МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЛЕВЧУК О.В.
НОВИЦЬКА Л.І.

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

методичні вказівки для проведення практичних занять та самостійної підготовки здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) освітнього рівня
галузі знань - 24 «Сфера обслуговування»,
спеціальності - 241 «Готельно-ресторанна справа»
в аграрних вищих навчальних закладах

частина II

ВІННИЦЯ
2017

Левчук О.В., Новицька Л.І. Вища та прикладна математика, методичні вказівки для проведення практичних занять та самостійної підготовки здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) освітнього рівня галузі знань - 24 «Сфера обслуговування», спеціальності - 241 «Готельно-ресторанна справа» в аграрних вищих навчальних закладах. Частина II – Вінниця: ВНАУ, 2017. – 83с.

Рецензенти:

Гусак Л.П., к.п.н., доцент кафедри ЕКІС, ВТЕІ, КНТЕУ;
Табенська О. І., доцент кафедри менеджменту зовнішньоекономічної діяльності, готельно-ресторанної справи та туризму ВНАУ

В метдичних вказівках компактно наводиться математичний апарат, містяться приклади розв'язування задач, задачі для розв’язування на практичних заняттях та самостійної підготовки. Також розглядаються приклади застосування теоретичного матеріалу в прикладних задачах економічниого змісту з візуалізацією даних в середовищі Mathcad.

Викладений матеріал належать розділам: теорія границь, диференціальне та інтегральне числення.

Призначено для підготовки здобувачів вищої освіти першого освітнього рівня, галузі знань - 24 «Сфера обслуговування», спеціальності - 241 «Готельно-ресторанна справа» в аграрних вищих навчальних закладах

Затверджено науково-методичною комісією ВНАУ
протокол №6 від. 29.03.17.

ВСТУП

Характерною рисою нашого часу є зростаюча роль математики в різних галузях знань. Вивчення будь-якого реального явища або процесу, як правило, закінчується створенням та дослідженням математичної моделі. Математичною мовою вказуються особливості моделі, існування можливих розв'язків задачі, їх властивості, простежується їх динаміка. Особливо великого значення набуває математика на сучасному етапі, коли, використовуючи сучасні комп'ютерні технології , можна оперативно моделювати ситуації і процеси у фізиці, біології, соціології, економіці.

Тому вимогою часу до майбутнього фахівця є високий рівень знань з математики, що дасть можливість оперативно вирішувати невідкладні проблеми та ставити дедалі ширше коло нових.

Навчальна дисципліна „Вища та прикладна математика" є однією з складових, що передує та на якій базується цілий комплекс дисциплін з підготовки сучасного фахівця: основи статистичного обліку, економетрія, моделювання та прогнозування стану довкілля та ін.

Викладений матеріал охоплює розділи, що вивчаються в 2 семестрі та відповідає програмі навчальної дисципліни: теорія границь, диференціальне та інтегральне числення.

Курс, побудований на основі методичних вказівок забезпечує виконання наступних освітніх завдань:

- знайомство з основними розділами вищої та прикладної математики, що необхідні для моделювання професійних завдань;
- демонстрація взаємозв'язків математики та професійно-орієнтованих дисциплін;
- розвиток навичок застосування математичних методів для аналізу професійних проблем;
- формування уміння до відбору та найпростішої обробки інформації з використанням математичного пакету Mathcad.

Методичні вказівки є складовою цілісного науково-методичного комплексу дисципліни «Вища та прикладна математика», який містить нормативні документи, зміст дисципліни, представлений у низці посібників, тестів, презентацій тощо. Тому НМКД є раціональним, ефективним дидактичним засобом в формуванні цілісної системи знань і професійних умінь майбутніх фахівців, сприятиме формуванню узагальнених і систематизованих професійних знань і вмінь, навичці творчої діяльності, підвищує мотивацію навчання, є ефективним засобом в ліквідації недоліків в організації навчального процесу стосовно його дискретності і непогодженості в змісті й хронології вивчення навчальних дисциплін.

Зміст методичних вказівок, дозволить майбутньому фахівцеві систематизувати та сформувати необхідні компоненти математичного мислення: рівень, кругозір, культуру мислення і раціональні методи вирішення задач.

ЯК ПРАЦЮВАТИ З МЕТОДИЧНИМИ ВКАЗІВКАМИ?

1. Визначтесь з **темою** заняття
2. Прочитайте короткі **теоретичні відомості**
3. Розберіть наведені **приклади**
4. Якщо цього не достатньо для виконання практичних завдань, ознайомтесь з відповідними матеріалами, отриманими на **лекційних заняттях**
5. Розширте свої знання, використовуючи матеріали **картки дисципліни** в персональному кабінеті студента
6. Щоб перевірити достатність отриманих знань, пройдіть тести в **Тест-майстері**
7. Приступайте до виконання практичних завдань

ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Найменування показників	**Освітній рівень, галузь знань, спеціальність**	**Характеристика навчальної дисципліни**
Кількість кредитів – 3/4 Змістових модулів – 4 Загальна кількість годин – 90/120	Перший освітній рівень Галузь знань 24 «Сфера обслуговування» Спеціальність 241 «Готельно-ресторанна справа»	Денна форма навчання Нормативна Семестр - 1, 2 -й Лекції - 32год./ 34год. Практичні заняття - 28 год./ 34 год. Самостійна робота - 30 год./ 52 год. Вид контролю: зал/іспит

1. Теорія границь

Короткі теоретичні відомості

Числовою послідовністю називається нескінченна множина дійсних чисел $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, кожне з яких є функцією свого порядкового номера: $x_n = f(n)$.

Ця формула є формулою загального члена послідовності.

Наприклад, для послідовності $1, 3, 5, 7, ..., 2n-1, ...$, загальний член $x_n = 2n-1$.

Число x_0 називають *границею послідовності* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, якщо для довільного, як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує число $N = N(\varepsilon)$ таке, що нерівність $|x_n - x_0| < \varepsilon$ виконується для всіх $n > N$.

Символічно пишуть

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n .$$

Число A називають *границею функції* $f(x)$ при x, що наближається до x_0, якщо для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $|f(x) - A| < \varepsilon$, як тільки $|x - x_0| < \delta$.

Це записується у вигляді $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Якщо $x < x_0$ і $x \to x_0$, то пишуть $x \to x_0 - 0$; аналогічно, якщо $x > x_0$ і $x \to x_0$, то пишуть $x \to x_0 + 0$.

Числа $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x)$ і $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x)$ називають відповідно *границею зліва* функції $f(x)$ у точці x_0 і *границею справа* функції $f(x)$ у точці x_0.

Для існування границі функції $f(x)$ при $x \to x_0$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Важливі значення мають такі границі:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ - перша визначна границя

$\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x = e$ або $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e$, де $e \approx 2{,}718281...$ - друга визначна границя.

Функцію y=f(x), визначеному в деякому околі точки x_0, називають неперервною в т. x_0, якщо границя функції і її значення в цій точці збігаються, тобто

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(x_0)$$

Для неперервності функції f(x) у точці x_0, необхідної достатньо,щоб вона була неперервна в цій точці зліва і справа, тобто $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$

Якщо ця умова не виконується, то говорить, що функція f(x) має розрив неперервності у т.x_0.

Якщо функція f(x) має скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ *і* $\lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$ при чому не всі три числа $f(x_0)$, $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ рівні між собою, то x_0 називається точкою розриву першого роду.

Якщо в точці x_0 хоча б одна з односторонніх границь дорівнює нескінченності або не існує, то цю точку називають точкою розриву другого роду.

Таблиця еквівалентності нескінченно малих величин

Нехай a і n – сталі, a>0, $a \neq 0$. При $x \to 0$

$x \sim \sin x$	$x \sim \arcsin x$	$x \sim e^x - 1$
$x \sim tgx$	$x \sim arctgx$	$x \ln a \sim a^x - 1$
$\dfrac{x^2}{2} \sim 1 - \cos x$	$\dfrac{x}{2} \sim \sqrt{x+1} - 1$	$\dfrac{x}{\ln a} \sim \log_a (1 + x)$

ПРИКЛАДИ

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^2+n+2}{(n+1)^2}$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{n^2+n+2}{(n+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=1;$$

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$;

Розв'язання.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)(x^2+3)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x-1)(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x^2+3)}{x-2}=\frac{2\cdot4}{-1}=-8$$

3. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2+1}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=0$$

4. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{-(x+1)}\right)^{\frac{-(x+1)}{1}x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x}=\infty$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НА ПРАКТИЧНОМУ ЗАНЯТТІ

1.Побудувати графіки заданих функцій шляхом геометричних перетворень графіків елементарних функцій:

а) $y=|x+3|$;

б) $y=sin|x|$;

в) $y=3\sin(2x+1)$;

г) $y=\ln(x-2)+1$.

2. Знайти границі відношення многочленів:

а) $\lim\limits_{X\to2}\dfrac{x^2+3x+8}{x+4}$;

б) $\lim\limits_{X\to3}\dfrac{2x+7}{x^3-27}$;

в) $\lim\limits_{X\to5}\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-5x}$;

г) $\lim\limits_{X\to\infty}\dfrac{2x^2+x+3}{3x^2+5x+1}$;

д) $\lim\limits_{X\to\infty}\dfrac{5x^3+x^2+2x+8}{4x^2+3x+7}$;

е) $\lim\limits_{X\to\infty}\dfrac{2x^3-x+5}{x^3+x^2-1}$.

3. Знайти границі виразів, що містять ірраціональності:

а) $\lim\limits_{X\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$;

б) $\lim\limits_{X\to 3}\dfrac{x^2-x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

в) $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+x-1}{x}$;

г) $\lim\limits_{X\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{29+x}-3}{x^2+3x+2}$.

4. Знайти границі виразів, що містять тригонометричні функції:

а) $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin^3 5x}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$;

в) $\lim\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{xtg^3x}{\cos x-\cos^3 x}$.

5. Виконати завдання 4, використовуючи таблицю еквівалентності нескінченно малих значень.

6. Знайти границі виразів, що містять змінну величину в основі і в показнику степені або під знаком логарифма:

а) $\lim\limits_{X\to\infty}\left(\dfrac{(2x+3)/2x}{(2x-4)/2x}\right)^{3x+4}$;

б) $\lim\limits_{X\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}$;

в) $\lim\limits_{X\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{5x-1}$;

г) $\lim\limits_{X\to\infty}x\left[\ln\left(x^5+3x^4\right)-5\ln x\right]$.

7. Показати, що при x=4 функції мають розриви. Визначити їх характер.

а) f(x)= $6^{\frac{1}{x-4}}$

б) f(x)= $\dfrac{1}{x+2^{\frac{1}{x}-4}}$

в) y=arctg $\dfrac{2}{x-4}$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

8.Побудувати графіки функцій шляхом геометричних перетворень графіків елементарних функцій

а) y=(x-2) ^{2}

б) y=-cos x+2

в) y=$|\sin x|$

9. Знайти границі функцій

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+7x-18}{x^3+6x^2-16x}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x+1}{3}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-6}{x^2+3x+2}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x^5}{4-2x^3+x^5}$

д) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x-4}-\sqrt{8-x}}$

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+12}-\sqrt{x-6}\right)$

є) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos^3 x}{x^2}$

ж) $\lim\limits_{x\to -1}(4+3x)^{-\frac{2x}{x+1}}$

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{4}\left[\ln(3x+4)-\ln 3x\right]$

2. Диференціальне числення функції однієї змінної

Короткі теоретичні відомості

Основні правила диференціювання
(U , V – диференційована функ-ція).

1) $(C\cdot U)=C\cdot U'$, де C –const
2) $(U\pm V)'=U'\pm V'$
3) $(U\cdot V)=U'V+UV'$
4) $(\frac{U}{V})'=\frac{U'V-UV'}{V^2}$

Похідна *складної* функції
Якщо $y=\varphi(U)$, а $U=g(x)$, то y називають складною функцією
Тоді $y'=\varphi'(U)\cdot U'$

Похідна *неявної* функції
$$y'=-\frac{F'x(x,y)}{F'y(x,y)}$$

Похідна функції , що задана *параметрично*
Якщо функція задана параметрично
$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}\quad t\in[T_1;T_2]$$, то
$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Диференціал функції
$$dy=y'dx$$

Таблиця похідних найпростіших елементарних функцій

	Елементарна функція $y=f(x)$	Складна функція $y=f(u),\ \ u=f(x)$
1.	$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$.	$\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\cdot u'$.
2.	$(\sin x)'=\cos x$.	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$.
3.	$(\cos x)'=-\sin x$.	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$.
4.	$(tg\,x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.	$(tg\,u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$.
5.	$(ctg\,x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.	$(ctg\,u)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.
6.	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	$(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
7.	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	$(\arccos u)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
8.	$(arctg\,x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.	$(arctg\,u)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$.
9.	$(arcctg\,x)'=-\dfrac{1}{x^2+1}$.	$(arcctg\,u)'=-\dfrac{u'}{u^2+1}$.
10.	$\left(a^x\right)'=a^x\ln a$.	$\left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'$.
11.	$\left(e^x\right)'=e^x$.	$\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$.
12.	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.	$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$.
13.	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$.	$(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$.

