Електронне наукове фахове видання "**Ефективна економіка**" включено до переліку наукових фахових видань України з питань економіки
(Наказ Міністерства освіти і науки України від 29.12.2014 № 1528)
www. economy.nayka.com. ua | № 2, 2018

УДК 519.816:004.89

О. В. Зелінська,
к. т. н., старший викладач кафедри моделювання та інформаційних технологій в економіці,
Вінницький національний аграрний університет, м. Вінниця

ОСОБЛИВОСТІ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В РОЗПЛИВЧАСТИХ УМОВАХ ФУНКЦІОНУВАННЯ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

O. V. Zelinska,
Candidate of Technical Sciences,
Senior Lecturer of the Department of Modeling and Information Technologies in Economics,
Vinnytsia National Agrarian University, Vinnytsia

FEATURES OF DECISION-MAKING IN VAGUE CONDITIONS FUNCTIONING OF CONTROL SYSTEMS

Прийняття рішень є невід'ємною частиною будь-якої систем управління. Завдяки процесу прийняття рішення відбувається координація діяльності системи. Рішення є найбільш складними, які приймаються в умовах невизначеності. На практиці у багатьох випадках ухвалення рішень відбувається в таких умовах, коли цілі, обмеження і наслідки можливих дій точно не відомі. Для поводження з неточно відомими величинами звичайно застосовується апарат теорії вірогідності, а також методи теорії ухвалення рішень, теорії управління і теорії інформації. Таким чином, інтуїтивно приймається припущення, що неточність незалежно від її природи, може бути отожнена з випадковістю. Це розрізняти випадковість (randomness) і розпливчастість, причому остання є основним джерелом неточності в багатьох процесах ухвалення рішень, тому проаналізовано підходи та представлено модель, яка усуває відмінності між цілями і обмеженнями і дозволяє досить просто сформуватина їх основі рішення.

Decision making is an integral part of any management system. Thanks to the decision-making process, the system's coordination is being coordinated. Solutions are the most complex, which are accepted in uncertainty. In practice, in many cases, the decision-making occurs in such conditions, when the goals, limitations and consequences of possible actions are not exactly known. For dealing with inaccurate known values, the apparatus of probability theory is usually used, as well as methods of decision theory theory, control theory and information theory. Thus, it is intuitively assumed that inaccuracy, irrespective of its nature, can be overshadowed by chance. This is to distinguish randomness and vagueness, the latter being the main source of inaccuracy in many decision-making processes, therefore approaches are analyzed and a model is introduced that eliminates differences between goals and constraints and allows one to easily formulate a solution based on them.

Ключові слова: *прийняття рішення, розпливчасті умови, багатокрокові процеси, обмеження, альтернатива.*

Keywords*: decision-making, vague conditions, multi-step processes, restriction, alternative.*

Постановка проблеми. Приймається припущення, що неточність незалежно від її природи, може бути отожнена з випадковістю. Це потрібно розрізняти *випадковість* і *розпливчастість*, причому розпливчастість є основним джерелом неточності в багатьох процесах ухвалення рішень, тому проаналізовано підходи та представлено модель, яка усуває відмінності між цілями і обмеженнями і дозволяє досить просто сформуватина їх основі рішення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Вивченням питання прийнятття рішень в розпливчастих умовах займалися такі видатні вчені як Беллман Р., Заде Л. А., Жук К.Д., Дехтяренко В.А., Сагинашвили О.Н. Глушков В.М., Кунцевич В.М., Лисогор В.М. та ін.

Формулювання цілей статті. Метою статті є дослідження фундаментальних понять розпливчатої мети, розпливчатого обмеження, розпливчатого рішення, а також їх дослідженню використання у багатокрокових процесах ухвалення рішень.

Виклад основного матеріалу дослідження

Що ж таке розпливчастість ухвалення рішень. Під розпливчастістю маємо на увазі той тип неточності, який пов'язаний з розпливчастими множинами, тобто з класами, в яких не можна визначити різку межу, що відділяє елементи, що належать даному класу від елементів, що не належать до нього. Наприклад, клас *зелених предметів* є розпливчаста множина. Розпливчастими є також класи об'єктів, що характеризуються такими часто вживаними прикметниками, як «великий», «маленький», «істотний», «значний», «важливий», «серйозний», «простий», «точний», «наближений» і т.п. Фактично більшість класів у реальному світі, на противагу поняттю класу або множини в математиці, не має чітких меж, які відділяли б об'єкти, що входять в клас від об'єктів, що не входять до нього. У зв'язку з цим важливо відзначити, що в розмові між людьми розпливчасті твердження, типу: «Джон на декілька *дюймів* вищий за Джима», «*x* значно більше *y*», «У корпорації X *прекрасні перспективи*», «На фондовій біржі спостерігається *різкий спад*»,- *все ж таки* несуть значну інформацію, не дивлячись на неточність виділених курсивом слів. Більше того, на наш погляд одна з основних відмінностей між людським інтелектом та «штучним інтелектом» ЕОМ полягає у тому, що, на відміну від сучасних комп'ютерів, люди мають здатність оперувати розпливчастими поняттями і виконувати розпливчасті інструкції.

