Міністерство аграрної політики України
Вінницький державний аграрний університет
Кафедра вищої математики, фізики та математичних методів в економіці

Левчук О.В.

Вища математика

Навчально-методичний посібник для самостійної роботи студентів напряму 0708 "Екологія"

Вінниця 2009

УДК 519.21.007.2

Левчук.О.В. Вища математика. Навчально-методичний посібник для самостійної роботи студентів напряму 0708 "Екологія": РВВ ВДАУ, 2009. – 144 с.

Посібник призначено для самостійної роботи студентів та її контролю. В ньому містяться короткі теоретичні відомості, приклади розв’язування типових задач та індивідуальні варіанти розрахунково-графічних завдань з розділів "Лінійна та векторна алгебра", "Аналітична геометрія", "Математичний аналіз", "Ряди". Для студентів аграрних ВНЗ денної та заочної форм навчання, агрономічного факультету напряму 0708 – "Екологія".

Рецензенти:

Коломієць Д.І., кандидат. пед. наук, доцент, зам. директора інституту математики, фізики та технологічної освіти ВДПУ;

Шкатула Ю.М., кандидат с.г. наук, доцент, в.о. зав. кафедри екології та ОНС ВДАУ.

Рекомендовано науково-методичною радою
Вінницького державного аграрного університету.
Протокол № від

ЗМІСТ

Вступ

Поряд з експериментом, одним з основних методів дослідження стає математичне моделювання. Цей напрям поки що розвивається, проте нині застосовується у всіх видах наукової діяльності. У математичну модель можна закласти біологічні уявлення, гіпотези про кінетичні властивості процесів (швидкість росту, розмноження, загибелі, інтенсивність взаємодії). Аналіз отриманої моделі дозволяє вивчити якісно і кількісно просторово-часову структуру, розкрити причинно-наслідкові зв'язки.

Останнім часом світова спільнота зіткнулася з цілою низкою природних катастроф, викликаних її діяльністю, турбує тенденція наростання нестійкості природи. Тому екологія набуває особливого значення як наука, що допомагає знайти шляхи виходу з кризи, що створилася. В будь-якій сфері, що повязана з аграрною діяльністю, в будь-якій професії необхідні екологічні знання. Щоб передбачити результат різних взаємодій людини на навколишнє середовище можна використовувати, зокрема, методи математичного моделювання і прогнозування.

Вивчення екологічних моделей передбачає наявність у фахівців грунтовних знань з математики. Майже всі імітаційні моделі зводяться до розв'язання або аналізу рівнянь або систем диференціальних рівнянь.

Математична освіта починається на шкільній лаві і продовжується у вищому навчальному закладі. Студенти, які візьмуться за вивчення та розширення знань з вищої математики, найближчим часом зможуть запропонувати конкретні дії з поліпшення екологічної ситуації. Таким чином, їх знання виявляться корисними не тільки для них, але і для всього людства.

Структура курсу за КМСОНП

(1 семестр)

№ залікового кредиту	**№ модуля**	**Назва змістового модуля**	**Види навчальної діяльності**	**Загальна кількість заходів/год.**	**К-ть балів за кожен вид діяльності**
Заліко-вий кредит 1 – 108год/3 кр.	Модуль I 42год./1,2 кр.	ЗМ1 "Лінійна та векторна алгебра"	Лекції	1/6	2
			Пр. заняття	1/16	8
			Сам. Роб.	1/20	10
			РГЗ	1/0	5
			Контрольні роботи	1/0	10
			Колоквіуми	1/0	15
	Модуль II 66год./1,8кр.	ЗМ2 "Аналітична геометрія на площині та в просторі"	Лекції	1/10	5
			Пр. заняття	1/28	5
			Сам. Роб.	1/28	10
			РГЗ	1/0	5
			Контрольні роботи	1/0	10
			Колоквіуми	1/0	15
Заліко-вий кредит II. 36год/ 1 кр.	Модуль III 36год./1кр.	Наукова робота та поглиблене вивчення дисципліни	Публікації		20
			Участь у конференціях		10
			Участь в олімпіадах		10
			Участь в конкурсах, отримання грандів		10

Структура курсу за КМСОНП

(1I семестр)

№ залікового кредиту	№ модуля	Назва змістового модуля	Види навчальної діяльності	Загальна кількість заходів/ год	К-ть балів за кожен вид діяль-ності
Заліковий кредит 1 – 108год/3кр.	Модуль IV 42год./1,2 кр.	ЗМ4 "Диф. числення. Неозначений інтеграл. Означений інтеграл. "	Лекції	1/10	3
			Пр. заняття	1/20	7
			Сам. Роб.	1/24	10
			РГЗ	1/0	5
			Контрольні роботи	1/0	10
			Колоквіуми	1/0	15
	Модуль V 66год./1,8кр.	ЗМ 5 "Озн. інт. Диф. р-ня. Ряди. Елеметни теор. ймов."	Лекції	1/10	5
			Пр. заняття	1/20	5
			Сам. Роб.	1/24	10
			РГЗ	1/0	5
			Контрольні роботи	1/0	10
			Колоквіуми	1/0	15
Заліковий кредит II. 1 кр.	Модуль VI 36год./1кр.	Наукова робота та поглиблене вивчення дисципліни	Публікації		20
			Участь у конференціях		10
			Участь в олімпіадах		10
			Участь в конкурсах, отримання грандів		10

Розділ І
Лінійна та векторна алгебра
Аналітична геометрія
Теоретичні відомості
Матриці. Дії над матрицями. Визначники

Матрицею називають таблицю упорядкованих чисел або будь- яких інших об'єктів , розташованих в n рядках та m стовпцях.

Така матриця має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix}$$, де a_{ij} - елементи матриці А,

i- номер рядка, j- номер стовпця.

Добуток матриці А на число λ

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11}\,\lambda a_{12}\,....\,\lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21}\,\lambda a_{22}\,....\,\lambda a_{2n} \\ ....\ ....\ .... \\ \lambda a_{m1}\,\lambda a_{m2}\,....\,\lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Сума матриць А та В однакового розміру $m\times n$

$$C=A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}a_{12}+b_{12}.....a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21}a_{22}+b_{22}....a_{2n}+b_{2n} \\ .... \\ a_{m1}+b_{m1}a_{m2}+b_{m2}....a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

де b_{ij} - елементи матриці В

Обернена матриця

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}A_{21}\dots.A_{n1} \\ A_{12}A_{22}\dots.A_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}A_{2n}\dots.A_{nn} \end{pmatrix} \quad (1),$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij}, $|A| \neq 0$

Визначники

Визначником другого порядку називається число, що позначається символом $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ та визначається рівністю

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Наприклад, знайти визначник:

$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - (-2) \cdot 4 = 18 + 8 = =26$

Числа, які утворюють визначник, називаються його еклементами.

Визначником третього порядку є число, що похзначається символом, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ та визначається рівністю:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{32} \cdot a_{21}$---

$-(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}+a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}+a_{33}\cdot a_{12}\cdot a_{21})$.

Наприклад, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 3+3\cdot 1\cdot 1+4\cdot 2\cdot 5 - (1\cdot(-2)\cdot 4 +$

$2\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 5) = -12+3+40 - (-8+4+45) = 31-41= - 10$

Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Формули Крамера. Матричний спосіб. Метод Гаусса.

Розглянемо СЛАР:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b \end{cases} \quad (2)$$

Введемо позначення: $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}....a_{1n} \\ a_{21}a_{22}....a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}....a_{nn} \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ..... \\ x_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ..... \\ b_n \end{pmatrix}$ Тоді систему (1) можна записати в матричному вигляді: AX=B (2)

Правило Крамера: Якщо основний визначник $|A|$ неоднорідної системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими недорівнює 0, то ця система має єдиний розв"язок, який знаходиться за формулами: $X_k = \frac{|A|_k}{|A|}$, к=1,2..., де $|A|_k$ допоміжний визначник, який одержується шляхом заміни k-ого стовпця визначника $|A|$ стовпця вільних членів.

Для розв'язування СЛАР (1) *матричним методом*, потрібно:

1. Перевірити виконання трьох вимог правила Крамера;
2. Знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці А;

3. Знайти розв”язок X шляхом множення оберненої матриці A^{-1} та матриці–стовп ця B вільних членів заданої системи, тобто за формулою $X = A^{-1}B$

Розв'язувати будь-які системи лінійних алгебраїчних рівнянь можна методом Гаусса (виключення невідомих).

Суть *методу Гаусса* – зведення системи шляхом елементарних перетворень до такого вигляду системи, коли усі коефіцієнти, що знаходяться нижче головної діагоналі основної матриці, дорівнюють нулю.

Вектори. Дії над векторами. Поняття базису. Скалярний добуток векторів.Скалярний добуток векторів.

Координати x,y,z вектора початком якого є т.А (x_1 y_1 z_1), а кінцем т. B(x_2 y_2 z_2), дорівнюють різниці відповідних координат його кінця B і початку A:

$x=x_2 - x_1$; $y=y_2 - y_1$; $z=z_2 - z_1$ (3)

Довжину (модуль) вектора $a = \{\bar{x}_1 y_1 z_1\}$ визначають за формулою:

$|\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ (4)

Скалярний добуток $\overline{a\,b}$ двох векторів $\overline{a}$ і $\bar{b}$:

$\bar{a}\ \bar{b} = |\bar{a}|\ |\bar{b}| \cos(\bar{a}\,\bar{b})$ або $\bar{a}\bar{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$ (5)

Косинус кута між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$

$$\cos\varphi = \cos(\bar{a},\bar{b}) = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\ \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}} \quad (6)$$

Проекція вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$: $np\,\overline{a}_{\bar{b}} = \dfrac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{b}|}$ (7)

Умова колінеарності двох векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$: $\dfrac{x_a}{x_b} = \dfrac{y_a}{y_b} = \dfrac{z_a}{z_b}$ (8)

Умова перпендикулярності двох векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$:

$x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0$ (9)

Будь-яка трійка некомпланарних векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ утворює базис в просторі і довільний вектор $\overline{d}$ простору можна подати в цьому базисі, як лінійну комбінацію $\overline{d} = \lambda\ \overline{a} + \beta\ \overline{b} + \gamma\ \overline{c}$ або в координатній формі:

$$\begin{cases} d_x = \alpha\, a_x + \beta\, b_x + \gamma\, c_x \\ d_y = \alpha\, a_y + \beta\, b_y + \gamma\, c_y \\ d_z = \alpha\, a_z + \beta\, b_z + \gamma\, c_z \end{cases} \quad (10)$$

Типи добутків векторів (векторний, мішаний). Їх застосування.

Векторний добуток векторів:

$$\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right| \sin\varphi,\ \varphi = (\overline{a}, \overline{b}) \quad (11)$$

або через декартові координати

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} \quad (12)$$

Мішаний (векторно-скалярний) добуток векторів:

$$(\overline{a}\,\overline{b})\,\overline{c} = \left\langle \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \right\rangle \quad (13)$$

або через декартові координати:

$$\left\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \right\rangle = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} \quad (14)$$

Площа паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$: $S_{пар}=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$ (15)

Площа трикутника АВС: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$ (16)

Об"єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ (з спільним початком): $V=\left|\left\langle\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right\rangle\right|$ (17)

Об'єм піраміди ABCD: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left\langle\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right\rangle\right|$ (18)

Аналітична геометрія на площині

№	Вид рівняння	Назва та позначення
1	$A=(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ (19)	Рівняння прямої, що проходить через т. $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно $\overline{n}(A,B)$
2	$A_x+B_y+C=0$ (20)	Загальні рівняння прямої . Коефіцієнти АВ – координати перпендикуляра n до прямої
3	$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$ (21)	Канонічне рівняння прямої (x_0y_0) – координати т.M_0 ,що лежить на прямій $[(e,m)]$ координати напрямленого вектора $\overline{S}$, який паралельний прямій
4	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (22)	Рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1y_1)$ та $M_2(x_2y_2)$
5	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (23)	Рівняння прямої у відрізках
6		Рівняння прямої, що проходить через т.$M_0(x_0y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k. $k=tg\,\alpha$ α - кут нахилу прямої до

	$y - y_0 = k(x - x_0)$ (24)	осі ОХ
7	$y = kx + b$ (25)	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k. $k = tg\alpha$. b - відрізок, який відтинає пряма на осі ОУ
8	$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \end{cases} \quad -\infty < t < \infty$ (26)	Рівняння прямої в параметричному вигляді

Аналітична геометрія в просторі

Рівняння площини

Загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ (27),

A,B,C – координати перпендикуляра $\overline{n}$ до прямої.

Рівняння площини, що проходить через т.$M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}$ (ABC)

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (28)$$

Рівняння площини, проходить через три точки $M_1(x_1, y_1 z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (29)$$

Рівняння площини в відрізках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (30), де a, b, c - відрізки, які відтинає площина на осях ОХ, ОУ,OZ відповідно.

Косинус кута φ між двома площинами, що задані загальними рівняннями (20) $\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$ (31)

Умова паралельності площини

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (32)$$

Умова перпендикулярності площини $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ *(33).*

Відстань від т.$M_0(x_0y_0z_0)$ до площини

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cx_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (34)$$

Рівняння прямої в просторі

Рівняння прямої, що проходить через т.$M_0(x_0y_0z_0)$ паралельно вектору $\overline{S}(l,m,n)$ (канонічне рівняння)

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (35)$$

Параметричне рівняння прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad t \in (-\infty;\infty) \quad (36)$$

Рівняння прямої, що проходить через 2 точки $M_1(x_1y_1z_1)$, $M_2(x_2y_2z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (37)$$

Рівняння прямої – перетину двох площин, за даними загальними рівняннями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (38)$$

Косинус кута φ між прямими, що задані канонічними рівняннями(9)

$$\cos\varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \quad (39)$$

Умова паралельності прямих:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (40)$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0 \quad (41)$$

Приклади розв'язування типових завдань

Приклад 1. *Розвязати СЛАР:*
а)
за формулами Крамера;

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -3x + y = 2z = 0 \\ x + 4y + 3z = 2 \end{cases}$$

Розв'язання:

1) Обчислимо визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$

$11\cdot 3+2\cdot 2\cdot 1+(-1)\cdot 4\cdot(-3) - (1\cdot 1\cdot(-1)+4\cdot 2\cdot 1+3\cdot 2\cdot(-3))=3+4+12$
$-(-1 + 8 - 18) = 19+11 = 30.$

Система має єдиний розв'язок, оскільки визначник $\Delta = 30 \neq 0$.

2) Знайдемо визначники: Δx, Δy, Δz.

$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 5$; $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 13$; $\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1.$

3) За формулами Крамера знаходим розв'язок системи:

$X = \Delta x/\Delta = 5/30 = 1/6$; $y = \Delta y/\Delta = 13/30$; $z = \Delta z/\Delta = 1/30$;

Відповідь: розв'язок системи (1/6; 13/30; 1/30).

b) *матричним методом;*

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=17 \\ x_1+x_2+6x_3=21 \\ 2x_1+3x_2+3x_3=17 \end{cases}$$

Розв'язання:

Розв'язок системи знаходимо за формулою:

X= $A^{-1}B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 17 \\ 21 \\ 17 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Знаходимо обернену матрицю A^{-1} до матриці A за формулою (1)

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -15 & 6 & 8 \\ 9 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

Знаходимо матрицю-стовпець невідомих X:

$$X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -15 & 6 & 8 \\ 9 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 21 \\ 17 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -255+126+136 \\ 153-105-34 \\ 17+21-17 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Таким чином: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

c) *методом Гаусса*

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 1(a) \\ 3x - y + 2z = 1(b) \\ 4x - y + 5z = -3(c) \end{cases}$$

Розв'язання: Розділивши рівняння (a) на 2 , отримаєм систему

$$\begin{cases} x + 0{,}5y + z = 0{,}5(a^1) \\ 3x - y + 2z = 1(b) \\ 4x - y + 5z = -3(c) \end{cases}$$

Віднімемо з рівняння (b) рівняння $\left(a^1\right)$, поножене на 3, а з рівняння (c) - рівняння $\left(a^1\right)$, помножене на 4.

$$\begin{cases} x + 0{,}5y + z = 0{,}5(a^1) \\ -2{,}5y - z = -0{,}5(b^1) \\ -3y + z = -5(c^1) \end{cases}$$

Розділивши рівняння (b^1) на -2,5 , отримаємо :

$$\begin{cases} x + 0{,}5y + z = 0{,}5(a^1) \\ y + 0{,}4z = 0{,}2(b^2) \\ -3y + z = -5(c^1) \end{cases}$$

Віднімемо з рівняння (c^1) рівняння (b^2) , помножене на -3:

$$\begin{cases} x + 0{,}5y + z = 0{,}5(a^1) \\ y + 0{,}4z = 0{,}2(b^2) \\ 2{,}2z = -4{,}4(c^2) \end{cases}$$

З рівняння (c^2) знаходимо Z=-2; підставивши це значення в рівняння (b^2) , отримаємо Y=0,2-0,4Z=0,2-0,4(-2)=1; подставивши значення Z=-2 та Y=1 в рівняння (a^1) , знаходимо
X=0,5-0,5Y-Z=0,5-0,5 1 - (-2)=2.
Отже, X=2, Y=1, Z=-2 .
Перевірка:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot (-2) = 1 \\ 3 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot (-2) = 1 \\ 4 \cdot 2 - 1 + 5 \cdot (-2) = -3 \end{cases}$$

Приклад 2. *Дано* $|\overline{m}| = 2$ *,* $|\overline{n}| = 3$ *,* $\widehat{(m,n)} = 60^o$ *.Знайти:*

a) $\left|\overline{m}+2\overline{n}\right|$ *;*

b) кут між векторами $\overline{m}+\overline{n}$ *та* $-\overline{m}+\overline{n}$ *,*

Розв'язання:

а)за означенням модуля $\left|\overline{m}+2\overline{n}\right| =$

$$= \sqrt{(\overline{m}+2\overline{n})^2} = \sqrt{\overline{m}^2 + 4\overline{m}\overline{n} + 4\overline{n}^2} =$$

$$= \sqrt{2\cdot 2\cos 0^0 + 4\cdot 2\cdot 3\cdot \cos 60^0 + 4\cdot 3\cdot 3\cdot \cos 0^0} =$$

$$= \sqrt{4+12+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

б) кут між векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$ обчислюється за формулою (6):

$$\cos(\overline{a},\overline{b}) = \cos\varphi = \frac{\overline{a},\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}; \varphi = \arccos\left(\frac{\overline{a},\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}\right);$$

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{m}+2\overline{n})(-\overline{m}+3\overline{n})}{|\overline{m}+2\overline{n}||-\overline{m}+3\overline{n}|}$$

Знайдемо окремо чисельник та знаменник:

$$\left(\overline{m}+2\overline{n}\right)\left(-\overline{m}+3\overline{n}\right) = -\overline{m}^2 + \overline{m}\overline{n} + 6\overline{n}^2 =$$

= -2·2 +2·3-cos60°+6·3·3= -4+3+36 =35;

$$\left|-\overline{m}+3\overline{n}\right| = \sqrt{\left(-\overline{m}+3\overline{n}\right)^2} = \sqrt{\overline{m}^2 - 6\overline{m}\overline{n} + 9\overline{n}^2} =$$

$$= \sqrt{4+6\cdot 6\cdot \frac{1}{2} + 9\cdot 9} = \sqrt{4+18+81} = \sqrt{103};$$

$$\cos\varphi = \frac{35}{2\sqrt{13}\cdot\sqrt{103}} = \frac{35}{2\sqrt{1339}}; \varphi = \arccos\left(\frac{35}{2\sqrt{1339}}\right)$$

Приклад 3. *Знайти площу трикутникаABC, вершини якого розміщені в точках A(1,2,3), B(2,1,-1), C(3,-1,1).*

Розв'язання: За формулою (15) : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$.

$$\overline{AB} = \{1,-1,-4\};\ \overline{AC} = \{2,-3,-2\};$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -10\bar{i} - 6\bar{j} - \bar{k};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{10^2+6^2+1} = \frac{1}{2}\sqrt{137}\,(од^2)$$

Знайдемо координати векторів $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$ та їх векторний добуток за формулами (3), (12):

Приклад 4. *Обчислити довжину висоти тетраедра ABCD, проведену з вершини D до основи ABC, якщо вершини тетраедра мають координати: A (1,2,0), B(2,1,1), C(0,-3,-1), D(3,3,4).*

Розв'язання:

Знайдемо координати векторів, що виходять з вершини *A:*

$\overline{AB}$ {1,-1,1}, $\overline{AC}$ {-1,-5,-1}, $\overline{AD}$ {2,1,4},

За формулою (18): $V_{тетр} = \frac{1}{6}\left|\left\langle \overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right\rangle\right|$, $V_{тетр} = 1/3(S_{\Delta ABC}\cdot H_D)$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$; $H_D = \frac{3V}{S_{\Delta ABC}}$, де H_D – шукана висота.

Звідси

$$V_{тетр}=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1&-1&1\\-1&-5&-1\\2&1&4\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1&-1&1\\0&-6&0\\3&0&5\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|-6\left|\begin{matrix}1&1\\3&5\end{matrix}\right|\right|=2(од^3)$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\1&-1&1\\-1&-5&-1\end{vmatrix}=6\bar{i}-6\bar{k};S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}6\sqrt{1+1}=3\sqrt{2}(од^2)$$

$$H_D=\frac{3\cdot 2}{3\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{2}(ед)$$

Приклад 5. *Трикутник задано координатами вершин $A_1(1,2)$, $A_2(4,0)$, $A_3(6,3)$.*
Скласти рівняння:
c) *сторони A_1A_3 ;*
c) *медіани, проведеної з вершини A_2 ;*
c) *висоти, проведеної з вершини A_2 .*

Розв'язання:
a) Скористаємось рівнянням (22):

$$\frac{y-y_1}{y_3-y_1}=\frac{x-x_1}{x_3-x_1};\quad \frac{y-2}{3-2}=\frac{x-1}{6-1}\quad;\quad y-2=\frac{1}{5}(x-1);$$

$y=\frac{1}{5}x+\frac{9}{5}$ – рівняння сторони A_1A_3

b) Нехай M – точка перетину медіани трикутника, проведеної з A_2 до сторони A_1A_3. Точка M –середина відрізка A_1A_3. Тому її координати дорівнюють півсумі координат кінців відрізка A_1A_3, а саме:

$$M\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right).$$

Скористаємось рівнянням (22):

$$\frac{y-y_2}{y_м-y_2}=\frac{x-x_2}{x_м-x_2}; \quad \frac{y-0}{\frac{5}{2}-0}=\frac{x-4}{\frac{7}{2}-4}; \qquad \frac{2}{5}y=-2(x-4);$$

$y=-5(x-4);$ $\quad y=-5x+20$ – рівняння медіани A_2M

c) Висота, проведена з вершини A_2 перпендикулярна стороні A_1A_3, тому кутовий коефіцієнт k визначається з умови:

$$k=-\frac{1}{k_{A_1A_3}}=-\frac{1}{1/5}=-5$$

Скористаємось рівнянням (24):
$y = y_2 + k(x-x_2)$; y=0-5(x-4); y=-5x +20, тобто висота трикутника $A_1A_2A_3$, проведена з вершины A_2 співпадає з медіаною, проведеною з цієї вершини.