$(shx)'=chx$; $(chx)'=shx$; $(thx)'=1/ch^2x$

Рівняння *дотичної* до кривої y(x) в точці

$y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$

Рівняння *нормалі* до кривої y(x) у точці x_0

$$y=y(x_0)-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)$$

Загальна схема дослідження функції і побудова її графіка

Для побудови графіка функції потрібно провести такі дослідження:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти, по можливості, точки перетину графіка функції з осями координат.
3. З'ясувати, чи є функція парною, непарною, періодичною.
4. Дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву, з'ясувати характер розривів і при цьому знайти вертикальні асимптоти.
5. Знайти похилі та горизонтальні асимптоти графіка функції.
6. Знайти точки екстремумів функції та інтервали монотонності функції.
7. Визначити проміжки опуклості та знайти точки перегину графіка функції.
8. За одержаними даними схематично побудувати графік даної функції.

ПРИКЛАДИ

1. Знайти похідну:

a) $y(x)=\dfrac{x^2}{3}$;

b) $y(x)=\dfrac{x^3}{3}+5x$

c) $y(x)= x^2(2x-7)$;

d) $y(x)=\sqrt{x}(5-3x)x$;

e) $y(x)=(x+5)(x-8)$;

f) $y(x)=\dfrac{1+9x}{x+1}$;

g) $y(x)=\dfrac{x^3}{4-x}$.

h) $y(x)=x^3\arcsin x$

Розв'язання.

а) $\left(\dfrac{x^2}{3}\right)'=\dfrac{1}{3}\left(x^2\right)'=\dfrac{2}{3}x$;

б) $\left(\dfrac{x^3}{3}+5x\right)'=\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'+(5x)'=\dfrac{1}{3}(x^3)'+5(x)'=x^2+5$;

в) $(x^2(2x-7))'=(x^2)'(2x-7)+x^2(2x-7)'=2x(2x-7)+$
$+x^2\cdot 2=6x^2-14x$;

г) $(\sqrt{x}(5-3x))'=(\sqrt{x})'(5-3x)+\sqrt{x}(5-3x)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(5-3x)+$
$+\sqrt{x}(-3)=\dfrac{5-3x-6x}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5-9}{2\sqrt{x}}$;

д) $((x+5)(x-8))'=(x+5)'(x-8)+(x-8)'(x+5)=1\cdot(x-8)+$
$+1\cdot(x+5)=2x-3$;

е) $\left(\dfrac{1+9x}{x+1}\right)'=\dfrac{(x+1)(1+9x)'-(1+9x)\cdot 1}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)\cdot 9-(1+9x)\cdot 1}{(x+1)^2}=$
$=\dfrac{8}{(x+1)^2}$;

є) $\left(\dfrac{x^3}{4-x}\right)'=\dfrac{(4-x)(x^3)'-x^3(4-x)'}{(4-x)^2}=\dfrac{(4-x)3x^2-x^3(-1)}{(4-x)^2}=$
$=\dfrac{12x^2-2x^3}{(4-x)^2}$;

ж) $\left(x^3\arcsin x\right)'=3x^2\arcsin x+\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Знайти похідну функцій, що містять змінну величину в основі і показнику степеня, заданих неявно і параметрично :

a) $y=(\sin x)^x$;

b) x = a(t-sin t), y = a(1-cos t);

c) x+y = e^{x-y}.

Розв'язання.

a) Знайдемо ln y = xln sin x, тоді диференціюючи обидві частини рівності, одержимо
y'/y = ln sin x +(xcos x)/sin x.
Тоді y' = $(\sin x)^x$(ln sin x +(xcos x)/sin x);

b) y'_t = a sin t, x'_t = a(1-cos t).Звідси
y'(x)= (a sin t)/(a(1-cos t)) = ctg (t/2), t$\neq 2\pi k$;

c) Диференціюємо дане рівняння по x, вважаючи у функцією від x. $1+y'_x(x)=e^{x-y}(1-y'_x(x))$, звідки $y'_x=(e^{x-y}-1)/(1+e^{x-y})$. Диференціюючи рівняння ще раз, одержимо $y''_x(x)=e^{x-y}(1-y'_x(x))^2-e^{x-y}y''_x(x)$, отже,

$$y''_x(x) = (1 - y'_x)^2 e^{x-y} / (1 + e^{x-y}) = 4e^{x-y} / (1 + e^{x-y})^3$$

3 Дослідити на екстремум функцію

$$f(x) = (x+1)e^{-5x}.$$

Розв'язання.

Функція $f(x) = (x+1)e^{-5x}$ визначена і диференційовна на всій числовій осі. Її похідна

$$f'(x) = e^{-5x} - 5(x+1)e^{-5x} = e^{-5x}(-5x-4)$$

дорівнює нулю при $x = -\frac{4}{5}$. Ця точка розбиває числову пряму на два інтервали знакосталості похідної: $\left(-\infty; -\frac{4}{5}\right)$ та $\left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$.

При $x \in \left(-\infty; -\frac{4}{5}\right)$, $f'(x) > 0$, а при $x \in \left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$, $f'(x) < 0$.

Отже, в точці $x = -\frac{4}{5}$ функція f має локальний максимум. Її значення $f_{\max} = f(-\frac{4}{5}) = \frac{1}{5}e^4$.

4. Дослідити на екстремум функцію

$$f(x) = \frac{1-x^3}{x^2}.$$

Розв'язання.

$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Похідна $f'(x) = \left(\frac{1-x^3}{x^2}\right)' = -\frac{3x^4 - 3x^2\left(x^3+2\right)}{x^3}$. $f'(x) = 0$ при $x = -\sqrt[3]{2}$, яка є критичною точкою. $f'(x) = \infty$ при $x = 0$, але ця точка не є критичною, оскільки в ній функція не визначена.

$$f''(x) = \left(-\frac{x^3+2}{x^3}\right)' = -\frac{3x^5 - 3x^5 - 6x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4};$$

оскільки $f''(-\sqrt[3]{2}) > 0$, то $x = -\sqrt[3]{2}$ – точка мінімуму функції.

$f_{\min} = f(-\sqrt[3]{2}) = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-3}$ на відрізку [–2;2].

Розв'язання.

Дана функція визначена, неперервна та диференційовна в інтервалі (–2;2). Знайдемо похідну та критичні точки:

$f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x-3)^2}$; $(x-3)^2 = (x+3)^2$; $x_0 = 0$ – критична точка.

Знайдемо значення функції в критичній точці і на кінцях відрізка: $f(0) = \frac{2}{3}$, $f(-2) = \frac{6}{5}$, $f(2) = \frac{6}{5}$.

Отже, $\min\limits_{[-2;2]} f(x) = f(0) = \frac{2}{3}$, $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = f(-2) = f(2) = \frac{6}{5}$.

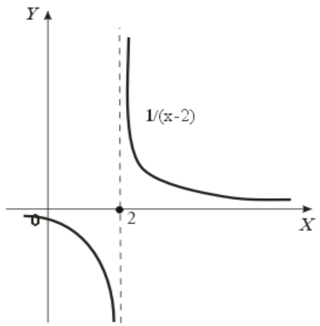
6. Знайти інтервали опуклості і точки перегину графіка функції $y = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x - 12$.

Розв'язання.

Очевидно, що y' та y'' існують для всіх $x \in (-\infty; \infty)$. Знаходимо похідні:

$y' = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 24$, $y'' = 12x^2 + 6x - 36$.

Звідси $y'' = 0$ при $x_1 = -2, x_2 = 3/2$. $y'' > 0$ на інтервалах $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$, тому функція опукла вниз; $y'' < 0$ на інтервалі $\left(-2; \frac{3}{2}\right)$, тому функція опукла вгору. Оскільки під час переходу через точки $x_1 = -2$ та $x_2 = \frac{3}{2}$ друга похідна змінює знак, то точки $(-2;-124)$ і $\left(\frac{3}{2};-\frac{129}{16}\right)$ є точками перегину графіка функції



7. Знайти асимптоту графіка функції $y=\frac{1}{x-2}$.

Розв'язання. Графік функції $y=\frac{1}{x-2}$ має вертикальну асимптоту $x=2$, оскільки $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}=-\infty$ (рис.1).

8. Побудувати графік функції $y=\frac{2x^3}{x^2-4}$.

Розв'язання.

1.Функція визначена і неперервна при всіх $x\in R$, крім точок $x=\pm 2$. Тобто $D(f)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)$. Область значень функції $E(f)=(-\infty;\infty)$.

2.Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат. Якщо $y=0$, $\frac{2x^3}{x^2-4}=0$, то $x=0$. Якщо $x=0$, то $y=0$. Отже $(0;0)$ – єдина точка перетину графіка з осями координат.

3.Функція непарна, бо $y(-x)=-y(x)$ і тому графік функції симетричний відносно початку координат. Таким чином, дослідження достатньо провести на проміжку $[0,\infty)$.

4. Функція неперервна при всіх $x\in R$, крім точок $x=\pm 2$. Оскіль-ки $\lim\limits_{x\to -2-0}\frac{2x^3}{x^2-4}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -2+0}\frac{2x^3}{x^2-4}=+\infty$, то $x=-2$ – двостороння вертикальна асимптота.

Оскільки $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{2x^3}{x^2-4}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{2x^3}{x^2-4}=+\infty$, то $x=2$ – двостороння вертикальна асимптота.

5.Знайдемо похилі асимптоти. $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-4}=2$,

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2-4}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8x}{x^2-4}=0.$

Таким чином, $y=2x$ – права похила асимптота.

Оскільки $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2-4}=2$,

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2-4}-2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8x}{x^2-4}=0,$ то пряма $y=2x$ є також і лівою похилою асимптотою.

6.Для знаходження точок екстремуму функції та інтервалів монотонності знайдемо похідну:

$$y'=\frac{6x^2(x^2-4)-4x^4}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}.$$

Похідна дорівнює нулю в точках x = 0, $x=2\sqrt{3}$ та не існує в точці $x=2$. Зазначимо, що на проміжках $[0;2)$ і $(2;2\sqrt{3})$ $y'<0$ і тому функція спадає, а на інтервалі $(2\sqrt{3};\infty)$ $y'>0$ і тому функція зростає. Очевидно, що точка $x=2\sqrt{3}$ є точкою мінімуму.

7.Для знаходження проміжків опуклості і точок перегину, знайдемо другу похідну: $y''=\frac{16x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$. Похідна y'' дорівнює нулю в точці x=0 і не існує в точці $x=2$. На інтервалі $(0;2)$ $y''<0$ і тому функція опукла вгору, а на інтервалах $(2;2\sqrt{3})$ і $(2\sqrt{3};\infty)$ $y''>0$ і тому функція опукла вниз. Крім того, точка $x = 0$ є точкою перегину, оскільки друга похідна змінює знак при переході через цю точку.

$$y\left(2\sqrt{3}\right) = 6\sqrt{3}, \quad y(0) = 0.$$

8. Використовуючи результати дослідження, будуємо графік функції (рис. 1.16).

