Новицька Л., Бойко Ю., Качур Я., Овсієнко Т.
Вінницький національний аграрний університет

Використання інтегрального числення в транспортних задачах аграрного виробництва

У статті розглядається використання інтегрального числення в транспортних задачах аграрного виробництва

Науково-технічний процес, сучасний розвиток економіки, перехід до системи ринкових відносин висувають нові серйозні вимоги до підготовки студентів інженерно-технічних, економічних, сільськогосподарських та ряду інших спеціальностей.

Однією з найцінніших якостей фахівця є уміння творчо підходити до вирішення завдань, що виникають у його професійній діяльності. Елементи навчання творчому підходу до вирішення задач, пов'язаних з профілем майбутньої спеціальності студента, виховання взагалі творчої ініціативи повинні займати суттєве місце в процесі навчання.

Мета даної статті – поділитися досвідом використання задач прикладного характеру в процесі вивчення математики студентами аграрного вузу. Такі завдання можна з успіхом використовувати для створення проблемної ситуації, що в свою чергу забезпечує мотивацію вивчення відповідного теоретичного матеріалу, для ілюстрації універсальності математичного апарату.

Так, під час розгляду теми “Подвійний інтеграл”, ми пропонуємо добірку транспортних задач, які визначають ефективність сільськогосподарського виробництва.

Розглянемо для прикладу одну з проблем сільськогосподарського виробництва, вводячи при цьому деякі теоретичні відомості.

Нехай потрібно перевезти вантажі масами $m_1, m_2, ..., m_n$ на відстані $r_1, r_2, ..., r_3$ відповідно. Величину $A = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot r_k$ називають [2] вантажною роботою, а величину – $\rho = A / \sum_{k=1}^{n} m_k$, середньою дальністю їздки. Ці величини служать техніко-економічними показниками вантажного транспортного процесу. Їх можна природним чином поширити і на випадок вантажу, який рівномірно розподіляється на деякій площі. Так виникають поняття вантажної роботи і середньої дальності їздки при збиранні врожаю зерна чи сіна з деякого поля, при вивезенні добрив та інших сільськогосподарських процесів.

Задача 1. Розглянемо поле, яке має форму криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = 0,\ y = f(x),\ x = a,\ x = b\ (y \geq 0)$. Нехай урожай з поля вивозиться найкоротшим шляхом до дороги – осі абсцис. Вивести формулу для обчислення вантажної роботи по вивезенню урожаю з поля до дороги.

Розв'язання. Будемо вважати, що урожайність зерна на всьому полі D однакова і дорівнює k $(в\ кг / м^2)$. Розіб'ємо поле на ділянки з площами ΔS_i

($i=1,2,...,n$), з яких урожай вивозиться за одну їздку. Тоді вантажна робота буде $A \approx k\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \Delta S_i$, де y_i - довжина відповідної їздки (ордината деякої точки ділянки ΔS_i). Точне значення вантажної роботи дістанемо, перейшовши до границі $A = \lim_{\lambda \to 0} k\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \Delta S_i = k\iint_D ydxdy,$ де λ - найбільший з діаметрів ділянок.

Отже, вантажна робота може бути обчислена за формулою:

$$A = k\iint_D ydxdy = k\int_a^b dx \int_0^{f(x)} ydy = \frac{k}{2}\int_a^b f^2(x)dx.$$

Наступна добірка задач спрямована на формування умінь студентів використовувати різні елементи знань інтегрального числення.

Задача 2. Використовуючи отриману формулу, знайдіть вантажну роботу по вивезенню урожаю з прямокутного поля шириною a і довжиною b найкоротшим шляхом до краю дороги.

Розв'язання. Оскільки з даної точки поля урожай вивозиться до найближчої сторони прямокутника, то поле ділиться (рис. 1) на 4 зони: S_1, S_2, S_3, S_4 з яких машини йдуть відповідно до сторін *AB, BC, CD, DA*. Далі розіб'ємо поле на 8 трикутників і 4 прямокутники.

Знайдемо роботу A_T по вивезенню урожаю з трикутника *DEF*. Вісь абсцис (дорога) в цьому випадку повинна співпадати з прямою *DC*. За вісь ординат візьмемо пряму *DA*. Тоді *DE* - графік функції *f(x)=x*. Тому $A_T = \frac{k}{2}\int_0^{a/2} x^2 dx = \frac{ka^3}{48}.$