У чому полягає відмінність між випадковістю і розпливчастістю? По суті, випадковість пов'язана з невизначеністю, що стосується належності або неналежності певного об'єкту до нерозпливчастої множини. Поняття ж розпливчастості стосується класів, в яких можуть бути різні градації ступеня належності, проміжні між повною належністю і неприналежністю об'єктів до даного класу.

Наприклад, розпливчасте твердження «Корпорація *X* дотримується прогресивних поглядів» є неточним унаслідок розпливчатості виразу «прогресивні погляди». В той же час твердження «Вірогідність того, що корпорація *X* працює на збиток, рівна 0,8» містить інформацію про міру невизначеності щодо належності корпорації *X* до не розпливчастого класу корпорацій, що працюють на збиток. Аналогічно твердженню «Ступінь належності Джона до класу високих чоловіків рівна 0,7» є «невірогідним» твердженням щодо належності Джона до розпливчастого класу високих чоловіків, а твердження «Вірогідність того, що Джон одружиться протягом року рівна 0,7»—«вірогідна» твердження, яке характеризує невизначеність настання нерозпливчастої події (одруження). Ця відмінність призводить до того, що математичні методи теорії розпливчастих множин абсолютно не схожі на методи теорії вірогідності. Вони у багатьох відношеннях простіші внаслідок того, що поняттю ступеня вірогідності в теорії вірогідності відповідає простіше поняття функції належності в теорії розпливчастих множин. Крім того, замість звичних операцій *a +b і a b, де a і b* — дійсні числа, використовуються простіші операції Max *(a, b) і Min(a, b)* З цієї причини навіть в тих випадках, коли розпливчастість в процесі ухвалення рішень може бути представлена моделлю вірогідності, звичайно зручніше оперувати з нею методами теорії розпливчастих множин без залучення апарату теорії вірогідності.

Процеси прийняття рішень, в яких тим або іншим чином присутня розпливчастість, можуть вивчатися *з* різних точок зору [1, 2, 3]. У даній статті основна увага приділяється введенню трьох фундаментальних понять — розпливчатої мети, розпливчастого обмеження і розпливчастого рішення, а також дослідженню їх використання у багатокрокових процесах ухвалення рішень, в яких, цілі або обмеження можуть бути розпливчастими, а керована система може бути або детермінованою, або стохастичною, але не розпливчастою. Це, проте, не накладає істотних обмежень на можливість застосування концепцій і методів. Вцілому, під розпливчастою метою розуміють мету, яку можна описати як розпливчасту множину у відповідному просторі. Так, простим прикладом розпливчастої мети, пов'язаної з змінною *x*, може служить мета: «*x* повинно бути *істотно* більше за 100». З свого боку, обмеження «*x* повинно знаходитися приблизно *в* інтервалі 20—25» є простим прикладом розпливчастого обмеження. Джерелами розпливчатості в цих твердженнях є слова, виділені курсивом.

Менш тривіальним прикладом може бути детермінована система, що працює в дискретному часі і описана рівнянням стану $x_{n+1}=x_n+u_n$, $n=0,1,2,\ldots$,

де x_n і u_n позначають відповідно зміну стану і вхідну змінну у момент часу *n* і для простоти їх вважають значними. Розпливчасте обмеження, накладене на вхідну змінну, могло б тут мати вигляд $-1 \le u_n \le 1,$ де хвиляста лінія під символом означає «оператора розмиття», який переводить нерозпливчасту множину в приблизно рівну їй розпливчасту множину. В цьому випадку вираз $u_n \le 1$ читається таким чином: « u_n повинно бути *приблизно* менше або рівне 1», і результатом дії оператора розмиття буде переклад не розпливчастої множини $-1 \le u_n \le 1,$ в розпливчасту множину $-1 \le u_n \le 1,$.

Припустимо, що розпливчаста мета полягає в тому, щоб зробити x_3 приблизно рівним 5, починаючи з початкового стану $x_o=1$. В цьому випадку завдання полягає в знаходженні такої послідовності входів, u_0, u_1, u_2, яка буде якомога точніше реалізувати визначену мету з урахуванням накладених обмежень на входи u_0, u_1, u_2. Нижче ми детальніше розглянемо декілька характерних задач цього типу. Слід підкреслити, що в даній статті ставимо перед собою обмежену мету звернути увагу на завдання, що включають багатокрокові процеси ухвалення рішень в розпливчастих умовах, і запропонувати можливі шляхи їх розв'язання і зовсім не претендуємо на створення загальної теорії процесів ухвалення рішень, в яких розпливчастість і випадковість можуть входити найрізноманітнішими способами і у вигляді різних комбінацій. Зокрема, не займатимемося питанням про доповнення завдання ухвалення рішень поняттям розпливчастого алгоритму, яке може бути корисним в завданнях, що погано піддаються кількісному аналізу [4].

Вцілому, розпливчаста множина є класом об'єктів, в якому немає різкої межі між тими об'єктами, які входять в цей клас, і тими, які в нього не входять. Точніше визначення може бути сформульовано таким чином.