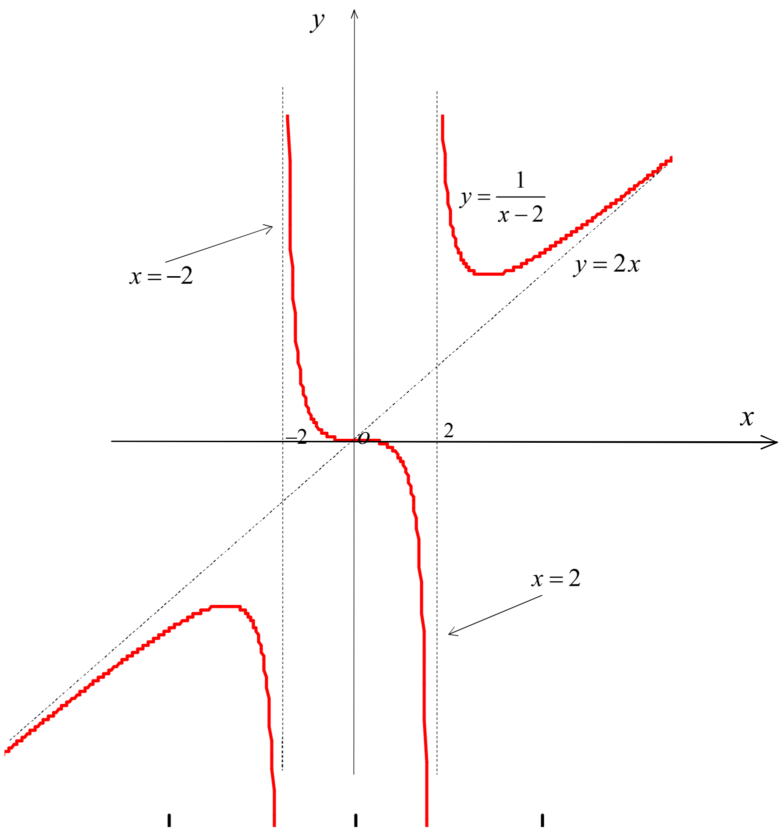


Рис. 2

ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НА ПРАКТИЧНОМУ ЗАНЯТТІ

1. Знайти похідну першого порядку :

а) $y = \sin x + x + 4$

б) $y = 2^x \cos x$

в) $y = \dfrac{1}{1-4x}$

г) $y = \sqrt{4x-7}$

д) $y = tgx^5$

е) $y = (2x^2+1)^{\frac{3}{2}}$

є) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

ж) $y = x^2 e^{-x}$

з) $y = \ln(\dfrac{x^2+1}{x+1})$

2. Знайти диференціали першого порядку :

а) $y = (e^{\sin x} - 1)^2$

б) $y = 3arctgx^2$

3. Знайти похідні першого порядку функції , заданих неявно та параметрично :

а) $y^2 \cdot \sin 2x + tg2y = x^3$

б) $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$

в) $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2}\sin 2t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$

г) $\begin{cases} x = t + \ln\cos t \\ y = 1 - \ln\sin t \end{cases}$

4. Знайти границі функції :

а) $\varphi(x)=\dfrac{x-\sin x}{x^2}, x_0=0$

б) $\varphi(x)=(\dfrac{1}{x})+\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}, x_0=0$

в) $\varphi(x)=\dfrac{x^3}{e^x}, x\to\infty$

5. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої y = φ(x) у т.M_0

а) $y=2x^3-x+1$ в т. $M_0(1;2)$

б) $y=x\cdot e^x$ в т. $M_0(0;0)$

в) $y=arctgx$ в т. $M_0(1;\dfrac{\pi}{4})$

г) $y=\sin 5x$ в т. $M_0(0;0)$

6. Знайти екстремуми функції :

а) $y=2x^3-6x+7$

б) $y=2x^3-9x^2+12x+5$

в) $y=(x^2+3x-4)^3$

7. Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину функції :

а) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$

б) $y=x^4+2x^3-36x^2-x$

8. Дослідити методами диференціального числення функції та побудувати їх графіки :

а) $y=2x^3-12x^2+18x$

б) $y=\dfrac{x^2}{x-2}$

в) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

г) $y=\dfrac{2x+1}{x+3}$

д) $y=x^2(2-x)^2$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

9. Знайти першу похідну наступних функцій :

а) $y=2x^3-5x^2+7x+4$

б) $y=x^2e^x$

в) $y=x^3arctgx$

г) $y=x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)$

д) $y=\dfrac{\arcsin x}{x}$

е) $y=(2x^3+5)^4$

10. Знайти рівняння нормалі і і дотичної до кривої $y=\varphi(x)$ у т.M_0 :

а) $y=2-x^4$ $M_0(1;1)$

б) $y=5+\sqrt[4]{x}$ $M_0(1;6)$

в) $y=5-\sqrt[4]{x}$ $M_0(1;4)$

г) $y=3+2\sqrt{x}$ $M_0(1;5)$

11. Знайти першу похідну від функцій заданих неявно або параметрично :

а) $x^2+y^2-xy=1$

б) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

в) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

г) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = te^{dt} \end{cases}$

12. Дослідити методами диференційованого числення функції та побудувати графіки :

а) $y = \dfrac{1}{x-2}$

б) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

в) $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

г) $y = \dfrac{e^x}{x}$

3. Економічний зміст похідної

Короткі теоретичні відомості

Нехай *y(x)* – функція, що характеризує, наприклад, витрати виробництва, де x – кількість продукції, що випускається. Тоді відношення y(x)/x описує середні витрати, що припадають на одиницю продукції. Середня величина позначається Ay або Af (від англійського "aveRage".)

Середній приріст, середнє нарощування, середня швидкість зміни визначається відношенням $\Delta y / \Delta x$.

У економіці широко використовуються середні величини: вартість продукції, середня продуктивність праці і т.д. Зокрема, середні величини важливі в комерційній діяльності: середній дохід, середній об'єм продажів і т.д. Але при плануванні розвитку виробництва, та і будь-якої підприємницької діяльності, виникає, наприклад, таке завдання: потрібно дізнатися, на скільки збільшиться результат, якщо будуть збільшені витрати, і, навпаки, наскільки зменшиться результат, якщо витрати скоротяться. Тут йдеться про прості зміни величин. У подібних задачах потрібно знайти границю відношення приростів даних величин або *граничну ефективність*. Отже, тут варто застосувати поняття диференціального числення – похідної функції.

! Похідна $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ виражає граничні (маржинальні від англійського "maRginal") витрати виробництва і характеризує наближено *додаткові затрати на виробництво одиниці додаткової продукції*.

Розглянемо, як приклад, економічний зміст *граничного доходу* та *граничних витрат*.

Економічний зміст граничного доходу приблизно дорівнює зміні сумарного доходу при зміні кількості реалізованого товару на одиницю. Наближеність викликана тим, що при такому визначенні дотична до графіка замінюється хордою.

Такий же підхід може бути застосований і до інших економічних понять. Наприклад, якщо відома функціональна залежність витрат C від об'єму продукції Q. $C = f(Q)$, можна визначити *граничні витрати* як $C'_Q = \frac{dC}{dQ} = \frac{d}{dQ} f(Q)$.

Економічний зміст цієї формули такий: граничні витрати приблизно дорівнюють зміні повних витрат при зміні випуску на одиницю. Пояснення такої наближеності залишається у силі.

! *В свою чергу, похідна від обсягу продукції* $U'(t_0)$ *виражає продуктивність праці* $P(t)$ *в момент часу* t_0.

Означення. Відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x - y}$ називається *темпом* приросту функції y.

Відношення $\frac{y'(x)}{y(x)}$ називається миттєвим темпом приросту.

Означення. Еластичністю функції $E_x(y)$ називається величина

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x = (x / y) \cdot y'.$$

Означення. Говоритимемо, що *y(x)* еластична в точці *x*, якщо $|E_x(y)| > 1$, *y(x)* нееластична, якщо $|E_x(y)| < 1$, і нейтральна, якщо $|E_x(y)| = 1$.

Еластичність $|E_x(y)|$ показує наближено, на скільки відсотків зміниться значення функції *y(x)* у разі зміни незалежної змінної *x* на 1%.

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Залежність між витратами виробництва *y* і обсягом продукції *x,* що випускається, визначається функцією $y = 50x - 0{,}05x^3$ (грош. од.). Визначити середні та граничні витрати за умови, що обсяг продукції 10 одиниць.

Розв'язання: Функція середніх витрат (на одиницю продукції) виражається відношенням $y_{сер} = \frac{y}{x} = 50 - 0{,}05x^2$; при x = 10 середні витрати (на одиницю продукції) дорівнюють $y_{сер} = (10) = 50 - 0{,}05 \cdot 10^2 = 45$ (грош. од.). Функція граничних витрат виражається похідною $y'(x) = 50 - 0{,}15x^2$; при x = 10 граничні витрати складають $y'(10) = 50 - 0{,}15 \cdot 10^2 = 35$ (грош. од.). Отже, якщо середні витрати на виробництво одиниці продукції складають 45 грош. од., то граничні витрати, тобто додаткові затрати на виробництво додаткової одиниці продукції за умови даного рівня виробництва (обсягу продукції, що випускається 10 од.), складають 35 грош. од.

Приклад 2. Обсяг продукції фірми, виробленої протягом робочого дня, представляє функцію $U(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 5t$, де t - час (*год*). Знайти продуктивність праці через 4 години після початку роботи.

Розв'язання.

Продуктивність праці в момент часу t є похідна від обсягу продукції: $P(t) = U'(t)$.

$$P(t) = U'(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 5t\right)' = 2t^2 + 5t + 5.$$

Знайдемо продуктивність праці для $t = 4$*год.* $P(4) = 2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 + 5 = 57$*(од.)*. Отже через 4 *год.* фірма буде виробляти 57 одиниць продукції за 1 год.

Приклад 3. Нехай відомі функції попиту $d=7-p$ і функція пропозиції $s = p + 1$, де p - ціна. Потрібно знайти рівноважну ціну і еластичність попиту і пропозиції.

Розв'язання. Рівноважна ціна визначається з умови $d = s$, тому $7 - p = p + 1$, звідки $p = 3$. Знайдемо еластичність попиту і пропозиції

$$E_p(d) = p/(p-7), \quad E_p(s) = p/(p+1.)$$

Для рівноважної ціни $p=3$ одержимо $E_p(d) = -0,75$, $E_p(s) = 0,75$ Для значення $p = 3$ попит є нееластичним, також як і функція пропозиції.

Приклад 4. Залежність між собівартістю одиниці продукції y *(тис. грош. од.)* та випуском продукції x *(млрд. грош, од.)* виражається функцією $y=-0,5x+80$. Знайти еластичність собівартості за умови випуску продукції в розмірі 60 млрд. грош. од.

Розв'язання: Еластичність собівартості

$$E_x(y) = \frac{-0,5x}{-0,5x+80} = \frac{x}{x-160}.$$

При $x = 60$ $E_{x=60}(y) = -0,6$, тобто при виробництві продукції в розмірі 60 *млн. грош. од.*, збільшення її на 1% викличе зменшення собівартості на 0,6%.

Приклад 5. За допомогою спеціального дослідження були встановлені функції попиту $q = \dfrac{p+8}{p+2}$ та пропозиції $s = p + 0,5$, де q та s — кількість товарів, відповідно що купується і пропонується для продажу за одиницю часу, p — ціна товару. Знайти: а) рівноважну ціну, тобто ціну, за якої

попит та пропозиція врівноважуються; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну доходу при збільшенні ціни на 5% від рівноважної.

Розв'язання: а) Рівноважна ціна визначається з умови $q = s$, $\dfrac{p+8}{p+2} = p + 0,5$, звідки $p = 2$, тобто рівноважна ціна дорівнює 2 (грош. од.)

б) Знайдемо еластичності попиту та пропозиції:

$$E_p(q) = \frac{P}{q} \cdot q_p{}' = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)}; \; E_p(s) = \frac{P}{s} \cdot s_p{}' = \frac{2p}{2p+1}$$

Для рівноважної ціни $p = 2$ маємо $E_{p=2}(q) = -0,3$, $E_{p=2}(s) = 0,8$.

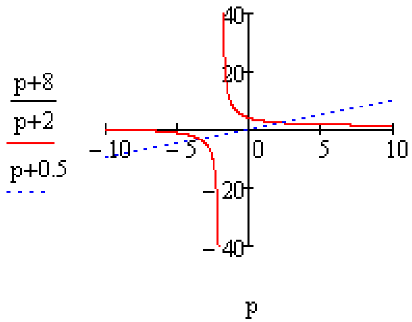
Оскільки отримані значення еластичності за абсолютною величиною менші 1, то попит і пропозиція даного товару за рівноважної (ринкової) ціни нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту та пропозиції. Так, при збільшенні ціни p на 1% попит зменшиться на 0,3%, а пропозиція збільшиться на 0,8%.

в) При збільшенні ціни p на 5% від рівноважної попит зменшиться на $5 \cdot 0,3$=1,5%, тобто прибуток зросте на

$$\left(1+\frac{5}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{1,5}{100}\right) = 1 + \frac{5}{100} - \frac{1,5}{100} - 4,5 \cdot 10^{-4},$$

тобто приблизно на 3,5%.

Побудуємо графіки функцій попиту та пропозиції



$$q(p) := \frac{p+8}{p+2}$$

$$s(p) := p + 0.5$$

Скориставшись функцією solve, знайдемо розв'язок рівняння

$$\frac{p+8}{p+2} - (p+0.5) \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} -3.5 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

Знайдемо еластичність попиту: $E(q,p) := \frac{p}{q(p)} \cdot \left(\frac{d}{dp} q(p)\right)$

$$E(q,p) \rightarrow -\frac{p \cdot (p+2) \cdot \left[\frac{p+8}{(p+2)^2} - \frac{1}{p+2}\right]}{p+8} \text{ simplify } \rightarrow \frac{2}{p+2} - \frac{8}{p+8}$$

Аналогічно знаходимо еластичність пропозиції:

$$E(s,p) := \frac{p}{s(p)} \cdot \left(\frac{d}{dp} s(p)\right) \rightarrow \frac{p \cdot \frac{d}{dp} s(p)}{s(p)}$$

$$E(s,p) \rightarrow \frac{p}{p+0.5}$$

Знайдемо еластичність попиту та пропозиції для рівноважної ціни p=2:

$$p := 2 \qquad \frac{2}{p+2} - \frac{8}{p+8} = -0.3 \qquad \frac{p}{p+0.5} = 0.8$$

Приклад розрахунків та візуалізація даних в середовищі Mathcad

ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НА ПРАКТИЧНОМУ ЗАНЯТТІ

1. Залежність між витратами виробництва y і обсягом продукції x, що випускається, визначається функцією $y(x)$ (*грош. од.)*. Визначити середні та граничні витрати за умови, що обсяг продукції q одиниць.

