Дубчак В.М.
к.т.н., доц.

Вінницький національний аграрний університет

Dubchak V.

Vinnytsia National Agrarian University

УДК 532.11

ВСТАНОВЛЕННЯ УМОВ ЕФЕКТИВНОГО ПОКРИТТЯ ПЛОЩЕЮ КРУГА ПЛОЩІ КВАДРАТА ТА ДЕЯКІ ВИПАДКИ УЗАГАЛЬНЕННЯ

У даній роботі досліджується питання оптимального, екстремального (мінімального) покриття площі однієї плоскої фігури, а саме, квадратом (прямокутником) площі іншої плоскої геометричної фігури, як то кругом(еліпсом). Отримано значення деякої функції, що визначає різницю площ неспівпадіння наведених у перетині геометричних фігур, у першому випадку функція є залежною від одного змінного аргументу, в другому випадку – від двох аргументів, в обох випадках проведено дослідження на екстремальність даної функції, показано, що в найденій точці екстремуму функція, що визначає неспівпадіння площ фігур, набуває мінімального значення. Встановлені умови такого екстремально-мінімального покриття однієї площі відповідно іншою площею, приведено рисунки для кращого розуміння вирішення поставленої задачі, зроблено висновки, в якості яких приведено значення шуканих аргументів, коли відповідна функція набуватиме мінімальних значень.

Ключові слова: *площа круга(еліпса) та його частин, площа квадрата (прямокутника) та його частин, екстремальність (мінімальність) функцій однієї та декількох змінних.*

Постановка проблеми. Актуальною як з точки зору теорії так із ряду конкретних практичних застосувань є задача ефективного екстремального (мінімального) покриття однієї плоскої геометричної фігури іншою [1-7], зокрема, покриття площею круга площі іншої за геометрією фігури, такої як квадрат (рис.1). В якості основного критерію такого ефективного покриття однієї фігури іншою пропонується логічно обрати такий показник як мінімальна площа [1,2,6], по якій вказані геометричні фігури не співпадають. Випадком більш загальної постановки аналогічної задачі є ефективне (мінімальне) покриття площею еліпса відповідної площі прямокутника (рис.2).

Методи дослідження. В якості основного критерію такого ефективного покриття однієї фігури іншою пропонується логічно обрати такий показник як мінімальна площа [1,2,6], по якій вказані геометричні фігури не співпадають. Випадком більш загальної постановки аналогічної задачі є ефективне (мінімальне) покриття площею еліпса відповідної площі прямокутника (рис.2).

Виклад основного матеріалу дослідження. 1. Нехай маємо квадрат з довжиною його сторони, рівною
$OA = 2a$ (рис.1).
Цей квадрат накриває площу круга радіуса
$OA = ON = R.$ Координати точки N є залежними від кута β, як це зображено на рисунку, а сама точка N формує в межах перших 45° дві області площ S_1 та, S_2, де приведені геометричні фігури не співпадають. Сумарна площа, по якій не співпадають в межах перших 45° фігури, визначається як $S = S_1 + S_2$. Кожен із двох приведених доданків є значенням відповідної функції, залежної від кута β.

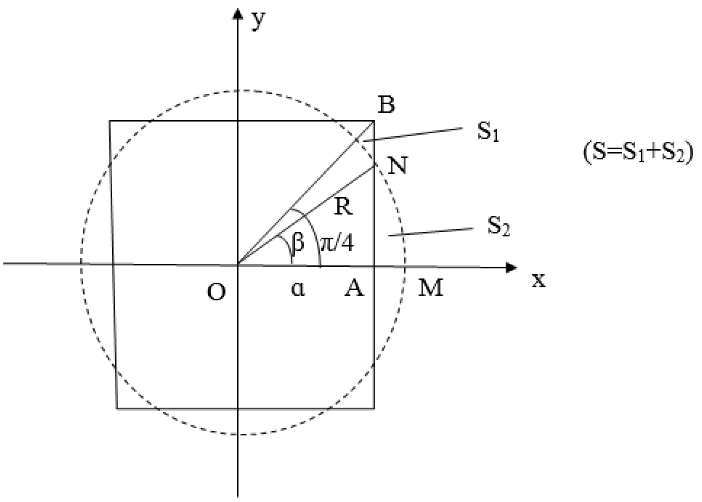

Рис. 1. Покриття площі круга квадратом, визначення невідомого аргументу β, від якого залежить величина площі S, по якій не співпадають площі даних фігур

