УДК

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Карабін Леся Володимирівна
3-й курс, група31-ЕК
керівник
Зелінська Оксана Владиславівна
Вінницький національний аграрний університет

Функціонування будь-якої системи може розглядатися як перехід із одного стану в інший за деякий період часу. Якщо такий перехід можливо спостерігати і описати, то таку систему називають динамічною. Динамічність розглядається як суттєва властивість системи.

Математична модель динамічної системи, як правило, складається з:

- опису множини можливих станів системи $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$;
- опису законів, за допомогою яких система може переходити із стану в стан.

Закон, що описує перехід системи із стану в стан (функція переходів), має різний характер в залежності від того, дискретною чи неперервною є множина станів (простір станів), детермінованим чи стохастичним являється процес еволюції системи.

Розглянемо динамічну модель ринкової рівноваги. Нехай маємо наступні змінні стану системи, що досліджується:

$S(t)$ - кількість пропозиції товару в момент часу t

$C(t)$ - кількість попиту на товар в момент часу t

$P(t)$ - ціна на товар, що залежить від коливання попиту і пропозиції.

Динаміка коливань попиту і пропозиції в деякі дискретні моменти часу $t = 0,1,2,\dots,T$ (можуть бути дні, місяці чи роки) описується наступною системою рівнянь:

$$\begin{cases} C(t) = a - bP(t) \\ S(t) = S(t-1) + d\left[C(t-1) - S(t-1)\right] \end{cases} \qquad (1)$$

де a, b, c, d - деякі сталі величини (коефіцієнти), які характеризують ринок товару.

Перша рівність системи (1) вказує на те, що попит в час t тим менше, чим більше ціна на товар. Друге рівняння визначає динаміку пропозиції: якщо на попередньому етапі попит перевищував пропозицію, остання зростає; якщо попит був меншим, пропозиція теж зменшується.

Візьмемо, наприклад, $a = 100$; $b = 2$; $d = 1$; $P(t) = 15 - t$. Щоб імітувати процес динаміки ринку товару слід ввести початкову умову: $S(0) = 80$ (табл. 1).

Рівновага ринку в час t визначається умовою:

$$C(t) = S(t) \qquad (2)$$

Тобто рівновага ринку гарантує, що немає пропозиції товару нереалізованої , і немає попиту не задоволеного. З умови (2) маємо:

$$a - bP(t) = S(t-1) + d\left[C(t-1) - S(t-1)\right] \qquad (3)$$

$$P(t) = \frac{1}{b}\left[dC(t-1) + (1-d)S(t-1) - a\right]$$

Таблиця 1

Імітація динаміки ринку товарів

Час	Ціна	Попит	Пропозиція	Баланс
1	2	3	4	5
0	15	70	80	-10
1	14	72	70	2
2	13	74	72	2
3	12	76	74	2

Якщо $d = 1$, маємо $P(t) = \frac{1}{b}\left[dC(t-1) - a\right]$

Тобто, рівноважна ціна реалізації залежить від попиту на товар, який спостерігався в попередній період.

Рівняння (3) перепишемо по-іншому:

$$P(t) = P(t-1) + \frac{1}{b}\left[dC(t-1) + (1-d)S(t-1) - a\right] - P(t-1) \qquad \text{чи:}$$

$$P(t) - P(t-1) = \frac{1}{b}\left[dC(t-1) + (1-d)S(t-1) - a\right] - P(t-1)$$

В загальному випадку динамічні системи можна описати або аналітично:

$$Y(t) = f(t), \qquad (4)$$

або за допомогою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy}{dt} = g(y,t), \qquad (5)$$

де t - параметр часу, $f(t), g(y,t)$ - вектори неперервних функцій. В дискретній формі рівняння (5) записується наступним чином:

$$y(t+h) = g_1(y(t),t), \qquad (6)$$

де h - інтервал часу.

Система диференційних рівнянь (5) задає швидкість змінив всіх компонентів $y_i(t)$,а отже їх значення для кожного моменту часу; якщо відомий початковий стан – значення компонентів вектора y в початковий момент часу t_0 .

Задача (5) по знаходженню значень змінних вектору $y(t)$ для будь-якого $t \in \left[t_0, t_k\right]$ називається задачею Коші. Для його знаходження існує багато аналітичних і чисельних методів.

Аналітичні методи визначають розв’язок системи (5) як аналітично визначену функцію виду (4). Такі методи базуються на розв’язуванні диференційних рівнянь і є обмеженими в своїй дії тільки на прості лінійні системи диференційних рівнянь. Для решти більш складних рівнянь, що можуть описувати системи (5), існують тільки чисельні методи розв’язування.

Одним з найпростіших чисельних методів розв'язування задачі (5), (6) є метод Ейлера. Він базується на заміні похідної функції різницевим рівнянням, при цьому відрізок часу ділиться на рівні проміжки довжиною $h: t_{k+1} = t_k + h, k = \overline{0, N}$.

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \qquad (7)$$

Підставляючи залежність (6) в рівняння (5), отримуємо наступну різницеву систему для розрахунків значень змінних $y(t)$:

$$y(t+h) = y(t) + hg(y(t), t) \qquad (8)$$

$$y(t_0) = y^0$$

Звичайно, чим менше значення кроку часу h, тим більша точність при заміні похідної її різницевою схемою (8), а отже більша точність розрахунків. Але і час виконання обчислень збільшується, бо слід обчислювати значення змінних стану на кожному кроці.

Для більш точного апроксимування задачі (5), (6) існують інші методи, крім методу Ейлера. Наприклад, метод Рунге-Кутта другого порядку, який дає точність в 4 рази більшу, ніж вищезгаданий метод Ейлера:

$$k_1 = hg(y(t), t),$$

$$k_2 = hg(y(t) + \frac{1}{2}k_1, t + \frac{h}{2}),$$

$$k_3 = hg(y(t) + \frac{3}{4}k_2, t + \frac{3h}{4}),$$

$$y(t+h) = y(t) + \frac{4}{9}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{2}{9}k_3,$$

$$y(t_0) = y^0.$$

Проникнення динамічних моделей в дослідження реальних систем - це можливість використання нових технологій і методів дослідження. Цілями динамічного моделювання можна вважати:

1. Аналіз розвитку системи і прогнозування поведінки.
2. Спрощення масштабу вимірювання (лінійна шкала, шкала температури).
3. Керування динамічними системами.

Отже, процес дослідження динамічних моделей можна звести до наступних етапів:

1. Постановка задачі дослідження системи.
2. Побудова математичної моделі.
3. Перетворення моделі до вигляду диференційного чи різницевого рівняння.
4. Отримання розв'язків за допомогою
   - чисельних методів;
   - аналітичних методів.
5. Аналіз отриманих розв'язків і поведінки системи.
6. Рекомендації з керування системою.
7. Уточнення моделі і повернення на крок 1.

Література:

1. І. В. Бейко, Т. В. Коробко. Дослідження моделей динамічної рівноваги відкритих економік у міждержавній торгівлі // Комп'ютерна математика. - Київ. – 2001. – С. 1-5

2. О. В. Ульянченко. Дослідження операцій в економіці / Харків: Гриф, 2001. – С. 580

3. Ю. В. Загородний, В. В. Войтенко. Моделі та методи економічного моделювання. – Житомир: вид-во ЖІТІ, 2000. – С. 110