1. $y(x) = 25x - 0,4x^5$, $q = 15$
2. $y(x) = 5x^3 - 1,2x^5$, $q = 100$
3. $y(x) = 34x - 1,7x^3$, $q = 300$
4. $y(x) = 2x^4 - 500x^3$, $q = 1000$
5. $y(x) = \dfrac{2x^3 - 5x}{\sqrt{x-2}}$, $q = 102$
6. $y(x) = \sqrt{\ln(5x-3)}$, $q = 5$

2. Обсяг продукції цеху протягом робочого дня представляє функцію $U(t) = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425$ де t - час (*год*). Знайти продуктивність праці через 2 години після початку роботи. (*43 од. прод./год*.)

3. Відомі функції попиту *Q=Q(p)* і пропозиції *S=S(p)*. Знайти :

a) Рівноважну ціну;
b) Еластичність попиту для рівноважної ціни;
c) Еластичність пропозиції для рівноважної ціни;
d) Зміну загального доходу при збільшенні загальної ціни на 2%.

1. $Q = \dfrac{3,1}{p+0,4}; S = 0,1p^3 + 0,3$
2. $Q = \dfrac{22}{p^2+2,5}; S = 0,5p^3 + 4,7$

3. $Q=\dfrac{10}{p+3};S=0{,}1p^3+1{,}2$ 4. $Q=\dfrac{2{,}5}{p^2+1};S=p^3+0{,}25$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

4. Залежність між витратами виробництва *у* і обсягом продукції *х,* кондитерського цеху, визначається функцією *у = 50х - 5х³ (грош. од.)*. Визначити середні та граничні витрати за умови, що обсяг продукції 3 одиниці.

5. Обсяг продукції пекарні протягом робочого дня представляє функцію $U(t)=-2t^3-4t^2+35t+5$ де t - час (*год*). Знайти продуктивність праці через 4 години після початку роботи.

6. Відомі функції попиту Q=Q(p) і пропозиції S=S(p). Знайти :

1. Рівноважну ціну;
2. Еластичність попиту для рівноважної ціни;
3. Еластичність пропозиції для рівноважної ціни;
4. Зміну загального доходу при збільшенні загальної ціни на 2%.

1 $Q=\dfrac{2{,}9}{p+0{,}35};S=0{,}12p^3+0{,}43$ **2** $Q=\dfrac{21}{p^2+3{,}1};S=0{,}4p^3+3{,}9$

3 $Q=\dfrac{11{,}2}{p+4};S=0{,}2p^3+0{,}92$ **4** $Q=\dfrac{3}{p^2+4};S=p^3+0{,}31$

4. Застосування екстремумів в економіці

Оптимізація

Термін «оптимізація» має дуже широке використання, а тому може залежати від контексту. У цьому параграфі *оптимізація* розумітиметься як процес знаходження екстремуму (максимуму або мінімуму) економічних функцій, тобто вибір якнайкращого варіанту з безлічі можливих.

Оскільки оптимізація в значній мірі зводиться до відшукання максимумів і мінімумів функцій, почнемо з двох досить простих, але характерних прикладів, де для більшої наочності параметрам надані конкретні числові значення.

Нехай в короткостроковому плані виробнича функція залежить тільки від чисельності персоналу фірми і має вигляд: $Q=f(L)=-0{,}01L^3+15L^2$, де Q – випуск продукції, а L – кількість співробітників. Потрібно визначити чисельність персоналу, при якій випуск Q досягає максимального значення.

Перш за все, знаходимо стаціонарні точки, для чого обчислюємо похідну і прирівнюємо її до нуля:

$f'(L)=\dfrac{dQ}{dL}=-0{,}03L^2+30L=0$. Розв'язуючи квадратне рівняння, знаходимо: $L=0$, $L=1000$.

Обчислюємо другу похідну:

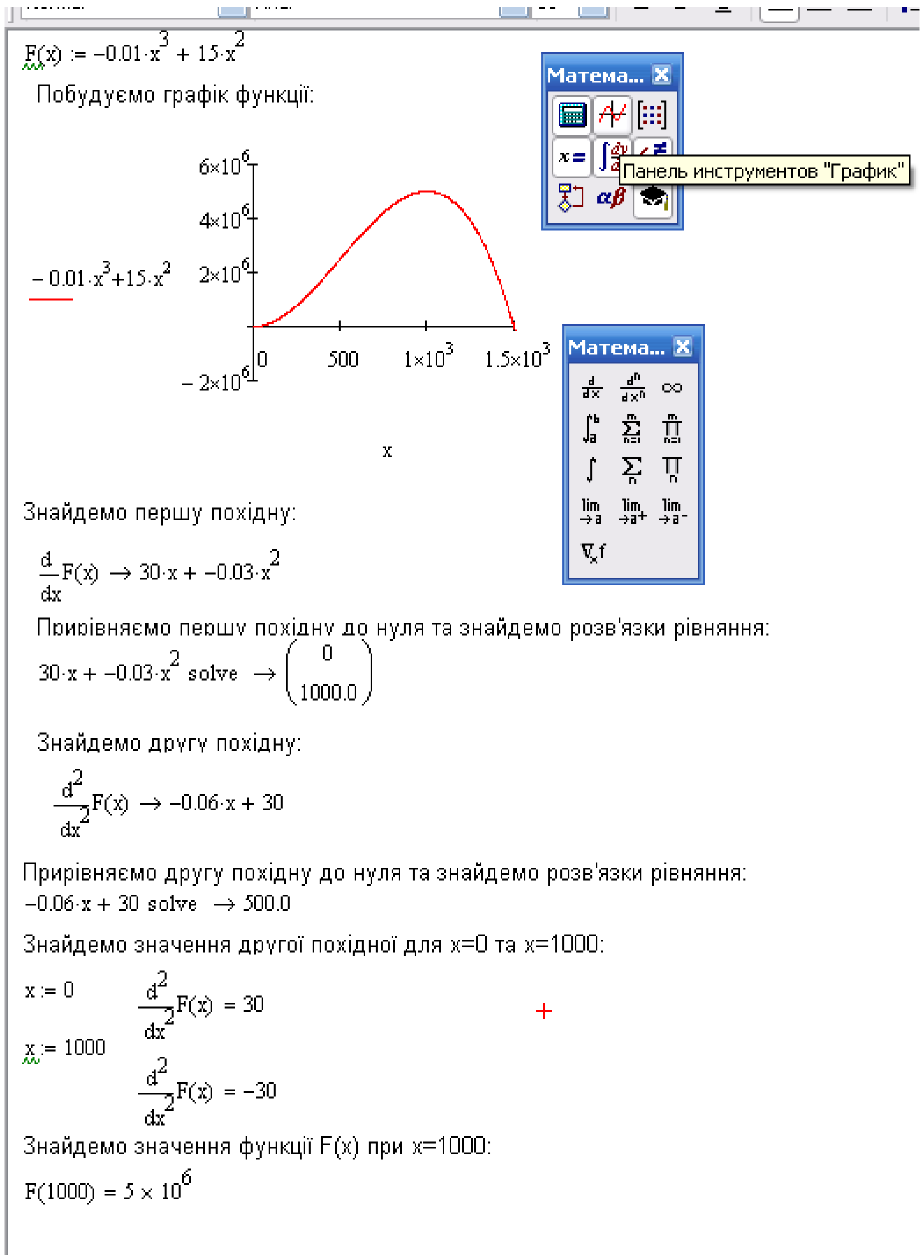
$f''(L)=\dfrac{d^2Q}{dL^2}=-0{,}06L+30$. При $L=0$ маємо $f''(0)=30>0$.

Звідси можна зробити висновок, що в цій точці є мінімум. Це природно: важко чекати випуску якоїсь продукції, якщо немає жодного співробітника.

Для другої точки: $f''(1000)=-60<0$.

Тому в цій точці максимум. Відповідний випуск продукції $Q=f(1000)=-0{,}01\cdot1000^3+15\cdot1000^2=5\cdot10^6$.

На рис. наведено приклад розрахунків та візуалізація даних в середовищі Mathcad.



Приклад розрахунків та візуалізація даних в середовищі Mathcad

Далеко не завжди задана схема знаходження екстремуму вирішує задачу оптимізації. В більшості випадків побудова такої схеми є частиною завдання. Наступний приклад розтлумачує сказане.

Припустимо, що для деякого товару криві попиту і пропозиції мають відповідно вигляд: $P = 20 - 4Q_D$, $P = 2 + 2Q_S$, де Q_D – кількість товару, що відноситься до попиту, а Q_S – до пропозиції. Кожна одиниця товару обкладається податком t. Питається, яку величину податку слід встановити, щоб надходження в скарбницю були максимальні.

Інтуїтивно ясно: дуже великий податок може «погасити» будь-яку економічну діяльність. Недоліки дуже маленького податку очевидні.

Для того, щоб врахувати податки, достатньо в рівнянні, що визначає пропозицію, замінити ціну P на $P - t$, оскільки саме цю суму реально одержує виробник. Отже, можна переписати рівняння у вигляді: $P - t = 2 + 2Q_S$ або $P = 2 + 2Q_S + t$. Враховуючи, що в точці рівноваги $Q_S = Q_D = Q$, тобто попит дорівнює пропозиції, одержуємо систему рівнянь: $\begin{cases} P = 2 + 2Q_S + t \\ P = 20 - 4Q \end{cases}$

Оскільки ліві частини рівнянь однакові, можна прирівняти праві частини: $2 + 2Q_S + t = 20 - 4Q$, що після спрощень дає: $Q = 3 - \frac{1}{6}t$.

Згадуючи, що t – це податок на одиницю товару, для сумарного надходження податку T від продажу товару Q маємо: $T = tQ = t\left(3 - \frac{1}{6}t\right)$.

Це і є та функція, точка максимуму якої дає вирішення поставленої задачі.

Знаходимо стаціонарні точки

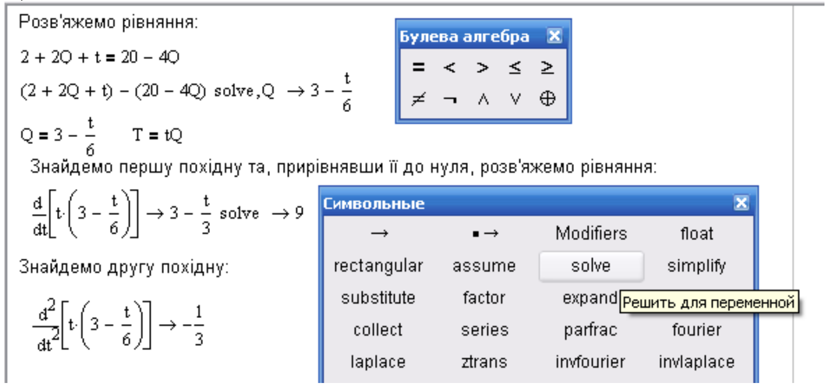
$$\frac{dT}{dt}=\frac{d}{dt}\left(3t-\frac{1}{6}t^2\right)=3-\frac{1}{3}t, \text{ звідки } t=9.$$

В даному випадку стаціонарна точка тільки одна. Перевіряємо знак другої похідної в цій точці:

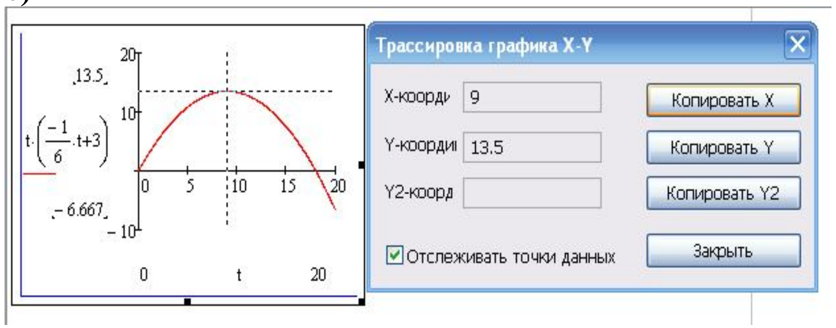
$$\frac{d^2T}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(3-\frac{1}{3}t\right)=-\frac{1}{3}<0.$$

Як і слід було чекати, має місце максимум. Таким чином, оптимальна (з точкою зору уряду) величина податку складає 9 ум.од. на одиницю товару. На рисунках наведено приклади розрахунків та візуалізація даних в середовищі Mathcad.