Визначення. Хай $X = \{x\}$ — сукупність об'єктів (точок), що позначаються через x. Тоді *розпливчаста множина* A в X є сукупність впорядкованих пар

$$A = \{x, \mu_A(x)\}, \qquad x \in X , \tag{1}$$

де $\mu_A(x)$ є ступенем належності x до A, а $\mu_A : X \to M$— функція, що відображає X в просторі M, яке називається простором належності. Коли M містить тільки дві точки *0 і 1*, A є не розпливчастим і його функція належності співпадає з характеристичною функцією не розпливчатої множини.

У подальшому ми припускатимемо, що M є інтервалом [0,1], причому 0 і 1 представляють відповідно нижчу і вищу ступені належності. У загальнішому випадку M може бути частково впорядкованою множиною і, зокрема, гратами . Таким чином, наше основне припущення полягає у тому, що розпливчаста множина , не дивлячись на нечіткість його меж, може бути *точно* визначена шляхом зіставлення кожного об'єкта з числом x, що лежить між 0 і 1, яке представляє ступінь його належності до A.

Приклад. Нехай X={0,1,2,…}–сукупність невід'ємних чисел. В цьому просторі розпливчаста множина A «декількох об'єктів» може бути визначено(суб'єктивно), скажемо, як набір упорядкованих пар

A={(3;0,6),(4;0,8),(5;1,0)}, причому, в (2) перераховані тільки ті пари (x, μ_A(x)), для яких μ_A(x) позитивне.

Зауваження. Слід зауважити, що в багатьох практичних ситуаціях функція належності μ_A повинна бути оцінена виходячи з часткової інформації про неї, наприклад такої, як значення, яких вона набуває на кінцевій множині опорних точок $x_1,\dots,x_N$. Коли A визначено таким чином неповністю – і, одже, приблизно, –ми будемо вважати, що воно частково визначене за допомогою «пояснювального прикладу». Завдання оцінки μ_A по відомій множині пар $(x_1, \mu_A(x_1)), \dots, (x_N, \mu_A(x_N))$ є завдання абстрагування –завдання, яке відіграє центральну роль в розпізнаванні образів.

Для раціонального запису було б зручно мати засіб для визначення того, що розпливчаста множина A отримана з нерозпливчатої множини $\bar{A}$ за рахунок «розмиття» меж множини $\bar{A}$. Для цієї мети ми будемо використовувати хвилясту риску під символом (або символами), що визначають $\bar{A}$. Наприклад, якщо A є множина дійсних чисел між 2 і 5, тобто $\bar{A} = \{x \mid 2 \le x \le 5\}$, то $A = \{x \mid 2 \underset{\approx}{\le} x \underset{\approx}{\le} 5\}$ є розпливчаста множина дійсних чисел, які знаходяться приблизно між 2 і 5.

Аналогічно $A = \{x \mid x = 5\}$ або просто 5 буде позначати множину чисел, приблизно рівних 5. Символ називатиметься оператором розмиття.

Нормальність. Розмита множина A нормальна тоді і тільки тоді, коли

$\mathrm{Sup}_x\ \mu_A(x) = 1$, тобто супремум $\mu_A(x)$ на X рівняється одиниці. Розпливчаста множина субнормальна, якщо вона не є нормальною. Непорожня субнормальна розпливчаста множина може бути нормалізована діленням кожного $\mu_A(x)$ на величину $\mathrm{Sup}_x\ \mu_A(x)$ (Розпливчаста множина порожня тоді і тільки тоді, коли $\mu_A(x) \equiv 0$).

Носій. Носієм розпливчастої множини A є така множина $S(A)$, де $x \in S(A) \Leftrightarrow \mu_A(x) = 0$. Якщо $\mu_A(x) =$ const на $S(A)$, то A не розпливчасте. Відзначимо, що нерозпливчаста множина може бути субнормальною.

~~Рівність.~~ Дві розпливчасті множини рівні (що записується як $A = B$) тоді і тільки тоді, коли $\mu_A = \mu_B$, тобто $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ для всіх x в X.

(Надалі ми для спрощення запису будемо опускати аргумент x, коли рівність або нерівність має місце для всіх значень x в X.)

Включення. Розпливчаста множина A міститься в розпливчастій множині B, або є підмножиною B (записується як $A \subset B$), тоді і лише тоді, коли $\mu_A \le \mu_B$.

В цьому значенні розпливчаста множина дуже великих чисел є множиною розпливчатої множини великих чисел.

Доповнення. Вважають, що *A'* є доповненням до *A* тоді і тільки тоді, коли $\mu_A{}^{/} = 1 - \mu_A$ Наприклад, розпливчасті множини *A* = {Високі люди} і *A'* — {Невисокі люди) є доповненнями один до одного, якщо заперечення «НЕ» трактується як операція, замінюючи $\mu_A(x)$на $1 - \mu_A(X)$ для кожного *x* в *X*.