Приклад 6. *Вершини трикутної піраміди ABCD задані координатами: A(-2,0,0), B(1,1,-1), C(-1,3,0), D(-1,0,2).*

a) *Обчислити довжину сторони AB;*
b) *Скласти рівняння площини (ABC);*
c) *Скласти рівняння висоти DH, проведеної з вершини D;*
d) *Скласти рівняння медіани AM трикутника ABC.*

Розв'язання:

a) Вектор $\overline{AB}$ має координати: {3,1,-1}. Тому його довжина за формулою (4) дорівнює:

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}(од.в.)$$

b) рівняння площини *ABC* можна записати у вигляді (29), оскільки задані координати трьох точок *A,B,C*

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x+2 & y & z \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (x+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(x+2) - y + 8z = 3x - y + 8z + 6 = 0$$

Отже рівняння площини *ABC****:*** *3x- y-8z+6* =0;

c) рівняння висоти піраміди *DH* шукаєм у вигляді (35)

$$\frac{x - x_D}{m} = \frac{y - y_D}{n} = \frac{z - z_D}{p}$$

Координати точки *D* відомі, а напрямний вектор прямої

$\overline{N}$ *(m,n,p)* колінеарний вектору нормалі до площини *ABC* .

Вектор нормалі до площини *ABC* $\overline{N}$ має координати *{3,-1,8}*.

Тому рівняння прямої *DH* має вигляд:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{8}$$

d) рівняння медіани АМ шукаєм у вигляді (37)

$$\frac{x - x_A}{x_M - x_A} = \frac{y - y_A}{y_M - y_A} = \frac{z - z_A}{z_M - z_A}$$

Точка *M* - середина відрізка *B C* і має координати:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = 0; \;\; y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = 2; \;\; z_M = \frac{z_B + z_C}{2} = -\frac{1}{2};$$

Отже рівняння медіани АМ має вигляд:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1/2}$$

Розрахунково-графічні завдання

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса, методом Крамера та матричним методом:

1. $\begin{cases} 4x - y - 3z = 5, \\ x + 2y - 2z = 0, \\ 3x - 3y + 4z = 10. \end{cases}$

2 $\begin{cases} 3x - y + z = 7, \\ x + 2y + 3z = 8, \\ x + y - 2z = -6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ x + 3y + 4z = 6, \\ 2x - y - z = 1. \end{cases}$

4 $\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x - y + z = 3, \\ 3x + 2y + 2z = 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y - z = -2, \\ 3x - y + 2z = 9, \\ 4x + 4y - 3z = -5. \end{cases}$

6 $\begin{cases} x + y - z = -2, \\ 4x - 3y + z = 1, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$

7 $\begin{cases} x + y + z = -2, \\ x - y + 2z = -7, \\ 2x + 3y - z = 1. \end{cases}$

8 $\begin{cases} x - 2y + 3z = -5, \\ 4x + 2y - 3z = 0, \\ 3x - 3y + 5z = -9. \end{cases}$

9 $\begin{cases} x + y + 3z = -5, \\ 2x - 3y + z = 0, \\ 3x + 2y - z = 5. \end{cases}$

10 $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ x + 3y + 4z = 6, \\ 2x - y - z = 1. \end{cases}$

11 $\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 3x - y + 3z = -7, \\ 2x + y - 2z = 9. \end{cases}$

12 $\begin{cases} 2x - y + z = 5, \\ 3x + 4y - 2z = -3, \\ x - y + z = 4. \end{cases}$

13 $\begin{cases} x+2y-z=-1, \\ 2x+3y+4z=-1, \\ 3x-y-z=4. \end{cases}$

14 $\begin{cases} 4x-y-3z=5, \\ x+2y-2z=0, \\ 3x-3y+4z=10. \end{cases}$

15 $\begin{cases} x+2y-z=-3, \\ 3x+4y+z=1, \\ 5x+y-3z=-2. \end{cases}$

16 $\begin{cases} 3x+y+z=2, \\ x-2y+2z=-1, \\ 4x-3y-z=5. \end{cases}$

17 $\begin{cases} x-2y+z=-2, \\ 5x+4y-z=0, \\ 3x+y+z=2. \end{cases}$

18 $\begin{cases} 2x+3y+z=1, \\ 3x-y+2z=1, \\ x+4y-z=2. \end{cases}$

19 $\begin{cases} 2x-3y+z=5, \\ x+4y-z=-3, \\ 3x+2y+3z=1. \end{cases}$

20 $\begin{cases} x-2y+z=0, \\ 2x-y=1, \\ 3x+2y-z=4. \end{cases}$

21 $\begin{cases} 4x+4y+3z=5, \\ 2x-y+z=7, \\ 3x+2y-z=-4. \end{cases}$

22 $\begin{cases} 3x-y-z=1, \\ x+3y+2z=6, \\ 2x-4y-z=-3. \end{cases}$

23 $\begin{cases} x+2y-z=-1, \\ 2x+3y+4z=-1, \\ 3x-y-z=4. \end{cases}$

24 $\begin{cases} 4x-y-3z=5, \\ x+2y-2z=0, \\ 3x-3y+4z=10. \end{cases}$

25 $\begin{cases} 2x+3y-2z=-1, \\ 3x-y+2z=3, \\ 4x+2y-z=0. \end{cases}$

26 $\begin{cases} x-y+2z=3, \\ 2x+y-3z=0, \\ x-2y-z=5. \end{cases}$

27 $\begin{cases} 3x + y - z = 8, \\ 3x - y + z = 4, \\ x + 2y - z = 4. \end{cases}$

28 $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x - 2y - 2z = 0, \\ 3x + y - 3z = 1. \end{cases}$

29 $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ 3x - 2y - z = 0, \\ 3x - y - 3z = 9. \end{cases}$

30 $\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 4x - 3y - z = 2, \\ 4x + 2y + z = -8. \end{cases}$

31 $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = -2, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$

32 $\begin{cases} 2x + y + z = 4, \\ 3x + 6y + 2z = 4, \\ 4x - y - 3z = 1. \end{cases}$

33 $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ x + 3y + 4z = 6, \\ 2x - y - z = 1. \end{cases}$

34 $\begin{cases} 3x + y - z = 8, \\ 3x - y + z = 4, \\ x + 2y - z = 4. \end{cases}$

35 $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ 3x - 2y - z = 0, \\ 3x - y - 3z = 9. \end{cases}$

36 $\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 4x - 3y - z = 2, \\ 4x + 2y + z = -8. \end{cases}$

37 $\begin{cases} 4x + 4y + 3z = 5, \\ 2x - y + z = 7, \\ 3x + 2y - z = -4. \end{cases}$

38 $\begin{cases} 3x - y - z = 1, \\ x + 3y + 2z = 6, \\ 2x - 4y - z = -3. \end{cases}$

39 $\begin{cases} x + 2y - z = -1, \\ 2x + 3y + 4z = -1, \\ 3x - y - z = 4. \end{cases}$

40 $\begin{cases} 4x - y - 3z = 5, \\ x + 2y - 2z = 0, \\ 3x - 3y + 4z = 10. \end{cases}$

41 $\begin{cases} 2x+3y-2z=-1, \\ 3x-y+2z=3, \\ 4x+2y-z=0. \end{cases}$

42 $\begin{cases} x-y+2z=3, \\ 2x+y-3z=0, \\ x-2y-z=5. \end{cases}$

43 $\begin{cases} x+2y-z=-3, \\ 3x+4y+z=1, \\ 5x+y-3z=-2. \end{cases}$

44 $\begin{cases} 3x+y+z=2, \\ x-2y+2z=-1, \\ 4x-3y-z=5. \end{cases}$

45 $\begin{cases} x-2y+z=-2, \\ 5x+4y-z=0, \\ 3x+y+z=2. \end{cases}$

46 $\begin{cases} 2x+3y+z=1, \\ 3x-y+2z=1, \\ x+4y-z=2. \end{cases}$

47 $\begin{cases} 2x-3y+z=5, \\ x+4y-z=-3, \\ 3x+2y+3z=1. \end{cases}$

48 $\begin{cases} x-2y+z=0, \\ 2x-y=1, \\ 3x+2y-z=4. \end{cases}$

49 $\begin{cases} x+y-z=-2, \\ 3x-y+2z=9, \\ 4x+4y-3z=-5. \end{cases}$

50 $\begin{cases} x+y-z=-2, \\ 4x-3y+z=1, \\ 2x+y-z=1. \end{cases}$

51 $\begin{cases} x+y+z=-2, \\ x-y+2z=-7, \\ 2x+3y-z=1. \end{cases}$

52 $\begin{cases} x-2y+3z=-5, \\ 4x+2y-3z=0, \\ 3x-3y+5z=-9. \end{cases}$

53 $\begin{cases} x+y+3z=-5, \\ 2x-3y+z=0, \\ 3x+2y-z=5. \end{cases}$

54 $\begin{cases} x+2y+3z=5, \\ x+3y+4z=6, \\ 2x-y-z=1. \end{cases}$

55 $\begin{cases} 2x+3y-2z=-1, \\ 3x-y+2z=3, \\ 4x+2y-z=0. \end{cases}$ 56 $\begin{cases} x-y+2z=3, \\ 2x+y-3z=0, \\ x-2y-z=5. \end{cases}$

57 $\begin{cases} 3x+y-z=8, \\ 3x-y+z=4, \\ x+2y-z=4. \end{cases}$ 58 $\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 4x-2y-2z=0, \\ 3x+y-3z=1. \end{cases}$

59 $\begin{cases} 2x-y+3z=1, \\ 3x-2y-z=0, \\ 3x-y-3z=9. \end{cases}$ 60 $\begin{cases} x-y+z=1, \\ 4x-3y-z=2, \\ 4x+2y+z=-8. \end{cases}$

2. Розкласти вектор $\vec{x}$ за базисом $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

1	$\vec{x}=(-2;4;7)$	$\vec{p}=(0;1;2)$	$\vec{q}=(1;0;1)$	$\vec{r}=(-1;2;4)$
2	$\vec{x}=(6;12;-1)$	$\vec{p}=(1;3;0)$	$\vec{q}=(2;-1;1)$	$\vec{r}=(0;-1;2)$
3	$\vec{x}=(1;-4;4)$	$\vec{p}=(2;1;-1)$	$\vec{q}=(0;3;2)$	$\vec{r}=(1;-1;1)$
4	$\vec{x}=(-9;5;5)$	$\vec{p}=(4;1,1)$	$\vec{q}=(2;0;3)$	$\vec{r}=(-1;2;1)$
5	$\vec{x}=(-5;-5;5)$	$\vec{p}=(-2;0,1)$	$\vec{q}=(1;3;-1)$	$\vec{r}=(0;4;1)$
6	$\vec{x}=(13;2;7)$	$\vec{p}=(5;1,0)$	$\vec{q}=(2;-1;3)$	$\vec{r}=(1;0;-1)$
7	$\vec{x}=(-19;-1;7)$	$\vec{p}=(0;1,1)$	$\vec{q}=(-2;0;1)$	$\vec{r}=(3;1;0)$
8	$\vec{x}=(3;-3;4)$	$\vec{p}=(1;0,2)$	$\vec{q}=(0;1;1)$	$\vec{r}=(2;-1;4)$
9	$\vec{x}=(3;3;-1)$	$\vec{p}=(3;1,0)$	$\vec{q}=(-2;2;1)$	$\vec{r}=(-1;0;2)$
10	$\vec{x}=(-1;7;-4)$	$\vec{p}=(-1;2,1)$	$\vec{q}=(2;0;3)$	$\vec{r}=(1;1;-1)$
11	$\vec{x}=(6;5;-14)$	$\vec{p}=(1;1,4)$	$\vec{q}=(0;-3;2)$	$\vec{r}=(2;1;-1)$
12	$\vec{x}=(6;-1;7)$	$\vec{p}=(1;-2,0)$	$\vec{q}=(-1;1;3)$	$\vec{r}=(1;0;4)$
13	$\vec{x}=(5;15;0)$	$\vec{p}=(1;0,5)$	$\vec{q}=(-1;3;2)$	$\vec{r}=(0;-1;1)$
14	$\vec{x}=(2;-1;11)$	$\vec{p}=(1;1,0)$	$\vec{q}=(0;1;-2)$	$\vec{r}=(1;0;3)$

15	$\vec{x}=(11;5;-3)$	$\vec{p}=(1;0,2)$	$\vec{q}=(-1;0;1)$	$\vec{r}=(2;5;-3)$
16	$\vec{x}=(8;0;5)$	$\vec{p}=(2;0,1)$	$\vec{q}=(1;1;0)$	$\vec{r}=(4;1;2)$
17	$\vec{x}=(3;1;8)$	$\vec{p}=(0;1,3)$	$\vec{q}=(1;2;-1)$	$\vec{r}=(2;0;-1)$
18	$\vec{x}=(8;1;12)$	$\vec{p}=(1;2,-1)$	$\vec{q}=(3;0;2)$	$\vec{r}=(-1;1;1)$
19	$\vec{x}=(-9;-8;-3)$	$\vec{p}=(1;4,1)$	$\vec{q}=(-3;2;0)$	$\vec{r}=(1;-1;2)$
20	$\vec{x}=(-5;9;-13)$	$\vec{p}=(0;1,-2)$	$\vec{q}=(3;-1;1)$	$\vec{r}=(4;1;0)$
21	$\vec{x}=(-15;5;6)$	$\vec{p}=(0;5,1)$	$\vec{q}=(3;2;-1)$	$\vec{r}=(-1;1;0)$
22	$\vec{x}=(8;9;4)$	$\vec{p}=(1;0,1)$	$\vec{q}=(0;-2;1)$	$\vec{r}=(1;3;0)$
23	$\vec{x}=(23;-14;-30)$	$\vec{p}=(2;1,0)$	$\vec{q}=(1;-1;0)$	$\vec{r}=(-3;2;5)$
24	$\vec{x}=(3;1;-3)$	$\vec{p}=(2;1,0)$	$\vec{q}=(1;0;1)$	$\vec{r}=(4;2;1)$
25	$\vec{x}=(-1;7;0)$	$\vec{p}=(0;3,1)$	$\vec{q}=(1;-1;2)$	$\vec{r}=(2;-1;0)$
26	$\vec{x}=(11;-1;4)$	$\vec{p}=(1;-1,2)$	$\vec{q}=(3;2;0)$	$\vec{r}=(-1;1;1)$
27	$\vec{x}=(-13;2;18)$	$\vec{p}=(1;1,4)$	$\vec{q}=(-3;0;2)$	$\vec{r}=(1;2;-1)$
28	$\vec{x}=(0;-8;9)$	$\vec{p}=(0;-2,1)$	$\vec{q}=(3;1;-1)$	$\vec{r}=(4;0;1)$
29	$\vec{x}=(8;-7;13)$	$\vec{p}=(0;1,5)$	$\vec{q}=(3;-1;2)$	$\vec{r}=(-1;0;1)$
30	$\vec{x}=(2;7;5)$	$\vec{p}=(1;0,1)$	$\vec{q}=(1;-2;0)$	$\vec{r}=(0;3;1)$
31	$\vec{x}=(-1;7;-4)$	$\vec{p}=(-1;2,1)$	$\vec{q}=(2;0;3)$	$\vec{r}=(1;1;-1)$
32	$\vec{x}=(6;5;-14)$	$\vec{p}=(1;1,4)$	$\vec{q}=(0;-3;2)$	$\vec{r}=(2;1;-1)$
33	$\vec{x}=(6;-1;7)$	$\vec{p}=(1;-2,0)$	$\vec{q}=(-1;1;3)$	$\vec{r}=(1;0;4)$
34	$\vec{x}=(5;15;0)$	$\vec{p}=(1;0,5)$	$\vec{q}=(-1;3;2)$	$\vec{r}=(0;-1;1)$
35	$\vec{x}=(2;-1;11)$	$\vec{p}=(1;1,0)$	$\vec{q}=(0;1;-2)$	$\vec{r}=(1;0;3)$
36	$\vec{x}=(11;5;-3)$	$\vec{p}=(1;0,2)$	$\vec{q}=(-1;0;1)$	$\vec{r}=(2;5;-3)$
37	$\vec{x}=(-1;7;0)$	$\vec{p}=(0;3,1)$	$\vec{q}=(1;-1;2)$	$\vec{r}=(2;-1;0)$
38	$\vec{x}=(11;-1;4)$	$\vec{p}=(1;-1,2)$	$\vec{q}=(3;2;0)$	$\vec{r}=(-1;1;1)$
39	$\vec{x}=(-13;2;18)$	$\vec{p}=(1;1,4)$	$\vec{q}=(-3;0;2)$	$\vec{r}=(1;2;-1)$
40	$\vec{x}=(0;-8;9)$	$\vec{p}=(0;-2,1)$	$\vec{q}=(3;1;-1)$	$\vec{r}=(4;0;1)$
41	$\vec{x}=(8;-7;13)$	$\vec{p}=(0;1,5)$	$\vec{q}=(3;-1;2)$	$\vec{r}=(-1;0;1)$

42	$\vec{x}=(2;7;5)$	$\vec{p}=(1;0,1)$	$\vec{q}=(1;-2;0)$	$\vec{r}=(0;3;1)$
43	$\vec{x}=(3;1;8)$	$\vec{p}=(0;1,3)$	$\vec{q}=(1;2;-1)$	$\vec{r}=(2;0;-1)$
44	$\vec{x}=(8;1;12)$	$\vec{p}=(1;2,-1)$	$\vec{q}=(3;0;2)$	$\vec{r}=(-1;1;1)$
45	$\vec{x}=(-9;-8;-3)$	$\vec{p}=(1;4,1)$	$\vec{q}=(-3;2;0)$	$\vec{r}=(1;-1;2)$
46	$\vec{x}=(-5;9;-13)$	$\vec{p}=(0;1,-2)$	$\vec{q}=(3;-1;1)$	$\vec{r}=(4;1;0)$
47	$\vec{x}=(-15;5;6)$	$\vec{p}=(0;5,1)$	$\vec{q}=(3;2;-1)$	$\vec{r}=(-1;1;0)$
48	$\vec{x}=(8;9;4)$	$\vec{p}=(1;0,1)$	$\vec{q}=(0;-2;1)$	$\vec{r}=(1;3;0)$
49	$\vec{x}=(-2;4;7)$	$\vec{p}=(0;1;2)$	$\vec{q}=(1;0;1)$	$\vec{r}=(-1;2;4)$
50	$\vec{x}=(6;12;-1)$	$\vec{p}=(1;3;0)$	$\vec{q}=(2;-1;1)$	$\vec{r}=(0;-1;2)$
51	$\vec{x}=(1;-4;4)$	$\vec{p}=(2;1;-1)$	$\vec{q}=(0;3;2)$	$\vec{r}=(1;-1;1)$
52	$\vec{x}=(-9;5;5)$	$\vec{p}=(4;1,1)$	$\vec{q}=(2;0;3)$	$\vec{r}=(-1;2;1)$
53	$\vec{x}=(-5;-5;5)$	$\vec{p}=(-2;0,1)$	$\vec{q}=(1;3;-1)$	$\vec{r}=(0;4;1)$
54	$\vec{x}=(13;2;7)$	$\vec{p}=(5;1,0)$	$\vec{q}=(2;-1;3)$	$\vec{r}=(1;0;-1)$
55	$\vec{x}=(-19;-1;7)$	$\vec{p}=(0;1,1)$	$\vec{q}=(-2;0;1)$	$\vec{r}=(3;1;0)$
56	$\vec{x}=(3;-3;4)$	$\vec{p}=(1;0,2)$	$\vec{q}=(0;1;1)$	$\vec{r}=(2;-1;4)$
57	$\vec{x}=(3;3;-1)$	$\vec{p}=(3;1,0)$	$\vec{q}=(-2;2;1)$	$\vec{r}=(-1;0;2)$
58	$\vec{x}=(-1;7;-4)$	$\vec{p}=(-1;2,1)$	$\vec{q}=(2;0;3)$	$\vec{r}=(1;1;-1)$
59	$\vec{x}=(6;5;-14)$	$\vec{p}=(1;1,4)$	$\vec{q}=(0;-3;2)$	$\vec{r}=(2;1;-1)$
60	$\vec{x}=(6;-1;7)$	$\vec{p}=(1;-2,0)$	$\vec{q}=(-1;1;3)$	$\vec{r}=(1;0;4)$

3. Чи будуть колінеарними вектори $\vec{c}_1$ та $\vec{c}_2$, задані у вигляді лінійної комбінації векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

1. $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(3;0;-1)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}+4\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{b}-\vec{a}$.
2. $\vec{a}=(1;0;1)$, $\vec{b}=(-2;3;5)$, $\vec{c}_1=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}-\vec{b}$.
3. $\vec{a}=(-2;4;1)$, $\vec{b}=(1;-2;7)$, $\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=2\vec{a}-\vec{b}$.
4. $\vec{a}=(1;2;-3)$, $\vec{b}=(2;-1;-1)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=8\vec{a}-\vec{b}$.

5. $\vec{a}=(3;5;4)$, $\vec{b}=(5;9;7)$, $\vec{c}_1=-2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}$.
6. $\vec{a}=(1;4;-2)$, $\vec{b}=(1;1;-1)$, $\vec{c}_1=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}_2=4\vec{a}+2\vec{b}$.
7. $\vec{a}=(1;-2;5)$, $\vec{b}=(3;-1;0)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.
8. $\vec{a}=(3;4;-1)$, $\vec{b}=(2;-1;1)$, $\vec{c}_1=6\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.
9. $\vec{a}=(-2;-3;-2)$, $\vec{b}=(1;0;5)$, $\vec{c}_1=3\vec{a}+9\vec{b}$, $\vec{c}_2=-\vec{a}-3\vec{b}$.
10. $\vec{a}=(-1;4;2)$, $\vec{b}=(3;-2;6)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{b}-6\vec{a}$.
11. $\vec{a}=(5;0;-1)$, $\vec{b}=(7;2;3)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{b}-6\vec{a}$.
12. $\vec{a}=(0;3;-2)$, $\vec{b}=(1;-2;1)$, $\vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}+5\vec{b}$.
13. $\vec{a}=(-2;7;-1)$, $\vec{b}=(-3;5;2)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}+2\vec{b}$.
14. $\vec{a}=(3;7;0)$, $\vec{b}=(1;-3;4)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.
15. $\vec{a}=(-1;2;-1)$, $\vec{b}=(2;-7;1)$, $\vec{c}_1=6\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-3\vec{a}$.
16. $\vec{a}=(7;9;-2)$, $\vec{b}=(5;4;3)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=4\vec{b}-\vec{a}$.
17. $\vec{a}=(5;0;-2)$, $\vec{b}=(6;4;3)$, $\vec{c}_1=5\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=6\vec{b}-10\vec{a}$.
18. $\vec{a}=(8;3;-1)$, $\vec{b}=(4;1;3)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=2\vec{b}-4\vec{a}$.
19. $\vec{a}=(3;-1;6)$, $\vec{b}=(5;7;10)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.
20. $\vec{a}=(1;-2;4)$, $\vec{b}=(7;3;5)$, $\vec{c}_1=6\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.
21. $\vec{a}=(3;7;0)$, $\vec{b}=(4;6;-1)$, $\vec{c}_1=3\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{c}_2=5\vec{a}-7\vec{b}$.
22. $\vec{a}=(2;-1;4)$, $\vec{b}=(3;-7;-6)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}$.
23. $\vec{a}=(5;-1;-2)$, $\vec{b}=(6;0;7)$, $\vec{c}_1=3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=4\vec{b}-6\vec{a}$.
24. $\vec{a}=(-9;5;3)$, $\vec{b}=(7;1;-2)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}+5\vec{b}$.
25. $\vec{a}=(4;2;9)$, $\vec{b}=(0;-1;3)$, $\vec{c}_1=4\vec{b}-3\vec{a}$, $\vec{c}_2=4\vec{a}-3\vec{b}$.
26. $\vec{a}=(2;-1;6)$, $\vec{b}=(-1;3;-8)$, $\vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=2\vec{a}-5\vec{b}$.
27. $\vec{a}=(5;0;8)$, $\vec{b}=(-3;1;7)$, $\vec{c}_1=3\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{c}_2=12\vec{b}-9\vec{a}$.
28. $\vec{a}=(-1;3;4)$, $\vec{b}=(2;-1;0)$, $\vec{c}_1=6\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-3\vec{a}$.
29. $\vec{a}=(4;2;-7)$, $\vec{b}=(5;0;-3)$, $\vec{c}_1=\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=6\vec{b}-2\vec{a}$.