Тут мають місце умови: $x = a \Rightarrow r\cos\varphi = a, \cos\varphi = \dfrac{a}{r}$, r, φ – полярні координати довільних точок відповідних площ, по яким фігури не співпадають, при цьому $\cos\beta = \dfrac{a}{\mathrm{R}}$. Встановимо значення площ обох доданків шуканої площі S. Маємо:

$$S_1 = \iint\limits_{D_1} r dr d\varphi = \int\limits_{\beta}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{R}^{\frac{a}{cos\varphi}} r dr = \int\limits_{\alpha}^{\pi/4} \frac{r^2}{2}\Bigg|_{R}^{\frac{a}{cos\varphi}} d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{\beta}^{\pi/4} \left(\frac{a^2}{\cos^2\varphi} - R^2\right) d\varphi = \frac{1}{2}(a^2 tg\varphi - R^2\varphi)\Big|_{\beta}^{\pi/4} =$$

$$\frac{1}{2}(a^2 - R^2\frac{\pi}{4} - (a^2 tg\beta - R^2\beta)) = \frac{1}{2}(a^2(1 - tg\beta) - R^2(\frac{\pi}{4} - \beta)) = \frac{1}{2}(R^2\cos^2\beta(1 - tg\beta) -$$

$$R^2(\frac{\pi}{4} - \beta)) = \frac{R^2}{2}(\cos^2\beta - \sin\beta\cos\beta - \frac{\pi}{4} + \beta);$$

$$S_2 = \iint\limits_{D_2} r dr d\varphi = \int\limits_{0}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\frac{a}{\cos\varphi}}^{R} r dr = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\beta} r^2\Bigg|_{\frac{a}{\cos\varphi}}^{R} d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\beta}\left(R^2 - \frac{a^2}{\cos^2\varphi}\right) d\varphi = \frac{1}{2}(R^2\varphi -$$

$$a^2 tg\varphi)\Big|_{0}^{\beta} = \frac{1}{2}R^2(\beta - \cos^2\beta tg\beta) = \frac{1}{2}R^2(\beta - \cos\beta\sin\beta);$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{R^2}{2}(\cos^2\beta - 2\sin\beta\cos\beta + 2\beta - \frac{\pi}{4}).$$

При пошуку екстремального (мінімального) значення функції S знаходимо першу похідну цієї функції по її аргументу β:

$$S'_{\beta} = -R^2\sin\beta\cos\beta - \frac{1}{2}R^2 \cdot 2\cos 2\beta + \mathrm{R}^2 = 0.$$

Звідки маємо тригонометричне рівняння стосовно шуканого кута β, а саме: $2\sin^2\beta - \sin\beta\cos\beta = 0 \Rightarrow$

Оскільки

$$\sin\beta \neq 0 \Rightarrow tg\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = arctg\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\beta=\cos(arctg\frac{1}{2})=\frac{1}{\frac{1}{\cos(arctg\frac{1}{2})}}=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2(arctg\frac{1}{2})}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\frac{2}{\sqrt{5}};$$

Таким чином $\cos\beta=\frac{a}{R}=\frac{2}{\sqrt{5}};$

$$S''_{\beta\beta}=R^2(-\cos2\beta+2\sin2\beta)=R^2(\sin^2\beta-\cos^2\beta+4\sin\beta\cos\beta)=$$
$$=R^2(\frac{1}{5}-\frac{4}{5}+4\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=R^2\frac{5}{\sqrt{5}}>0.$$

Дана нерівність вказує про те, що знайдене значення кута β в межах перших 45° забезпечує мінімальне значення функції S. Це значення даної функції дорівнює:

$$S\Big|_{\beta=arctg\frac{1}{2}}=\frac{R^2}{2}(\cos^2\beta-2\sin\beta\cos\beta+2\beta-\frac{\pi}{4})=\frac{R^2}{2}(\frac{4}{5}-2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+2\cdot arctg\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4})=$$
$$=\frac{R^2}{2}(2arctg\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{5}{8}a^2(2arctg\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}).$$

Оскільки в межах 360° площа, по якій мінімально не співпадатимуть приведені геометричні фігури, буде у 8 разів більшою, то загальна сумарна площа дорівнюватиме: $4R^2(2arctg\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4})=5a^2(2arctg\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}).$

2. Розглянемо дещо більш загальний випадок суті попередньої задачі, а саме принципи ефективного(мінімального) покриття площі, обмеженої дугою еліпса, і відповідного прямокутника, що накриває попередню плоску область (рис. 2).

Рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, це рівняння можемо задати криволінійними координатами:

$$\begin{cases}x=ar\cos\varphi\\ y=br\sin\varphi\ .\\ 0\le r\le1\end{cases}$$

З іншого боку маємо прямокутник, як це $x=ar\cos\varphi$ $y=br\sin\varphi$ показано на рис. 2, зі сторонами, відповідно, $2m\times2n$. Проаналізуємо задачу в межах першої чверті $(x\ge0, y\ge0)$ і в підсумку узагальнимо результати, користуючись очевидною симетрією в інших чвертях координатної площини.

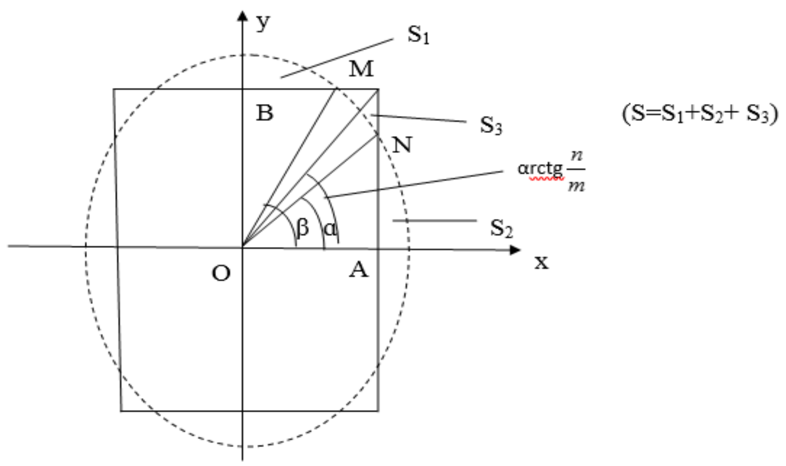

Рис. 2. Покриття площі, обмеженої дугою еліпса прямокутником, визначення невідомих аргументів α та β, від яких залежить величина площі S, по якій не співпадають площі даних фігур

Сумарну площу S, по якій дані геометричні фігури не співпадатимуть в межах першої чверті, запишемо сумою трьох доданків, як це показано на рис. 2, тобто $S = S_1 + S_2 + S_3$. Кут між діагоналлю прямокутника та додатнім напрямком осі OX дорівнює $arctg\frac{n}{m}$. Точки N та M є точками перетину дуги в еліпсі з відповідними сторонами прямокутника, радіус-вектори яких нахилені під кутами α та β до додатного напрямку осі OX, тобто координати даних точок є залежними від значень введених кутів.

Маємо очевидні співвідношення:

$$OA = x = m = ar\cos\varphi,$$

$$OB = y = n = ar\sin\varphi.$$

$$S_1 = \int\limits_{\beta}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{1} abrdr - \frac{1}{2}n^2 tg(\frac{\pi}{2} - \beta) = \frac{1}{2}ab(\frac{\pi}{2} - \beta) - \frac{1}{2}n^2 ctg\beta.$$

$$S_2 = \frac{1}{2}ab\alpha - \frac{1}{2}n^2 tg\alpha$$

$$S_3 = \int\limits_{\beta}^{arctg\frac{n}{m}} d\varphi \int\limits_{1}^{\frac{m}{a\cos\varphi}} abrdr + \int\limits_{arctg\frac{n}{m}}^{\beta} d\varphi \int\limits_{1}^{\frac{n}{b\sin\varphi}} abrdr = \frac{1}{2}ab \int\limits_{\alpha}^{arctg\frac{n}{m}} (\frac{m^2}{a^2\cos^2\varphi} - 1)d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2}ab \int\limits_{arctg\frac{n}{m}}^{\beta} (\frac{n^2}{b^2\sin^2\varphi} - 1)d\varphi = \frac{1}{2}ab(\frac{m^2}{a^2}tg\varphi - \varphi)\Big|_{\alpha}^{arctg\frac{n}{m}} + \frac{1}{2}ab(-\frac{n^2}{b^2}ctg\varphi - \varphi)\Big|_{arctg\frac{n}{m}}^{\beta} =$$

$$= \frac{1}{2}ab(\frac{mn}{a^2} + \frac{mn}{b^2} + \alpha - \beta - \frac{m^2}{a^2}tg\alpha - \frac{n^2}{b^2}ctg\beta).$$