Перетин. *Перетин А і В* позначається як $A \cap B$ і визначається як найбільша розпливчаста множина, що міститься як в *А*, так і у *В*. Функція належності для $A \cap B$ визначається такою рівністю:

$$\mu_{A \cap B}(x) = Min(\mu_A(x),\ \mu_B(x)), \quad x \in X\ , \tag{2}$$

де $Min(a,b)=a$, якщо $a \le b$, і $Min(a,\ b)=b$, якщо $a>b$.

Якщо використовувати замість символу *Min* знак кон'юнкції $\wedge$, можна переписати умову (3) в простішому вигляді:

$$\mu_{A \cap B} = \mu_A \wedge \mu_B \tag{3}$$

Поняття перетину близько пов’язане з поняттям сполучного союзу «І». Так, якщо *А* — клас високих людей і *В* — клас повних людей, то $A \cap B$ — клас людей, які одночасно високі І повні.

Об'єднання. Поняття об'єднання множин подвійне поняттю перетину. Об'єднання *А і* В позначається як *А U В* і визначається як найменша розпливчаста множина, що містить як *А*, так і *В*. Функція належності для $A \bigcup B$ визначається співвідношенням

$$\mu_{A \cup B}(x) = Max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad x \in X\,, \tag{4}$$

де $Max(a,b)=a$, якщо $a \ge b$, і $Max(a,b)=b$, *якщо* $a<b$. Використовуючи замість символу *Max знак* диз’юнкції $\vee$, можна записати умову (4) в більш простому вигляді:

$$\mu_{A \cup B} = \mu_A \vee \mu_B\,. \tag{5}$$

На відміну від перетину, операція об'єднання близько пов’язана з сполучником «АБО». Так, якщо множини А та В мають цей смисл, *то* А U *В* = {Високі *або* Повні люди}. Можна також відзрізняти «або» в «жорсткому» значенні, відповідне операції (6), від «або» в «м’якому» значенні, відповідного сумі алгебри *А і В*, що позначається як $A \oplus B$ і визначається співвідношенням *(8).* Нескладно перевірити таку тотожність, яка пов’язує операції перетину і об'єднання:

$$A \bigcup B = \left(A' \bigcap B'\right)'. \tag{6}$$

Створення алгебри. Створення алгебри розпливчастих множин А до В позначається через *AB* і визначається рівністю

$$\mu_{AB}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x), \quad x \in X\ . \tag{7}$$

Алгебраїчна сума. *Сума алгебри 'А* і *В* позначається через $A \oplus B$ і визначається рівністю

$$\mu_{A \oplus B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x) \tag{8}$$

Легко перевірити, що;

$$A \oplus B = (A'B')'. \tag{9}$$

З а у в а ж е н н я. Необхідно відзначити, що операції $\vee\, i \wedge$ асоціативні і дистрибутивні по відношенню один до одного. У той же час операції • (твори) і $\oplus$ (суми) асоціативні, але не дистрибутивні. Помітимо також, що операція (твір) дистрибутивна по відношенню до об'єднання $\vee$, але не навпаки. Взагалі кажучи, такою властивістю володіє будь-яка операція *, монотонно неубуваюча по кожному з своїх аргументів. У символічному записі

Якщо $b \ge b' \Rightarrow a * b \ge a * b'\, i\, a \ge a' \Rightarrow a * b \ge a' * b,$

то

$a * (b \vee c) = (a * b) \vee (a * c).$

Більшість одержаних нижче результатів залишається справедливо при заміні операції $\wedge$ на операцію *, яка є асоціативною і дистрибутивною щодо операції $\vee$.

Опуклість і угнутість. Хай *A* — розпливчата множина в просторі $X = R^n$. Тоді *A* є *опуклою* розпливчатою множиною в тому і лише в тому випадку, якщо його функція приналежності для кожної пари крапок *x, y* з *X* задовольняє нерівності

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq Min(\mu_A(x), \mu_A(y)) \qquad (10)$$

для всіх $0 \leq \lambda \leq 1$. Відповідно *A* є *увігнутим*, якщо його доповнення *A'* опукло. Неважко показати, що якщо дві розпливчаті множини *A* і *B* опуклі, їх перетин $A \bigcap B$ також опукло. З другого боку, якщо *A* і *B* увігнуті, то увігнутим буде і їх об'єднання $A \bigcup B$.

Відношення. *Розпливчате відношення R* на прямому творі просторів $X \times Y = \{(x, y), x \in X,\ y \in Y\}$ є розпливчата множина в $X \times Y$, характеризуємо функцією приналежності μ_R, яка зіставляє кожній впорядкованій парі *(x, y)* її ступінь приналежності $\mu_R(x, y)$ до *R*. Загалом *n*-арне розпливчате відношення на декартовому творі *X* = $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ є розпливчата множина в *X*, описуване залежною від *n* змінних функцією приналежності $\mu_R(x_1, \ldots, x_n), \quad x_i \in X_i,\ i = 1, \ldots, n.$

Розпливчаті множини, породжувані відображенням.