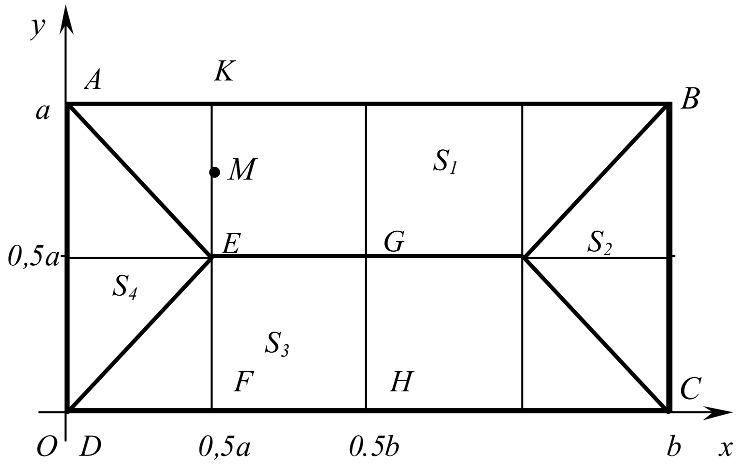

Рис. 1

Оскільки робота визначається формою поля і положенням дороги, то вона буде такою ж і для кожного з решти трикутників (відносно своєї дороги – катета).

Знайдемо роботу $A_П$ для прямокутника *EFHG:*

$$A_П = \frac{k}{2}\int_{a/2}^{b/2} (a/2)^2 dx = \frac{ka^2}{2\cdot 4}\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right) = \frac{k(a^2b - a^3)}{16}.$$

Такою ж буде робота і для решти прямокутників (відносно своїх доріг). Тепер можна знайти остаточну роботу по вивезенню урожаю. Вона дорівнює $A = 8A_T + 4A_П = 8\cdot\frac{ka^3}{48} + 4\frac{k(a^2b - a^3)}{16} = \frac{k}{12}(3a^2b - a^3).$

Поля сівозміни намагаються проектувати у формі прямокутників, що забезпечує найбільш продуктивне і правильне виконання механізованих робіт. У відповідності з цим польові дороги також доцільно проектувати у вигляді сітки прямокутників, суміщаючи їх сторони з сторонами полів сівозмін.

Розглянемо одну із задач, яка виникає при визначенні раціонального співвідношення сторін прямокутників, які є основою сітки польових доріг.

Задача 3. Нехай прямокутне поле шириною a і довжиною b оточено польовою дорогою. Урожай з будь-якої точки поля транспортується спочатку по найкоротшому шляху до дороги, а потім по дорозі до фіксованої вершини прямокутника. Вивести формулу для обчислення вантажної роботи по вивезенню урожаю з будь-якої точки поля по найкоротшому шляху до дороги, а потім по дорозі до фіксованої вершини прямокутника.

Розв'язання. Нехай урожай вивозиться в точку *O*, а поле розбито на зони S_1, S_2, S_3, S_4 (рис. 1). Нехай в машину завантажується урожай з ділянки площею ΔS в точці *M(x;y)*, яка належить зоні S_i. З цим вантажем машина пройде шлях *MKAO* довжиною *2a+x-y.* Тому вантажна робота A_1 по вивезенню урожаю з поля S_i може бути знайдена таким чином:

$$A_1 = \frac{k}{2}\int_{\frac{a}{2}}^{a} dy \int_{a-y}^{y-a+b} (2a + x - y)dx = \frac{k}{4}a^2 b + \frac{k}{8}ab^2 - \frac{k}{6}a^3.$$

Аналогічно знаходимо вантажну роботу A_2, A_3, A_4 по вивезенню урожаю з полів S_2, S_3, S_4 відповідно:

$$A_2 = \frac{k}{2}\iint_{S2} (2b + y - x)dxdy = \frac{k}{8}a^2 b + \frac{k}{12}ab^2;$$

$$A_3 = \frac{k}{2}\iint_{S3} (x + y)dxdy = \frac{k}{8}ab^2 - \frac{k}{24}a^3; \qquad A_4 = \frac{k}{12}a^3.$$

Додавши знайдені величини, отримаємо шукану формулу:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 =$$

$$= \frac{k}{4}a^2 b + \frac{k}{8}ab^2 - \frac{k}{8}a^3 + \frac{k}{8}a^2 b + \frac{k}{12}a^3 + \frac{k}{8}ab^2 - \frac{k}{24}a^3 + \frac{k}{12}a^3 = \frac{k}{24}(9a^2 b + 6ab^2 - a^3).$$

Роль прикладних задач визначається з одного боку, тим що вони ілюструють застосування математичного апарату в суміжних дисциплінах, у практичній діяльності. Математичні знання, які використовує студент при розв'язуванні, виявляються більш вагомими більш значимими, ніж ті, які використовуються при розв'язуванні формальних математичних задач, підвищується цінність таких знань. З іншого боку, процес розв'язання таких задач імітує процес дослідження ситуацій, що відбуваються в сільськогосподарському виробництві, так як пов'язаний з етапами створення математичної моделі, її дослідженням та застосуванням.

Література.

1. Иофинов С. А. Эксплуатация машинно-тракторного парка. – М., 1974.
2. Романенко И. А. Технико-економические основы проектирования сетей автомобильных дорог. – М., 1975
3. Славуцкий А. К. Проектирование, строительство, содержание и ремонт сельскохозяйственных дорог. – М., 1972.