постановке, использующих модель Тимошенко. Рассматриваются три типа нелинейностей: физическая, геометрическая и физическая, а также конструктивная (появляется при деформации в результате изменения расчетной схемы оболочки с разрезом). Применяемые комплексные подходы: вариационный квадратурный нелинейно-энергетический подход конечных разностей (ВКНЭПКР) и вариационный квадратурный нелинейно-энергетический подход вариации трещины (ВКНЭПВТ). Эти подходы реализуются при помощи метода конечных элементов (МКЭ) в варианте перемещений.

Постановка задачи

Установление аналитической зависимости в МКЭ между силами действующими в узле и соответствующими им перемещениями. Эта связь осуществляется при помощи матрицы жесткости, которая выведена для треугольного конечного элемента ненулевой гауссовой кривизны геометрически и физической нелинейной теории из ортотропного материала, учитывающая поперечный сдвиг.

Основная часть

Численно-аналитическая, реализация аналитических подходов. Формулы, описывающие нелинейно-энергетические подходы к решению рассматриваемых задач в этой работе имеют следующий вид

$$V = \iint_S \int_0^{\bar{r}} q(\bar{r}) d\bar{r} dS, \quad (1)$$

где V — полная потенциальная энергия, определяемая при $L = \text{const}$, по сильно нелинейной теории оболочки, содержащей разрез-трещину, представляющую собой площадь ограниченную диаграммой нагрузка–смещение; $q(\bar{r})$ — функция, описывающая кривую нагрузка–смещение, \bar{r} — вектор перемещений точек срединной поверхности оболочки с разрезом; S — поверхность оболочки с разрезом, находящаяся под нагрузкой.

Отметим, что потенциальную энергию V оболочки с разрезом-трещиной из нелинейно-упругого материала, описываемого физически или геометрически и физически нелинейной теорией, можно представить в следующем виде

$$V = V_0 + V_{\text{ф.н.}} + V_1'' \quad \text{или} \quad V = V_0 + V_{\text{г.н.}} + V_{\text{ф.н.}} + V_1''', \quad (2)$$

где $V_{\text{ф.н.}}$ — энергия, характеризующая физическую нелинейность материала; V_1'' или V_1''' — избыточные энергии, определяемые по физически или геометрически и физически нелинейным теориям.

Численная реализация нелинейно-энергетического подхода заключается

в следующем: потенциальная энергия оболочки с разрезом, выраженная аналитической формулой (1), представляется в виде конечной двойной суммы, зависящей от количества конечных элементов, дискретизирующих оболочку, а площадь под диаграммой нагрузка–смещение, т.е. внутренний интеграл, вычисляется согласно квадратурной формулы Симпсона, тогда имеем

$$V = \sum_{k=1}^{\bar{n}} \sum_{j=1}^t \frac{h'}{6} (q_{i-1} + 4q_{i-1/2} + q_i), \quad (3)$$

где h' - шаг сетки; q_i - значение функции в i -ой точке; \bar{n}, t - количество элементов; $q(\bar{r})$ - аппроксимируется кубической сплайн-функцией, поэтому заметим, что в нашем случае по формуле парабол (Симпсона) площадь вычисляется совершенно точно [5], т.е. между интегралом по перемещениям и формулой Симпсона можно поставить знак равенства.

Интенсивность освобождающейся энергии G вычисляется согласно формулы, которую можно получить следующим образом: на основании математического подхода, используя энергетический принцип теории трещин [4], представим изменение потенциальной энергии и энергии разрушения, в результате продвижения трещины на величину dL , в следующем виде $GdL = V(L+dL) - V(L)$, где $V(L)$ - выражается математическими соотношениями (2) и представляя $V(L+dL)$ в виде ряда Тейлора, т.е.

$V(L) + \frac{\partial V}{\partial L} dL + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial L^2} (dL)^2 + \dots$, удерживая члены порядка ниже, чем $(dL)^2$ имеем, после соответствующих математических операций, формулу:

$$G = V_L \quad (4)$$

Коэффициент интенсивности напряжений при нормальном отрыве (K_I) для ортотропного материала оболочки с разрезом-трещиной определяем по формуле

$$G_I = K_I^2 (A_{11} A_{22})^{1/2} \left[\left(\frac{A_{22}}{A_{11}} \right)^{1/2} + \frac{2A_{12} + A_{21}}{2A_{11}} \right]^{1/2}, \quad (5)$$

где A_{ij} ($i = 1, 2; j = 6$) — упругие характеристики материала [6].

Для оболочек с разрезом-трещиной, собранных из трансверсально-изотропных или изотропных слоев,

$$G_I = K_I^2 / E \quad (6)$$

Таким образом, задачи расчета оболочек с разрезами-трещинами сводятся к определению амплитуды коэффициента K_I .