Хай *f: X* $\longrightarrow$ *Y*— відображення з *X = {x}* у *У* = {y}, причому образ елементу *x* позначається через *y=f(x),* і хай *A* — розпливчата множина у просторі *X*. Тоді відображення *f* породжує розпливчата множина *B* в просторі *Y* з функцією приналежності, що задається співвідношенням

$$\mu_B(y) = \underset{x \in f^{-1}(y)}{Sup} \mu_A(x), \qquad (11)$$

причому супремум береться по всім крапкам, які складають прообраз $f^{1}(y)$ в *X точки y.*

Умовні розпливчаті множини. Розпливчата множина *B(x)* в просторі *Y= {y}* називається умовним по x, якщо його функція приналежності залежить від змінної *x* як від параметра. Ця залежність виражається записом $\mu_B(y|x)$. Припустимо, що областю зміни параметра *x* є простір *X* і при цьому кожному *x* з *X* відповідає розпливчата множина *B(x)* в *У*. Я Таким чином, ми маємо справу з відображенням з *X* в простір розпливчатих множин в *Y*, характеризуючий функцією $\mu_B(y|x)$. За допомогою цього відображення будь-яка задана розпливчата множина *A в X* породжує розпливчату множину *B в У*, визначуване співвідношенням.

$$\mu_B(y) = \underset{x}{Sup}\, Min(\mu_A(x), \mu_B(y|x)) \qquad (12)$$

де $\mu_A\ i\ \mu_B$ функції приналежності множин *A* і *B* відповідно. Використовуючи операції $\wedge\ i \vee$, можна переписати умову в простішому вигляді;

$$\mu_B(y) = \vee_x(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y|x)). \qquad (13)$$

Відзначимо, що це співвідношення аналогічно — проте не еквівалентно—виразу для маргінального розподілу вірогідності сумісного розподілу двох випадкових змінних, причому $\mu_B(x|y)$ виконує роль, аналогічну умовному розподілу.

Розкладність. Хай *X* = {x}, *У* = {y} і хай *C* — розпливчата множина в просторі *Z=X*$\times$*У* з функцією приналежності μ_C *(x, y)*. Тоді C називається *розкладним по X і У* і лише в тому випадку, якщо *C* допускає уявлення *C=A*$\bigcap$*B*, або, що еквівалентне,

$$\mu_C(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \qquad (14)$$

де *A* і *B* — розпливчаті множини з функціями приналежності $\mu_A(x)\ i\ \mu_B(y)$ *(x)* відповідно. (Таким чином, *A* і *B* — циліндрові розпливчаті множини в *Z.)* Це визначення справедливе для розпливчатої множини, заданої в декартовому творі будь-якого кінцевого числа простору.

Вірогідність розпливчатих подій. Хай *P* — міра вірогідності в R^n, *Розпливчата подія А* в R^n визначається як розпливчата підмножина *А* простору R^n, функція приналежності якого, μ_A, вимірювальна. *Вірогідність* події *А* задається інтегралом Лебега — Стілтьеса:

$$P(A) = \int_{R^n} \mu_A(x) dP. \tag{15}$$

Інакше кажучи, *P(A)=E* μ_A, де Е — оператор математичного очікування. У разі нормального не розпливчатої множини (15) зводиться до загального визначення вірогідності випадкової події.

Цим закінчується коротке введення в основні поняття теорії розпливчастих множин

В загальноприйнятому підході головними елементами процесу ухвалення рішення є: а) множина альтернатив, б) безліч обмежень, які необхідно враховувати при виборі між різними альтернативами, і в) функція переваги, ставляча кожній альтернативі у відповідність виграш (або програш), який буде одержаний в результаті вибору цієї альтернативи [6]. При розгляді цього процесу із загальніших позицій ухвалення рішень в розпливчатих умовах природної представляється інша логічна схема, найважливішою межею якої є симетрія по відношенню до цілей і обмежень. Ця симетрія усуває відмінності між цілями і обмеженнями і дозволяє досить просто сформувати на їх основі рішення. Дійсно, хай *X={x}* задана множина альтернатив. Тоді *розпливчата мета,* або просто *мета, G* ототожнюватиметься з фіксованим розпливчатою множиною *G* в *X*. Наприклад, якщо $X=R^1$ (дійсна пряма), а розпливчата мета формулюється як «х повинне бути значно більше 10», то її можна уявити як розпливчата множина в R^1 з функцією приналежності, що має, скажем, такий вигляд:

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0 & x < 10, \\ \left(1 + (x-10)^{-2}\right)^{-1}, & x \geq 10. \end{cases} \tag{16}$$

Аналогічно меті «х повинне бути в околиці 15» може бути поставлено у відповідність розпливчату множину з функцією приналежності

$$\mu_G(x) = (1 + (x-15)^4)^{-1}. \tag{17}$$

Відзначимо, що обидві ці множини опуклі в значенні.

При звичному підході функція переваги, використовувана в процесі ухвалення рішення, служить для встановлення лінійної впорядкованості на безлічі альтернатив. Очевидно, що функція приналежності $\mu_G(x)$ розпливчатій меті виконує ту ж задачу і, звичайно, може бути одержана з функції переваги за допомогою нормалізації, що зберігає встановлену лінійну впорядкованість. По суті, така нормалізація приводить до спільного знаменника різні цілі і обмеження і дозволяє, таким чином, поводитися з ними однаковим чином. Як ми побачимо, це є важливим аргументом на користь того, щоб як один з основних компонентів в логічній схемі ухвалення рішень в розпливчатих умовах користуватися поняттям мети, а не функції переваги.