30. $\vec{a}=(2;0;-5)$, $\vec{b}=(1;-3;4)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-5\vec{b}$, $\vec{c}_2=5\vec{a}-2\vec{b}$.

31. $\vec{a}=(1;-2;4)$, $\vec{b}=(7;3;5)$, $\vec{c}_1=6\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$

32. $\vec{a}=(3;-1;6)$, $\vec{b}=(5;7;10)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$

33. $\vec{a}=(8;3;-1)$, $\vec{b}=(4;1;3)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=2\vec{b}-4\vec{a}$

34. $\vec{a}=(5;0;-2)$, $\vec{b}=(6;4;3)$, $\vec{c}_1=5\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=6\vec{b}-10\vec{a}$

35. $\vec{a}=(7;9;-2)$, $\vec{b}=(5;4;3)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=4\vec{b}-\vec{a}$

36. $\vec{a}=(-1;2;-1)$, $\vec{b}=(2;-7;1)$, $\vec{c}_1=6\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-3\vec{a}$

37. $\vec{a}=(3;7;0)$, $\vec{b}=(1;-3;4)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$

38. $\vec{a}=(-2;7;-1)$, $\vec{b}=(-3;5;2)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}+2\vec{b}$

39. $\vec{a}=(0;3;-2)$, $\vec{b}=(1;-2;1)$, $\vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}+5\vec{b}$

40. $\vec{a}=(5;0;-1)$, $\vec{b}=(7;2;3)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{b}-6\vec{a}$

41. $\vec{a}=(3;7;0)$, $\vec{b}=(4;6;-1)$, $\vec{c}_1=3\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{c}_2=5\vec{a}-7\vec{b}$

42. $\vec{a}=(2;0;-5)$, $\vec{b}=(1;-3;4)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-5\vec{b}$, $\vec{c}_2=5\vec{a}-2\vec{b}$

43. $\vec{a}=(4;2;-7)$, $\vec{b}=(5;0;-3)$, $\vec{c}_1=\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=6\vec{b}-2\vec{a}$

44. $\vec{a}=(-1;3;4)$, $\vec{b}=(2;-1;0)$, $\vec{c}_1=6\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-3\vec{a}$

45. $\vec{a}=(5;0;8)$, $\vec{b}=(-3;1;7)$, $\vec{c}_1=3\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{c}_2=12\vec{b}-9\vec{a}$

46. $\vec{a}=(2;-1;6)$, $\vec{b}=(-1;3;-8)$, $\vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=2\vec{a}-5\vec{b}$

47. $\vec{a}=(4;2;9)$, $\vec{b}=(0;-1;3)$, $\vec{c}_1=4\vec{b}-3\vec{a}$, $\vec{c}_2=4\vec{a}-3\vec{b}$

48. $\vec{a}=(-9;5;3)$, $\vec{b}=(7;1;-2)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}+5\vec{b}$

49. $\vec{a}=(5;-1;-2)$, $\vec{b}=(6;0;7)$, $\vec{c}_1=3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=4\vec{b}-6\vec{a}$

50. $\vec{a}=(2;-1;4)$, $\vec{b}=(3;-7;-6)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}$

51. $\vec{a}=(3;7;0)$, $\vec{b}=(4;6;-1)$, $\vec{c}_1=3\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{c}_2=5\vec{a}-7\vec{b}$

52. $\vec{a}=(3;5;4)$, $\vec{b}=(5;9;7)$, $\vec{c}_1=-2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}$

53. $\vec{a}=(1;2;-3)$, $\vec{b}=(2;-1;-1)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=8\vec{a}-\vec{b}$

54. $\vec{a}=(-2;4;1)$, $\vec{b}=(1;-2;7)$, $\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=2\vec{a}-\vec{b}$

55. $\vec{a}=(1;0;1)$, $\vec{b}=(-2;3;5)$, $\vec{c}_1=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}-\vec{b}$

56. $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(3;0;-1)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}+4\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{b}-\vec{a}$

57. $\vec{a}=(1;4;-2)$, $\vec{b}=(1;1;-1)$, $\vec{c}_1=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}_2=4\vec{a}+2\vec{b}$.

58. $\vec{a}=(1;-2;5)$, $\vec{b}=(3;-1;0)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.

59. $\vec{a}=(3;4;-1)$, $\vec{b}=(2;-1;1)$, $\vec{c}_1=6\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.

60. $\vec{a}=(-2;-3;-2)$, $\vec{b}=(1;0;5)$, $\vec{c}_1=3\vec{a}+9\vec{b}$, $\vec{c}_2=-\vec{a}-3\vec{b}$

4. Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$:

1. $A(1;-2;3)$, $B(0;1,2)$, $C(3;-4;5)$.
2. $A(0;-3;6)$, $B(-12;-3,-3)$, $C(-9;-3;-6)$.
3. $A(3;3;-1)$, $B(5;5,-2)$, $C(4;1;1)$.
4. $A(-1;2;-3)$, $B(3;4,-6)$, $C(1;1;-1)$.
5. $A(-4;-2;0)$, $B(-1;-2,4)$, $C(3;-2;1)$.
6. $A(5;3;-1)$, $B(5;2,0)$, $C(6;4;-1)$.
7. $A(-3;-7;-5)$, $B(0;-1,-2)$, $C(2;3;0)$.
8. $A(2;-4;6)$, $B(0;-2,4)$, $C(6;-8;10)$.
9. $A(0;1;-2)$, $B(3;1,2)$, $C(4;1;1)$.
10. $A(3;3;-1)$, $B(1;5,-2)$, $C(4;1;1)$.
11. $A(2;1;-1)$, $B(6;-1,-4)$, $C(4;2;1)$.
12. $A(-1;-2;1)$, $B(-4;-2,5)$, $C(-8;-2;2)$.
13. $A(6;2;-3)$, $B(6;3,-2)$, $C(7;3;-3)$.
14. $A(0;0;4)$, $B(-3;-6,1)$, $C(-5;-10;-1)$.
15. $A(2;-8;-1)$, $B(4;-6,0)$, $C(-2;-5;-1)$.
16. $A(3;-6;9)$, $B(0;-3,6)$, $C(9;-12;15)$.
17. $A(0;2;-4)$, $B(8;2,2)$, $C(6;2;4)$.
18. $A(3;3;-1)$, $B(5;1,-2)$, $C(4;1;1)$.
19. $A(-4;3;0)$, $B(0;1,3)$, $C(-2;4;-2)$.

20. $A(1;-1;0),\ \ B(-2;-1,4),\ \ C(8;-1;-1)$.
21. $A(7;0;2),\ \ B(7;1,3),\ \ C(8;-1;2)$.
22. $A(2;3;2),\ \ B(-1;-3,-1),\ \ C(-3;-7;-3)$.
23. $A(2;2;7),\ \ B(0;0,6),\ \ C(-2;5;7)$.
24. $A(-1;2;-3),\ \ B(0;1,-2),\ \ C(-3;4;-5)$.
25. $A(0;3;-6),\ \ B(9;3,6),\ \ C(12;3;3)$.
26. $A(3;3;-1),\ \ B(5;1,-2),\ \ C(4;1;-3)$.
27. $A(-2;1;1),\ \ B(2;3,-2),\ \ C(0;0;3)$.
28. $A(1;4;-1),\ \ B(-2;4,-5),\ \ C(8;4;0)$.
29. $A(0;1;0),\ \ B(0;2,1),\ \ C(1;2;0)$.
30. $A(-4;0;4),\ \ B(-1;6,7),\ \ C(1;10;9)$.
31. $A(-1;-2;1),\ \ B(-4;-2,5),\ \ C(-8;-2;2)$
32. $A(1;-1;0),\ \ B(-2;-1,4),\ \ C(8;-1;-1)$
33. $A(6;2;-3),\ \ B(6;3,-2),\ \ C(7;3;-3)$
34. $A(-4;3;0),\ \ B(0;1,3),\ \ C(-2;4;-2)$
35. $A(0;0;4),\ \ B(-3;-6,1),\ \ C(-5;-10;-1)$
36. $A(0;2;-4),\ \ B(8;2,2),\ \ C(6;2;4)$
37. $A(2;-8;-1),\ \ B(4;-6,0),\ \ C(-2;-5;-1)$
38. $A(3;3;-1),\ \ B(5;1,-2),\ \ C(4;1;1)$
39. $A(0;2;-4),\ \ B(8;2,2),\ \ C(6;2;4)$
40. $A(7;0;2),\ \ B(7;1,3),\ \ C(8;-1;2)$
41. $A(-4;0;4),\ \ B(-1;6,7),\ \ C(1;10;9)$
42. $A(2;3;2),\ \ B(-1;-3,-1),\ \ C(-3;-7;-3)$
43. $A(0;1;0),\ \ B(0;2,1),\ \ C(1;2;0)$
44. $A(2;2;7),\ \ B(0;0,6),\ \ C(-2;5;7)$
45. $A(1;4;-1),\ \ B(-2;4,-5),\ \ C(8;4;0)$
46. $A(-1;2;-3),\ \ B(0;1,-2),\ \ C(-3;4;-5)$
47. $A(-2;1;1),\ \ B(2;3,-2),\ \ C(0;0;3)$

48. $A(0;3;-6)$, $B(9;3,6)$, $C(12;3;3)$
49. $A(3;3;-1)$, $B(5;1,-2)$, $C(4;1;-3)$
50. $A(2;1;-1)$, $B(6;-1,-4)$, $C(4;2;1)$
51. $A(1;-2;3)$, $B(0;1,2)$, $C(3;-4;5)$
52. $A(3;3;-1)$, $B(1;5,-2)$, $C(4;1;1)$
53. $A(0;-3;6)$, $B(-12;-3,-3)$, $C(-9;-3;-6)$
54. $A(0;1;-2)$, $B(3;1,2)$, $C(4;1;1)$
55. $A(3;3;-1)$, $B(5;5,-2)$, $C(4;1;1)$
56. $A(2;-4;6)$, $B(0;-2,4)$, $C(6;-8;10)$
57. $A(-4;-2;0)$, $B(-1;-2,4)$, $C(3;-2;1)$
58. $A(-1;2;-3)$, $B(3;4,-6)$, $C(1;1;-1)$
59. $A(-3;-7;-5)$, $B(0;-1,-2)$, $C(2;3;0)$
60. $A(5;3;-1)$, $B(5;2,0)$, $C(6;4;-1)$

5. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

1. $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/6$.
2. $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/4$.
3. $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$, $|\vec{p}|=1/5$, $|\vec{q}|=1$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/2$.
4. $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+5\vec{q}$, $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1/2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $5\pi/6$.
5. $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $3\pi/4$.

6. $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/3$.
7. $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/2$.
8. $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/4$.
9. $\vec{a} = \vec{p} - 4\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/6$.
10. $\vec{a} = \vec{p} + 4\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/3$.
11. $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 10$, $|\vec{q}| = 1$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/2$.
12. $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 5$, $|\vec{q}| = 4$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/4$.
13. $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 6$, $|\vec{q}| = 7$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/3$.
14. $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 4$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/3$.
15. $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/4$.
16. $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/6$.
17. $\vec{a} = 5\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/3$.

18. $\vec{a} = 7\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 1/2$, $|\vec{q}| = 2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/2$.
19. $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 4$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/4$.
20. $\vec{a} = 10\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/6$.
21. $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 8$, $|\vec{q}| = 1/2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/3$.
22. $\vec{a} = 3\vec{p} + 4\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{q} - \vec{p}$, $|\vec{p}| = 5/2$, $|\vec{q}| = 2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/2$.
23. $\vec{a} = 7\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 1$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $3\pi/4$.
24. $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 5$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $2\pi/3$.
25. $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/4$.
26. $\vec{a} = 5\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 5$, $|\vec{q}| = 3$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $5\pi/6$.
27. $\vec{a} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/4$.
28. $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, $|\vec{p}| = 1/2$, $|\vec{q}| = 4$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $5\pi/6$.
29. $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 1$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/3$.

30. $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/2$.

31. $\vec{a} = \vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 4$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/3$.

32. $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/3$.

33. $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/6$.

34. $\vec{a} = 5\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/3$.

35. $\vec{a} = 7\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 1/2$, $|\vec{q}| = 2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/2$.

36. $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 4$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/4$.

37. $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/6$.

38. $\vec{a} = 3\vec{p} + 4\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{q} - \vec{p}$, $|\vec{p}| = 5/2$, $|\vec{q}| = 2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/2$.

39. $\vec{a} = 7\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 1$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $3\pi/4$.

40. $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 5$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $2\pi/3$.

41. $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/4$.

42. $\vec{a}=5\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+\vec{q}$, $|\vec{p}|=5$, $|\vec{q}|=3$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $5\pi/6$.

43. $\vec{a}=3\vec{p}-4\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/4$.

44. $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/6$.

45. $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/4$.

46. $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$, $|\vec{p}|=1/5$, $|\vec{q}|=1$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/2$.

47. $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+5\vec{q}$, $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1/2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $5\pi/6$.

48. $\vec{a}=\vec{p}-1\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $3\pi/4$.

49. $\vec{a}=5\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/4$.

50. $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}+\vec{q}$, $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/6$.

51. $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=2$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/3$.

52. $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=6$, $|\vec{q}|=1$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/2$.

53. $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=5$, кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $2\pi/3$.

54. $\vec{a}=2\vec{p}+\vec{q},\ \ \vec{b}=\vec{p}-3\vec{q},\ \ |\vec{p}|=7,\ \ |\vec{q}|=2,$ кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/4$.

55. $\vec{a}=5\vec{p}-\vec{q},\ \ \vec{b}=\vec{p}+\vec{q},\ \ |\vec{p}|=4,\ \ |\vec{q}|=3,$ кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $5\pi/6$.

56. $\vec{a}=3\vec{p}-\vec{q},\ \ \vec{b}=2\vec{p}+\vec{q},\ \ |\vec{p}|=3,\ \ |\vec{q}|=4,$ кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/4$.

57. $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q},\ \ \vec{b}=2\vec{p}-2\vec{q},\ \ |\vec{p}|=3,\ \ |\vec{q}|=1,$ кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/6$.

58. $\vec{a}=3\vec{p}+4\vec{q},\ \ \vec{b}=\vec{q}-\vec{p},\ \ |\vec{p}|=5/2,\ \ |\vec{q}|=2,$ кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/2$.

59. $\vec{a}=7\vec{p}+\vec{q},\ \ \vec{b}=\vec{p}-3\vec{q},\ \ |\vec{p}|=3,\ \ |\vec{q}|=1,$ кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $3\pi/4$.

60. $\vec{a}=\vec{p}+4\vec{q},\ \ \vec{b}=2\vec{p}-\vec{q},\ \ |\vec{p}|=4,\ \ |\vec{q}|=2,$ кут між $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\pi/4$.

6. Чи є компланарними вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

1. $\vec{a}=(2;3;1),\ \ \vec{b}=(-1;0;-1),\ \ \vec{c}=(2;2;2)$.
2. $\vec{a}=(3;2;1),\ \ \vec{b}=(2;3;4),\ \ \vec{c}=(3;1;-1)$.
3. $\vec{a}=(1;5;2),\ \ \vec{b}=(-1;1;-1),\ \ \vec{c}=(1;1;1)$.
4. $\vec{a}=(1;-1;-3),\ \ \vec{b}=(3;2;1),\ \ \vec{c}=(2;3;4)$.
5. $\vec{a}=(3;3;1),\ \ \vec{b}=(1;-1;2),\ \ \vec{c}=(1;1;1)$.
6. $\vec{a}=(3;1;-1),\ \ \vec{b}=(-2;-1;0),\ \ \vec{c}=(5;2;-1)$.
7. $\vec{a}=(4;3;1),\ \ \vec{b}=(1;-2;1),\ \ \vec{c}=(2;2;2)$.
8. $\vec{a}=(4;3;1),\ \ \vec{b}=(6;7;4),\ \ \vec{c}=(2;0;-1)$.
9. $\vec{a}=(3;2;1),\ \ \vec{b}=(1;-3;-7),\ \ \vec{c}=(1;2;3)$.

10. $\vec{a}=(3;7;2)$, $\vec{b}=(-2;0;-1)$, $\vec{c}=(2;2;1)$.
11. $\vec{a}=(1;-2;6)$, $\vec{b}=(1;0;1)$, $\vec{c}=(2;-6;17)$.
12. $\vec{a}=(6;3;4)$, $\vec{b}=(-1;-2;-1)$, $\vec{c}=(2;1;2)$.
13. $\vec{a}=(7;3;4)$, $\vec{b}=(-1;-2;-1)$, $\vec{c}=(4;2;4)$.
14. $\vec{a}=(2;3;2)$, $\vec{b}=(4;7;5)$, $\vec{c}=(2;0;-1)$.
15. $\vec{a}=(5;3;4)$, $\vec{b}=(-1;0;-1)$, $\vec{c}=(4;2;4)$.
16. $\vec{a}=(3;10;5)$, $\vec{b}=(-2;-2;-3)$, $\vec{c}=(2;4;3)$.
17. $\vec{a}=(-2;-4;-3)$, $\vec{b}=(4;3;1)$, $\vec{c}=(6;7;4)$.
18. $\vec{a}=(3;1;-1)$, $\vec{b}=(1;0;-1)$, $\vec{c}=(8;3;-2)$.
19. $\vec{a}=(4;2;2)$, $\vec{b}=(-3;-3;-3)$, $\vec{c}=(2;1;2)$.
20. $\vec{a}=(4;1;2)$, $\vec{b}=(9;2;5)$, $\vec{c}=(1;1;-1)$.
21. $\vec{a}=(5;3;4)$, $\vec{b}=(4;3;3)$, $\vec{c}=(9;5;8)$.
22. $\vec{a}=(3;4;2)$, $\vec{b}=(1;1;0)$, $\vec{c}=(8;11;6)$.
23. $\vec{a}=(4;-1;-6)$, $\vec{b}=(1;-3;-7)$, $\vec{c}=(2;-1;-4)$.
24. $\vec{a}=(3;1;0)$, $\vec{b}=(-5;-4;-5)$, $\vec{c}=(4;2;4)$.
25. $\vec{a}=(3;0;3)$, $\vec{b}=(8;1;6)$, $\vec{c}=(1;1;-1)$.
26. $\vec{a}=(1;-1;4)$, $\vec{b}=(1;0;3)$, $\vec{c}=(1;-3;8)$.
27. $\vec{a}=(6;3;4)$, $\vec{b}=(-1;-2;-1)$, $\vec{c}=(2;1;2)$.
28. $\vec{a}=(4;1;1)$, $\vec{b}=(-9;-4;-9)$, $\vec{c}=(6;2;6)$.
29. $\vec{a}=(-3;3;3)$, $\vec{b}=(-4;7;6)$, $\vec{c}=(3;0;-1)$.
30. $\vec{a}=(-7;10;5)$, $\vec{b}=(0;-2;-1)$, $\vec{c}=(-2;-4;-1)$.
31. $\vec{a}=(2;-3;-2)$, $\vec{b}=(4;-7;5)$, $\vec{c}=(-2;0;-1)$.
32. $\vec{a}=(5;3;4)$, $\vec{b}=(-1;0;-1)$, $\vec{c}=(4;2;4)$.
33. $\vec{a}=(3;10;5)$, $\vec{b}=(-2;-2;-3)$, $\vec{c}=(2;4;3)$.
34. $\vec{a}=(-2;4;-3)$, $\vec{b}=(4;-3;1)$, $\vec{c}=(6;7;4)$.

35. $\vec{a}=(3;1;1)$, $\vec{b}=(1;0;0)$, $\vec{c}=(8;3;-2)$.

36. $\vec{a}=(4;-2;-2)$, $\vec{b}=(-3;-3;-3)$, $\vec{c}=(2;1;2)$.

37. $\vec{a}=(4;1;6)$, $\vec{b}=(0;2;5)$, $\vec{c}=(1;1;-1)$.

38. $\vec{a}=(-5;3;4)$, $\vec{b}=(0;3;3)$, $\vec{c}=(9;5;8)$

39. $\vec{a}=(-5;3;4)$, $\vec{b}=(-1;0;-1)$, $\vec{c}=(4;2;4)$.

40. $\vec{a}=(3;8;5)$, $\vec{b}=(-2;-2;-3)$, $\vec{c}=(2;4;3)$.

41. $\vec{a}=(-2;4;3)$, $\vec{b}=(4;3;1)$, $\vec{c}=(6;7;4)$.

42. $\vec{a}=(3;1;1)$, $\vec{b}=(1;0;1)$, $\vec{c}=(-8;3;2)$.

43. $\vec{a}=(1;1;-3)$, $\vec{b}=(3;2;1)$, $\vec{c}=(2;3;4)$.

44. $\vec{a}=(3;3;1)$, $\vec{b}=(1;-1;2)$, $\vec{c}=(1;1;1)$

45. $\vec{a}=(4;3;1)$, $\vec{b}=(1;-2;1)$, $\vec{c}=(2;2;2)$.

46. $\vec{a}=(4;3;1)$, $\vec{b}=(6;7;4)$, $\vec{c}=(2;0;-1)$.

47. $\vec{a}=(3;2;1)$, $\vec{b}=(1;-3;-7)$, $\vec{c}=(1;2;3)$

48. $\vec{a}=(7;3;4)$, $\vec{b}=(-1;-2;-1)$, $\vec{c}=(4;2;4)$.

49. $\vec{a}=(2;3;2)$, $\vec{b}=(4;7;5)$, $\vec{c}=(2;0;-1)$.

50. $\vec{a}=(2;3;2)$, $\vec{b}=(4;7;5)$, $\vec{c}=(2;0;-1)$.

51. $\vec{a}=(5;3;4)$, $\vec{b}=(-1;0;-1)$, $\vec{c}=(4;2;4)$.

52. $\vec{a}=(4;3;1)$, $\vec{b}=(1;-2;1)$, $\vec{c}=(2;2;2)$.

53. $\vec{a}=(4;3;1)$, $\vec{b}=(6;7;4)$, $\vec{c}=(2;0;-1)$

54. $\vec{a}=(1;5;2)$, $\vec{b}=(-1;1;-1)$, $\vec{c}=(1;1;1)$.

55. $\vec{a}=(1;-1;-3)$, $\vec{b}=(3;2;1)$, $\vec{c}=(2;3;4)$.

56. $\vec{a}=(6;3;4)$, $\vec{b}=(-1;-2;-1)$, $\vec{c}=(2;1;2)$.

57. $\vec{a}=(4;1;1)$, $\vec{b}=(-9;-4;-9)$, $\vec{c}=(6;2;6)$.

58. $\vec{a} = (-3;3;3)$, $\vec{b} = (-4;7;6)$, $\vec{c} = (3;0;-1)$.

59. $\vec{a} = (-7;10;-5)$, $\vec{b} = (0;-2;-1)$, $\vec{c} = (-2;4;-1)$.