Рассмотрим физически нелинейную однослойную изотропную квадратную в плане свободно опертую нелинейчатую оболочку, содержащую разрез-трещину в центре. Геометрические и физические характеристики оболочки с разрезом, изображенной на рис. 1, следующие: $h = 0,01$ м, $R = 0,20$ м, $a = 0,30$ м, $f = 0,0677$ м, $0 \leq v \leq 0,5$. На оболочку действует равномерно распределенная нормальная нагрузка интенсивностью q_n .

На рис. 1 представлены графики зависимости коэффициента K_I от параметра L/a . Полуось симметрии оболочки разбивалась на 13 и 25 узлов. Причем при разбивке полуоси оболочки на 13 узлов коэффициент K_I подсчитывался на основании ВКНЭПКР, а при разбивке ее на 25 узлов - ВКНЭПКР и ВКНЭПВТ, чем и подтверждалась точность и сходимость численных результатов. Относительная погрешность между соответствующими значениями по которым построены графики при $n = 13$ и $n = 25$ узлов при использовании ВКНЭПКР не превышает 6 %, а при $n = 25$ узлов, используя ВКНЭПКР и ВКНЭПВТ, - не более 3 %. Сплошными линиями изображены графики, полученные при ширине разреза $C_0 = 8 \cdot 10^{-5}$ м, а штриховыми линиями показаны графики, построенные при $C_0 = 0$. Относительная погрешность между значениями соответствующих графиков менее 4 %.

Численный эксперимент показал, что смыкание берегов разреза-трещины не существенно влияет на точность комплексных подходов, а также и то, что предложенные и реализованные в этой работе комплексные подходы ВКНЭПКР и ВКНЭПВТ дают высокую точность и хорошую сходимость численных результатов для практических расчетов.

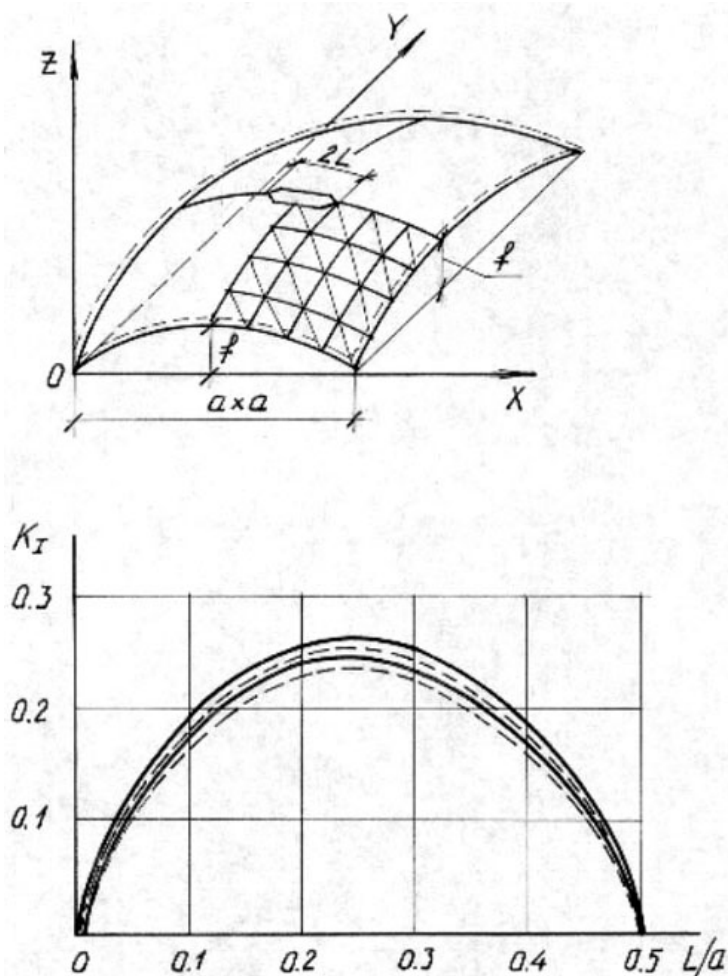


Рис. 1. - Обиций вид оболочки с разрезом-трещиной и график, иллюстрирующий зависимость КИИ от полудлины разреза.

Рассмотрим геометрически и физически нелинейную однослойную квадратную в плане свободно опертую нелинейчатую оболочку, содержащую три случая расположения разреза: I — в центре, II — с боку, III — коллинеарно с обеих сторон. Нелинейно-упругий материал оболочки может обладать изотропными, трансверсально-изотропными и ортотропными свойствами. Геометрические и физические характеристики оболочки с разрезами — как и в предыдущем примере.