а)



б)



Приклад розрахунків та візуалізація даних в середовищі Mathcad

Максимізація прибутку

Нехай q – кількість реалізованого товару, $Z(q)$ – функція ціни від кількості товару, $R(q)$ – функція доходу (валовий прибуток), $C(q)$ – функція витрат на виробництво товару, $P(q)$ – прибуток від реалізації товару.

Тоді $R(q)=Z(q)\cdot q$, а прибуток від реалізації товару дорівнює $P(q)=R(q)-C(q)$.

Щоб максимізувати прибуток потрібно знайти максимум функції $P(q)$.

Приклад 1. Нехай $R(q)=100q-q^2$, $C(q)=q^3-37q^2+169q+4000$. Знайти значення q що максимізувало функцію $P(q)$.

Розв'язання. Прибуток визначається формулою

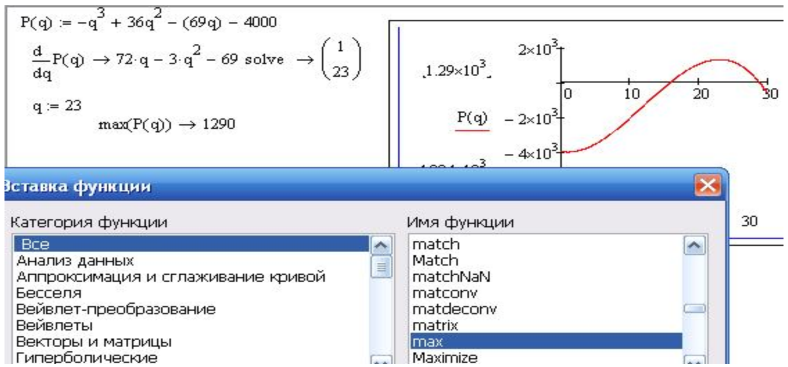
$$P(q)=R(q)-C(q)=Z(q)\cdot q-C(q)$$

$$P(q)=-q^3+36q^2-69q-4000.\ P'(q)=-3q^2+72q-69=0,$$

або $q^2-24q+23=0$. Корені рівняння: $q_1=1$, $q_2=23$.

$P''(q)=-6q+72$, $P''(1)=66$, $P''(23)=-66<0$. Отже, при $q=23$, $P_{\max}=1290$.

На рисунках наведено приклади розрахунків та візуалізація даних в середовищі Mathcad.



Приклад розрахунків та візуалізація даних в середовищі Mathcad

Приклад 2. Залежність вират дякого виробництва від обсягу продукції q, що випускається, записується у вигляді $C(q)=\frac{1}{2}q^2$, функція попиту від ціни має вигляд $Q(z)=40-2z$. Визначити обсяг продукції, що відповідає максимальному прибутку.

Розв'язання. З функції попиту $Q(z)=40-2z$ виразимо залежність ціни від обсягу продукції q: $Z(q)=20-\frac{1}{2}q$.

Прибуток $P(q)=R(q)-C(q)=Z(q)\cdot q-C(q)$. Отже,

$$P(q)=\left(20-\frac{1}{2}q\right)q-\frac{1}{2}q^2=20q-\frac{1}{2}q^2-\frac{1}{2}q^2=20q-q^2,$$

$P'(q)=20-2q=0$, $q=10$ - оптимальний об'єм виробництва. Відповідно ціна: $Z(10)=20-5=15$ *(гр.од.).*

Приклад 3. Знайти оптимальний обсяг виробництва продукції кондитьерського цеху, функція прибутку якого задана таким чином: $P(q)=R(q)-C(q)=q^2-8q+10$

Розв'язання: Знайдемо похідну даної функції:

$$P'(q)=R'(q)-C'(q)=\left(q^2-8q+10\right)'=2q-8.$$

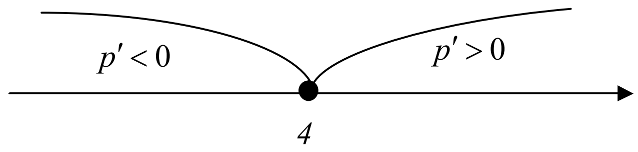
Прирівняємо похідну до нуля і знайдемо точку екстремуму:

$2q-8=0$; $q=4$ - точка екстремуму.

Чи є обсяг випуску, що дорівнює чотирьом одиницям продукції, оптимальним для фірми?

Щоб відповісти на це питання, треба проаналізувати характер зміни знака похідної при переході через точку екстремуму $q=4$.

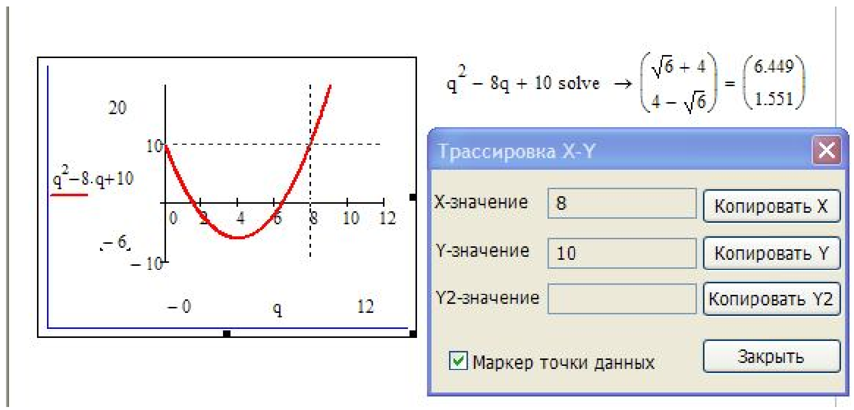
$$P'(0)=2\cdot 0-8=-8<0;\quad P'(5)=2\cdot 5-8=2>0.$$



Як бачимо, при переході через точку екстремуму похідна змінює свій знак з мінуса на плюс. Отже, в точці екстремуму прибуток приймає мінімальне значення, і таким чином, цей обсяг виробництва не є оптимальним для фірми.

Яким же все-таки буде оптимальний обсяг випуску для даної фірми? Відповідь на це питання залежить від додаткового дослідження виробничих можливостей фірми.

На рисунках наведено приклади розрахунків та візуалізація даних в середовищі Mathcad.



Приклад розрахунків та візуалізація даних в середовищі Mathcad

Якщо фірма не може виробляти за аналізований період більше 8 одиниць продукції $P(q)=P(8)=P(0)=10$, то оптимальним рішенням для фірми буде взагалі нічого не робити, а отримувати дохід від здачі в оренду приміщень і / або обладнання.

Якщо ж фірма здатна виробляти за аналізований період більше *8* одиниць продукції, то оптимальним рішенням для фірми буде випуск на межі своїх виробничих можливостей.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НА ПРАКТИЧНОМУ ЗАНЯТТІ

1. Знайти оптимальний обсяг *(тис. од)* виробництва продукції цеху напівфабрикатів, функція прибутку якого має вигляд: $P(q) = -0,5q^2 + 5,5q + 37,5$. *(1 тис. од.)*

2. Залежність витрат дякого виробництва від обсягу продукції q, що випускається, записується у вигляді $C(Q)$, функція попиту від ціни має вигляд $Q(z)$. Визначити обсяг продукції, що відповідає максимальному прибутку.

1. $C = Q^2 - 100Q + 16000;$ $Q = 400 - Z$
2. $C = 2Q^3 - 700Q^2 + 41000Q + 1700;$ $Q = 600 - Z$
3. $C = 0,01Q^2 + 17Q + 900;$ $Q = 900 - Z$
4. $C = 2Q^2 - 700Q + 25000;$ $Q = 600 - Z$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

3. Знайти оптимальний обсяг *(сот. од.)* виробництва продукції ресторану, функція прибутку якого має вигляд: $P(q) = -q^2 + 32q + 7$.

4. Залежність витрат дякого виробництва від обсягу продукції q, що випускається, записується у вигляді $C(Q)$,

функція попиту від ціни має вигляд $Q(z)$. Визначити обсяг продукції, що відповідає максимальному прибутку.

1. $C = Q^2 - 200Q + 13000;$ $Q = 350 - Z$
2. $C = 3Q^3 - 560Q^2 + 37000Q + 2100;$ $Q = 550 - Z$
3. $C = 0,04Q^2 + 13Q + 800;$ $Q = 700 - Z$
4. $C = 3Q^2 - 500Q + 34000;$ $Q = 580 - Z$

5. Індивідуальне завданн №1

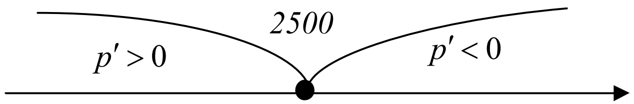
Зразок виконання

Підприємство виробляє q одиниць продукції за ціною $Z(q)=500-0,005q$, а витрати на виробництво q одиниць товару складають $C(q)=150000+100q+0,003q^2$. Розрахувати прибуток P, визначити його максимальне значення.

Розв'язання. Валовий прибуток знаходимо за формулою: $R(q)=Z(q)\cdot q=500q-0,005q^2$;

Тоді прибуток від реалізації q одиниць товару дорівнює: $P(q)=500q-0,005q^2-150000-100q-0,003q^2$.
$P(q)=-0,008q^2+400q-150000$.

Визначимо максимальний прибуток: $P'(q)=-0,016q+400=0$; $q=2500$.



Отже, при виробництві *q=2500* одиниць продукції прибуток досягає максимального значення, а саме $P(25000)=4850000$ *гр.од.*

Підприємство виробляє *q* одиниць продукції за ціною $Z(q)$, а витрати на виробництво *q* одиниць товару складають $C(q)$. Розрахувати прибуток *P*, визначити його максимальне значення.

1.	$Z(q)=400-0,003q$, $C(q)=10000+200q+0,02q^2$
2.	$Z(q)=151-0,17q$, $C(q)=16064+109q+0,071q^2$
3.	$Z(q)=405-0,527q$, $C(q)=10063+241q+0,31q^2$
4.	$Z(q)=710-0,071q$, $C(q)=16200+340q+0,07q^2$

5.	$Z(q)=350-0,003q$, $C(q)=14000+300q+0,02q^2$
6.	$Z(q)=451-0,18q$, $C(q)=13471+109q+0,071q^2$
7.	$Z(q)=243-0,521q$, $C(q)=10123+261q+0,01q^2$
8.	$Z(q)=210-0,081q$, $C(q)=13220+240q+0,04q^2$
9.	$Z(q)=120-0,004q$, $C(q)=13200+300q+0,02q^2$
10.	$Z(q)=415-0,527q$, $C(q)=10063+241q+0,31q^2$
11.	$Z(q)=361-0,025q$, $C(q)=16200+340q+0,25q^2$
12.	$Z(q)=230-0,36q$, $C(q)=11000+450q+0,013q^2$
13.	$Z(q)=410-0,081q$, $C(q)=13220+240q+0,04q^2$
14.	$Z(q)=120-0,041q$, $C(q)=13200+300q+0,02q^2$
15.	$Z(q)=415-0,527q$, $C(q)=12000+26q+0,31q^2$
16.	$Z(q)=551-0,020q$, $C(q)=16200+340q+0,25q^2$
17.	$Z(q)=230-0,36q$, $C(q)=11000+450q+0,013q^2$
18.	$Z(q)=430-0,36q$, $C(q)=11000+450q+0,013q^2$
19.	$Z(q)=410-0,081q$, $C(q)=10000+240q+0,04q^2$
20.	$Z(q)=600-0,041q$, $C(q)=13200+300q+0,02q^2$
21.	$Z(q)=415-0,527q$, $C(q)=20100+20q+0,3q^2$
22.	$Z(q)=12500-0,505q$, $C(q)=16200+340q+0,25q^2$
23.	$Z(q)=100-0,50q$, $C(q)=11000+450q+0,013q^2$
24.	$Z(q)=900-0,540q$, $C(q)=1486+284q+0,42q^2$
25.	$Z(q)=14000-0,09q$, $C(q)=6000+250q+0,27q^2$
26.	$Z(q)=3000-0,4q$, $C(q)=54200+360q+0,24q^2$
27.	$Z(q)=780-0,31q$, $C(q)=1486+284q+0,42q^2$
28.	$Z(q)=690-0,061q$, $C(q)=13200+300q+0,02q^2$
29.	$Z(q)=325-0,251q$, $C(q)=20900+130q+0,16q^2$
30.	$Z(q)=620-0,059q$, $C(q)=12500+350q+0,05q^2$

6. Інтегральне числення. Неозначений інтеграл

Короткі теоретичні відомості

Інтегрування методом внесення функції під знак диференціала

$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \int f(u)du$, де $u=\varphi(x)$.