60. $\vec{a} = (3;2;1)$, $\vec{b} = (1;-3;-7)$, $\vec{c} = (1;2;3)$

7. Використовуючи задані координати вершин трикутника АВС, побудувати трикутник та скласти чи знайти:

a) Довжину сторони АС;
b) Загальне рівняння АС;
c) Відстань від т.В до АС;
d) Рівняння медіани до сторони ВС у канонічній формі;
e) Кут АСВ;
f) Рівняння прямої, що проходить через вершину В паралельно АС

№	КООРДИНАТИ		
	A	B	C
1	(1;2)	(3;7)	(4;6)
2	(2;3)	(4;8)	(5;7)
3	(3;4)	(5;9)	(6;8)
4	(4;5)	(6;10)	(7;9)
5	(5;6)	(7;11)	(8;10)
6	(6;7)	(8;12)	(9;11)
7	(7;8)	(9;13)	(10;12)
8	(8;9)	(10;14)	(11;13)
9	(10;9)	(9;11)	(13;12)
10	(11;10)	(10;12)	(14;13)
11	(12;11)	(11;13)	(15;14)
12	(13;12)	(12;14)	(16;15)
13	(14;13)	(13;15)	(17;160
14	(15;14)	(14;15)	(18;17)
15	(16;15)	(15;17)	(19;18)

16	(17;16)	(16;18)	(20;19)
17	(19;18)	(20;19)	(21;17)
18	(20;19)	(21;20)	(22;18)
19	(21;20)	(22;21)	(23;19)
20	(22;21)	(23;22)	(24;20)
21	(23;22)	(24;23)	(25;21)
22	(24;23)	(25;24)	(26;22)
	A	B	C
23	(25;27)	(26;25)	(27;23)
24	(26;25)	(27;26)	(28;24)
25	(26;28)	(27;29)	(26;25)
26	(27;29)	(28;30)	(27;26)
27	(28;30)	(29;31)	(28;27)
28	(29;31)	(30;32)	(29;28)
29	(30;32)	(31;33)	(30;29)
30	(31;33)	(32;34)	(31;30)
31	(32;34)	(33;35)	(32;31)
32	(33;35)	(34;36)	(33;32)
33	(0;-6)	(1;-1)	(-10;-2)
34	(1;-2)	(3;0)	(3;2)
35	(-2;-2)	(6;4)	(8;-3)
36	(1;3)	(1;1)	(3;3)
37	(-3;4)	(1;2)	(0;-2)
38	(4;5)	(1;0)	(7;3)
39	(-2;12)	(6;6)	(0;2)
40	(5;1)	(-2;0)	(-3;5)
41	(2;8)	(-2;4)	(10;2)
42	(1;1)	(3;-1)	(2;1)
43	(-3;8)	(5;2)	(1;-3)
44	(3;11)	(-5;5)	(-3;-2)
45	(-1;9)	(7;5)	(-3;-2)
46	(3;1)	(1;-1)	(3;0)
47	(-1;12)	(9;-8)	(-7;4)

48	(1;2)	(-1;2)	(-1;-2)
49	(3;-1)	(1;2)	(-2;-5)
50	(-2;1)	(3;13)	(6;7)
51	(5;7)	(1;1)	(-2;3)
52	(0;1)	(3;-2)	(3;0)
53	(2;1)	(1;-1)	(-1;3)
54	(3;2)	(2;1)	(5;2)
55	(-3;4)	(3;0)	(5;10)
56	(1;9)	(-7;3)	(3;2)
57	(-5;6)	(3;0)	(-4;1)
58	(-4;2)	(4;8)	(2;-2)
59	(-3;2)	(2;1)	(-1;1)
60	(-7;3)	(3;8)	(1;9)

8. У тетраеді з вершинами ABCD знайти:

a) об'єм V_{ABCD} ;

b) площу грані S_{ABC} ;

c) довжину висоти опушеної з вершини D на грань ABC;

d) кут між ребрами AB і AC;

e) довжину сторони AB;

f) рівняння площини (ABC);

g) рівняння висоти DH, проведеної з вершини D;

h) рівняння медіани AM трикутника ABC.

	A	B	C	D
1	(-2,4,4)	(-3,2,4)	(-4,4,6)	(0,2,0)
2	(1,3,4)	(4,2,-2)	(6,5,1)	(3,-8,-4)
3	(2,1,1)	(3,2,1)	(-1,4,5)	(-1,-1,4)
4	(2,-1,1)	(-2,4,3)	(4,2,1)	(3,-4,-4)
5	(1,4,3)	(2,3,1)	(3,2,1)	(4,4,-5)
6	(-1-4,2)	(3,4,0)	(1,-3,1	(-3,-1,2)
7	(1,4,7)	(-2,6,-1)	(-2,-3,1)	(-2,-3,-1)

8	(1,-2,0)	(2,1,3)	(3,1,-3	(4,2,2)
9	(4,1,2)	(4,3,2)	(5,3,1)	(-1,0,2)
10	(3,1,4)	(-2,1,0)	(1,6,-5)	(1,3,8)
11	(1,3,-2)	(-1,-2,3)	(-4,-3,1)	(1,7,0)
12	(2,-1,3)	(-3,1,1)	(-2,-1,3)	(-1,7,-2)
13	(1,1,2)	(-2,-1,0)	(-1,-1,-3)	(-1,1,0)
14	(2,0,4)	(-3,1,0)	(-4,-2,-1)	(-2,-1,0)
15	(-1,1,-1)	(3,4,1)	(1,3,0)	(3,4,-3)
16	(-3,-1,0)	(1,1,1)	(2,4,-3)	(2,1,3)
17	(-3,1,0)	(2,1,1)	(1,3,0)	(1,1,4)
18	(-2,0,6)	(2,4,3)	(3,1,-1)	(-2,1,0)
19	(2,-3,1)	(-1,2,4)	(2,3,5)	(7,2,4)
20	(2,2,-3)	(-4,-2,1)	(1,3,2)	(6,-5,3)
21	(2,3,-1)	(4,1,3)	(5,2,1)	(6,3,2)
22	(-1,1,1)	(2,0,4)	(3,4,0)	(0,0,8)
23	(2,2,1)	(2,4,-3)	(3,1,4)	(1,3,4)
24	(3,2,0)	(1,4,2)	(1,3,5)	(4,3,5)
25	(-3,2,1)	(1,4,4)	(-3,2,2)	(2,1,3)
26	(1,2,3)	(3,2,0)	(4,3,-1)	(-2,1,4)
27	(3,1,-1)	(2,1,1)	(1,3,4)	(2,4,2)
28	(-2,-1,1)	(2,3,1)	(1,2,3)	(3,4,5)
29	(2,1,3)	(-1,2,1)	(4,0,1)	(1,3,1)
30	(-1,0,4)	(2,1,0)	(-2,1,3)	(4,3,2)
31	(1,1,2)	(2,1,3)	(4,3,1)	(3,4,5)
32	(7,1,4)	(-4,2,1)	(5,-1,2)	(-4,2,1)
33	(1,2,3)	(3,-7,2)	(-3,2,0)	(2,3,-4
34	(1,6,-1)	(9,-1,2)	(3,9,1)	(1,1,4)
35	(-1,9,-1)	(3,8,2)	(-3,2,5)	(2,3,-4)
36	(5,2,4)	(4,-1,0)	(2,2,1)	(2,1,9)
37	(0,2,1)	(3,7,2)	(3,8,1)	(5,1,4)
38	(1,-2,1)	(7,-1,-2)	(3,2,-1)	(2,0,-4)
39	(6,2,-1)	(4,1,2)	(7,2,1)	(5,1,-4)
40	(-1,0,1)	(3,-1,8)	(-3,5,1)	(2,7,-4)

41	(1,2,1)	(0,1,2)	3,2,0)	(4,1,4)
42	(-1,2,8)	(3,-1,5)	(-2,2,1)	(2,3,-4)
43	(9,2,-1)	(6,-7,2)	(-3,5,1)	(6,1,4)
44	(-6,2,9)	(3,-1,0)	5,2,1)	(2,0,-4)
45	(-4,2,1)	(9,0,2)	(-3,5,1)	(5,9,-4)
46	(-1,4,-1)	(3,-1,7)	(-3,2,4)	(2,1,0)
47	(-4,2,70)	(0,-1,2)	(4,0,1)	(2,5,-4)
48	(-1,1,-1)	(4,1,0)	(-8,2,1)	(6,1,-4)
49	(2,2,-1)	(4,-1,2)	(5,2,1)	(3,1,-4)
50	(1,2,1)	(3,-1,2)	(-3,0,1)	(2,-1,-4)
51	(-4,2,1)	(-3,2,-7)	(-3,8,1)	(3,8,-4)
52	(-1,2,3)	(2,-1,2)	(-2,5,1)	(3,1,-2)
53	(-1,2,-1)	(3,-1,2)	(-3,2,1)	(2,1,-4)
54	3,1,-2)	(2,-3,4)	(-1,5,6)	(4,4,1)
55	(-1,4,10)	(2,1,3)	(3,3,-1)	(1,5,3)
56	(1,-2,3)	(3,3,2)	(2,1,2)	(1,1,5)
57	(1,1,-1)	(2,3,2)	(7,0,1)	(3,4,1)
58	(1,-1,4)	(3,3,2)	(3,-1,2)	(2,4,1)
59	(3,2,2)	(1,12,4)	(2,5,5)	(4,2,1)
60	(2,1,4)	(1,-3,-3)	(-1,4,2)	(3,-2,1)

Розділ II

Математичний аналіз

Теоретичні відомості

1. Теорія границь

Числовою послідовністю називається нескінченна множина дійсних чисел $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, кожне з яких є функцією свого порядкового номера: $x_n = f(n)$.
Ця формула є формулою загального члена послідовності.
Наприклад, для послідовності $1, 3, 5, 7, ..., 2n-1, ...$, загальний член $x_n = 2n-1$.

Число x_0 називають *границею послідовності* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, якщо для довільного, як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує число $N = N(\varepsilon)$ таке, що нерівність $|x_n - x_0| < \varepsilon$ виконується для всіх $n > N$.

Символічно пишуть

$$x_0 = \lim_{n \to \infty} x_n .$$

Число A називають *границею функції* $f(x)$ при x, що наближається до x_0, якщо для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $|f(x) - A| < \varepsilon$, як тільки $|x - x_0| < \delta$.

Це записується у вигляді $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Якщо $x < x_0$ і $x \to x_0$, то пишуть $x \to x_0 - 0$; аналогічно, якщо $x > x_0$ і $x \to x_0$, то пишуть $x \to x_0 + 0$.

Числа $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ і $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ називають відповідно *границею зліва* функції $f(x)$ у точці x_0 і *границею справа* функції $f(x)$ у точці x_0.

Для існування границі функції $f(x)$ при $x \to x_0$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність:

$$f(x_0-0)=f(x_0+0).$$

Важливі значення мають такі границі:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ - перша визначна границя

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$ або $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$, де $e\approx 2{,}718281...$ - друга визначна границя.

Функцію y=f(x), визначеному в деякому околі точки x_0, називають неперервною в т. x_0, якщо границя функції і її значення в цій точці збігаються, тобто

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(x_0)$$

Для неперервності функції f(x) у точці x_0, необхідної достатньо,щоб вона була неперервна в цій точці зліва і справа, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$

Якщо ця умова не виконується, то говорить, що функція f(x) має розрив неперервності у т.x_0.

Якщо функція f(x) має скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)\,i\,\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)$ при чому не всі три числа $f(x_0)$, $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ рівні між собою, то x_0 називається точкою розриву першого роду.

Якщо в точці x_0 хоча б одна з односторонніх границь дорівнює нескінченності або не існує, то цю точку називають точкою розриву другого роду.

Таблиця еквівалентності нескінченно малих величин

Нехай a і n – сталі, a>0, a$\neq$0. При x$\longrightarrow$0

$x\sim\sin x$	$x\sim\arcsin x$	$x\sim e^x-1$
$x\sim tgx$	$x\sim arctgx$	$x\ln a\sim a^x-1$
$\dfrac{x^2}{2}\sim 1-\cos x$	$\dfrac{x}{2}\sim\sqrt{x+1}-1$	$\dfrac{x}{\ln a}\sim\log_a(1+x)$

2. Диференціальне числення функції однієї змінної

Основні правила диференціювання (U , V – диференційована функ-ція).

1) $(C\cdot U)=C\cdot U'$, де C –const

2) $(U\pm V)'=U'\pm V'$

3) $(U\cdot V)=U'V+UV'$

4) $(\frac{U}{V})'=\frac{U'V-UV'}{V^2}$

Похідна *складної* функції

Якщо $y=\varphi(U)$, а $U=g(x)$, то y називають складною функцією

Тоді $y'=\varphi'(U)\cdot U'$

Похідна *неявної* функції

$$y'=-\frac{F'x(x,y)}{F'y(x,y)}$$

Похідна функції , що задана *параметрично*

Якщо функція задана параметрично

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad t\in[T_1;T_2]$$, то

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Диференціал функції

$$dy=y'dx$$

Рівняння *дотичної* до кривої y(x) в точці

$$y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$$

Рівняння *нормалі* до кривої y(x) у точці x_0

$$y=y(x_0)-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)$$

Для побудови графіка функції потрібно провести такі дослідження:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти, по можливості, точки перетину графіка функції з осями координат.
3. З'ясувати, чи є функція парною, непарною, періодичною.
4. Дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву, з'ясувати характер розривів і при цьому знайти вертикальні асимптоти.
5. Знайти похилі та горизонтальні асимптоти графіка функції.
6. Знайти точки екстремумів функції та інтервали монотонності функції.
7. Визначити проміжки опуклості та знайти точки перегину графіка функції.
8. За одержаними даними схематично побудувати графік даної функції.

3. Інтегральне числення. Неозначений інтеграл

Інтегрування методом внесення функції під знак диференціала

$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \int f(u)du$, де $u = \varphi(x)$.

Інтегрування методом заміни змінної (методом підстановки)

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int \tilde{f}(t)dt \text{, де}$$

$$x = \varphi(t) \text{ , } dx = \varphi'(t)dt \text{ , } t = \varphi^{-1}(x)$$

Інтегрування частинами в неозначеному інтегралі.

Якщо функції $U = U(x)$ і $V = V(x)$ диференційовані на деякому інтервалі X, то $\int UdV = UV - \int VdU$ (1)

Формулу застосовують до інтегралів вигляду:

1. $\int P_n(x)\sin axdx$, $\int P_n(x)\cos axdx$ і, $\int P_n(x)e^{ax}dx$ де $p_n(x)$ – многочлен від x степеня n. При обчисленні інтегралів такого вигляду вважають $U = P_n(x)$.
2. $\int P_n(x)\ln axdx$, $\int P_n(x)\arcsin axdx$ $\int P_n(x)arctgaxdx$, де $P_n(x)$ – многочлен від x степеня n, зокрема, можливо $P_n(x) \equiv 1$.

При обчисленні інтегралів такого вигляду за U приймають функції $\ln ax$, $\arcsin ax$, $arctgax$.

Приклади розв'язування типових завдань

1. Теорія границь

Приклад 1.1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^2+n+2}{(n+1)^2}$

Розв'язання:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{n^2+n+2}{(n+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=1\,\mathbf{;}$$

Приклад 1.2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$;

Розв'язання:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)(x^2+3)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x-1)(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x^2+3)}{x-2}=\frac{2\cdot4}{-1}=-8$$

Приклад 1.3. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;

Розв'язання:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2+1}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=0$$

Приклад 1.4. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

Розв'язання:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{-(x+1)}\right)^{\frac{-(x+1)}{1}x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} x} = \infty$$

2. Диференціальне числення функції однієї змінної

Приклад 2.1. Знайти похідну:

a) $y(x)=\dfrac{x^2}{3}$;

b) $y(x)=\dfrac{x^3}{3}+5x$

c) $y(x)=x^2(2x-7)$;

d) $y(x)=\sqrt{x}(5-3x)x$;

e) $y(x)=(x+5)(x-8)$;

f) $y(x)=\dfrac{1+9x}{x+1}$;

g) $y(x)=\dfrac{x^3}{4-x}$.

h) $y(x)=x^3\arcsin x$

Розв'язання:

a) $\left(\dfrac{x^2}{3}\right)' = \dfrac{1}{3}\left(x^2\right)' = \dfrac{2}{3}x$;

б) $\left(\frac{x^3}{3}+5x\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' + (5x)' = \frac{1}{3}(x^3)' + 5(x)' = x^2 + 5$;

в) $(x^2(2x-7))' = (x^2)'(2x-7) + x^2(2x-7)' = 2x(2x-7) +$
$+x^2 \cdot 2 = 6x^2 - 14x$;

г) $(\sqrt{x}(5-3x))' = (\sqrt{x})'(5-3x) + \sqrt{x}(5-3x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(5-3x) +$
$+\sqrt{x}(-3) = \frac{5-3x-6x}{2\sqrt{x}} = \frac{5-9}{2\sqrt{x}}$;

д) $((x+5)(x-8))' = (x+5)'(x-8) + (x-8)'(x+5) = 1\cdot(x-8) +$
$+1\cdot(x+5) = 2x-3$;

е) $\left(\frac{1+9x}{x+1}\right)' = \frac{(x+1)(1+9x)' - (1+9x)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)\cdot 9 - (1+9x)\cdot 1}{(x+1)^2} =$
$= \frac{8}{(x+1)^2}$;

є) $\left(\frac{x^3}{4-x}\right)' = \frac{(4-x)(x^3)' - x^3(4-x)'}{(4-x)^2} = \frac{(4-x)3x^2 - x^3(-1)}{(4-x)^2} =$
$= \frac{12x^2 - 2x^3}{(4-x)^2}$;

ж) $\left(x^3 \arcsin x\right)' = 3x^2 \arcsin x + \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$.

Приклад 2.2. Знайти похідну функцій, що містять змінну величину в основі і показнику степеня, заданих неявно і параметрично :

a) $y = (\sin x)^x$;

b) x = a(t-sin t), y = a(1-cos t);

c) x+y = e^{x-y} .

Розв'язання:

a) Знайдемо ln y = xln sin x, тоді диференціюючи обидві частини рівності, одержимо
y'/y = ln sin x +(xcos x)/sin x.
Тоді y' = (sin x)^x(ln sin x +(xcos x)/sin x);

b) y'_t = a sin t, x'_t = a(1-cos t).Звідси
y'(x)= (a sin t)/(a(1-cos t)) = ctg (t/2), t$\neq 2\pi k$;

c) Диференціюємо дане рівняння по x, вважаючи y функцією від x. $1+y'_x(x)=e^{x-y}(1-y'_x(x))$, звідки
$y'_x=(e^{x-y}-1)/(1+e^{x-y})$. Диференціюючи рівняння ще раз, одержимо $y''_x(x)=e^{x-y}(1-y'_x(x))^2-e^{x-y}y''_x(x)$, отже,
$y''_x(x)=(1-y'_x)^2e^{x-y}/(1+e^{x-y})=4e^{x-y}/(1+e^{x-y})^3$

Приклад 2.3 Дослідити на екстремум функцію

$$f(x)=(x+1)e^{-5x}.$$

Розв’язання. Функція $f(x)=(x+1)e^{-5x}$ визначена і диференційовна на всій числовій осі. Її похідна

$$f'(x)=e^{-5x}-5(x+1)e^{-5x}=e^{-5x}(-5x-4)$$

дорівнює нулю при $x=-\frac{4}{5}$. Ця точка розбиває числову пряму на два інтервали знакосталості похідної: $\left(-\infty;-\frac{4}{5}\right)$ та $\left(-\frac{4}{5};+\infty\right)$.

При $x\in\left(-\infty;-\frac{4}{5}\right)$, $f'(x)>0$, а при $x\in\left(-\frac{4}{5};+\infty\right)$, $f'(x)<0$.

Отже, в точці $x=-\frac{4}{5}$ функція f має локальний максимум. Її значення $f_{\max}=f(-\frac{4}{5})=\frac{1}{5}e^4$.

Приклад 2.4. Дослідити на екстремум функцію

$$f(x) = \frac{1-x^3}{x^2}.$$

Розв'язання. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Похідна $f'(x) = \left(\frac{1-x^3}{x^2}\right)' = -\frac{3x^4 - 3x^2\left(x^3+2\right)}{x^3}$. $f'(x) = 0$ при $x = -\sqrt[3]{2}$, яка є критичною точкою. $f'(x) = \infty$ при $x = 0$, але ця точка не є критичною, оскільки в ній функція не визначена.

$$f''(x) = \left(-\frac{x^3+2}{x^3}\right)' = -\frac{3x^5 - 3x^5 - 6x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4};$$

оскільки $f''(-\sqrt[3]{2}) > 0$, то $x = -\sqrt[3]{2}$ – точка мінімуму функції.

$f_{\min} = f(-\sqrt[3]{2}) = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$.

Приклад 2.5. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-3}$ на відрізку [–2;2].

Розв'язання. Дана функція визначена, неперервна та диференційовна в інтервалі (–2;2). Знайдемо похідну та критичні точки:

$f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x-3)^2}$; $(x-3)^2 = (x+3)^2$; $x_0 = 0$ – критична точка.

Знайдемо значення функції в критичній точці і на кінцях відрізка: $f(0) = \frac{2}{3}$, $f(-2) = \frac{6}{5}$, $f(2) = \frac{6}{5}$.

Отже,

$$\min_{[-2;2]} f(x) = f(0) = \frac{2}{3}, \quad \max_{[-2;2]} f(x) = f(-2) = f(2) = \frac{6}{5}.$$

Приклад 2.6. Знайти інтервали опуклості і точки перегину графіка функції $y = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x - 12$.

Розв'язання.. Очевидно, що y' та y'' існують для всіх $x \in (-\infty;\infty)$. Знаходимо похідні:

$y' = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 24,\ \ y'' = 12x^2 + 6x - 36$.

Звідси $y'' = 0$ при $x_1 = -2, x_2 = 3/2$. $y'' > 0$ на інтервалах $(-\infty;-2) \cup \left(\frac{3}{2};\infty\right)$, тому функція опукла вниз; $y'' < 0$ на інтервалі $\left(-2;\frac{3}{2}\right)$, тому функція опукла вгору. Оскільки під час переходу через точки $x_1 = -2$ та $x_2 = \frac{3}{2}$ друга похідна змінює знак, то точки $(-2;-124)$ і $\left(\frac{3}{2};-\frac{129}{16}\right)$ є точками перегину графіка функції

Приклад 2.7. Знайти асимптоту графіка функції

$y = \frac{1}{x-2}$.

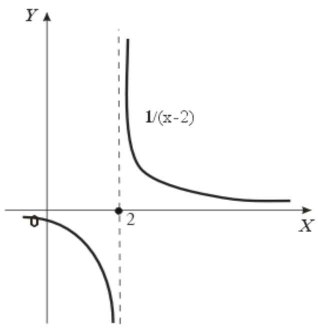


Рис.1

Розв'язання. Графік функції $y = \frac{1}{x-2}$ має вертикальну асимптоту $x = 2$, оскільки $\lim\limits_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty,\quad \lim\limits_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty$ (рис.1).

Приклад 2.8. . Побудувати графік функції $y=\dfrac{2x^3}{x^2-4}$.

Розв'язання.

1. Функція визначена і неперевна при всіх $x\in R$, крім точок $x=\pm 2$. Тобто $D(f)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)$. Область значень функції $E(f)=(-\infty;\infty)$.
2. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат. Якщо $y=0$, $\dfrac{2x^3}{x^2-4}=0$, то $x=0$. Якщо $x=0$, то $y=0$. Отже $(0;0)$ – єдина точка перетину графіка з осями координат.
3. Функція непарна, бо $y(-x)=-y(x)$ і тому графік функції симетричний відносно початку координат. Таким чином, дослідження достатньо провести на проміжку $[0,\infty)$.
4. Функція неперевна при всіх $x\in R$, крім точок $x=\pm 2$. Оскільки $\lim\limits_{x\to -2-0}\dfrac{2x^3}{x^2-4}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -2+0}\dfrac{2x^3}{x^2-4}=+\infty$, то $x=-2$ – двостороння вертикальна асимптота.