Подібним же чином *розпливчате обмеження,* або просте *обмеження, С* в просторі *X* визначається як деяка розпливчата множина в *X*. Наприклад, у разі $X = R^1$ обмеження «х повинне знаходитися приблизно в діапазоні 2—10» може бути представлено розпливчатою множиною з функцією приналежності, скажімо, вигляду:

$$\mu_G(x) = (1 + a(x-6)^m)^{-1},$$

де *а* — позитивне число і m — парне позитивне число, вибране так, щоб передати значення, в якому слід розуміти «наближення» до інтервалу [2, 10]. Якщо, зокрема, покласти *m*=4 і a = 5^{-4}, то в точках *x* = 2 і *x*=10 функція приналежності рівна $\mu_G(x) = 0.71$ тоді як при *x* = 1 і x = 11 $\mu_G(x) = 0{,}5$,, а при *x* = 0 і *x* = 12 $\mu_C(x) = 0.32$

Важливим аспектом приведених вище визначень є те, що і мета і обмеження розглядаються як розпливчаті множини в просторі альтернатив; це, як буде показано нижче, дає можливість не робити між ними відмінності при формуванні рішення. У протилежність цьому при традиційному підході до ухвалення рішень безліч обмежень вважається не розпливчатою множиною в просторі альтернатив *X*, тоді як функція переваги є функцією переходу з *X* в деякий інший простір. Але навіть і в цьому випадку використовування множників Лагранжа і штрафних функцій робить очевидним існування деякої внутрішньої схожості між функціями переваги і обмеженнями . Це схожість — а насправді тотожність — стає абсолютно природним при нашому формульовані.

Дійсно, припустимо, наприклад, що розпливчата мета *G* і розпливчате обмеження *С* заданий наступним чином:

G: x повинно бути значно більше 10 і

С: x повинно бути в межах 15.

$[\mu_G(x)\ і\ \mu_C(x)]$ задаються відповідно формулами. Зауважимо що мета *G* і обмеження *C* з'єднані між собою союзом «І» причому, «І» відповідає перетину розпливчатих множин. Це означає, що в розглянутому прикладі сукупність впливу розпливчатої мети *G і* розпливчатого обмеження *C* на вибір альтернатив може бути представлено перетином $G \cap C$. Функція приналежності для перетину задається відношенням

$$\mu_{G \cap C}(x) = \mu_G(x) \wedge \mu_C(x)$$

або, в розгорнутій формі,

$$\mu_{G \cap C}(x) = \begin{cases} Min((1+(x-10)^{-2})^{-1},\ (1+(x-15)^4)^{-1})\ для\ \ x \geq 10, \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad для\ x < 10. \end{cases}$$

Відзначимо, що в силу випуклості розпливчатих множин *G* і *C* множина $G \cap C$ також є випуклою. Звернемося тепер до поняття *рішення*. Інтуїтивно ясно, що *рішення* — це по суті вибір однієї або декількох з наявних альтернатив. Попередній приклад наводить на думку, що *розпливчате рішення*, або просте *рішення*, слід визначити як розпливчату множину в просторі альтернатив, що виходить в результаті перетину заданих цілей і обмежень. Наступне визначення уточнює цю думку.

В и з н а ч е н н я. Хай в просторі альтернатив *X* задані розпливчата мета *G* і розпливчате обмеження *C*. Тоді розпливчата множина *D*, утворювана перетином *G* і *C*, називається *рішенням*. У символічній формі

$$D = G \cap C \tag{18}$$

і відповідно $\mu_D = \mu_G \wedge \mu_C$.

В загальнішому випадку, якщо є *n* цілей і *m* обмежень, то результуюче рішення визначається перетином всіх заданих цілей і обмежень, тобто

$$D = G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_n \cap C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_m \tag{19}$$

і відповідно

$$\mu_D = \mu_{G_1} \wedge \mu_{G_2} \wedge ... \wedge \mu_{G_n} \wedge \mu_{C_1} \wedge \mu_{C_2} \wedge ... \wedge \mu_{C_{m.}} \tag{20}$$

Помітимо, що в приведеному визначенні розпливчатого рішення мети і обмеження входять у вираз для *D* абсолютно однаковим чином, що і доводить твердження про тотожність цілей і обмежень в сформульованій нами логічній схемі процесів ухвалення рішень в розпливчатих умовах.

Коротко узагальнене визначення можна сформулювати таким чином: *Рішення = Злиття цілей і обмежень*.