Інтегрування методом заміни змінної (методом підстановки)

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int \tilde{f}(t)dt, \text{ де}$$

$$x=\varphi(t), \quad dx=\varphi'(t)dt, \quad t=\varphi^{-1}(x)$$

Інтегрування частинами в неозначеному інтегралі.

Якщо функції $U=U(x)$ і $V=V(x)$ диференційовані на деякому інтервалі X, то $\int UdV = UV - \int VdU$ (1)

Формулу застосовують до інтегралів вигляду:

1. $\int P_n(x)\sin axdx$, $\int P_n(x)\cos axdx$ і, $\int P_n(x)e^{ax}dx$ де $p_n(x)$ – многочлен від x степеня n. При обчисленні інтегралів такого вигляду вважають $U=P_n(x)$.
2. $\int P_n(x)\ln axdx$, $\int P_n(x)\arcsin axdx$ $\int P_n(x)arctgaxdx$, де $P_n(x)$ – многочлен від x степеня n, зокрема, можливо $P_n(x)\equiv 1$.

При обчисленні інтегралів такого вигляду за U приймають функції $\ln ax$, $\arcsin ax$, $arctgax$.

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $(n\neq -1)$.

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|+C$.

3. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}+C = -\dfrac{1}{a}arcctg\dfrac{x}{a}+C_1$, $(a\neq 0)$.

4. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$, $(a\neq 0)$.

$\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|+C$, $(a\neq 0)$.

6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$, $(a\neq 0)$.

7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a}+C = -\arccos\dfrac{x}{a}+C_1$, $(a>0)$.

8. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C$, $(a>0)$; $\int e^x dx = e^x + C$.

9. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

10. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

11 $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$.

12 $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$.

13 $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + C$.

14 $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

ПРИКЛАДИ

1. Знайти неозначені інтеграли, скориставшись метолом безпосереднього інтегрування:

a) $\int x^3 dx$;

b) $\int 3^x dx$;

c) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;

d) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання.

a) Застосовуємо формулу 1(таблиця інтегралів), де $\alpha = 3$. Отримуємо: $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$ **;**

b) Використовуючи формулу 8, де *a*=3*,* отримаємо: $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$;

c) Підінтегральна функція – це дріб $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Запишемо її у вигляді степеневої функції, а саме $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$. Потім використовуємо формулу 1, при $\alpha = -\frac{1}{3}$. Отримуємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-1/3+1} + C = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C;$$

d) У підінтегральній функції поділимо почленно чисельник на знаменник. Отримуємо:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3\right)dx =$$

$$= \int\left(x^{1/6} + \frac{2}{x^{1/2}} - 3\right)dx = \int x^{1/6}dx + \int \frac{2}{x^{1/2}}dx - 3\int dx =$$

$$= \frac{x^{1+1/6}}{1+1/6} + 2\frac{x^{1-1/2}}{1-1/2} - 3x = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 4\sqrt{x} - 3x + C.$$

2. Знайти неозначені інтеграли, скориставшись методом внесення функції під знак диференціала:

a) $\int \psi(\sin)\cos x dx$;

b) $\int \frac{\psi(src \sin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Розв'язання.

a) $\int \psi(\sin)\cos x dx = \int \psi(\sin) d\sin x$;

$$\int \frac{\psi(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \psi(\arcsin x) d \arcsin x.$$

3. Знайти неозначені інтеграли, скориставшись методом заміни змінної (методом підстановки)**:**

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

b) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

c) $\int \frac{\sin^3 x dx}{2+\cos x}$.

Розв'язання.

а) Покладемо $x=\frac{1}{t}$, тоді $dx=-\frac{dt}{t^2}$.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\arcsin t+C=$$

$$=-\arcsin\frac{1}{x}+C$$

На останньому кроці використано рівність, яка, очевидно, виходить з рівності $x=\frac{1}{t}$;

b) Вказівка. Покладемо $\sqrt{x}=t$, тоді $x=t^2$.
Отже, перейдемо в даному інтегралі до змінної t;

c) використовуємо підстановку $t=\cos x$. При цьому $dt=-\sin xdx$. Тоді

$$\int\frac{\sin^3 xdx}{2+\cos x}=\int\frac{\sin^2 x\cdot\sin x\cdot dx}{2+\cos x}=\int\frac{\left(1-\cos^2 x\right)\sin x}{2+\cos x}dx=-\int\frac{1-t^2}{2+t}dt=$$

$$=\int\frac{t^2-1}{t+2}dt=\int\frac{t^2-4+3}{t+2}dt=\int\left(t-2+\frac{3}{t+2}\right)dt=\frac{t^2}{2}-2t+ .$$

$$+3\ln(t+2)=\frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+3\ln(\cos x+2)+C$$

4. Знайти неозначені інтеграли, скориставшись методом інтегрування частинами:

а) $\int x\sin 3xdx$;

b) $\int e^x\sin xdx$.

Розв'язання.

а) Візьмемо даний інтеграл, поклавши $U=x$, $dV=\sin 3xdx$, тоді $dU=dx$, $I=-e^x\cos x+\int e^x\cos xdx$,

тоді $$\int x\sin 3xdx=-\frac{1}{3}x\cos 3x-\int\left(-\frac{1}{3}\right)\cos 3xdx=-\frac{1}{3}x\cos 3x+$$;
$$+\frac{1}{3}\int\cos 3xdx=-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$$

b) Позначимо шуканий інтеграл через I і застосуємо формулу інтегрування частинами, вважаючи $u=e^x$, $dv=\sin xdx$. Тоді $du=e^xdx$, $v=-\cos x$ і $I=-e^x\cos x+\int e^x\cos xdx.$ Останній інтеграл знову візьмемо частинами, вважаючи $u=e^x$, $dv=\cos xdx$. Тоді $du=e^xdx$, $v=\sin x$ і $I=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin xdx=-e^x\cos x+e^x\sin x-I$ Розглядаючи цю рівність, як рівняння відносно I, отримаємо $I=\frac{1}{2}\left(-e^x\cos x+e^x\sin x\right)+C$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НА ПРАКТИЧНОМУ ЗАНЯТТІ

5. Використавши метод безпосереднього інтегрування, знайти:

1. $\int\left(3x^{3/2}+5\cdot 2^x-\frac{7}{x}\right)dx$
2. $\int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}dx$
3. $\int\left(2x^3-5x^2-7\cos x-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$
4. $\int\left(\frac{1}{x}-3\sqrt[3]{x}\right)dx$
5. $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx$
6. $\int\frac{1}{\sqrt{7-x^2}}dx$

7. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$ 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$

9. $\int ctg^2 x dx$ 10. $\int \frac{x^5}{x^2+3} dx$

6. Скориставшись методом внесення функції під знак диференціала, знайти:

1. $\int x^3 e^{x^4} dx$ 2. $\int \cos x e^{\sin x} dx$

3. $\int \sin(5x+4) dx$ 4. $\int \frac{1}{7-x} dx$

5. $\int x \cos(x^2) dx$ 6. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$

7. $\int \sqrt{x+4} dx$ 8. $\int e^{-x/2} dx$

9. $\int \frac{dx}{1+2x^2}$ 10. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-3x^3}}$

7. Скориставшись методом заміни змінної, знайти інтеграл:

1. $\int (2x+1)^{20} dx$ 2. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}} dx$

3. $\int \sqrt{\cos x} \sin x dx$ 4. $\int \ln^2 x \frac{dx}{x}$

5. $\int tgx dx$ 6. $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$

7. $\int \frac{\ln x dx}{x+\sqrt{1+\ln x}}$ 8. $\int \frac{e^{6x}}{e^{3x}+2} dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x+2} dx}{1-\sqrt{x+2}}$ 10. $\int \frac{\ln x \sqrt{1-\ln x}}{x} dx$

8. Скориставшись методом інтегрування частинами, знайти інтеграли:

1. $\int (x+3) \sin x dx$ 2. $\int e^{-x} 2x dx$

3. $\int arctgx dx$ 4. $\int (2-3x) 2^{-5x} dx$

5. $\int x^3 \ln x dx$ 6. $\int (4x-1) e^{5x} dx$

7. $\int x arctgx dx$ 8. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

9. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$ 10. $\int arcctg \frac{x}{2} dx$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

9. Використавши метод безпосереднього інтегрування, знайти:

1. $\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{3\sqrt{x}} + x\sqrt[5]{x} \right) dx$ 2. $\int (3x^4 - 2\sin x + 6\sqrt{x}) dx$

3. $\int 2x^5 dx$ 4. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

5. $\int \frac{3-4\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$ 6. $\int \frac{1}{x^2-25} dx$

7. $\int \frac{dx}{10+x^2}$ 8. $\int \frac{dx}{7-x^2}$

9. $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ 10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

10. Скориставшись методом внесення функції під знак диференціала, знайти:

1. $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 2. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx$

3. $\int (2-3x)^{100} dx$ 4. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$

5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$	6. $\int \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$
7. $\int \frac{1}{4-9x}dx$	8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+5x^2}}$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{7x-1}}$	10. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}dx$

11. Скориставшись методом заміни змінної, знайти інтеграл:

1. $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+8}$	2. $\int \cos x \sin^3 x dx$
3. $\int \frac{xdx}{1+x^2}$	4. $\int \frac{2xdx}{1+x^4}$
5. $\int \frac{e^{3x}dx}{1-e^x}$	6. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{7-4x^2}}$
7. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{3x-1}}$	8. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+2}}$
9. $\int \frac{e^{2x}}{5-e^x}dx$	10. $\int \frac{(x+1)}{x(1+xe^x)}dx$

12. Скориставшись методом інтегрування частинами, знайти інтеграли:

1. $\int x^2 \ln x dx$	2. $\int x \cdot 2^x dx$
3. $\int \arcsin x dx$	4. $\int \ln x dx$
5. $\int (2x+1)\sin x dx$	6. $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 2x}dx$
7. $\int \ln(x^2+1)dx$	8. $\int (x+1)\cos\frac{x}{3}dx$
9. $\int \frac{\ln 2x}{x^3}dx$	10. $\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

7. Означений інтеграл

Короткі теоретичні відомості

Для обчислення означеного інтеграла застосовується формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad ,$$

де *F(x)* – деяка функції $f(x)$ на проміжку *[a,b]*.

<u>Заміна змінної в означеному інтегралі</u>

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку *[a,b]* і функція $x=\varphi(t)$ визначена, неперервна і має неперервну похідну на проміжку такому, що $\varphi(\alpha)=a$ і $\varphi(\beta)=b$. Тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

<u>Інтегрування частинами в означеному інтегралі</u>

Формула інтегрування частинами аналогічна відповідній формулі для неозначеного інтеграла:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu ,$$

де функції *u = u (x)* і *v = v (x)* задані, неперервні і диференці-йовані на проміжку *[a,b]*.

ПРИКЛАДИ

$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx$**,** застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца **.**

Розв'язання.

$$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx = \int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{tgx}dtgx = \frac{2(tgx)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{2}{3}.$$

Приклад 1. Знайти первісну підінтегральної функції $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$**,** застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца.

Розв'язання.

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x}d\sin x = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\sin x}{\sin^4 x} - \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\sin x}{\sin^2 x} =$$

$$= = \left(-\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{3}.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

Розв'язання. Зробимо замін $t = e^x$. Тоді $x = \ln t$, звідки $dx = \frac{dt}{t}$, і $e^{-x} = \frac{1}{t}$.

Перейдемо до нових меж інтегрування: при x = 0, t = 1, а при x = 1, t = e.

Тоді $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int\limits_1^e \frac{dt}{t^2+1} = arctgt\Big|_1^e = arctge - \frac{\pi}{4}$.

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральний вираз: $\frac{1}{1+2\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{1/\sin^2 x + 2} = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{ctg^2 x + 3}$.

Тепер зробимо заміну $t = ctgx$.

Враховуючи, що при $x = \frac{\pi}{4}$, t = 1 і при $x = \frac{\pi}{2}$, t = 0, одержуємо $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1+2\sin^2 x} = -\int\limits_1^0 \frac{dt}{t^2+3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_1^0 = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

Приклад 4. Обчислити інтеграл за допомогою формули інтегрування частинами: $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} (x-1)\sin 3xdx$.

Розв'язання. Покладемо *u = x – 1*; $dv = \sin 3xdx$.

Тоді *du=dx*, і $v = -\frac{1}{3}\cos 3x$.