Оскільки $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{2x^3}{x^2-4}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{2x^3}{x^2-4}=+\infty$, то $x=2$ – двостороння вертикальна асимптота.

5. Знайдемо похилі асимптоти. $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-4}=2$,

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2-4}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{x^2-4}=0.$$

Таким чином, $y=2x$ – права похила асимптота.

Оскільки $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-4}=2$,

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^3}{x^2-4}-2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x}{x^2-4}=0,$ то пряма $y=2x$ є також і лівою похилою асимптотою.

6. Для знаходження точок екстремуму функції та інтервалів монотонності знайдемо похідну:

$$y' = \frac{6x^2\left(x^2-4\right)-4x^4}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{2x^2\left(x^2-12\right)}{\left(x^2-4\right)^2}.$$

Похідна дорівнює нулю в точках x = 0, $x = 2\sqrt{3}$ та не існує в точці $x = 2$. Зазначимо, що на проміжках $\left[0;2\right)$ і $\left(2;2\sqrt{3}\right)$ $y' < 0$ і тому функція спадає, а на інтервалі $\left(2\sqrt{3};\infty\right)$ $y' > 0$ і тому функція зростає. Очевидно, що точка $x = 2\sqrt{3}$ є точкою мінімуму.

7. Для знаходження проміжків опуклості і точок перегину, знайдемо другу похідну: $y'' = \dfrac{16x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$. Похідна y'' дорівнює нулю в точці x=0 і не існує в точці $x = 2$. На інтервалі $\left(0;2\right)$ $y'' < 0$ і тому функція опукла вгору, а на інтервалах $\left(2;2\sqrt{3}\right)$ і $\left(2\sqrt{3};\infty\right)$ $y'' > 0$ і тому функція опукла вниз. Крім того, точка $x = 0$ є точкою перегину, оскільки друга похідна змінює знак при переході через цю точку.

$$y\left(2\sqrt{3}\right) = 6\sqrt{3}, \quad y\left(0\right) = 0.$$

8. Використовуючи результати дослідження, будуємо графік функції (рис. 1.16).

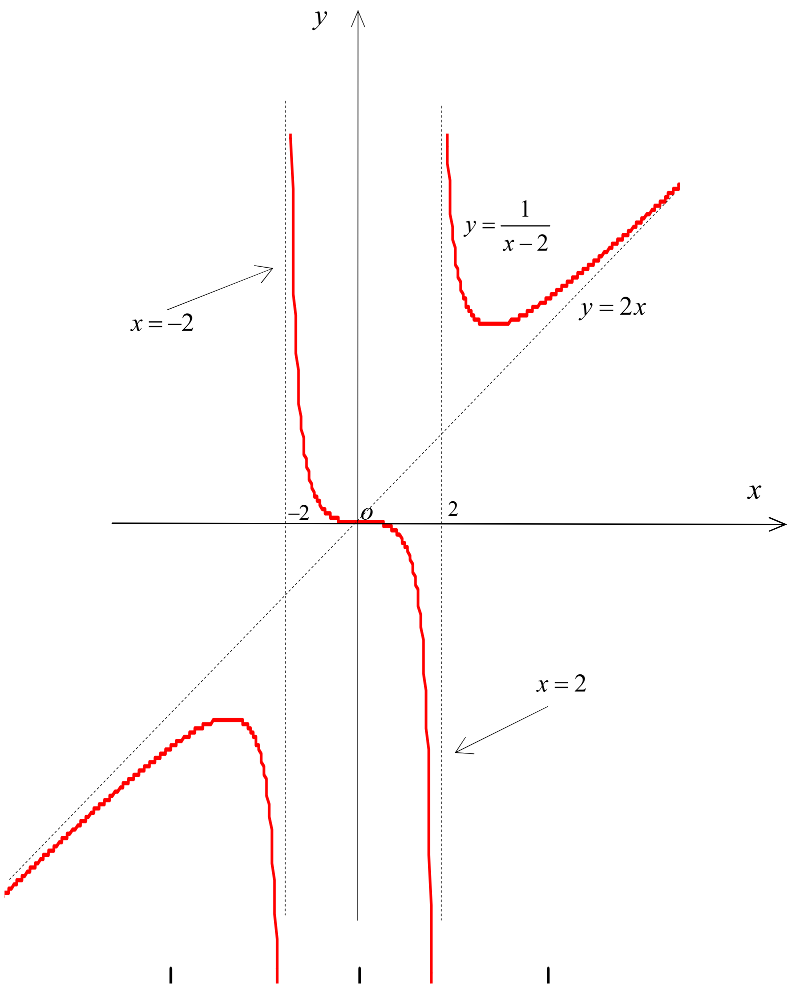


Рис. 2

3. Інтегральне числення. Неозначений інтеграл

Приклад 3.1. Знайти неозначені інтеграли, скориставшись метолом безпосереднього інтегрування:

a) $\int x^3 dx$;

b) $\int 3^x dx$;

c) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;

d) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання:

a) Застосовуємо формулу 1(таблиця інтегралів), де $\alpha = 3$. Отримуємо: $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$ **;**

b) Використовуючи формулу 8, де *a*=3, отримаємо: $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$;

c) Підінтегральна функція – це дріб $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Запишемо її у вигляді степеневої функції, а саме $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$. Потім використовуємо формулу 1, при $\alpha = -\frac{1}{3}$. Отримуємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-1/3+1} + C = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C;$$

d) У підінтегральній функції поділимо почленно чисельник на знаменник. Отримуємо:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}-3\right)dx =$$

$$= \int\left(x^{1/6}+\frac{2}{x^{1/2}}-3\right)dx = \int x^{1/6}dx + \int\frac{2}{x^{1/2}}dx - 3\int dx =$$

$$= \frac{x^{1+1/6}}{1+1/6} + 2\frac{x^{1-1/2}}{1-1/2} - 3x = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 4\sqrt{x} - 3x + C.$$

Приклад 3.2. Знайти неозначені інтеграли, скориставшись методом внесення функції під знак диференціала:

a) $\int \psi(\sin)\cos x dx$;

b) $\int \frac{\psi(src\sin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Розв'язання:

a) $\int \psi(\sin)\cos x dx = \int \psi(\sin) d\sin x$;

$$\int \frac{\psi(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \psi(\arcsin x) d\arcsin x.$$

Приклад 3.3. Знайти неозначені інтеграли, скориставшись методом заміни змінної (методом підстановки)**:**

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

b) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

c) $\int \frac{\sin^3 x dx}{2+\cos x}$.

Розв'язання:

а) Покладемо $x = \frac{1}{t}$, тоді $dx = -\frac{dt}{t^2}$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C =$$

$$= -\arcsin\frac{1}{x} + C$$

На останньому кроці використано рівність, яка, очевидно, виходить з рівності $x = \frac{1}{t}$;

b) Вказівка. Покладемо $\sqrt{x} = t$, тоді $x = t^2$.
Отже, перейдемо в даному інтегралі до змінної t;

c) використовуємо підстановку $t = \cos x$. При цьому $dt = -\sin x dx$. Тоді

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{2+\cos x} = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x \cdot dx}{2+\cos x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{2+\cos x}dx = -\int \frac{1-t^2}{2+t}dt =$$
$$= \int \frac{t^2-1}{t+2}dt = \int \frac{t^2-4+3}{t+2}dt = \int\left(t-2+\frac{3}{t+2}\right)dt = \frac{t^2}{2} - 2t +$$
$$+3\ln(t+2) = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C$$

Приклад 3.4. Знайти неозначені інтеграли, скориставшись методом інтегрування частинами:

a) $\int x\sin 3x dx$;

b) $\int e^x \sin x dx$.

Розв'язання:

a) Візьмемо даний інтеграл, поклавши $U = x$, $dV = \sin 3xdx$,тоді $dU = dx$, $I = -e^x \cos x + \int e^x \cos xdx$,

тоді $\int x\sin 3xdx = -\frac{1}{3}x\cos 3x - \int\left(-\frac{1}{3}\right)\cos 3xdx = -\frac{1}{3}x\cos 3x +$

$$+\frac{1}{3}\int\cos 3xdx = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C$$

;

b) Позначимо шуканий інтеграл через I і застосуємо формулу інтегрування частинами, вважаючи $u = e^x$, $dv = \sin xdx$. Тоді $du = e^x dx,\quad v = -\cos x$ і $I = -e^x \cos x + \int e^x \cos xdx.$ Останній інтеграл знову візьмемо частинами, вважаючи $u = e^x$, $dv = \cos xdx$. Тоді $du = e^x dx,$ $v = \sin x$ і $I = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin xdx = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$ Роз глядаючи цю рівність, як рівняння відносно I, отримаємо $I = \frac{1}{2}\left(-e^x \cos x + e^x \sin x\right) + C$.

Приклад 3.5. Знайти означені інтеграли:

a) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx$;

b) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$;

c) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$;

d) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$;

e) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} (x-1)\sin 3x dx$.

Розв'язання:

a) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx = \int\limits_{0}^{\pi/4} \sqrt{tgx}dtgx = \frac{2(tgx)^{3/2}}{3}\Bigg|_{0}^{\pi/4} = \frac{2}{3}$;

b) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x}d\sin x = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\sin x}{\sin^4 x} - \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\sin x}{\sin^2 x} =$

$= \left(-\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$;

c) Зробимо заміну $t = e^x$. Тоді $x = \ln t$, звідки $dx = \frac{dt}{t}$, і $e^{-x} = \frac{1}{t}$. Перерахуємо границі інтегрування: при x = 0 t = 1, а при x = 1 t = e. Тоді $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int\limits_{1}^{b} \frac{dt}{t^2+1} = arctgt\Big|_{1}^{b} = arctge - \frac{\pi}{4}$;

d) Перетворимо підінтегральний вираз: $\frac{1}{1+2\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{1/\sin^2 x + 2} = \frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{ctg^2 x + 3}$.

Тепер зробимо заміну $t = ctgx$. Враховуючи, що при t = 1 і при t = 0, одержуємо $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1+2\sin^2 x} = -\int\limits_{1}^{0} \frac{dt}{t^2+3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_{1}^{0} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$;

е) Покладемо u = x – 1; $dv=\sin 3xdx$. Тоді du = dx, і $v=-\frac{1}{3}\cos 3x$. Одержимо

$$\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}(x-1)\sin 3xdx=-\frac{1}{3}(x-1)\cos 3x\Big|_{\pi/3}^{\pi/2}+\frac{1}{3}\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\cos 3xdx=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}-1\right)+\frac{1}{9}\sin 3x\Big|_{\pi/3}^{\pi/2}==-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}-1\right)-\frac{1}{9}$$

Розрахунково-графічні завдання

1.1. Обчислити границю послідовності:

1 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^3+(3+n)^3}$

2 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3+(1+n)^3}$

3 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4+(1+n)^4}$

4 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^4+(1+n)^4}{(1+n)^3+(1-n)^3}$

5 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6-n)^2+(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$

6 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$

7 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$

8 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n+1)^3+(n-1)^3}$

9 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(1+n)^3}$

10 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3}$

11 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}$

12 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n+2)^3}{(n+4)^3+(n+5)^3}$

13 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$

14 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+6)^2-(n+1)^2}{(2n+3)^2+(n+4)^2}$

15 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$

16 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(6+n)^3-(1+n)^3}$

`7 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$

18 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(5+n)^2+(n-5)^2}$

19 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3-(2n+3)^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}$

20 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}$

21 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}$

22 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$

23 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3}$

24 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$

25 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(2n-1)^2}$

26 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$

27 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^3-(n-2)^2}$

28 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3-3n}$

29 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+(n-1)^3}{(n+1)^2-n^3+(2n-1)^2}$

30 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3-(n-2)^3}{(n+1)^2}$

31 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(4-n)^2+(4+n)^2}{(4-n)^3+(4+n)^3}$

32 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3+(1+n)^3}$

33 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4+(1+n)^4}$

34 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-n)^2+(1+n)^2}{(1+n)^3+(1-n)^3}$

35 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(6-n)^2+(6+n)^2}{(6+n)^3-(1-n)^3}$

36 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$

37 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$

38 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(n+1)^2}{(n+1)^3+(n-1)^3}$

39 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^2}{(n+1)^2-(1+n)^3}$

40 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2-(n-2)^2}{n^2+2n-3}$

41 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^2-(n+4)^2}$

42 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2}{(n+4)^3+(n+5)^3}$

43 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{(n+1)^3+(n-1)^3}$

44 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+6)^3-(n+1)^2}{(2n+3)^2+(n+4)^3}$

45 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3-5n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$

46 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)^2+(2n+3)^2}{(6+n)^3-(1+n)^3}$

47 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-(n-1)^2}{(n+1)^4-n^4}$

48 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3-(n-2)^3}{(5+n)^2+(n-5)^2}$

49 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^4-(2n+3)^4}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}$

50 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)^3-(n+1)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}$

51 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}$

52 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^4-(n-3)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$

53 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+1)^3+(2n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3}$

54 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-5n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$

55 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^2-(2n-1)^2}$

56 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^2+(n-1)^2}$

57 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^4+(n-2)^4}{n^3-(n-2)^2}$

58 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2}{n^3-3n}$

59 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(n+1)^2-n^3+(2n-1)^2}$

60 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+1)^2}$

1.2. Обчислити границю функції:

1	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.	2	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$.
3	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.	4	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.
5	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.	6	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.
7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^5+x}$.	8	$\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.
9	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$.	10	$\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.
11	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.	12	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.
13	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$.	14	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$.
15	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$.	16	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$.
17	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.	18	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.
19	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2-x}}{x-1}$.	20	$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.
21	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$.	22	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.
23	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x}{\sin 2x-\sin x}$.	24	$\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\pi}}{\cos x+1}$.

25 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\pi}}{\cos x+1}$.

26 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

27 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,3x}{\cos x-\cos^3 x}$.

28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

29 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 2x}$.

30 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1+x\sin x}}{\sin^2 x}$.

31 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$.

32 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$.

33 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

34 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.

35 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2-x}}{x-1}$.

36 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

37 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.

38 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

39 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^5+x}$.

40 $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

41 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$.

42 $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

43 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

44 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.

45 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2-x}}{x-1}$.

46 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

47 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$.

48 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

49 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.

50 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

51 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^5+x}$.

52 $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

53 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$.

54 $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

55 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

56 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.

57 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,3x}{\cos x-\cos^3 x}$.

58 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

59 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 2x}$.

60 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1+x\sin x}}{\sin^2 x}$.

2.1. Обчислити похідні функції $y = y(x)$**:**

1. $y=\ln\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}+\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}+2\sin e^{-x}\cdot\cos e^{-x}$.

2. $y=\ln\left(x\sin\sqrt[3]{1-x^2}\right)+3\cdot\dfrac{x^2+1}{\mathrm{arctg}\,x}$.

3. $y=\dfrac{1}{6}\ln\left(\ln^2\left(\ln^3 x\right)\right)+e^{-x}\ln x$.

4. $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}^2 x+\ln\sin x+2\ln\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$.

5. $y=\ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)+2\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$.

6. $y=\ln\left(1+\sin^2 x\right)-2\sin x\cdot\mathrm{arctg}(\sin x)+\ln\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$..

7. $y=e^{-x}-2\sin e^{-x}\cos e^{-x}+\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$.

8. $y=\frac{1}{2}\ln\frac{2\ln^2\sin x+3}{2\ln^2\sin x-3}$.

9. $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}+2\cdot\sin e^{-x}\cdot\cos e^{-x}$.

10. $y=\frac{1}{2}\arccos\left(2e^{2x}-1\right)+\ln\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$.

11. $y=\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+\frac{1}{3}e^{-x}\ln x$.

12. $y=3\cdot\ln(\sec x+\operatorname{tg}x)+\frac{x\sin x}{1+x}$.

13. $y=2\cdot\frac{\operatorname{arctg}x}{x}-\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

14. $y=\frac{x+1}{x}-2\cdot e^{-\ln\frac{x}{x+1}}+\operatorname{tg}\left(xe^{-x}\right)$.

15. $y=2\cdot\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{x}{\sin x}+x^2\ln x$.

16. $y=3\cdot\operatorname{arctg}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\operatorname{tg}\left(xe^{-x}\right)$.

17. $y=4\cdot\ln\operatorname{tg}\frac{e^{2\sin x}}{4}+\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$.

18. $y=\arcsin e^{x}+\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}+3\frac{x\sin x}{1+x}$.

19. $y=\ln\frac{x\ln x-1}{x\ln x+1}+\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arcctg}2\sqrt{x}$.

20. $y=\frac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)}{1+\sin^2 x}-2\sin x\cdot\operatorname{arctg}(\sin x)$.

21. $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}+10\cdot\operatorname{tg}\left(xe^{-x}\right)$.

22. $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}+2\cdot\arcsin x+\mathrm{tg}\left(xe^{-x}\right).$

23. $y=\mathrm{arctg}\left(x^2+1\right)+\mathrm{arcctg}\left(x^2+1\right)+4\cdot\dfrac{x\cos x}{x^2+1}.$

24. $y=\mathrm{arctg}\left(x^2-1\right)+\mathrm{arcctg}\left(x^2-1\right)+2\cdot\ln\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}.$

25. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}+\dfrac{1}{2}\cdot\log_3\log_2(2x\cdot\sin x).$

26. $y=\ln\dfrac{x\ln x-1}{x\ln x+1}+3\cdot\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$

27. $y=\ln\left(1+\cos^2 x\right)-2\cos x\cdot\mathrm{arctg}\,(\cos x)+\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}.$

28. $y=\dfrac{1}{2}\ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}+\mathrm{ctg}\left(xe^{-x}\right).$

29. $y=2\cdot\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}+\arccos x+\mathrm{tg}\left(xe^{-x}\right).$

30. $y=\dfrac{1}{3}\cdot\ln\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\dfrac{2x+3}{\sqrt{3}}+x\sin^2 x.$

31. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}+10\cdot\mathrm{tg}\left(xe^{-x}\right).$

32. $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}+2\cdot\arcsin x+\mathrm{tg}\left(xe^{-x}\right).$

33. $y=\operatorname{arctg}\left(x^2+1\right)+\operatorname{arcctg}\left(x^2+1\right)+4\cdot\dfrac{x\cos x}{x^2+1}$.

34. $y=\operatorname{arctg}\left(x^2-1\right)+\operatorname{arcctg}\left(x^2-1\right)+2\cdot\ln\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$.

35. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\ln\sin x+2\ln\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$.

36. $y=\ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)+2\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$.

37. $y=\ln\left(1+\sin^2 x\right)-2\sin x\cdot\operatorname{arctg}(\sin x)+\ln\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$..

38. $y=e^{-x}-2\sin e^{-x}\cos e^{-x}+\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$.

39. $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2\ln^2\sin x+3}{2\ln^2\sin x-3}$.

40. $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}+2\cdot\sin e^{-x}\cdot\cos e^{-x}$.

41. $y=\dfrac{1}{2}\arccos\left(2e^{2x}-1\right)+\ln\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$.

42. $y=\ln\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}+\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}+2\sin e^{-x}\cdot\cos e^{-x}$.

43. $y=\ln\left(x\sin\sqrt[3]{1-x^2}\right)+3\cdot\dfrac{x^2+1}{\operatorname{arctg} x}$.

44. $y=\dfrac{1}{6}\ln\left(\ln^2\left(\ln^3 x\right)\right)+e^{-x}\ln x$.

45. $y=3\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}+\operatorname{tg}\left(xe^{-x}\right)$.

46. $y = 4 \cdot \ln \operatorname{tg} \dfrac{e^{2\sin x}}{4} + \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$.

47. $y = \arcsin e^{x} + \arcsin\sqrt{1-e^{2x}} + 3\dfrac{x\sin x}{1+x}$.

48. $y = \ln\dfrac{x\ln x - 1}{x\ln x + 1} + \dfrac{1}{2}\cdot \operatorname{arcctg} 2\sqrt{x}$.

49. $y = 3 \cdot \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + \dfrac{x\sin x}{1+x}$.

50. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-\sqrt{1-x^{2}}}{x} + \dfrac{1}{3}e^{-x}\ln x$

51. $y = 2\cdot\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} - \ln\dfrac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}$.

52. $y = \dfrac{x+1}{x} - 2\cdot e^{-\ln\frac{x}{x+1}} + \operatorname{tg}\left(xe^{-x}\right)$

53. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}} + 10\cdot\operatorname{tg}\left(xe^{-x}\right)$.

54. $y = \dfrac{\sqrt{1-x^{2}}}{x} + 2\cdot\arcsin x + \operatorname{tg}\left(xe^{-x}\right)$.

55. $y = \operatorname{arctg}\left(x^{2}+1\right) + \operatorname{arcctg}\left(x^{2}+1\right) + 4\cdot\dfrac{x\cos x}{x^{2}+1}$.

56. $y = \arcsin e^{x} + \arcsin\sqrt{1-e^{2x}} + 3\dfrac{x\sin x}{1+x}$.

57. $y = \ln\dfrac{x\ln x - 1}{x\ln x + 1} + \dfrac{1}{2}\cdot \operatorname{arcctg} 2\sqrt{x}$.

58. $y = \dfrac{\ln\left(1+\sin^{2} x\right)}{1+\sin^{2} x} - 2\sin x\cdot\operatorname{arctg}(\sin x)$.

59. $y = \operatorname{arctg}\left(x^{2}+1\right) + \operatorname{arcctg}\left(x^{2}+1\right) + 4\cdot\dfrac{x\cos x}{x^{2}+1}$.

60. $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+2\cdot\arcsin x+\operatorname{tg}\left(xe^{-x}\right).$

2.2. . Обчислити найбільше та найменше значення функції $y=y(x)$ **на відрізку** $[a;b]$**:**

1. $y=x^2+\frac{16}{x}-16$, $a=1,\ b=4$.
2. $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}-1$, $a=0,\ b=6$.
3. $y=4-x-\frac{4}{x^2}$, $a=1,\ b=4$.
4. $y=\frac{2\left(x^2+3\right)}{x^2-2x+5}$, $a=-3,\ b=3$.
5. $y=2\sqrt{x}-x$, $a=0,\ b=4$.
6. $y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)}-2$, $a=-3,\ b=3$.
7. $y=2x^2+\frac{108}{x}-59$, $a=2,\ b=4$.
8. $y=x-4\sqrt{x}+5$, $a=1,\ b=9$.
9. $y=\frac{10x}{1+x^2}$, $a=0,\ b=3$.
10. $y=\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}+1$, $a=-1,\ b=5$.
11. $y=3-x-\frac{4}{(x+2)^2}$, $a=-1,\ b=2$.
12. $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$, $a=1,\ b=5$.
13. $y=\frac{2\left(-x^2+7x-7\right)}{x^2-2x+2}$, $a=1,\ b=4$.
14. $y=x-4\sqrt{x+2}+8$, $a=-1,\ b=7$.

15. $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$, $a=1$, $b=5$.

16. $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$, $a=-4$, $b=2$.

17. $y=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{8}{x}+8$, $a=-4$, $b=-1$.

18. $y=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}$, $a=-2$, $b=4$.

19. $y=\dfrac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$, $a=-2$, $b=1$.

20. $y=\dfrac{-2(x^2+3)}{x^2+2x+5}$, $a=-5$, $b=1$.

21. $y=\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$, $a=0$, $b=4$.

22. $y=x^2-2x+\dfrac{16}{x-1}-13$, $a=2$, $b=5$.

23. $y=2\sqrt{x-1}-x+2$, $a=1$, $b=5$.