Поняття рішення як розпливчатої множини в просторі альтернатив може спочатку показатися дещо штучним. Насправді воно досконале природно, оскільки розпливчате рішення може розглядатися як деяка «інструкція», розпливчатість якої є слідством неточності формулювання поставлених цілей і обмежень. Так, в приведеному прикладі G_1, G_2 ,C_1 *і* C_2 могли б бути виражені наступними фразами: «*x* слідує узяти близьким до 5», «*x* слід узяти близьким до 3», «*x* слідує узяти близьким до 4», «*x* слідує узяти близьким до 6». Тоді рішення полягає у тому, що «слід узяти» «*x*, близьке до 5». При цьому точне значення слова «близько» визначається у кожному випадку значенням відповідної функції приналежності [5].

Як слід виконувати розпливчаті інструкції типу «*x* слід узяти близьким до 5»? Хоча на питання такого типу не представляється можливим дати універсальну відповідь), в багатьох випадках все ж таки розумно вибрати ті альтернативи, які мають максимальний ступінь приналежності до *D*, В нашому прикладі цьому відповідає *x* = 5.

У загальному випадку приймемо, що *D* — розпливчате рішення з функцією приналежності μ_D Хай *K*— безліч тих точок в *X*, *в* яких функція μ_D досягає максимуму (якщо він існує). Тоді не розпливчате, але, взагалі кажучи, субнормальна підмножина D^M з *D*, визначуване умовами

$$\mu_{D^M}(x) = \begin{cases} Max\mu_D(x) \qquad для\ \ x \in K, \\ 0 \quad для \quad інших\ \ x, \end{cases}$$

називатиметься *оптимальним рішенням, а* кожне *x* з носія множини D^M — *максимізуючим рішенням*. Іншими словами, рішення, що максимізує - це будь-яка альтернатива в просторі *X*, яка максимізує функцію $\mu_D(x)$ (скажімо, як *x*

= 5 в попередньому прикладі). Відзначимо, що в R^n достатньою умовою єдиності рішення, що максимізує, є сильна опуклість розпливчатої множини *D,* тобто опуклість D *і* наявність у нього унімодальной функції приналежності.

У визначенні розпливчатого рішення D *як* перетини або, в загальнішому значенні, як злиття цілей і обмежень мається на увазі, що ті, що всі входять в D *цілі* і обмеження мають в деякому розумінні однакову важливість. Проте зустрічаються ситуації, в яких деякі цілі і, можливо, деякі обмеження є важливішими, ніж інші. У таких випадках рішення D *може* бути виражене опуклою комбінацією цілей і обмежень з ваговими коефіцієнтами, що характеризують відносну важливість складових елементів. Таким чином, $\mu_D(x)$ *може* бути записане у вигляді

$$\mu_D(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\mu_{G_i}(x) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i(x)\mu_{C_i}(x), \qquad (21)$$

де α_i *і* β_j — функції приналежності, такі, що

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i(x) \equiv 1.$$

З урахуванням цього обмеження функції $\alpha_i(x)$ *і* $\beta_j(x)$ можуть бути підібрані так, щоб передавати відносну важливість цілей G_1, G_2, …,G_n і обмежень C_1, C_2, …, C_m. Зокрема, якщо $m=n=1$, неважко перевірити, що з виразу (21) можна одержати будь-яку розпливчату множину, що міститься в $G \bigcup C$ і включаючи $G \bigcap C$. Відзначимо, що формула (21) нагадує відомий спосіб зведення векторного критерію до скалярного за допомогою утворення лінійної комбінації компонент векторної функції мети.

Дотепер ми обмежувалися розглядом ситуацій, в яких цілі і обмеження є розпливчатими множинами в просторі альтернатив *X*. *Практичний* інтерес представляє загальніший випадок, коли цілі і обмеження — розпливчаті множини в різних просторах. Хай *f* — відображення з *X = {x}* у *У* = {у}, причому змінній *х* позначена вхідна дія (причина), а змінною *у* — відповідний вихід (слідство).

Припустимо, що цілі задані як розпливчаті множини $G_1, G_2, ..., G_n$ *в* Y, тоді як обмеження розпливчаті множини C_1, C_2, …, C_m в просторі *X*. Маючи розпливчату безліч G_I в *Y*, можна знайти розпливчату безліч $\bar{G}_i$ в *X*, яке індукує G_i в *Y*. Функція приналежності $\bar{G}_i$ задається рівністю

$$\mu_{\bar{G}_i}(x) = \mu_{G_i}(f(x)),\ i = 1, ..., n \qquad (22)$$

Після цього рішення *D* може бути виражене перетином множин $\bar{G}_1, \bar{G}_2, ..., \bar{C}_n$ *і* $C_1, C_2, ..., C_m$.. Використовуючи співвідношення (22), можна записати $\mu_D(x)$ в розгорненому вигляді:

$$\mu_D(x) = \mu_{G_1}(f(x)) \wedge ... \wedge \mu_{G_n}(f(x)) \wedge \mu_{c_1}(x) \wedge ... \wedge \mu_{C_m}(x), \qquad (23)$$

де $f{:}X \to Y$. Таким чином, випадок, коли цілі і обмеження задаються як розпливчаті множини в різних просторах, може бути зведений до випадку, коли вони задаються в одному і тому ж просторі. Співвідношення (23) є вельми корисним при аналізі багатокрокових процесів ухвалення рішень.