Расчет представлен в виде графиков, изображенных на рис. 2. Методы вычисления значений коэффициентов K_I для I и III случаев расположения разреза-трещины и всех свойств материала, а также способ разбивки полуосей симметрии оболочки на конечные элементы аналогичны вышеописанному примеру. Для II случая расположения разреза в оболочке ось симметрии разбивалась на то же количество узлов, что и в I и III случаях. Для всех ситуаций разреза относительная погрешность между значениями соответствующих графиков составляет не более 6 %.

На рис. 2 изображены графики, представляющие зависимость коэффициента K_I от параметра E/μ' , где μ' — характеризует трансверсальность по толщине оболочки, при $h/L = 1$. На основании этих графиков можно сделать вывод, что на амплитуду коэффициента

K_I оказывает существенное влияние трансверсальность по толщине оболочки.

Определим влияние степени ортотропии E_x/E_y на коэффициент K_I . Результаты расчета представим в виде таблицы 1 ($h/L = 1$, 1 — верхние числа получены при $n = 13$ узлов, а 2 — нижние — при $n = 25$ узлов).

Таблица 1

Влияние степени ортотропии E_x/E_y на коэффициент K_I

E_x/E_y	2,0	5,0	10,0	20,0	40,0	60,0
1.	0,385	0,387	0,384	0,385	0,381	0,385
2.	0,406	0,409	0,408	0,401	0,405	0,406

Из анализа данных таблицы следует, что степень ортотропии не влияет на коэффициент K_I . Имеющая место относительная погрешность между расчетами относится к вычислительной погрешности и влиянию густоты сетки.

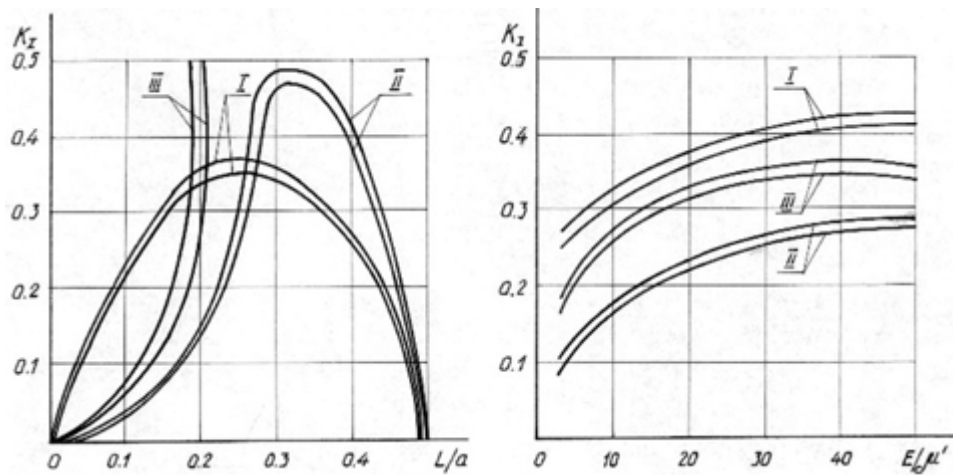


Рис. 2. - Графики, иллюстрирующие зависимость КИН от полудлины разреза и трансверсальности по толщине оболочки для трех случаев расположения разрез-трещин.

Выводи

Настоящая работа показала простоту с математической точки зрения и эффективность комплексных подходов в задачах расчета сложнейших краевых задач нелинейной механики трещин в оболочках. Эти подходы трудно переоценить в решении практических задач оболочечных конструкций, содержащих трещины.

Литература

1. Юрков В.Н. Энергетический подход к решению нелинейных краевых задач неклассической теории анизотропных слоистых оболочек с разрезами-трещинами / В.Н. Юрков // Прикл. механика и техн. физика. - 1994. - №3. - С. 131–135.
2. Цурпал И.А. Юрков В.Н. Численное решение задач адгезионного разрушения оболочек, содержащих трещины-разрезы // Науковий вісник Національного аграрного університету. - 2003. Вип. 60. - С. 334–339.
3. Цурпал И.А. Юрков В.Н. Исследование погрешностей комплексных подходов к расчету оболочек с разрезами-трещинами // Науковий вісник Національного аграрного університету. - 2005. - № 80, ч. 2. - С. 333–337.
4. Юрков В.Н. Дифференциальный принцип теории трещин. // Вібрація в техніці та технологіях. - №3 (45). - 2006. - С. 93–97.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989. - 430 с.
6. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. - М.: Наука, 1974. - 448 с.