Одержимо

$$\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} (x-1)\sin 3xdx = -\frac{1}{3}(x-1)\cos 3x\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} + \frac{1}{3}\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \cos 3xdx =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3} - 1\right) + \frac{1}{9}\sin 3x\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} == -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3} - 1\right) - \frac{1}{9}$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл за допомогою формули інтегрування частинами: $\int\limits_0^1 \arccos xdx$

Розв'язання. Покладемо, $u = \arccos x$, $dv = dx$. Тоді

$$\int\limits_0^1 \arccos xdx = x\arccos x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = 1$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ НА ПРАКТИЧНОМУ ЗАНЯТТІ

6. Знайти інтеграл, скориставшись формулою Ньютона – Лейбниця:

1. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx$
2. $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x}$
3. $\int_{1}^{2} (3x^2 - 5x + 7)dx$
4. $\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 + \cos x}}$
5. $\int_{0}^{1} \frac{(x^2 - 2x)dx}{(2x+1)(x^2+1)}$
6.

7. Знайти інтеграл, скориставшись методом заміни змінної:

1. $\int_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$
2. $\int_{e}^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$
3. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$
4. $\int_{1}^{5} \frac{dx}{1 + \sqrt{2x - 1}}$
5. $\int_{a}^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx$
6.

8 Знайти інтеграл, скориставшись методом інтегрування частинами:

1. $\int_{0}^{2\pi} x \sin 2x dx$
2. $\int_{0}^{1} xe^{-x} dx$
3. $\int_{2}^{3} \ln(x^2 - x)dx$
4. $\int_{0}^{\pi/3} \sin 2x \ln \cos x dx$
5. $\int_{0}^{3} \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$
6.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

9. Знайти інтеграл, скориставшись формулою Ньютона – Лейбниця:

1. $\int_{0}^{1} x^4 dx$
2. $\int_{0}^{8} \sqrt[3]{x} dx$
3. $\int_{1}^{2} \frac{(2x+1)(x-2)}{x} dx$
4. $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{x^2 + 4x + 5}$
5. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} ctg^4 \varphi d\varphi$
6.

10. Знайти інтеграл, скориставшись методом заміни змінної:

1. $\int_{-1}^{2} \frac{x}{x^2 + 1} dx$
2. $\int_{0}^{5} x\sqrt{4 + x} dx$
3. $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^{2x} - 1} dx$
4. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{2 - \sin x}$
5. $\int_{0}^{1} x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$
6.

11. Знайти інтеграл, скориставшись методом інтегрування частинами:

1. $\int_{1}^{2} x \ln(x+1)dx$
2. $\int_{0}^{\ln 3} xe^{-x} dx$
3. $\int_{2}^{3} \frac{\ln(x-1)}{(x+1)^2} dx$
4. $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} arctgx dx$
5. $\int_{0}^{1} \arcsin \sqrt{x} dx$
6.

9. Застосування означеного інтеграла

9.1. Застосування означеного інтеграла в геометричних задачах

Обчислення площі в декартовій системі координат

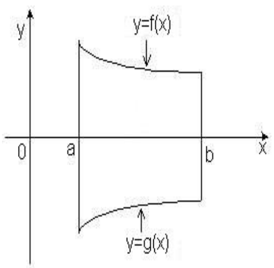
Короткі теоретичні відомості

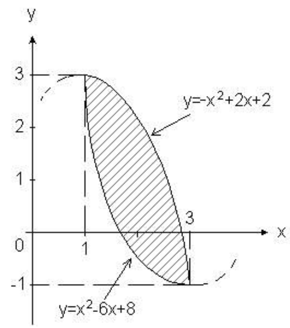
Якщо $f(x) \geq 0$ на *[a,b],* то $\int_a^b f(x)dx$ дорівнюватиме площі деякої криволінійної трапеції.

Площа області, обмеженої зверху графіком функції *y = f(x),* знизу графіком функції *y = g(x)*, справа і зліва прямими *x = a* і *x = b*, можна обчислити як різницю інтегралів, яку можна записати як інтеграл від різниці:

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Потрібно відзначити, що ця формула справедлива незалежно від знаку функцій *y = f(x)* і *y = g(x)*.





ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Обчислити площу між кривими $y = x^2-6x+8$ $y = -x^2+2x+2$. і

Розв'язання. Спочатку знайдемо точки перетину даних кривих, для чого розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 8 \\ y = -x^2 + 2x + 2 \end{cases}$.

Виключаючи у, одержимо квадратне рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$, з якого одержимо абсциси точок перетину даних парабол x =1 і x = 3.

Тоді шукана площа дорівнює

$$S = \int_1^3 \left(\left(-x^2 + 2x + 2 \right) - \left(x^2 - 6x + 8 \right) \right) dx = \int_1^3 \left(-2x^2 + 8x - 6 \right) dx =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 6x \right) \Big|_1^3 = \frac{8}{3}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НА ПРАКТИЧНОМУ ЗАНЯТТІ

1. Обчислити площу фігури, обмежену параболою $y = 4x - x^2$ і віссю абсцис.
2. Обчислити площу фігури, обмежену віссю ox та кривими $y = (x+2)^2$ і $y = 4 - x$.
3. Обчислити площу фігури, обмежену параболою $y = x^2 + 1$ і прямою $x + y = 3$.
4. Обчислити площу фігури, обмежену кривими $y = \frac{8}{4 + x^2}$ та $y = \frac{x^4}{4}$.

5. Обчислити площу фігури, обмежену кривими $y=\ln(1+x)$, $y=-xe^{-x}$, $x=1$.

6. Обчислити площу фігури, обмежену кривими $y=\dfrac{6}{x+5}$; $y=|x|$, $(x\geq -2)$.

7. Обчислити довжину кола $x^2+y^2=r^2$

8. Обчислити довжину дуги кривої $y=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{\ln x}{4}$, де $1\leq x\leq 3$

9. Обчислити довжину дуги кривої $y=\ln(x^2-1)$, де $2\leq x\leq 5$

10. Знайти об'єм тіла, що утворено обертанням навколо осі ox криволінійної трапеції, обмеженої лініями: $x\cdot y=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$

11. Знайти об'єм кулі, радіуса R

12. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ox фігури, обмеженої лініями: $y=\sqrt{x}$, $y=x$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

13. Знайти площу, обмежену параболою $y=x^2+1$ і прямою $x+y=3$ $[4{,}5]$

14. Знайти об'єм тіла обертання $x^2+y^2=25$ $\left[\dfrac{4}{3}\pi\cdot 5^3\right]$

15. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею, отриманою від обертання еліпса $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, навколо осі ox $\left[\dfrac{4}{3}\pi 3\cdot 2^2\right]$

16. Знайти площу фігури, обмежену кривими: $2y=x^2$, $x^2+y^2=4y$ $(2y\geq x^2)$ $\left[2\pi+\dfrac{16}{3}\right]$

17. Знайти площу фігури, обмежену кривими: $y^2+x=4$, $y^2-3x=12$ $\left[\dfrac{32\sqrt{6}}{3}\right]$

9.2. Застосування поняття означеного інтеграла в економіці

Визначення загального обсягу випущеної продукції

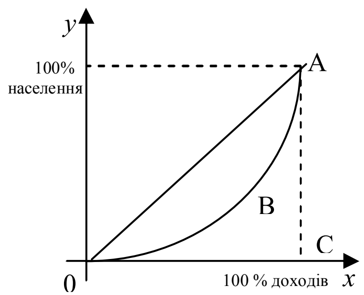
Визначення коефіцієнта Джинні.

Обчислення дисконтованого значення грошових потоків

Короткі теоретичні відомості

Визначення загального обсягу випущеної продукції

Нехай деяка фірма випускає один вид продукції, використовуючи один ресурс. Виробнича функція фірми має вигляд $q=q(x)$, де x – затрати ресурсу, а q – обсяг випуску. Затрати ресурсу x є функцією від часу t, наприклад, $x=x(t)$.



Тоді загальний обсяг продукції Q за час від T_0 до T_1 обчислюється за допомогою означеного інтегралу $Q=\int_{T_0}^{T_1} q(x(t))dt$.

Якщо у *функції Кобба-Дугласа* рахувати, що витрати праці є лінійна залежність від часу, а витрати капіталу незмінні, то вона прийме вигляд $g = (t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$. Тоді об'єм продукції, що випускається, за T років складе:

$$Q = \int_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}\,dt \quad (*)$$

Визначення коефіцієнта Джинні

Нехай $y=y(x)$ – частка (доля) приватного капіталу деякої країни, яка перебуває у власності групи людей, що становлять частку (долю) x населення цієї країни. Графічне зображення цієї залежності називають кривою Лоренца.

Наприклад, у тому випадку, коли 30% населення володіє 10% капіталу, 60% населеня 35% капіталу, і 85% 60% капіталу, маємо таке:

$y(0{,}3)=0{,}1$; $y(0{,}6)=0{,}35$; $y(0{,}85)=0{,}6$.

Очевидно, що завжди $y(0)=0$ та $y(1)=1$.

Очевидно, що у разі абсолютно рівномірного розподілу багатства в країні крива Лоренца є бісектрисою прямого кута (прямою $y = x$). Зі збільшенням нерівності збільшується площа між кривою $y=y(x)$ та прямою $y = x$. Числове значення цієї площі K ($0<K<1/2$) називають коефіцієнтом Джинні.

Достатньо високе значення K показує істотно нерівномірний розподіл доходів серед населення в даній країні. Досліджуючи *криву Лоренца* – залежність відсотка доходів від відсотка, населення (рис. 4.10) що має їх OBA, ми можемо оцінити ступінь нерівності в розподілі доходів населення. При рівномірному розподілі доходів крива Лоренца вироджується в пряму – бісектрису OA, тому площа фігури OAB між бісектрисою OA і кривою Лоренца, віднесена до площі трикутника OAC (коефіцієнт Джині), характеризирует ступінь нерівномірності в розподілі доходів населення

Обчислення дисконтованого значення грошових потоків

Визначення початкової суми по її кінцевій величині, одержаній через час t (років) при річному відсотку (процентній ставці) p, називається *дисконтуванням*. Завдання такого роду зустрічаються при визначенні економічної ефективності капітальних вкладень.

Нехай K_t – кінцева сума, одержана через t років, і K – сума, що дисконтується (початкова), яку у фінансовому аналізі називають також *сучасною* сумою. Якщо відсотки прості, то $K_t = K(1+it)$, де $i = p/100$ – питома процентна ставка. Тоді $K = K_t/(1+it)$. У разі складних відсотків $K_t = K(1+it)^t$ і тому $K = K_t/(1+it)^t$.

Нехай дохід, що поступає щорічно, змінюється в часі і описується функцією $f(t)$ і при питомій нормі відсотка, рівній i (відсоток нараховується неперервно). Можна показати, що в цьому випадку дисконтований дохід K за час T обчислюється за формулою: $K = \int_0^T f(t)e^{-it}\,dt$

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Знайти загальний обсяг продукції Q при $q(x) = \sqrt{x}$, $x(t)=100e^{0{,}2t}$, $T_0=0$ та $T_1=5$ (років).

Розв'язання. Загальний обсяг випущеної за п'ять років продукції

$$Q = \int_0^5 \sqrt{100\cdot e^{0{,}2\cdot t}}\,dt = \int_0^5 10\cdot e^{0{,}1\cdot t}\,dt = 10\cdot\frac{1}{0{,}1}\cdot e^{0{,}1t}\Big|_0^5 =$$

$$=100\cdot(e^{0{,}5}-e^{0}) \approx 64{,}872\,(\textit{одиниці})$$

!Отже, *економічний зміст означеного інтеграла*: обсяг випущеної продукції при відомій функції продуктивності праці.

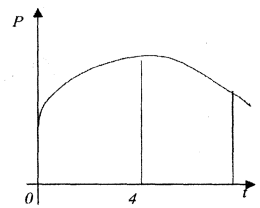
Приклад 2. Знайти денний виробіток P за робочий день тривалістю 8 годин, якщо продуктивність праці протягом дня
змінюється за емпіричною формулою:
$p = f(t) = -0,3t^2 + 1,9t + 26$, де t – час (год.).