Висновок. Для ефективного прийняття рішення в умовах функціонування систем управління необхідно розрізняти випадковість і розпливчастість ухвалення рішень. В даній роботі проаналізовано загальноприйнятті підходи та представлено модель, яка усуває відмінності між цілями і обмеженнями і дозволяє досить просто сформувати на їх основі рішення.

Література.

1. Воеводин В.В. Численные методы алгебры: Теория и алгоритмы.–М.:Наука, 1966.–248с.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений.– 2-е изд.–М.:Физматгиз, 1959–Т.1.464с.
3. Бреуэр М.А. Последние достижение в области автоматизации проектирования и анализа цифровых систем.– Тр. Ин-та инженеров по электрон. и радиоэлектронике, 1972, 60, №1, с.19-49
4. Лисогор В.М. Задачі математичного моделювання для оптимізації структур та параметрів технологічних і інформаційних систем. / В.М. Лисогор, О.В. Зелінська // Науковий збірник ЛНУ ім. Франка. Випуск 27 Серія: Формування ринкової економіки в Україні. – 2012.– №27. –С.179-184.

5. Лисогор В.М. Структурна двохрівнева логіко-динамічна модель управління віброударними пристроями сільськогосподарських машин. / В.М. Лисогор, О.В. Зелінська // Всеукраїнський НТЖ «Вібрації в техніці та технологіях».- №2(70).-2013. - С.42-45

6. Бурячок В.Л. Обгрунтування прийняття рішень на підставі результатів експертно-ігрових методів. / В.Л. Бурячок, О.А. Кулаков. // Збірник матеріалів НПК "Проблемні питання розвитку озброєння та військової техніки", 16-17.12.2010. – К.: ЦНДІ ОВТ ЗС України, 2010. – С. 242–243.

7. Беллман Р., Заде Л. А. Прийняття рішень в розпливчастих умовах // Питання аналізу та процедури прийняття рішень. М .: Світ, 1976. С.

8. Беллман Р "Калаба Р. До питання про самоорганізованих процесах управління. М .: Науково-технічний відділ узагальнень та інформації, 1960. С. 21

9. Заде Л. А. Основи нового підходу до аналізу складних систем і процесів прийняття рішень // Математика сьогодні. М .: Знання 1974. С. 157 (Сер. "Математика, кібернетика". 1974. № 7)

10. Канторович Л.В. Оптимальные решения в экономике. / Л. В. Канторович, А. Б. Горстко // - М.: Наука, 2006. - 231с.

References.

1. Voevodin,V.V.(1996), Chislennye-metody-algebry [Numerical Methods of Algebra: Theory and Algorithms], Teorija-i-algoritm, Nauka, Moscow, Russia.

2. Berezin, I.S. and Zhidkov, N.P. (1959), Metody-vychislenij [Methods of calculation], 2-d ed., Fizmatgiz, Moscow, Russia.

3. Breujer, M.A. and Zhidkov, N.P. (1972), "Recent achievements in the field of automation of design and analysis of digital systems", Tr.-In-ta-inzhenerov-po-jelektron.-i-radiojelektronike, vol.1, pp.19-49.

4. Lysohor, V.M. and Zelinska, O.V. (2012), "Problems of mathematical modeling for optimization of structures and parameters of technological and information systems", Naukovyj zbirnyk LNU im. Franka. Seriia: Formuvannia rynkovoi ekonomiky v Ukraini, vol.27, –pp.179-184

5. Lysohor, V.M. and Zelinska, O.V. (2013), "Structural two-level logic-dynamic model of the control of vibro-impact devices of agricultural machines", Vseukrains'kyj NTZh «Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh», vol.2(70), pp.42-45

6. Buriachok, V.L. and Kulakov, O.A. (2010), "Substantiation of decision making based on the results of expert-game methods", Zbirnyk materialiv NPK "Problemni pytannia rozvytku ozbroiennia ta vijs'kovoi tekhniky [Collection of SPC materials "Problematic issues of arms development and military equipment"], TsNDI OVT ZS Ukrainy, Kyiv, Ukraine, 16-17 dec, pp. 242–243.

7. Bellman, R. and Zade, L. A. (1976), Pryjniattia rishen' v rozplyvchastykh umovakh, Pytannia analizu ta protsedury pryjniattia rishen' [Decision making in vague conditions. Issues of analysis and decision-making procedures], Svit, Moscow, Russia.

8. Bellman, R and Kalaba, R. (1960), Do pytannia pro samoorhanizovanykh protsesakh upravlinnia, Naukovo-tekhnichnyj viddil uzahal'nen' ta informatsii [To the question of self-organized management processes], Moscow, Russia.

9. Zade, L. A. (1974), Osnovy novoho pidkhodu do analizu skladnykh system i protsesiv pryjniattia rishen' [Basics of a new approach to the analysis of complex systems and decision-making processes], Matematyka s'ohodni Znannia, Moscow, Russia.

10. Kantorovich, L.V.and Gorstko, A.B. (2006), Optimalnye-reshenija-v-jekonomike [Optimal solutions in the economy], Nauka, Moscow, Russia.

Стаття надійшла до редакції 25.01.2018 р.