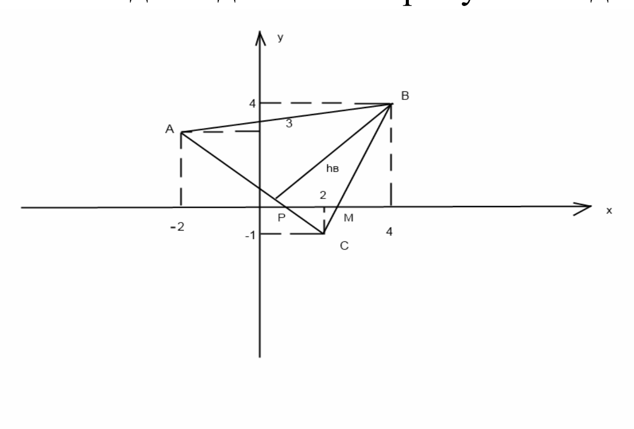
Дубчак В.М., Сологуб В.П.
Кафедра вищої математики, інформатики та
математичних методів в економіці ВНАУ

АНАЛІЗ ВІДОМИХ МЕТОДІВ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ ТА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ТРИКУТНИКА

Приводяться та аналізуються різні відомі підходи та методи обчислення площі довільного трикутника як засобами елементарної, так і вищої математики

Трикутник в математиці є однією з самих головних геометричних фігур, і обчислення його площі – актуальною задачею. В елементарній та вищій математиці існує багато різноманітних способів обчислення площі трикутника [1-4], і в даній роботі на практичному прикладі ми приведемо і порівняємо самі головні із них.

Задамо довільний трикутник в декартових координатах:



A(-2;3), B(4;4), C(2;-1)

1). Найбільш відома і саме часто вживана формула площі за допомогою основи та висоти трикутника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot h_B$$

Оскільки AC = $|\overline{AC}|$ = $4\sqrt{2}$

Рівняння сторони AC: $x + y - 1 = 0$,

Тоді $h_B = \frac{|4+4-1|}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$, тому $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{7}{\sqrt{2}} = 14$ (кв. од)

2). Відома формула Герона, в даному випадку в конкретній практичній реалізації ця формула є громісткою.

Нехай AC = B = $4\sqrt{2}$, BC = a = $\sqrt{29}$, AB = c = $\sqrt{37}$,

$$p = \frac{a+в+c}{2} = \frac{\sqrt{32}+\sqrt{29}+\sqrt{37}}{2}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-в)(p-c)} = \sqrt{\frac{a+в+c}{2}\cdot\frac{a+в-c}{2}\cdot\frac{a-в+c}{2}\cdot\frac{-a+в+c}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{[(a+в)^2-c^2][c^2-(a+в)^2]} = \frac{1}{4}\sqrt{\left(2\sqrt{29}\sqrt{32}+24\right)\left(2\sqrt{29}\sqrt{32}-24\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4\cdot 29\cdot 32-24^2} = \frac{1}{4}\sqrt{3136} = 14$$

3). Ефективним є обчислення площі трикутника через застосування векторного добутку:

$\overline{AB}\{6;1\}, \overline{AC}\{4;-4\}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB}x\overline{AC}| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k}\\ 6 & 1 & 0\\ 4 & -4 & 0\end{matrix}\right\| = 2\left|-7\bar{k}\right| = 14$$

4). Ця ж площа може бути знайдена застосуванням скалярного добутку, а саме:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}вс\sqrt{1-\left(\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|}\right)^2} = 2\sqrt{2}\sqrt{37}\sqrt{1-\left(\frac{24-4}{\sqrt{37}\sqrt{32}}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{37\cdot 32-400} = 14$$

Площа данного трикутника може бути також знайдена інтегральним численням, через додатки означенного, кратного та криволінійного інтегралів.

5). За допомогою означенного інтеграла площа трикутника ABC знаходиться як:

$$S_{ABC} = S_{APMB} + S_{PMC}$$

Оскільки P(1;0), M($\frac{12}{5}$;0), а рівняння сторони AB буде визначатись як $y = \frac{x}{6}+\frac{10}{3}$, тоді

$$S_{ABC} = \int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{6}+\frac{10}{3}\right)dx - \frac{1}{2}(2+1)\cdot 3 - \frac{1}{2}\left(4-\frac{12}{5}\right)\cdot 4 + \frac{1}{2}\left(\frac{12}{5}-1\right)\cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}+20x\right)\Big|_{-2}^{4} - \frac{9}{2} - \frac{16}{5} + \frac{7}{10} = \frac{126}{6} - \frac{70}{10} = 14$$

6). Обчислимо площу трикутника ABC за допомогою подвійного інтеграла, тобто

$$S_{ABC} = \iint\limits_{D_{ABC}} dxdy$$

Для цього ще раз задамо сторони трикутника його рівняннями

$AC: x+y-1=0$ або $y=1-x$

$AB: x-6y+20=0$ або $y=\frac{x}{6}+\frac{10}{3}$

$BC: 5x-2y-12=0$ або $y=\frac{5}{2}x-6$

Тоді

$$S_{ABC}=\int_{-2}^{2}dx+\int_{-x+1}^{\frac{x}{6}+\frac{10}{3}}dy+\int_{2}^{4}dx\int_{\frac{5}{2}x-6}^{\frac{x}{6}+\frac{10}{3}}dy=\int_{-2}^{2}\left(\frac{x}{6}+\frac{10}{3}-1\right)dx+\int_{2}^{4}\left(\frac{x}{6}+\frac{10}{3}-\frac{5}{2}x+6\right)dx=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{7}{2}x^2+14x\right)\Bigg|_{-2}^{2}+\frac{1}{3}\left(28x-\frac{7}{2}x^2\right)\Bigg|_{2}^{4}=\frac{28}{3}+\frac{14}{3}=14$$

7). За допомогою формули Гріна площа даного трикутника через криволінійний інтеграл може бути знайдена слідуючим чином:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\oint_{ACB}xdy-ydx$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\oint_{ACB}xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_{AC}xdy-ydx+\frac{1}{2}\int_{CB}xdy-ydx+\frac{1}{2}\int_{BA}xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(x(-dx)-(1-x)dx\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{2}^{4}\left(x\cdot\frac{5}{2}dx-\left(\frac{5}{2}x-6\right)dx\right)+\frac{1}{2}\int_{4}^{-2}\left(x\frac{1}{6}dx-\left(\frac{x}{6}+\frac{10}{3}\right)dx\right)=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(-dx)+\frac{1}{2}\int_{2}^{4}6dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\frac{10}{3}dx=-\frac{1}{2}x\Big|_{-2}^{2}+3x\Big|_{2}^{4}+\frac{5}{3}x\Big|_{-2}^{4}=-1-1+12-6+\frac{20}{3}+\frac{10}{3}=14$$

Таким чином в даній роботі приведені застосування всіх самих відомих способів обчислення площі трикутника, і ця площа може бути знайдена незалежно і окремо кожною з приведених формул. З методичної точки зору кожний такий підхід по своєму є корисним, а порівняльна ефективність у їх застосуванні є очевидною.

Дана робота може бути використана для розробки і виконання учнівських та студентських розрахунково-графічних завдань, практичного закріплення вмінь та навиків до реалізації кожного із приведених способів.

Література

1. Пискунов Н.С. Дифферинциальное и интегральное исчесления для втузов,- М. : Наука, 1978.-576с.
2. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища школа, 1987.-550с.
3. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. - М. :1959.- 412с.
4. Рывкин А.А. Рывкин А.З., Хренов А.С. Справочник по математике.-М. : Высшая школа, 1964.-520с.