24. $y=-\dfrac{x^2}{2}+2x+\dfrac{8}{x-2}+5$, $a=-2$, $b=1$.

25. $y=\sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$, $a=-3$, $b=4$.

26. $y=8x+\dfrac{4}{x^2}-15$, $a=1/2$, $b=2$.

27. $y=\sqrt[3]{2(x+2)^2(x-4)}+3$, $a=-4$, $b=2$.

28. $y=x^2+4x+\dfrac{16}{x+2}-9$, $a=-1$, $b=2$.

29. $y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}$, $a=-2$, $b=5$.

30. $y=\dfrac{4}{x^2}-8x-15$, $a=-2$, $b=-0{,}5$.

31. $y=2\sqrt{x}-x$, $a=0$, $b=4$.

32. $y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)}-2$, $a=-3,\ b=3$.

33. $y=2x^2+\dfrac{108}{x}-59$, $a=2,\ b=4$.

34. $y=x-4\sqrt{x}+5$, $a=1,\ b=9$.

35. $y=\dfrac{10x}{1+x^2}$, $a=0,\ b=3$.

36. $y=4-x-\dfrac{4}{x^2}$, $a=1,\ b=4$.

37. $y=\dfrac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$, $a=-3,\ b=3$.

38. $y=2\sqrt{x}-x$, $a=0,\ b=4$.

39. $y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)}-2$, $a=-3,\ b=3$

40. $y=\dfrac{10x}{1+x^2}$, $a=0,\ b=3$.

41. $y=\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}+1$, $a=-1,\ b=5$.

42. $y=3-x-\dfrac{4}{(x+2)^2}$, $a=-1,\ b=2$.

43. $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$, $a=1,\ b=5$

44. $y=\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$, $a=0,\ b=4$.

45. $y=x^2-2x+\dfrac{16}{x-1}-13$, $a=2,\ b=5$

46. $y=2x^2+\dfrac{108}{x}-59$, $a=2,\ b=4$.

47. $y=x-4\sqrt{x}+5$, $a=1,\ b=9$.

48. $y=2\sqrt{x}-x$, $a=0,\ b=4$.

49. $y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)}-2$, $a=-3,\ b=3$.

50. $y = 2\sqrt{x-1} - x + 2$, $a = 1$, $b = 5$.

51. $y = -\dfrac{x^2}{2} + 2x + \dfrac{8}{x-2} + 5$, $a = -2$, $b = 1$.

52. $y = -\dfrac{x^2}{2} + 2x + \dfrac{8}{x-2} + 5$, $a = -2$, $b = 1$.

53. $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$, $a = -3$, $b = 4$.

54. $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$, $a = -4$, $b = 2$.

55. $y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x} + 8$, $a = -4$, $b = -1$.

56. $y = \dfrac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$, $a = -3$, $b = 3$.

57. $y = 2\sqrt{x} - x$, $a = 0$, $b = 4$.

58. $y = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16$, $a = 1$, $b = 4$.

59. $y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)} + 1$, $a = -1$, $b = 5$.

60. $y = 3 - x - \dfrac{4}{(x+2)^2}$, $a = -1$, $b = 2$.

3.1. Обчислити невизначений інтеграл :

1. $\displaystyle\int \frac{3 + \sqrt[3]{x^2} - 2x}{\sqrt{x}}\,dx.$

2. $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 3\sqrt{x} - 1}{2x}\,dx.$

3. $\displaystyle\int \frac{3\sqrt{x} + 4x^2 - 5}{2x^2}\,dx.$

4. $\displaystyle\int \frac{2\sqrt{x} - x^2 + 3}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x} - 2x + 5}{x^2}\,dx.$

6. $\displaystyle\int \frac{2x^3 - \sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}}\,dx.$

7. $\int\left(\sqrt[3]{x}-\frac{2\sqrt[4]{x}}{x}+3\right)dx.$

8. $\int\frac{2x^3-\sqrt{x^5}+1}{\sqrt{x}}\,dx.$

9. $\int\frac{3x^2-\sqrt[5]{x}+2}{x}\,dx.$

10. $\int\frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{x^2}\,dx.$

11. $\int\frac{\sqrt[6]{x^5}-5x^2+3}{x}\,dx.$

12. $\int\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+1\right)dx.$

13. $\int\left(x^2-\frac{\sqrt[6]{x}}{x}-3\right)dx.$

14. $\int\frac{\sqrt{x^3}-3x^4+2}{x}\,dx.$

15. $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+2x^3-4\right)dx.$

16. $\int\frac{\sqrt{x^3}-3x^4+2}{x}\,dx.$

17. $\int\left(2x^3-3\sqrt{x^5}+\frac{4}{x}\right)dx.$

18. $\int\frac{2x^3-\sqrt{x^5}+5}{x^2}\,dx.$

19. $\int\frac{3x^2-\sqrt{x^3}+7}{x^3}\,dx.$

20. $\int\frac{3x^4-\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2}\,dx.$

21. $\int\left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{2}{x^3}+4\right)dx.$

22. $\int\frac{\sqrt{x}-2x^3+3}{x}\,dx.$

23. $\int\frac{\sqrt[5]{x}-2x^3+4}{x^2}\,dx.$

24. $\int\left(\sqrt{x}-\frac{3x^2}{\sqrt{x^3}}+2\right)dx.$

25. $\int\left(\sqrt[5]{x}-\frac{4}{x^5}+2\right)dx.$

26. $\int\frac{\sqrt[7]{x^6}-2x^2+3}{x}\,dx.$

27. $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}-\frac{2}{x^3}+1\right)dx.$

28. $\int\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x}+6\right)dx.$

29. $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}-\frac{7}{x^3}+5\right)dx.$

30. $\int\left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x^2}+2\right)dx.$

31. $\int \frac{6+\sqrt[3]{x^2}-5x}{\sqrt{x}}\,dx.$

32. $\int \frac{4x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}\,dx.$

33. $\int \frac{7\sqrt{x}+4x^2-1}{2x^2}\,dx.$

34. $\int \frac{4\sqrt{x}-x^2+1}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$

35. $\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2}\,dx.$

36. $\int \frac{5x^3-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}\,dx.$

37. $\int \left(\sqrt[3]{x}-\frac{\sqrt[4]{x}}{x}+4\right)dx.$

38. $\int \frac{5x^3-\sqrt{x^5}+2}{\sqrt{x}}\,dx.$

39. $\int \frac{5x^2-\sqrt[5]{x}+1}{x}\,dx.$

40. $\int \frac{6x^3-\sqrt{x}+9}{x^2}\,dx.$

41. $\int \frac{\sqrt[6]{x^5}-6x^2+3}{x}\,dx.$

42. $\int \left(x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+5\right)dx.$

43. $\int \left(x^2-\frac{\sqrt[6]{x}}{x}-2\right)dx.$

44. $\int \frac{\sqrt{x^3}-3x^4+5}{x}\,dx.$

45. $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+8x^3-3\right)dx.$

46. $\int \frac{\sqrt{x^3}-2x^4+1}{x}\,dx.$

47. $\int \left(5x^3-2\sqrt{x^5}+\frac{7}{x}\right)dx.$

48. $\int \frac{3x^3-\sqrt{x^5}+4}{x^2}\,dx.$

49. $\int \frac{4x^2-\sqrt{x^3}+9}{x^3}\,dx.$

50. $\int \frac{2x^4-\sqrt[3]{x^2}+3}{x^2}\,dx.$

51. $\int \left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{x^3}+4\right)dx.$

52. $\int \frac{\sqrt{x}-2x^2+3}{x}\,dx.$

53. $\int \frac{\sqrt[5]{x}-2x+4}{x^2}\,dx.$

54. $\int \left(\sqrt{x}-\frac{3x^3}{\sqrt{x^5}}+2\right)dx.$

55. $\int \left(\sqrt[3]{x}-\frac{4}{x^3}+2\right)dx.$

56. $\int \frac{\sqrt[7]{x}-2x^3+3}{x}\,dx.$

57. $\int\left(\frac{\sqrt[5]{x}}{x}-\frac{2}{x^3}+1\right)dx.$ 58. $\int\left(\frac{2x^3}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x}+6\right)dx.$

59. $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x}-\frac{7}{x^3}+5\right)dx.$ 60. $\int\left(\frac{5x^3}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x^2}+2\right)dx.$

3.2. Обчислити невизначений інтеграл :

1.	$\int\frac{dx}{3-x}$	2.	$\int\frac{dx}{3x+9}$	3.	$\int\frac{dx}{2-3x}$
4.	$\int\frac{dx}{1-4x}$	5.	$\int\frac{dx}{2+3x}$	6.	$\int\frac{dx}{2-5x}$
7.	$\int\frac{dx}{3x-2}$	8.	$\int\frac{dx}{2x+3}$	9.	$\int\frac{dx}{3x-4}$
10.	$\int\frac{dx}{4-3x}$	11.	$\int\frac{dx}{3x+4}$	12.	$\int\frac{dx}{4x-2}$
13.	$\int\frac{dx}{5-3x}$	14.	$\int\frac{dx}{4-7x}$	15.	$\int\frac{dx}{5x-3}$
16.	$\int\frac{dx}{3-2x}$	17.	$\int\frac{dx}{5+3x}$	18.	$\int\frac{dx}{3-5x}$
19.	$\int\frac{dx}{5+4x}$	20.	$\int\frac{dx}{6-3x}$	21.	$\int\frac{dx}{6+5x}$
22.	$\int\frac{dx}{1-7x}$	23.	$\int\frac{dx}{1+6x}$	24.	$\int\frac{dx}{2+7x}$
25.	$\int\frac{dx}{7-3x}$	26.	$\int\frac{dx}{5-2x}$	27.	$\int\frac{dx}{2x+7}$
28.	$\int\frac{dx}{2x+9}$	29.	$\int\frac{dx}{7x-3}$	30.	$\int\frac{dx}{6x+1}$
31.	$\int\frac{dx}{4-x}$	32.	$\int\frac{dx}{4x+9}$	33.	$\int\frac{dx}{2-4x}$

34. $\int \frac{dx}{1-5x}$ 35. $\int \frac{dx}{2+4x}$ 36. $\int \frac{dx}{2-6x}$

37. $\int \frac{dx}{3x-3}$ 38. $\int \frac{dx}{2x+4}$ 39. $\int \frac{dx}{3x-5}$

40. $\int \frac{dx}{4-5x}$ 41. $\int \frac{dx}{3x+6}$ 42. $\int \frac{dx}{4x-3}$

43. $\int \frac{dx}{5-4x}$ 44. $\int \frac{dx}{4-8x}$ 45. $\int \frac{dx}{5x-4}$

46. $\int \frac{dx}{3-4x}$ 47. $\int \frac{dx}{5+4x}$ 48. $\int \frac{dx}{3-6x}$

49. $\int \frac{dx}{5+6x}$ 50. $\int \frac{dx}{6-4x}$ 51. $\int \frac{dx}{6+7x}$

52. $\int \frac{dx}{1-8x}$ 53. $\int \frac{dx}{1+9x}$ 54. $\int \frac{dx}{2+8x}$

55. $\int \frac{dx}{7-4x}$ 56. $\int \frac{dx}{5-3x}$ 57. $\int \frac{dx}{2x+6}$

58. $\int \frac{dx}{2x+9}$ 59. $\int \frac{dx}{7x-3}$ 60. $\int \frac{dx}{6x+1}$

3.3. Обчислити невизначений інтеграл:

1. $\int \sin(2x-3)\,dx$ 2. $\int \sin(3-2x)\,dx$ 3. $\int \sin(5-3x)\,dx$

4. $\int \cos(2+3x)\,dx$ 5. $\int \cos(3+2x)\,dx$ 6. $\int \sin(4-2x)\,dx$

7. $\int \cos(5-2x)\,dx$ 8. $\int \cos(7x+3)\,dx$ 9. $\int \sin(8x-3)\,dx$

10. $\int \sin(3+4x)\,dx$ 11. $\int \sin(3-4x)\,dx$ 12. $\int \cos(4x+3)\,dx$

13. $\int \cos(3-4x)\,dx$ 14. $\int \cos(2+5x)\,dx$ 15. $\int \cos(5x-3)\,dx$

16. $\int \sin(5x-3)\,dx$ 17. $\int \sin(5-3x)\,dx$ 18. $\int \sin(3x+6)\,dx$

19. $\int \cos(5x-8)\,dx$ 20. $\int \cos(3x-7)\,dx$ 21. $\int \cos(5x-6)\,dx$

22. $\int \sin(7x+1)\,dx$ 23. $\int \cos(7x+3)\,dx$ 24. $\int \sin(7-4x)\,dx$

25. $\int \cos(3x-7)\,dx$ 26. $\int \sin(8x-5)\,dx$ 27. $\int \cos(8x-4)\,dx$

28 $\int \cos(5x-3)\,dx$ 29 $\int \sin(7-4x)\,dx$ 30 $\int \cos(5x-8)\,dx$

31. $\int \sin(4x-3)\,dx$ 32. $\int \sin(5-2x)\,dx$ 33. $\int \sin(6-3x)\,dx$

34. $\int \cos(4+3x)\,dx$ 35. $\int \cos(4+2x)\,dx$ 36. $\int \sin(5-2x)\,dx$

37. $\int \cos(6-2x)\,dx$ 38. $\int \cos(8x+3)\,dx$ 39. $\int \sin(9x-3)\,dx$

40. $\int \sin(5+4x)\,dx$ 41. $\int \sin(6-4x)\,dx$ 42. $\int \cos(5x+3)\,dx$

43. $\int \cos(5-4x)\,dx$ 44. $\int \cos(5+5x)\,dx$ 45. $\int \cos(4x-3)\,dx$

46. $\int \sin(7x-3)\,dx$ 47. $\int \sin(3-3x)\,dx$ 48. $\int \sin(9x+6)\,dx$

49. $\int \cos(6x-8)\,dx$ 50. $\int \cos(4x-7)\,dx$ 51. $\int \cos(8x-6)\,dx$

52. $\int \sin(6x+1)\,dx$ 53. $\int \cos(4x+3)\,dx$ 54. $\int \sin(8-4x)\,dx$

55. $\int \cos(4x-7)\,dx$ 56. $\int \sin(9x-5)\,dx$ 57. $\int \cos(9x-4)\,dx$

58. $\int \cos(5+3x)\,dx$ 59. $\int \cos(4+2x)\,dx$ 60. $\int \cos(5x+3)\,dx$

3.4. Обчислити невизначений інтеграл :

1. $\int \sqrt{3+x}\,dx.$
2. $\int \sqrt[3]{1+x}\,dx.$
3. $\int \sqrt[3]{(1+x)^2}\,dx.$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}.$
5. $\int (1-4x)^7\,dx.$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+x}}.$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}}.$
8. $\int (1+4x)^5\,dx.$
9. $\int (1-3x)^4\,dx.$
10. $\int \sqrt{1+3x}\,dx.$
11. $\int \sqrt{5-4x}\,dx.$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5+3x}}.$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-4x)^5}}.$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}.$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}.$
16. $\int \sqrt[5]{3-2x}\,dx.$
17. $\int \sqrt[4]{1+3x}\,dx.$
18. $\int \sqrt[3]{1+3x}\,dx.$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^5}}.$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3+x}}.$
21. $\int \frac{dx}{(2+x)^3}.$
22. $\int \sqrt[3]{5-2x}\,dx.$

23.	$\int \sqrt{5-4x}\, dx.$	24.	$\int \sqrt[5]{(6-5x)^2}\, dx.$
25.	$\int \sqrt[4]{2-5x}\, dx.$	26.	$\int \sqrt[3]{4-2x}\, dx.$
27.	$\int \sqrt{3-4x}\, dx.$	28.	$\int 5\sqrt{3+2x}\, dx.$
29.	$\int \sqrt[4]{3+5x}\, dx.$	30.	$\int \sqrt[3]{(2-3x)^2}\, dx.$
31.	$\int \sqrt[3]{(1+x)^2}\, dx.$	32.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}.$
33.	$\int (1-4x)^7\, dx.$	34.	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+x}}.$
35.	$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}}.$	36.	$\int (1+4x)^5\, dx.$
37.	$\int (1-3x)^4\, dx.$	38.	$\int \sqrt{1+3x}\, dx.$
39.	$\int \sqrt{5-4x}\, dx.$	40.	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5+3x}}.$
41.	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-4x)^5}}.$	42.	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}.$
43.	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}.$	44.	$\int \sqrt[5]{3-2x}\, dx.$
45.	$\int \sqrt[4]{1+3x}\, dx.$	46.	$\int \sqrt[3]{1+3x}\, dx.$
47.	$\int \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^5}}.$	48.	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3+x}}.$
49.	$\int \frac{dx}{(2+x)^3}.$	50.	$\int \sqrt[3]{5-2x}\, dx.$
51.	$\int \sqrt[4]{2-5x}\, dx.$	52.	$\int \sqrt[3]{4-2x}\, dx.$
53.	$\int \sqrt{3-4x}\, dx.$	54.	$\int 5\sqrt{3+2x}\, dx.$
55.	$\int \sqrt{3+x}\, dx.$	56.	$\int \sqrt[3]{1+x}\, dx.$

57. $\int \sqrt[3]{(1+x)^2}\, dx.$ 58. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}.$

59. $\int \sqrt[4]{3+5x}\, dx.$ 60. $\int \sqrt[3]{(2-3x)^2}\, dx.$

3.5.Обчислити невизначений інтеграл :

1. $\int \frac{\sqrt{3}\, dx}{9x^2-3}$ 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+3}}$ 3. $\int \frac{dx}{9x^2+3}$

4. $\int \frac{9\, dx}{\sqrt{9x^2-3}}$ 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}$ 6. $\int \frac{dx}{7x^2-4}$

7. $\int \frac{3\, dx}{\sqrt{7x^2-4}}$ 8. $\int \frac{dx}{5x^2+3}$ 9. $\int \frac{dx}{5x^2-3}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$ 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3}}$ 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}}$

13. $\int \frac{\sqrt{5}\, dx}{\sqrt{3-4x^2}}$ 14. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-9}}$ 15. $\int \frac{dx}{2x^2+7}$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$ 17. $\int \frac{dx}{3x^2+2}$ 18. $\int \frac{\sqrt{2}\, dx}{\sqrt{7-2x^2}}$

19. $\int \frac{\sqrt{14}\, dx}{2x^2-7}$ 20. $\int \frac{dx}{8x^2+9}$ 21. $\int \frac{dx}{3x^2-2}$

22. $\int \frac{dx}{4x^2+3}$ 23. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$ 24. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-8x^2}}$ 26. $\int \frac{dx}{4x^2-3}$ 27. $\int \frac{dx}{8x^2-9}$

28. $\int \frac{dx}{4x^2+7}$ 29. $\int \frac{2\, dx}{4+3x^2}$ 30. $\int \frac{2\, dx}{\sqrt{4x^2-3}}$

31. $\int \frac{\sqrt{3}\, dx}{3x^2-3}$ 32. $\int \frac{3dx}{3x+9}$ 33. $\int \frac{4dx}{2-3x}$

34. $\int \frac{6\,dx}{\sqrt{9x^2-3}}$ 35. $\int \frac{7dx}{2+3x}$ 36. $\int \frac{6dx}{2-5x}$

37. $\int \frac{6\,dx}{\sqrt{7x^2-4}}$ 38. $\int \frac{dx}{5x^2+7}$ 39. $\int \frac{dx}{7x^2-3}$

40. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}}$ 41. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$ 42. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

43. $\int \frac{\sqrt{5}\,dx}{\sqrt{9-4x^2}}$ 44. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-9}}$ 45. $\int \frac{dx}{3x^2+7}$

46. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$ 47. $\int \frac{dx}{4x^2+2}$ 48. $\int \frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{8-2x^2}}$

49. $\int \frac{\sqrt{14}\,dx}{2x^2-9}$ 50. $\int \frac{dx}{7x^2+9}$ 51. $\int \frac{dx}{3x^2-3}$

52. $\int \frac{3dx}{4x^2+3}$ 53. $\int \frac{7dx}{\sqrt{4x^2+3}}$ 54. $\int \frac{4dx}{\sqrt{3-4x^2}}$

55. $\int \frac{6dx}{7-3x}$ 56. $\int \frac{7dx}{5-2x}$ 57. $\int \frac{8dx}{2x+7}$

58. $\int \frac{dx}{4x^2+9}$ 59. $\int \frac{2\,dx}{4+4x^2}$ 60. $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{4x^2-5}}$

3.6. Обчислити визначений інтеграл :

1	$\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$	2	$\int\limits_0^1 3\left(x^2+x^2e^{x^3}\right)dx$
3	$\int\limits_{\pi^2/9}^{\pi^2}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$	4	$\int\limits_0^{12\sqrt{3}}\frac{12x^5}{\sqrt{x^6+1}}\,dx$
5	$\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{x^6+1}\,dx$	6	$\int\limits_1^e\frac{\sin\ln x}{x}\,dx$
7	$\int\limits_1^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$	8	$\int\limits_3^8\sqrt{x+1}\,dx$
9	$\int\limits_0^1\frac{x^2}{x^2+1}\,dx$	10	$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\sin x\cos^3 x\,dx$
11	$\int\limits_0^{\pi/2}\sin x\cos^2 x\,dx$	12	$\int\limits_{\pi/18}^{\pi/6}12\,ctg\,3x\,dx$
13	$\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$	14	$\int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$
15	$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$	16	$\int\limits_{-1}^0\frac{dx}{4x^2-9}$
17	$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\cos x\sin^3 x\,dx$	18	$\int\limits_1^e\frac{\ln^2 x}{x}\,dx$
19	$\int\limits_0^{\sqrt{\pi/4}}\frac{x\,dx}{\cos^2\left(x^2\right)}$	20	$\int\limits_{3/4}^{4/3}\frac{dx}{x^2+1}$
21	$\int\limits_0^{-3}\frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$	22	$\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt{x^4+4}}$

23 $\displaystyle\int_0^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$

24 $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

25 $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos^2 x}$

26 $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

27 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\frac{x}{2}\,dx$

28 $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}\,dx$

29 $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

30 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}\,dx$

31 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{5}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$

32 $\displaystyle\int_0^1 2\left(x^4+x^6e^{x^3}\right)dx$

33 $\displaystyle\int_{\pi^2/3}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

34 $\displaystyle\int_0^{3\sqrt{3}} \frac{12x^5}{\sqrt{x^6+1}}\,dx$

35 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^8+1}\,dx$

36 $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin\ln x}{3x}\,dx$

37 $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

38 $\displaystyle\int_3^9 \sqrt{x+2}\,dx$

39 $\displaystyle\int_0^4 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

40 $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin x\cos^3 x\,dx$

41 $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin x\cos^2 x\,dx$

42 $\displaystyle\int_{\pi/9}^{\pi/6} 5\,ctg\,3x\,dx$

43 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{6-3x}}$

44 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$

45 $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$

46 $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{4x^2-9}$

47 $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \cos x \sin^3 x\, dx$

48 $\int\limits_{1}^{e} 3\frac{\ln^2 x}{x}\, dx$

49 $\int\limits_{0}^{\sqrt{\pi}/2} \frac{x\, dx}{\cos^2\left(x^2\right)}$

50 $\int\limits_{3/4}^{5/3} \frac{dx}{x^2+4}$

51 $\int\limits_{0}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{9+3x}}$

52 $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^4+9}}$

53 $\int\limits_{0}^{e} \frac{1+\ln x}{3x}\, dx$

54 $\int\limits_{0}^{1/3} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

55 $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos^2 x}$

56 $\int\limits_{1}^{4} \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$

57 $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$

58 $\int\limits_{0}^{1} x^3 \sqrt[3]{4+5x^4}\, dx$

59 $\int\limits_{3}^{5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

60 $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4}{x^8+1}\, dx$

3.7. Обчислити визначений інтеграл :