Таким чином сумарна площа S, по якій не співпадають приведені геометричні фігури, і значення якої є величиною залежною від двох введених кутів α та β буде наступною:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2}ab(\frac{\pi}{2} - \beta) - \frac{1}{2}n^2 ctg\beta + ab\alpha - \frac{1}{2}m^2 tg\alpha + \frac{1}{2}ab(\frac{mn}{a^2} + \frac{mn}{b^2} +$$

$$+ \alpha - \beta - \frac{m^2}{a^2}tg\alpha - \frac{n^2}{b^2}ctg\beta).$$

В підсумку маємо деяку функцію S, залежну від двох аргументів α та β, яку досліджуємо на екстремальність (мінімальність):

$$\begin{cases} S'_\alpha = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2 b}{a\cos^2\alpha} = 0 \\ S'_\beta = -\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{\sin^2\beta} - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2 a}{b\sin^2\beta} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Щодо значень тригонометричних функцій шуканих кутів маємо наступні співвідношення:

$$\begin{cases} \cos^2\alpha = \frac{m^2(a+b)}{2a^2 b} \\ \sin^2\beta = \frac{n^2(a+b)}{2ab^2} \end{cases}, \qquad \begin{cases} \cos\alpha = \frac{m}{a}\sqrt{\frac{a+b}{2b}} \\ \sin\beta = \frac{n}{b}\sqrt{\frac{a+b}{2a}} \end{cases}.$$

Ефективне значення величини площі, по якій спостерігається відмінність між площами вказаних у п. 2 геометричних об'єктів, визначається наступним чином :

$$S^* = 4\cdot[\ \frac{1}{2}ab\cdot\arccos(\frac{n}{b}\sqrt{\frac{a+b}{2a}}) - \frac{1}{2}n^2\frac{\sqrt{1-\frac{n^2(a+b)}{2ab^2}}}{\frac{n}{b}\sqrt{\frac{a+b}{2a}}} + ab\cdot\arccos(\frac{m}{a}\sqrt{\frac{a+b}{2b}}) -$$

$$-\frac{1}{2}m^2\frac{\sqrt{1-\frac{m^2(a+b)}{2a^2b}}}{\frac{m}{a}\sqrt{\frac{a+b}{2b}}} + \frac{1}{2}ab(\frac{mn}{a^2} + \frac{mn}{b^2} + \arccos(\frac{m}{a}\sqrt{\frac{a+b}{2b}}) -$$

$$-\arccos(\frac{n}{b}\sqrt{\frac{a+b}{2a}}) - \frac{m^2}{a^2}\frac{\sqrt{1-\frac{m^2(a+b)}{2a^2b}}}{\frac{m}{a}\sqrt{\frac{a+b}{2b}}} - \frac{n^2}{b^2}\frac{\sqrt{1-\frac{n^2(a+b)}{2ab^2}}}{\frac{n}{b}\sqrt{\frac{a+b}{2a}}})\ ]$$

Тут використано тригонометричну тотожність: $\arccos\xi = \frac{\pi}{2} - \arcsin\xi$ і враховано факт того, що площа, по якій не співпадають вказані фігури, формується в усіх чвертях координатної площини, тобто з'являється додатковий множник 4.

Наслідок 1. Якщо прямокутник як частинний випадок перетвориться у квадрат, тобто $m = n = a$, $a = b = R \Rightarrow$ тоді $\cos\alpha = \frac{a}{R}$, і ми маємо частинний результат п.1.

Наслідок 2. Випадок ефективного екстремального (мінімального) взаємних розташувань площі круга радіуса R з прямокутником $2m\times 2n$ досягається з умови: $a = b = R$, тоді маємо наступні співвідношення

$$\begin{cases}\cos\alpha = \frac{m}{R} \\ \sin\beta = \frac{n}{R}\end{cases},$$

що надає можливість встановлення значень невідомих кутів α та β .

Висновки. Результати проведених досліджень по пошуку умов мінімальної різниці у покритті площі однієї плоскої геометричної фігури іншою площею можуть знайти своє відображення та застосування у різноманітних системах технічного зору, навігаційних системах, задачах екстремально - ефективного застосування площ сільськогосподарських угідь, тощо.