1 $\int\limits_{0}^{1} x\, arctg\, x\, dx$

2 $\int\limits_{0}^{\pi/4} x\, tg^2 x\, dx$

3 $\int\limits_{-1}^{0} (x+1)\, e^{-2x}\, dx$

4 $\int\limits_{0}^{4} x^3 \sqrt{x^2+9}\, dx$

5 $\int\limits_{1}^{2} \ln(3x+2)\, dx$

6 $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{2-x}}\, dx$

7 $\int\limits_{-1}^{0} x \ln(1-x)\, dx$

8 $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} arctg\, \frac{1}{x}\, dx$

9 $\int_{1/2}^{1} \arcsin(1-x)\,dx$

10 $\int_{0}^{\pi/9} \frac{x}{\cos^2 3x}\,dx$

11 $\int_{0}^{1} arctg\sqrt{x}\,dx$

12 $\int_{1}^{e^2} \sqrt{x}\ln x\,dx$

13 $\int_{0}^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2}\,dx$

14 $\int_{0}^{\pi/8} x^2 \sin 4x\,dx$

15 $\int_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

16 $\int_{1}^{2} x^2 \ln x\,dx$

17 $\int_{3/2}^{2} arctg\,(2x-3)\,dx$

18 $\int_{0}^{\pi/2} (x+3)\sin x\,dx$

19 $\int_{1}^{2} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\,dx$

20 $\int_{1}^{e} x\ln^2 x\,dx$

21 $\int_{-3}^{0} (x-2)\,e^{-x/3}\,dx$

22 $\int_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}}\,dx$

23 $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos x\,dx$

24 $\int_{-1/2}^{0} x\,e^{-2x}\,dx$

25 $\int_{1}^{2} (x-1)\ln x\,dx$

26 $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x\,dx$

27 $\int_{0}^{\pi} x^2 \sin x\,dx$

28 $\int_{0}^{\pi/2} x\cos x\,dx$

29 $\int_{-2}^{0} x^2 e^{-x/2}\,dx$

30 $\int_{2}^{3} x\ln(x-1)\,dx$

31 $\int_{0}^{2} x\,arctg\,x\,dx$

32 $\int_{0}^{\pi/2} x\,tg^2 x\,dx$

33 $\int_{-1}^{1} (x+1)\, e^{-3x}\, dx$

34 $\int_{0}^{3} x^3 \sqrt{x^2+9}\, dx$

35 $\int_{1}^{3} \ln(4x+2)\, dx$

36 $\int_{0}^{2} \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{3-x}}\, dx$

37 $\int_{-1}^{1} x \ln(1-x)\, dx$

38 $\int_{1}^{2} arctg\, \frac{1}{x}\, dx$

39 $\int_{0}^{1} \arcsin(1-x)\, dx$

40 $\int_{0}^{\pi/6} \frac{x}{\cos^2 3x}\, dx$

41 $\int_{0}^{2} arctg\sqrt{x}\, dx$

42 $\int_{0}^{e^2} \sqrt{x}\, \ln x\, dx$

43 $\int_{0}^{\pi/2} (x+2) \cos\frac{x}{2}\, dx$

44 $\int_{0}^{\pi/4} x^2 \sin 4x\, dx$

45 $\int_{1}^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x}\, dx$

46 $\int_{1}^{4} x^2 \ln x\, dx$

47 $\int_{5/2}^{2} arctg\,(4x-3)\, dx$

48 $\int_{0}^{\pi/3} (x+3) \sin x\, dx$

49 $\int_{1}^{3} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\, dx$

50 $\int_{1}^{e^3} x \ln^2 x\, dx$

51 $\int_{-3}^{3} (x-2)\, e^{-x/3}\, dx$

52 $\int_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{2x}}\, dx$

53 $\int_{-\pi}^{0} x \sin x \cos x\, dx$

54 $\int_{-1/2}^{1} x\, e^{-2x}\, dx$

55 $\int_{1}^{3} (x-1) \ln x\, dx$

56 $\int_{-1/3}^{1/3} \arccos 2x\, dx$

57 $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx$

58 $\int_0^{\pi/3} x \cos x \, dx$

59 $\int_{-2}^{0} x^3 e^{-x/3} \, dx$

60 $\int_1^2 x \ln(x-1) \, dx$

Розділ III

Ряди

Теоретичні відомості

Числові ряди

Означення. Нехай задано нескінчену послідовність $\{a_n\}=a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ (1) .

Тоді вираз $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ (2) називають ***числовим рядом***, а доданок a_n - загальним членом цього ряду.

Додатні ряди. Ознаки збіжності

Числовий ряд (2), у якого всі доданки є невід'ємні числа $(a_n \geq 0, n = 1,2,3,\ldots)$ називають *додатним рядом.*

Достатні ознаки збіжності рядів.

Ознаки порівняння: Розглянемо два додатні ряди

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ (3)

$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ (4)

а) Відомо, що $a_n \leq b_n$ (n=1,2,3,…). Тоді зі збіжності ряду (4) випливає збіжність ряду (3), а із розбіжності ряду (3) – розбіжність ряду (4).

б) Нехай $a_n \geq 0, в_n > 0$ і $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n}{в_n} = к > 0$

Тоді або обидва ряди (3) і (4) збігаються, або вони обидва розбігаються. (Тобто не може бути так, що один з них збігається, а інший розбігається).

! При застосуванні теорем порівняння потрібно мати ряд-еталон, з яким порівнювати даний ряд та про збіжність якого відомо наперед.

Такими рядами частіше за все є узагальнений гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, який збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha < 1$, або геометричний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$, який збігається при $q < 1$ і розбігається при $q \geq 1$.

Ознака Д'Аламбера. Нехай для додатного ряду (3) існує границя $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$ Тоді, якщо $l < 1$, ряд збіжний, а коли $l > 1$ – розбіжний, якщо ж $l = 1$ потрібно застосувати інші ознаки збіжності.

Радикальна ознака Коші. Якщо в ряді з додатними членами загальний член, починаючи з певного значення *n*, задовольняє нерівність $\sqrt[n]{a_n} < q,$ де q – стале число, менше за одиницю, то ряд збігається. Коли ж навпаки, починаючи з певного значення *n*, маємо $\sqrt[n]{a_n} \geq 1,$ то ряд розбігається.

Інтегральна ознака Коші. Нехай члени додатного ряду такі, що $a_n = f(n)$, де $f(x), (x \geq 1)$ – додатна, неперервна і спадна на проміжку $[1;+\infty]$ функція. Тоді:

а) якщо збіжний невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$, то збіжний відповідний ряд;

б) якщо інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ розбіжний, то розбіжний і ряд

Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність.

Знакозмінним називають ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...,$ у якому серед доданків a_n є нескінченна множина як додатних так і від'ємних.

Ряд називають ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд, утворений із абсолютних величин доданків даного ряду, тобто ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n| + ...,$ Цей ряд є ***умовно збіжним***, якщо він збігається, а складений для нього ряд розбіжний.

Знакопереміжні ряди. Ознака Лейбниця.

Числовий ряд $a_1 - a_2 + a_2 - a_4 + ... + (-1)^{n-1} a_n + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$,

де $a_n \geq 0$ (n=1,2,…), називають ***знакопереміжним***.

Ознака Лейбниця. Якщо в знакопереміжному ряді а) $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots$ б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

то ряд збіжний, а його сума $S \le a$.

Функціональні ряди

Ряд $a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x) + \ldots$

називається ***функціональним***, якщо його члени є функціями від x.

Означення. Сукупність тих значень x при яких рядзбігається, називається ***областю збіжності*** функціонального ряду.

Степеневі ряди

Степеневим рядом називають функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} + \ldots, \text{де}\ a_n = f(n), (n = 1,2,3,\ldots)$$

Формула для знаходження радіуса збіжності ряду має вигляд: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, де a_n та a_{n+1} коефіцієнти ряду для x^{n-1} і x^n відповідно.

Ряди Тейлора і Маклорена

Нехай функція $f(x)$ має похідні всіх порядків в точці x_0.

Складемо ряд:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \ldots$$

Цей ряд називають ***рядом Тейлора***, породженим функцією $f(x)$.

Частковим випадком ряду Тейлора є ряд Маклорена, який отримується з ряду Тейлора при $x_0 = 0$, тобто ряд Маклорена – це степеневий ряд виду:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...=\sum_0^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

<u>Розвинення елементарних функцій у ряд Тейлора</u>

1. $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+\frac{(-1)^n x^{2x+1}}{(2n+1)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2x+1}}{(2n+1)!},\ x\in(-\infty,+\infty)$,

2. $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$,

3. $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in(-\infty,+\infty)$,

4. $\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$,

$x\in(-1,+1)$,

5. $(1+x)^{\alpha} = 1+2x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+...$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n$,

$x\in(-1,+1)$

6. $arctgx = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2x+1}}{2n+1},\ x\in(-1,+1)$

7. $shx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$,

8. $chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

Приклади розв'язування типових завдань

Приклад1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + ...$

б) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{11 \cdot 11} + ...$

в) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} + ... + \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)}{3^n \cdot n!}$

г) $\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + ... + \frac{1}{n \ln n} + ...$

Розв'язання:а) Даний ряд буде збіжним, оскільки n-й член ряду $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ буде більшим за n-й член гармонічного ряду $\frac{1}{n}$, тобто $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{1}{n}$, а гармонічний ряд розбіжний, то за ознакою порівняння даний ряд теж розбіжний

б) Знайдемо n-й член ряду:

Випишемо перші множники знаменників 1, 6, 11, …, звідки $a_1=1$, $d=5$, отже $a_n=a_1+d(n-1)=1+5(n-1)=5n-4$, аналогічно другі множники знаменників 3, 7, 11, … , звідки $b_n=4n-1$. Отже n-й член даного ряду:

$$a_n = \frac{1}{(5n-4)(4n-1)} \text{ або } a_n = \frac{1}{20n^2-21n+4}.$$

Порівняємо даний ряд з рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Оскільки:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{20n^2-21n+4}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{20n^2-21n+4} = \frac{1}{20} \neq 0$$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

збігається, як узагальнений гармонічний (p = 2 >1), то згідно граничної порівняльної ознаки, збігаються і ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{20n^2-21n+4}$, а отже і даний в умові ряд

в) Використаємо ознаку Деламбера.

Маємо: $a^n = \frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}$; $\quad a_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2n+1)}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-1)(2n+1)}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\frac{3^n\cdot n!}{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{3\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+3} = \frac{2}{3} < 1$$

ряд збіжний.

г) Використаємо інтегральну ознаку Коші.

У даному випадку:

$U_n = \dfrac{1}{n\ln n}$; замінивши цілочисельний аргумент загального члену ряду на x, отримаємо функцію:

$f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$.

Ця функція неперервна, додатна: спадає при $x \geq 1$, томі може бути застосована інтегральна ознака Коші:

$\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x\ln x} = \int\limits_1^\infty \dfrac{\frac{dx}{x}}{\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_1^\infty = \infty$, отже ряд розбіжний.

Приклад 2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

Розв'язання: Розглянемо ряд, складений із абсолютних величин членів вихідного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}$. Застосуємо інтегральну ознаку

Коші: $\int_1^\infty \dfrac{dx}{2x-1} = \int_1^\infty \dfrac{\frac{1}{2}d(2x-1)}{2x-1} = \dfrac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^\infty$

інтеграл розбіжний, а з ним і розбіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}$.

Дослідимо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ на умовну збіжність. Для цього виконуються ознаки Лейбніца:

а) $1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > ... > \frac{1}{2n-1} > ...$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$

Отже ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ – умовно збіжний.

Приклад 3. Визначити область збіжності ряду:

$$x - \frac{x^2}{\sqrt{2}} + ... - \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

Розв'язання: Знайдемо область збіжності степеневого ряду:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, тобто знайдемо радіус збіжності R:

$|a_n| = \frac{1^n}{\sqrt{n}}$, $|a_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$;

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \sqrt{\frac{n+1}{n}} \right| = 1.$$

Дослідимо ряд на збіжність у точках $x=\pm1$; $x = -1$;

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{n}}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ – розбіжний, як узагальнений гармон.

$x=1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ – даний ряд умовно збіжний.

Область збіжності ряду: $-1 < x \le 1$.

Приклад 4. Розкласти функцію $y=\dfrac{1}{x}$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0=1$.

Розв'язання:Запишемо формулу ряду Тейлора:

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

Знайдемо: $y'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$; $y''=2x^{-3}$; $y'''=-2\cdot 3x^{-4}$; $\ldots$

$y^{(n)}=(-1)^n n!\,x^{-(n+1)}$, звідки $y(1)=1$; $y'(1)=-1$; $y''(1)=2$; $y'''(1)=-6$; $\ldots$ $y^{(n)}=(-1)^n n!$; $\ldots$ Підставивши отримані значення, знайдемо шукані значення:

$$\frac{1}{x}=1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{6}{x^4}+\ldots+(-1)^n n!-\ldots$$

Приклад 5. Розкласти функцію $f(x)=3e^{-5x}+\dfrac{1}{2}$ в ряд Маклорена:

Розв'язання: Запишемо розклад у ряд Маклорена функції e^x:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

Підставляючи -5x замість x, отримаємо

$$e^{5x}=1+\frac{5x}{1!}+\frac{25x^2}{2!}+\frac{125x^3}{3!}+\ldots$$

Домноживши кожен член ряду на 3, отримаємо:

$$3\cdot e^{5x}=3+\frac{15x}{1!}+\frac{75x^2}{2!}+\frac{375x^3}{3!}+\ldots$$

Додаємо до ряду $\frac{1}{2}$, отримаємо:

$$\frac{1}{2}+3\cdot e^{5x}=\frac{1}{2}+3+\frac{15x}{1!}+\frac{75x^2}{2!}+\frac{375x^3}{3!}+...=3{,}5+15x+37{,}5x^2+62{,}5x^3+...$$

, де $x\in R$.

Приклад 6. Обчислити з точністю до 0,001:

а) $\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}dx$; б) $\sqrt[3]{130}$.

Розв'язання:

а) Розклавши підінтегральну функцію в ряд, отримаємо:

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-... \quad -\infty<x<\infty$$

Проінтегрувавши, маємо:

$$\int\limits_0^{1/2}\frac{\sin x}{x}dx=\left(x-\frac{x^3}{3!\cdot 3}+\frac{x^5}{5!\cdot 5}-...\right)\Bigg|_0^{1/2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3!\cdot 3\cdot 2^3}+\frac{1}{5!\cdot 5\cdot 2^4}-...\approx$$
$$\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{144}\approx 0,5-0,0065\approx 0,493$$

з точністю до 0,001 (третій член ряду відкинули, оскільки

$\frac{1}{5!\cdot 5\cdot 2^4}<0{,}001$).

б) Виконаємо перетворення:

$$\sqrt[3]{130}=\sqrt[3]{125+5}=\sqrt[3]{5^3+5}=\sqrt[3]{5^3(1+\frac{5}{5^3})}=5\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}}=5(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}},$$

скористаємось розкладом:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+q)}{n!}x^n+...,$$

$x\in(-1;1)$. У нас $x=0{,}04$; $\alpha=\frac{1}{3}$.

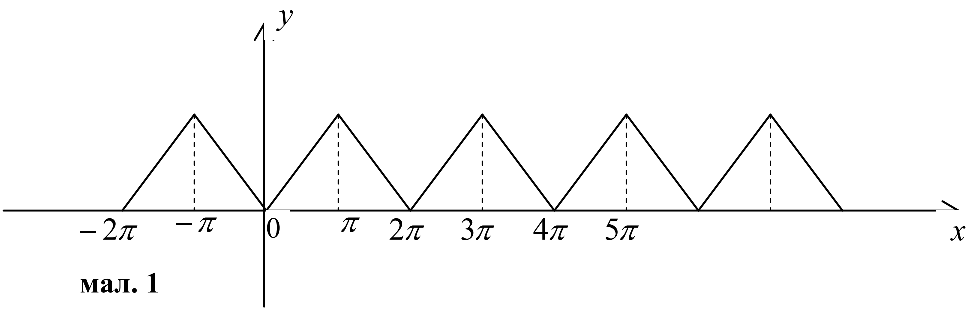
$$(1+0,04)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\cdot 0,04+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{2!}\cdot(0,04)^2+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})\cdot(-1\frac{2}{3})}{3!}(0,04)^3+...\approx$$
$$\approx 1+0,013=1,013$$

(ми відкинули всі члени ряду, які менші за 0,001).

Помножимо на 5:

$5(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}}\approx 1{,}013\cdot 5\approx 5{,}066$, отже $\sqrt[3]{130}=5{,}066$ з точністю до 0,001.

Приклад 7. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=|x|$ на відрізку, що має період 2π



мал. 1

Розв'язання:

Оскільки $f(x)$ парна функція, то b_n=0, n=1,2,3…

Знаходимо a_0:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx = \frac{2}{\pi}(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)^0 == \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi(2kn)^2}, & \text{для } n=2kn \\ 0, & \end{cases}$$

Отже шукане розвинення функції в ряд має вигляд: $f(x) =$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + ... + \frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x + ...)$$

Звідси, зокрема для x=0 одержимо:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ...), \text{ звідки } \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ...$$

Розрахунково-графічні завдання

1. Дослідити на збіжність ряди:

1

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{\pi}{n})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+2)!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

2

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n+1]{50}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n^2})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot ...\cdot n^2}{2^{n+1}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n+1)^n}$

3

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(2n)!}$ d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^3 n}$

4

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 8\cdot 12\cdot ...\cdot 4n}{n!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{3n+2}}$

5

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{1}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{4^{3n-1}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

6	a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n^3+3}$	b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\, tg\,\frac{1}{5^n}$
	c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(n+1)!}$	d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$
7	a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{20}}$	b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+2}{n+1}$
	c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\cdot n!}{5^n}$	d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(3n+1)^n}$
8	a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+3}$	b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$
	c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n-1}}{3^{4n+1}}$	d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$
9	a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$	b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n$
	c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$	d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^5 n}$
10	a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{4n+2}$	b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}tg\frac{1}{\sqrt{n}}$
	c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n-3)}$	d) $\sum\frac{10^n}{(5n+1)}$
11	a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{3n^2+2}$	b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{\pi}{4^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+5)\ln(n^2+5)}$

12
a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+2}{2n^2+5n+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n\sqrt[3]{n}})$
c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{(n+1)!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{(2n+3)^n}}$

13
a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{\pi}{5^n}$
c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$

14
a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+1}{3n^2+2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n^2})$
c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n+1)^{3n}}$

15
a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^4+2n+3}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{1}{\sqrt{n^3}}$
c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(3n+4)^{3n}}$ d) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$

16
a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\sqrt[3]{n^2}(n+1)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n\sqrt{n}})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{2^n(n+1)!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln(n^2+9)}{n^2+9}$

17

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3}+4}{n^2+5n+3}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}arctg\frac{1}{2\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{16\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-5}{2n+7}\right)^n$

18

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{60}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{n^3}})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{2^n}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

19

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(3n+5)}{n^4+3n+7}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1+\ln^3(n^2+3))}{n^2+3}$

20

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{n^2+6n+2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n tg\frac{\pi}{3^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

21

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{\sqrt[3]{n^5}(n^3+1)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+1)!}{n^n}$ d) $\sum\frac{e^{-\sqrt{2n+3}}}{\sqrt{2n+3}}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n+3}{9n+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+4}{n^2+3}\right)^{n^2}$

22

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+4)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n+2)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^2}}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$

23

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{(2n+1)^2}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\arcsin\frac{1}{n}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12n^3+3n+1}{\sqrt[3]{n^2}(n^4+2)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}4^n\arcsin\frac{\pi}{5^n}$

24

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3^n(n)!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^5}}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{50}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)$

25

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{2^n n!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^5(n+1)}$

26

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3}{5n^2+2n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)$

27

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-3n+5}{\sqrt{n}(n^2+6)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)3^n}{n!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^6(n+3)}$

28

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+4}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}n(1-\cos\frac{\pi}{n^2})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(3n+2)5^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-2n^2}$

29

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+11}{2n^2+3}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{n\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n-1}}{3^{4n+1}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^3(n+2)}$

30

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+5n+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)n^n}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)$

31

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+3}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n)!}{n^n(2n+1)}$ d) $\sum\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$

32

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+5}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{\pi}{4^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

33

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{(3n^2+1)\sqrt{n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{n^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{1}{n}$

34

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{\pi}{\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(2n)!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}}{\sqrt{n}}$

35

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5n+1}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^3}(1-\cos\frac{1}{n^2})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{(n+3)n^n}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^3(n+2)}$

36	a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n-1}{3n+4}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin\frac{\pi}{n^2}$
	c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}$	d) $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n}$
37	a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(n+1)}{n^3+5}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{2}{n^2})$
	c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)2^n}{(n+1)!}$	d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} * \frac{1}{3^n}$
38	a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{4n^2+3n}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty}2n\sin\frac{1}{n^3}$
	c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$	d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$
39	a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+3}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{2n}$
	c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}$	d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$
40	a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(4n-1)}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{1}{n\sqrt{n}}$
	c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n!}$	d) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$
41	a) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg^{n}\frac{1}{n}$

42
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{3n^2-1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n+1}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n}\right)^{n}$

43
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(2n^2+1)\sqrt[3]{n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot9\cdot11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$

44
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, arctg\frac{1}{\sqrt{n^5}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n(3n-2)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^{n}$

45
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n+5}{2n^3+3n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} n\,tg\frac{1}{2^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!*2^n}{n^n}$ d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^{\frac{3}{2}} n}$

46 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n-1)2^{2n-1}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$

47

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[3]{n}}$

48

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}arctg\frac{1}{2n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot11\cdot21\cdot\ldots\cdot(10n-1)}{(2n-1)!}$ d) $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-3)\sqrt{\ln(n-3)}}$

49

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}(1-e^{-\frac{1}{n^2}})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{4\cdot8\cdot12\cdot\ldots\cdot4n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n+4)}$

50

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+3}{(n+1)^2 * n^3}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^3})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$

51 **a)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{(2n^2+3)n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}n\arcsin\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}(n^2-1)}{(n+3)!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+8}{n(n+2)(n+3)}$ b)

52 c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot \ldots \cdot n^2}{5^{n+1}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n\sqrt{\ln(2n^2+1)}}{2n^2+1}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n^5-3n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^5+3}}$

53 c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(n^2+2)}{n!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\ln^3(n+1)}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+\sqrt[3]{n}}{10n+\sqrt{n}+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$

54

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 8\cdot 12\cdot \ldots \cdot 4n}{(2n)!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5-\sqrt{\ln n}}{n}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{n^3}}{n^2+4n+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2 tg^5\frac{\pi}{n}$

55

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n+1}(n+2)}{5^{n-1}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n+6}}}{\sqrt{n+6}}$

56
a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{n^3+4n^2-3}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}5^{n+1}\,arctg\frac{1}{3^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(2n)!}$ d) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln^2 n+1)}$

57
a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{\sqrt[3]{n^5}\,(1+n^2)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+5}{n+3}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+2}}{n(n+2)!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(5n+4)^n}$

58
a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n-1}{5n^2+7}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\arcsin\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{(3n+4)3^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2(n+1)}$

59
a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^5}+4}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,(e^{\frac{1}{n}}-1)^2$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot n!}{n^n+1}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^5(n+1)}$

60
a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+7}{10n+4}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}tg\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(n+1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n+3)}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(3n+4)^n}$

2 Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n\cdot\sqrt[5]{3n+1}}$ 2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n^2+1}{3^n}$

3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^2+1}$ 4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{2n^3+3}$

5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{2n+5}}$ 6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{n(2n+1)}$

7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n+2}$ 8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{n}{n^2+1}$

9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot arctg\frac{1}{n}$ 10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{(-1)^n}{n}$

11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ 12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+4}$

13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^2}$ 14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\ell n(n+1)}$

15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n(3n-1)}$ 16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(2n+1)}$

17 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n+1)}$ 18 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot \ell n^2(n+1)}$

19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+\sin^2 n}$ 20 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2+1}$

21 $\sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{3n^2+1}$ 22 $\sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+1}}$

23 $\sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$ 24 $\sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(2n-1)}$

25 $\sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$ 26 $\sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n(3n+4)}$

27 $\sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{(-1)^n}{n^3+n+1}$ 28 $\sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{(-1)^n}{n^2+n+1}$

29 $\sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{(-1)^n}{n^4+n+1}$ 30 $\sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{(-1)^n \cdot n}{n^4+n+5}$

31 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot arctg\frac{1}{n^2}$ 32 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$

33 $\sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{(-1)^{n+1} \cdot \sqrt{n}}{n^2+3}$ 34 $\sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{\sqrt{n^3+1}}$

35 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdot \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n}{\sqrt{n^4+1}}$ 36 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdot \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n}{\sqrt{n^5+1}}$

37 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \ln(1+\dfrac{1}{n})$ 38 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \ln(1+\dfrac{1}{n^2})$

39 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \cdot \ln(1+\dfrac{1}{n+1})$ 40 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdot \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n}{\sqrt{n^2+3}}$

41 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \cdot \sqrt{\ln(1+\dfrac{1}{n^2})}$ 42 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \cdot \sqrt{arctg\dfrac{1}{n^3}}$

43 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdot \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n^2}{\sqrt{n^2+2}}$ 44 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdot \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n}{\sqrt{n^3+4}}$

45 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{n}{n^4+1}$ 46 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdot \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3+4}$

47 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdot \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^4+n}$ 48 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdot \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3+n}$

49 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdot \dfrac{(-1)^{n}\, tg\dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}$ 50 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdot \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n+1}}$

51 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdot \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+n}}$ 52 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdot \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^6+n+3}}$

53 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}}$ 54 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n+1}}$

55 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n^7+n}}$ 56 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\sqrt{n}}$

57 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[4]{2n+3}}$ 58 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}(n+1)}{\sqrt{n^3}}$

59 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot e^{-\sqrt{n}}$ 60 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{1+e^{2n}}$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду і дослідити його на кінцях інтервал

1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$ 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{2n-2}}{(3n-2)^n}$

3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n+2) \cdot 2^n}$ 4 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 2^n}$

5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(2n-1) \cdot 3^n}$ 6 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{(5n-3) \cdot 2^n}$

7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{2n \cdot 4^n}$ 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n-2) \cdot 3^n}$

9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$ 10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(2n+1)\cdot 5^n}$

11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(2n-1)\cdot 3^n}$ 12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{3n-2}$

13 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{2n+1}$ 14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+3)^n}{n^n}$

15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{5^n(2n+1)}$ 16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{20}x^n}{(2n+1)\cdot 3^n}$

17 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{nx^n}{3n-1}$ 18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(5n-3)\cdot 5^n}$

19 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+2)^n}{(2n-1)\cdot n}$ 20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2n(n+1)}$

21 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(3n-2)\cdot n}$ 22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot x^n}{n\cdot 3^n}$

23 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)\cdot x^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$ 24 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{3n(n^2+1)}$

25 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{(n^2+2)\cdot 2^n}$ 26 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3\cdot 5^n}$

27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n^2\cdot(2n-1)}$ 28 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{(n+3)\cdot 3^n}$

29 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n^2(4n-3)}$ 30 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n\cdot(n^2+1)}$

31 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{(n+1)\cdot n^2}$

32 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(5x)^n}{(2n+1)\cdot n}$

33 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3n^2 \cdot (n+1)}$

34 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^n}$

35 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3 \cdot 4^n}$

36 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{(n+3)\cdot 2^n}$

37 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot (n+1)}$

38 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n^2+1)\cdot 9^n}$

39 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2n \cdot (n+2)}$

40 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{(n+6)^2}$

41 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot (x+1)^n}{n^2+1}$

42 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (x-1)^n}{n^2+4}$

43 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n (n+1)}{n!}$

44 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x+1)^n}{(3n+4)\cdot 2^n}$

45 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (x-1)^n}{(n+1)\cdot 3^n}$

46 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{2n}}{(n+2)\cdot 3^{2n}}$

47 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot x^n}{(n+1)\cdot n!}$

48 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(n+3)^4}$

49 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{2n+1}$

50 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{(n+5)\cdot 2^n}$

51 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{n \cdot (n+5)}$

52 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{(n+3)\cdot 5^n}$

53 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+10)^n}{(n-1)\cdot 6^n}$ 54 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{(n^2+3)\cdot 4^n}$

55 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{(n+1)\cdot 9^n}$ 56 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n\cdot(n+4)}$

57 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{3n\cdot(n+2)}$ 58 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{2n}}{n(2n-1)}$

59 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^2\cdot(3n+1)}$ 60 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^{2n}}{n\cdot(n^2+n+1)}$

4 Розкласти в ряд Тейлора за степенем $X - X_0$ функції

1 $y=\frac{1}{x}, x_0=1;$ 2 $y=\lg x, x_0=1;$

3 $y=\frac{1}{x^2}, x_0=-2;$ 4 $y=\frac{1}{x^2+3x+2}, x_0=-3;$

5 $y=\frac{1}{x^2+4x+7}, x_0=4;$ 6 $y=\sqrt{x}, x_0=4;$

7 $y=\cos x, x_0=\frac{\Pi}{2};$ 8 $y=e^x, x_0=2;$

9 $y=\sin^2 x, x_0=\frac{\Pi}{4};$ 10 $y=\sqrt[3]{x}, x_0=1;$

11 $y=\frac{1}{x+1}, x_0=3;$ 12 $y=\sqrt{x+1}, x_0=3;$

13	$y=\frac{1}{x+3}, x_0=2;$	14	$y=\cos^2 x, x_0=\frac{\Pi}{4};$
15	$y=\ln(x-1), x_0=2$	16	$y=e^x, x_0=1;$
17	$y=\frac{1}{x-1}, x_0=-2;$	18	$y=\sqrt{x}, x_0=1;$
19	$y=e^{-x}, x_0=-1;$	20	$y=\ln(2x+1), x_0=2;$
21	$y=e^{3x}, x_0=1;$	22	$y=\sin 2x, x_0=-\frac{\Pi}{4};$
23	$y=\cos 3x, x_0=\frac{\Pi}{2};$	24	$y=\frac{1}{(x+1)^2}, x_0=1;$
25	$y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}, x_0=5;$	26	$y=\frac{1}{2x+1}, x_0=1;$
27	$y=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}, x_0=1;$	28	$y=e^{2x-1}, x_0=1;$
29	$y=\sin(3x-3), x_0=1;$	30	$y=\cos(2x-4), x_0=2;$
31	$y=\frac{1}{3x+2}, x_0=1;$	32	$y=\frac{2}{5x+4}, x_0=-1;$
33	$y=\frac{1}{\sqrt{2x+11}}, x_0=-1;$	34	$y=\frac{1}{x^2+2x}, x_0=-1;$
35	$y=\sin x, x_0=\frac{\Pi}{2};$	36	$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}, x_0=-3;$
37	$y=\sqrt[4]{(x-2)^3}, x_0=3;$	38	$y=\frac{3}{x^2-2}, x_0=-2;$

39 $y=\sqrt{x+1}, x_0=3;$

40 $y=\ln(x+3), x_0=-2;$

41 $y=\cos(x-\frac{\Pi}{4}), x_0=-\frac{\Pi}{4};$

42 $y=\sqrt[5]{3x+7}, x_0=1;$

43 $y=\frac{1}{3x-7}, x_0=1;$

44 $y=\frac{1}{(5x-4)^3}, x_0=-1;$

45 $y=\sqrt[3]{(5-x)^2}, x_0=3;$

46 $y=e^{5x+4}, x_0=-2;$

47 $y=\sin^2 3x, x_0=\frac{\Pi}{4};$

48 $y=\ln(3x+4), x_0=2;$

49 $y=\frac{1}{2x+1}, x_0=3;$

50 $y=2^{x+1}, x_0=1;$

51 $y=\sqrt[10]{x+4}, x_0=1;$

52 $y=\sqrt[3]{(x+7)^2}, x_0=-3$

53 $y=\ln x, x_0=2;$

54 $y=e^{2x+8}, x_0=-4;$

55 $y=\sin(5x-2), x_0=\frac{2}{5};$

56 $y=\frac{1}{x^5}, x_0=1;$

57 $y=\frac{1}{x^2+4x+4}, x_0=3;$

58 $y=\cos(3x+8), x_0=-\frac{8}{3};$

59 $y=\sqrt{x^5}, x_0=2;$

60 $y=\frac{7}{5x-4}, x_0=1;$

Додаток А
Таблиця похідних найпростіших елементарних функцій

	Елементарна функція $y = f(x)$	**Складна функція** $y = f(u),\ u = f(x)$
1.	$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.	$\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'$.
2.	$(\sin x)' = \cos x$.	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.
3.	$(\cos x)' = -\sin x$.	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.
4.	$(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.	$(tg\, u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$.
5.	$(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.	$(ctg\, u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.
6.	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
7.	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
8.	$(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.	$(arctg\, u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.
9.	$(arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{x^2+1}$.	$(arcctg\, u)' = -\dfrac{u'}{u^2+1}$.
10.	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$.	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$.
11.	$\left(e^x\right)' = e^x$.	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.
12.	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.
13.	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$.

$$(shx)' = chx;\ (chx)' = shx;\ (thx)' = 1/ch^2 x$$

Додаток Б
Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $(n \neq -1)$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C_1$, $(a \neq 0)$.

4. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $(a \neq 0)$.

$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$, $(a \neq 0)$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$, $(a \neq 0)$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C_1$, $(a > 0)$.

8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $(a > 0)$; $\int e^x dx = e^x + C$.

9. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.

10. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

11 $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$.

12 $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$.

13 $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$.

14 $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

Контрольні питання

1. Означення матриці. Види матриць. Дії над матрицями та їх властивості.
2. Визначники матриць другого порядку та їх властивості.
3. Визначники матриць третього порядку та їх властивості.
4. Обернена матриця. Структура оберненої матриці.
5. Матрична форма запису систем лінійних рівнянь. Розв'язування систем матричним способом.
6. Формули Крамера.
7. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса.
8. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Жордано-Гаусса.
9. Поняття вектора. Види векторів. Операції над векторами та їх властивості.
10. Лінійна залежність векторів. Лінійна залежність двох та трьох векторів.
11. Поняття базису системи векторів. Декарті базис. Координати вектора.
12. Означення скалярного добутку векторів та його властивості.
13. Вираження скалярного добутку векторів через декартові координати співмножників.
14. Кут між векторами. Проекція вектора на вектор.
15. Означення векторного добутку векторів та його властивості.
16. Вираження векторного добутку векторів через декартові координати співмножників. Обчислення площ.
17. Означення та властивості мішаного добутку векторів.
18. Вираження мішаного добутку векторів через декартові координати співмножників. Обчислення об'ємів.
19. Поділ відрізка в даному відношенні.
20. Рівняння лінії на площині. Рівняння кола.
21. Пряма на площині. Загальне рівняння прямої; рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора; рівняння прямої, що проходить через дану точку паралельно даному вектору.
22. Пряма на площині. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом; рівняння прямої у відрізках; рівняння прямої, що проходить через дану точку в даному напрямку; рівняння прямої, що проходить через дві дані точки.
23. Відстань від точки до прямої (на площині).
24. Кут між прямими (на площині).

25. Умови паралельності і перпендикулярності прямих (на площині).
26. Відстань між точками в просторі. Рівняння поверхні.
27. загальне рівняння площини. Рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора.
28. Рівняння площини у відрізках. Рівняння площини, що проходить через три дані точки.
29. Пряма у просторі. Канонічні та параметричні рівняння прямої; рівняння прямої, що проходить через дві дані точки.
30. Відстань від точки до площини. Кут між двома площинами; умови їх паралельності та перпендикулярності.
31. Кут між двома прямими в просторі. Умови мимобіжності, паралельності та перпендикулярності прямих.
32. Кут між прямою і площиною, умови їх перпендикулярності.
33. Послідовність. Границя послідовності. Єдиність границі послідовності.
34. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. Їх властивості.
35. Збіжні послідовності та їх властивості. Достатня умова збіжності послідовності.
36. Обмежені і необмежені послідовності.
37. Поняття невизначеності.
38. Границя функції в точці. Односторонні границі. Границя функції на нескінченості.
39. Основні теореми про границі. Обмежені і необмежені функції. Нескінченно малі та нескінченно великі функції, їх властивості.
40. Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні нескінченно малі. Таблиця еквівалентних нескінченно малих.
41. Перша та друга визначні границі. Їх різні форми запису.
42. Неперервність функції в точці. Точки неперервності та точки розриву функції. Класифікація точок розриву.
43. Операції над неперервними функціями. Неперервність основних елементарних функцій. Властивості функцій, неперервних на відрізку.
44. Похідна. Її фізичний та геометричний зміст. Правила диференціювання.
45. Похідна складної та оберненої функції.
46. Похідні обернених тригонометричних функцій.
47. Таблиця похідних.

48. Похідна функції, заданої неявно. Перша та друга похідна функції, заданої параметрично.
49. Рівняння дотичної та нормалі до кривої.
50. Похідна, як відношення диференціалів.
51. Диференціал функції. Його геометричний зміст та правила знаходження. Інваріантність форми диференціала.
52. Застосування диференціала в наближених обчисленнях.
53. Поняття екстремуму функції. Умови зростання та спадання функції. Критичні точки.
54. Опуклість та вгнутість функції. Точки перегину. Умови опуклості, вгнутості та перегину кривої.
55. Асимптоти кривої (похилі, горизонтальні, вертикальні).
56. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка.
57. Правило Лопіталя. Випадки його застосування.
58. Первісна та неозначений інтеграл. Властивості неозначеного інтеграла.
59. Таблиця основних інтегралів.
60. Правила знаходження неозначених інтегралів. Методи інтегрування.
61. Інтегрування раціональних дробів та найпростіших раціональних дробів.
62. Інтегрування тригонометричних функцій за допомогою універсальної тригонометричної підстановки.
63. Інтегрування тригонометричних функцій за допомогою частинних тригонометричних підстановок (не універсальної).
64. Інтеграли виду:
65. $\int \cos mx \cdot \sin kx \; dx$, $\int \cos mx \cdot \cos kx \; dx$, $\int \sin mx \cdot \sin kx \; dx$.
66. Поняття означеного інтеграла.
67. Властивості означеного інтеграла.
68. Теорема про середнє. Оцінка означеного інтеграла.
69. Формула Ньютона-Лейбніца.
70. Інтегрування частинами та методом підстановки в означеному інтегралі.
71. Застосування означеного інтеграла.
72. Поняття диференціального рівняння. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

73. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку та їх розв’язування методом Бернуллі. Рівняння Бернуллі.
74. Однорідні диференціальні рівняння другого порядку (ОЛДР).
75. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку.
76. Означення числового ряду. Необхідна умова збіжності. Критерій Коші збіжності числового ряду.
77. Властивості числових рядів.
78. Ознака порівняння для числових рядів з невід'ємними членами.
79. Ознаки Даламбера і Коші збіжності числових рядів.
80. Інтегральна ознака збіжності числових рядів.
81. Ознака Лейбніца збіжності знакозмінних рядів.
82. Абсолютно і умовно збіжні ряди. Ознаки збіжності числових рядів.
83. Теореми про перестановку членів числового ряду.
84. Означення функціональних послідовності і ряду. Рівномірно збіжні функціональні послідовності. Рівномірно і абсолютно збіжні функціональні ряди.
85. Почленне інтегрування функціонального ряду.
86. Почленне диференціювання функціонального ряду.
87. Степеневий ряд. Інтервал та радіус збіжності степеневого ряду. Почленне інтегрування та диференціювання степеневого ряду.
88. Ряд Тейлора. Розклад основних елементарних функцій у степеневий ряд.
89. Застосування степеневих рядів.
90. Тригонометричний ряд. Коефіцієнти Фур'є парних і непарних функцій.
91. Розвинення періодичної функції в ряд Фур'є
92. Інтегральна форма ряду Фур'є. Перетворення Фур'є.
93. Означення числового ряду. Необхідна умова збіжності. Критерій Коші збіжності числового ряду.
94. Властивості числових рядів.
95. Ознака порівняння для числових рядів з невід'ємними членами.
96. Ознаки Даламбера і Коші збіжності числових рядів.
97. Інтегральна ознака збіжності числових рядів.
98. Ознака Лейбніца збіжності знакозмінних рядів.

99. Абсолютно і умовно збіжні ряди. Ознаки збіжності числових рядів.
100. Теореми про перестановку членів числового ряду.
101. Означення функціональних послідовності і ряду. Рівномірно збіжні функціональні послідовності. Рівномірно і абсолютно збіжні функціональні ряди.
102. Почленне інтегрування функціонального ряду.
103. Почленне диференціювання функціонального ряду.
104. Степеневий ряд. Інтервал та радіус збіжності степеневого ряду. Почленне інтегрування та диференціювання степеневого ряду.
105. Ряд Тейлора. Розклад основних елементарних функцій у степеневий ряд.
106. Застосування степеневих рядів.
107. Тригонометричний ряд. Коефіцієнти Фур'є парних і непарних функцій.
108. Розвинення періодичної функції в ряд Фур'є
109. Інтегральна форма ряду Фур'є. Перетворення Фур'є.

Список рекомендованої літератури

1. Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика. Ряди та гармонічний аналіз, перетворення Лапласа, теорії поля та функцій комплексної змінної: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл.. — К., 2002. — 200с
2. Бідюк П. І., Савенков О. І., Баклан І. В. Часові ряди: моделювання та прогнозування. — К. : ЕКМО, 2003. — 144с.
3. Валєєв К. Г., Джалладова І А. Вища математика: Навч. посібник:У 2 ч. — К. : КНЕУ, 2001. — 546с.
4. Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 1999.
5. Вишенський В. А., Оленко А. Я. Ряди: Навч. посібник / Національний ун-т "Києво-Могилянська академія". — К., 1995. — 36с.
6. Вища математика. Ряди: Метод. вказівки до практ. занять для студ. усіх спец. — К. : НАУ, 2004. — 76с.
7. Горстко А.Б. и др. Введение в моделирование эколого-экономических систем. – Ростов-на-Дону: Из-во Ростовского университета, 1998.
8. Грималюк В. П., Кухарчук М. М., Ясінський В. В. Вища математика: Навч. посібник для студ. вищ. техн. навч. закладів:У 2-х ч. — К. : Віпол, 2003. — (Серія "Бібліотека першокурсника"). Ч. 2 : Ряди. Ряди Фур'є. Кратні та криволінійні інтеграли. Теорія поля. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Функції багатьох змінних. Теорія ймовірностей і математична статистика. — 399с.
9. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие:В 2 ч.. — 6.изд. — М. : ООО "Издательский дом "Оникс 21 век", 2003. — 416с.
10. Демидович Б. П., Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие для вузов. — М. : ООО "Издательство Астрель", 2003.

11. Засуха В. А., Осипова Т. Ю. Вища математика. Збірник задач та лабораторних робіт з використанням інформаційно-комп'ютерних технологій: Навч. посіб. для підгот. бакалаврів в агр. вищ. навч. закл. освіти II-IV рівнів акредитації напряму 1302 - "Зооінженерія" / Національний аграрний ун-т — К. : НАУ, 2006. — 226с.
12. Клименко Ю. И. Высшая математика для экономистов: теория, примеры, задачи / Экзамен, 2005 (ГУП ИПК Ульян. Дом печати) - 734 с.
13. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов: Учеб. пособие М. Изд. дом "ИНФРА-М", 1997 – 207 с.
14. Кремер Н. Ш Высшая математика для экономистов : практикум для студентов обучающихся по экономическим специальностям / под ред. Н. Ш. Кремера / Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2007 (Ульяновск : Ульяновский Дом печати). – 478 с.
15. Криводуб Ю. Г., Криворуков В. П., Мамчук В. І. Ряди: Задачник-практикум — К. : НАУ, 2003. — 92с.
16. Литвинюк В. П. Диференціальні рівняння. Ряди: Навч. посіб. з вищої математики для студ. напряму підгот. 0708 - "Екологія" / Вінницький національний технічний ун-т — Вінниця : ВНТУ, 2003. — 81с.
17. Ляшенко И.Н. и др. Методы эколого-экономического моделирования. – Нукус, Билим, 1994.
18. Методичні вказівки для організації самостійної роботи студентів по темі "Ряди" з курсу "Вища математика" .– А.І. Щерба (уклад.). — Черкаси, 1996. — 64с.
19. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для втузов. — 14. изд., испр. — М. : Издательство Физико-математической литературы, 2001. — 336с.
20. Підкуйко С. І. Математичний аналіз. — Л. : Галицька Видавнича Спілка, 2004. — . Т. 1 : Множини. Дійсні числа ; Границя послідовності ; Границя функції ; Неперервність функції ; Диференціальне числення функцій однієї змінної; Невизначений інтеграл ; Інтеграл Рімана ; Невластиві інтеграли ; Інтеграл Рімана-Стільтьєса ; Числові ряди ;

Функціональні послідовності і ряди ; Степеневі ряди. — 530с.
21. Плис А.И. , Сливина Н.А. Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров : Учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по экон. и техн. специальностям / : М. Финансы и статистика, 2000 – 655 с.
22. Рюмина Б.В. Экологический фактор в экономико-математических моделях. – М.: Наука, 1980.
23. Рябічев В. Л. Вища математика. Числові ряди: Конспект лекцій. — К. : Інститут журналістики, 2003. — 22с.
24. Ряди Фур'є: Метод. рекомендації до практ. занять і завдання для самостійної роботи / Ніжинський педагогічний ін-т ім. М.В.Гоголя / Т.В. Лісова (укл.), В.С. Кладинога (укл.) — Ніжин, 1995. — 28с.
25. Сизоненко В. Л., Чібісов Д. В., Коваленко М. Й., Масленніков Д. І. Вища математика: Навч. посіб. для студ. аграр. вузів / Харківський держ. аграрний ун-т ім. В.В.Докучаєва. — Х., 1999. — 106с.
26. Числові і функціональні ряди: Конспект лекцій / Національний авіаційний ун- т / Л. В. Шмаков (авт.-уклад.). — К. : НАУ, 2002. — 68с.
27. Числові, степеневі і тригонометричні ряди: Метод. вказівки, приклади розв'язування типових задач і завдання для самост. роботи студ. / Подільський держ. аграрно-технічний ун-т. Кафедра математичних дисциплін / В. Ф. Понеділок (уклад.) — 2.вид., перероб. і доп. — Кам'янець-Подільський : Абетка, 2005. — 71с.
28. Шипачев В. С. Задачник по высшей математике: Учеб. пособие для студ. вузов. — 3.изд., стер. — М. : Высшая школа, 2003. — 304с.

Левчук Олена Володимирівна

Вища математика

Навчально-методичний посібник для самостійної роботи студентів напряму 0708 "Екологія"

Підписано до друку 26.02. 2009. Формат А-5. Папір офсетний.
Друк ізографічний. Ум. друк аркушів 8,25
Тираж 100пр. Зам. №96

Віддруковано в РВВ ВДАУ м. Вінниця, вул. Сонячна 3