Список літератури

1. Ахтершев С.П. Задачи на максимум и минимум / С.П. Ахтершев // – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 192 с.
2. Беляева Э.С. Экстремальные задачи / Э.С. Беляева, В.М. Монахов // – М.: Просвещение, 1977. – 64 с.
3. Габасов Р.Ф. Экстремальные задачи в современной науке и приложениях / Р.Ф. Габасов // Соровский образовательный журнал. – 1997. – №6. – С. 115–120.
4. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин // –М.: Физматгиз, 1985, с119-158.
5. Галеев Э.М., Краткий курс теории экстремальных задач / Э.М., Галеев, В.М. Тихомиров // Учеб. пособие. –М.: Изд-во МГУ, 1989. –203 с.
6. БронштейнІ. М. Довідник з математики для інженерів і учнів втузів / І.М. Бронштейн, К.А. Семендяєв // – М.: Наука, 2007. – 708с
7.Васильєв Ф.П. Чисельні методи розв'язання екстремальних задач / Ф.П. Васильєв // – М.: Наука, 2002. –415с.

Список джерел у транслітерації

1. Akhtershev, S.P.(2005) Tasks for maximum and minimum, BHV-Petersburg, - 85-98. [in Rassian].

2. Belyaeva, E.S.(1977) Extreme tasks, Moscow: Enlightenment, - 45-53. [in Rassian].

3. Gabasov, R.F.(1997) Extreme problems in modern science and applications, Soorov educational journal. - №6. - 115-120. [in Rassian].

4. *Pontrjagin, L.S.(1985) Mathematical theory of optimal processes -M .: Fizmatgiz, 119-158,* [in Rassian].
5. *Galeev, E.M., Tikhomirov V.M.(1989) Brief course of the theory of extreme problems Study. allowance -M .: Izvst. Of Moscow State University,. -131-142,* [in Rassian].
6. *Bronstein, I.M.(2007) Mathematical Reference for engineers and students of the Institute - M .: Nauka. – 563-585,* [in Rassian].
7. *Vasiliev, F.P. (2002) Numerical methods for solving extreme problems. - M .: Nauka. -327-339.* [in Rassian].

Установление условий эффективного покрытия площадью круга площади квадрата и некоторые случаи обобщения

Аннотация: *В данной работе исследуется вопрос оптимального, экстремального (минимального) покрытия площади одной плоской фигуры, а именно, квадратом (прямоугольником) площади другой плоской геометрической фигуры, как то кругом (эллипсом). Получено значение некоторой функции, определяющей разницу площадей несовпадений приведенных в пересечении геометрических фигур, в первом случае даная функция зависит от одного переменного аргумента, во втором случае-от двух аргументов, в обоих случаях проведено исследование на экстремальность данной функции, показано, что в найденой точке экстремума функция, определяющая несовпадение площадей фигур, приобретает минимального значения. Установлены условия такого экстремально-минимального покрытия одной площади соответственно другой площадью, приведены рисунки для лучшего понимания постановки и решения поставленной задачи, сделаны выводы, в качестве которых приведены значения искомых аргументов, когда соответствующая функция приобретает минимальных значений.*

Ключевые слова: *Площадь круга (эллипса) и его частей, площадь квадрата (прямоугольника) и его частей, экстремальность (минимальность) функций одной и нескольких переменных.*

Establishing the conditions for effective coverage with the area of the square of the square and some cases of generalization

Summary: *In this paper, the problem of optimal, extreme (minimal) coverage of the area of one flat figure, namely, a square (rectangle) of the area of another flat geometric figure, as circle (ellipse), is investigated. The value of some function that determines the difference between the areas of non-conformities of the intersection of geometric figures is given in the first case, this function depends on one variable argument, in the second case-two arguments, in both cases a study was conducted on the extremality of a given function, it was shown that at the found point The extremum function, which determines the discrepancy of the areas of figures, acquires a minimal value. The conditions of such an extremally-minimal covering of one area correspondingly to another area are established, the figures are given for a better understanding of the statement and the solution of the problem, the conclusions are drawn, in which quality the values of the required arguments are given, when the corresponding function acquires the minimum values.*

Keywords: *Circle (ellipse) and its parts, square (rectangle) and its parts, extremity (minimum) of functions of one and several variables.*

Відомості про авторів

Дубчак Віктор Миколайович – кандидат технічних наук, доцент кафедри «математики, фізики та комп’ютерних технологій» Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3,м Вінниця, 21008, Україна, e-mail: dubchak@vsau.vin.ua).

Дубчак Виктор Николаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры «математики, физики та компьютерных технологий» Винницького национального аграрного университета (ул. Солнечная, 3,м Винница, 21008, Украина, e-mail: dubchak@vsau.vin.ua).

Dubchak Viktor – PhD, Associate Professor of the department Mathematics, physics and computer technologies of the Vinnytsia National Agrarian University (Sonyachna St. 3, Vinnytsia, 21008, Ukraine e-mail: dubchak@vsau.vin.ua).