Розв'язання. Ця формула цілком відображає реальний процес роботи: продуктивність спочатку росте, досягаючи максимуму у середині робочого дня при $t \approx 3,17$ год., а потім падає. Вважаючи, що продуктивність змінюється протягом дня неперервно, тобто що p є неперервною функцією аргументу t на відрізку $[0,8]$, денний виробіток P можна виразити означеним інтегралом:

$$p = \int_0^8 \left(-0,3t^2 + 1,9t + 26\right)dt = F(t)\Big|_0^8 =$$

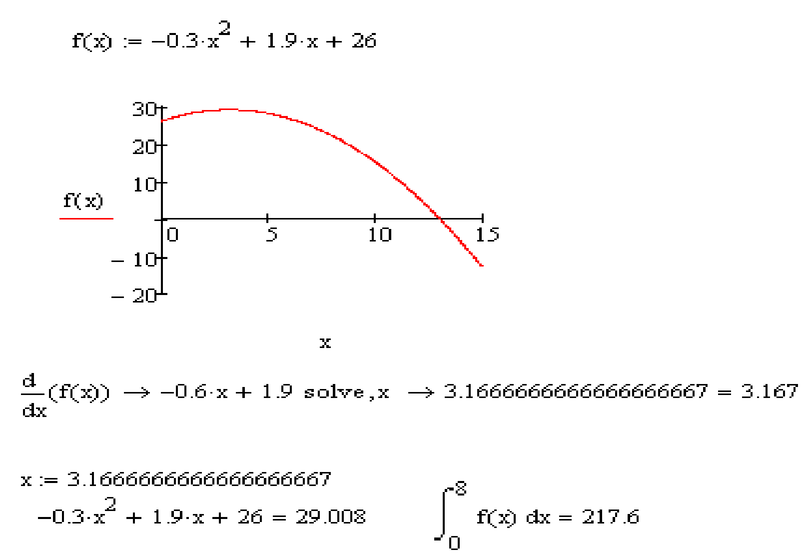
$$= \left(0,3\frac{t^3}{3} + 1,9\frac{t^2}{2} + 26t\right)\Big|_0^8 \approx 217,6$$

Якби протягом всього дня робота велася ритмічно і з максимальною продуктивністю $p_{\max} = 29,008$, то денний



виробіток склав би $P_{\max} = 232,064$, або приблизно на 6,6% більше. Отже, денний виробіток чисельного дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої зверху кривою $f(t)$.

Приклад обробки даних в середовищі Mathcad наведено на рис.



Приклад розрахунків та візуалізація даних в середовищі Mathcad

Приклад 3. Знайти об'єм продукції, виробленої за 4 роки, якщо функція Кобба – Дугласа має вигляд $g(t) = (1+t)e^{3t}$.

Розв'язання. За формулою (*) об'єм Q виробленої продукції дорівнює $Q = \int_0^4 (1+t)e^{3t}dt$

Використовуємо метод інтегрування частинами. Нехай $u = t+1$; $dv = e^{3t}dt$. Тоді $du = dt$ $v = \int e^{3t}dt = \frac{1}{3}e^{3t}$. Отже

$$Q = (t+1)\frac{1}{3}e^{3t}\Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{3}e^{3t}dt = \frac{1}{3}\left(5e^{12} - 1\right) - \frac{1}{9}e^{3t}\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{1}{9}\left(14e^{12} - 2\right) \approx 2.53 \cdot 10^5 \text{ (ум. од.)}$$

Приклад 4. Крива Лоренца деякої країни має вигляд $y = x \cdot \sqrt{x}$. Знайти коефіцієнт Джинні цієї країни.

Розв'язання. Із означення коефіцієнта Джинні випливає, що для кривої Лоренца $y = x \cdot \sqrt{x}$

$$K = 0{,}5 - \int_0^1 x\sqrt{x}dx = 0{,}5 - \frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^1 = 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}1$$

Для кривої Лоренца $y=x^2$ маємо такий коефіцієнт Джинні: $K = 0{,}5 - \int_0^1 x^2 dx = 0{,}5 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Приклад 5. За даними дослідження в розподілі доходів в одній з країн крива Лоренца ОВА (рис. 4.10) може бути описана рівнян-ням $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, де

x – частка населення,

y – частка доходів насе-лення. Обчислити коефі-цієнт Джіні.

Розв'язання. Очевидно, коефіцієнт Джіні

$K = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2S_{OBAC}$, оскільки $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}$.

$S_{OBAC} = \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = 1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$. Тому

$$K = 1 - 2\left(1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx\right) = 2\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx - 1.$$

За допомогою заміни, наприклад, $x = \sin t$ можна обчислити $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \pi/4$. Отже, коефіцієнт Джіні

$$K = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}57.$$

Приклад 6. Визначити дисконтований дохід за 3 роки при процентній ставці 8%, якщо первинні (базові) капіталовкладення склали 10 *млн. грн.*, і намічається щорічно збільшувати капіталовкладення на 1 *млн. грн.*

Розв'язання. Очевидно, що капіталовкладення задаються функцією $f(t) = 10 + 1 \cdot t = 10 + t$. Тоді по формулі дисконтована сума капіталовкладень $K = \int_0^3 (10 + t)e^{-0{,}08t}dt$.

Інтегруючи одержимо $K = 30{,}5$ *млн. грн.*

Приклад 7. Нехай потік інвестицій задає функція $F(t)$=100-10t. Ставка відсотка R=10% (R=0,1). Довжина періоду інвестування T=5 *(років)*. Визначити дисконтовану теперішню вартістьпотоку.

Розв'язання.

$$K = \int_0^5 (100 - 10t)e^{-0{,}1t}dt = 100\int_0^5 e^{-0{,}1t}dt - 10\int_0^5 te^{-0{,}1t}dt = -1000e^{-0{,}1t}\Big|_0^5 -$$

$$\left|U = t; dv = e^{-0{,}1t}; du = dt; v = -10e^{-0{,}1t}\right|$$

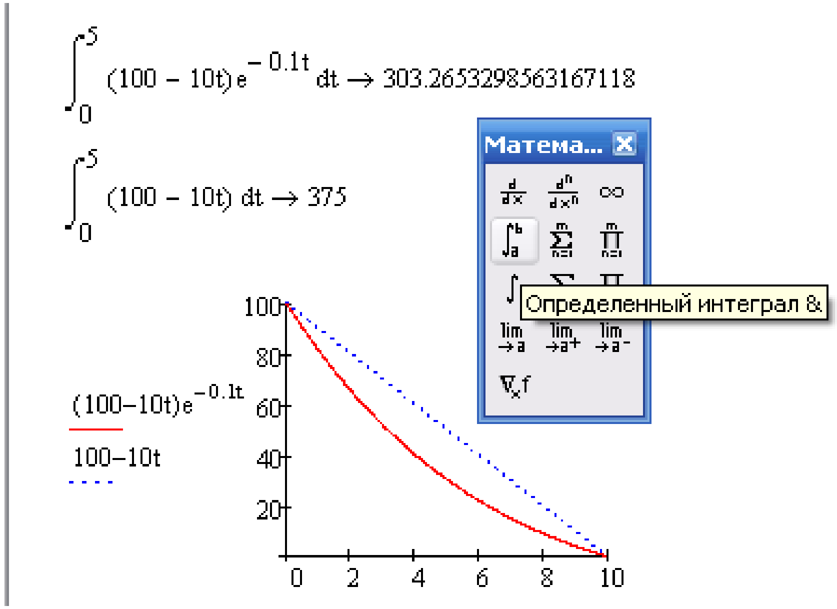
$$-10(-10te^{-0{,}1t}\Big|_0^5 - \int_0^5 (10e^{-0{,}1t})dt) = (-1000e^{-0{,}1t}\, 100e^{-0{,}1t} + 1000e^{-0{,}1t})\Big|_0^5 =$$

$$= 100(5e^{-0{,}5} - 0) = \frac{500}{\sqrt{e}} \approx 303$$

Приклад обробки даних в середовищі Mathcad наведено на рис. 4.11.

Для порівняння визначимо недисконтовану вартість цього потоку:

$$K' = \int_0^5 (100 - 10t)dt = 100t\Big|_0^5 - 10 \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^5 = 100(5 - 0) - 5(25 - 0) = 375$$



Приклад розрахунків та візуалізація даних в середовищі Mathcad

ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НА ПРАКТИЧНОМУ ЗАНЯТТІ

1. Знайти обсяг продукції, виробленої за проміжок часу t_0 , якщо продуктивність виробництва характеризується функцією P(t).

a) $P(t) = -5{,}5t^2 + 33t + 220, t_0$ – перші 3 год. роботи

b) $P(t) = \dfrac{9}{3t+1} + 2, t_0$ – четверта година робочого дня

c) $P(t) = (1+4t)e^{3t}, t_0$ – п'ять років

d) $P(t) = \ln(1+t), t_0$ – перші п'ять годин робочого дня

2. На основі досліджень встановлено залежність ціни P від попиту Q: P=f(Q). Визначити надлишок споживача для відомої рівноважної ціни P_0. Зробити схематичний рисунок.

а) $P = 10 - Q, P_0 = 8$

б) $P = -Q^2 - 2Q + 27, P_0 = 3$

в) $P = -log_2 \dfrac{Q}{80}, P_0 = 2$

г) $P = -\sqrt[3]{Q} + 30, P_0 = 25$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

3. Знайти обсяг продукції, виробленої за проміжок часу t_0, якщо продуктивність виробництва характеризується функцією *f(t)*.

1.	$f(t) = -3t^2 + 2{,}3t + 54$	t_0 - перші три години роботи
2.	$f(t) = -4{,}5t^2 + 43t + 210$	t_0 - перша година роботи
3.	$f(t) = \ln(2+t)$	t_0 - перші п'ять годин робочого дня
4.	$f(t) = \dfrac{7}{5t+2} + 2$	t_0 - перші чотири години робочого дня
5.	$f(t) = -1{,}2t^2 + 4t + 201$	t_0 - друга і третя години робочого дня
6.	$f(t) = (1+3t)e^{4t}$	t_0 - чотири роки
7.	$f(t) = -t^2 + 7t + 34$	t_0 - перша і друга година робочого дня
8.	$f(t) = \dfrac{8}{2t+3} + 2$	t_0 - четверта година робочого дня
9.	$f(t) = -6{,}4t^2 + 39t + 280$	t_0 - повний робочий день
10	$f(t) = -4{,}2t^2 + 40t + 153$	t_0 - третя година роботи

10. Індивідуальне завданн №2

Зразок виконання

Визначити обсяг продукції *(ум. од.)*, виробленої за третю годину робочого дня, якщо продуктивність праці характеризується функцією $f(t) = -0,2t^2 + 1,6t + 1$.

Розв'язання. Шуканий обсяг визначається за формулою $V = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt$.

У даній задачі:

$$V = \int\limits_2^3 (-0,2t^2 + 1,6t + 1)dt = \left(-0,2\frac{t^3}{3} + 1,6\frac{t^2}{2} + t\right)\Bigg|_2^3 =$$

$$= (-0,2 \cdot 9 + 0,8 \cdot 9 + 3) - \left(-0,2\frac{8}{3} + 1,6 \cdot 2 + 2\right) = 8,4 - 4,7 = 3,7$$

V=3,7 (ум. од.).

Знайти обсяг продукції, виробленої за проміжок часу t_0, якщо продуктивність виробництва характеризується функцією $f(t)$.

1. $f(t) = -3t^2 + 2,3t + 54,$ — t_0 - перші три години роботи.
2. $f(t) = -4,5t^2 + 43t + 210,$ — t_0 - перша година роботи.
3. $f(t) = \ln(2+t)$ — t_0 - перші п'ять годин робочого дня
4. $f(t) = \dfrac{7}{5t+2} + 2$ — t_0 - перші чотири години робочого дня
5. $f(t) = -1,2t^2 + 4t + 201$ — t_0 - друга і третя години робочого дня
6. $f(t) = (1+3t)e^{4t}$ — t_0 - чотири роки

7. $f(t) = -t^2 + 7t + 34$ — t_0 - перша і друга година робочого дня
8. $f(t) = \dfrac{8}{2t+3} + 2$ — t_0 - четверта година робочого дня
9. $f(t) = -6,4t^2 + 39t + 280$ — t_0 - повний робочий день
10. $f(t) = -4,2t^2 + 40t + 153$ — t_0 - третя година роботи
11. $f(t) = (5+7t)e^{2t}$ — t_0 - п'ять років
12. $f(t) = -6,5t^2 + 53,5t + 224$ — t_0 - перші три години роботи
13. $f(t) = -3t^2 + 22t + 130$ — t_0 - третя і четверта години робочого дня
14. $f(t) = (3+3,3t)e^{4t}$ — t_0 - два роки
15. $f(t) = -3,5t^2 + 24,5t + 103,5$ — t_0 - останні три години робочого дня
16. $f(t) = -4,5t^2 + 25,5t + 200$ — t_0 - друга і третя година робочого дня
17. $f(t) = -2,8t^2 + 20t + 128,1$ — t_0 - третя і четверта година робочого дня
18. $f(t) = \dfrac{4,2}{3,2t+8,1} + 2$ — t_0 - друга і третя година робочого дня
19. $f(t) = -3,2t^2 + 18,9t + 121,1$ — t_0 - повний робочий день
20. $f(t) = (1,3+8,5t)e^{2t}$ — t_0 - чотири години робочого дня
21. $f(t) = -2t^2 + 20t + 75$ — t_0 - друга година робочого дня
22. $f(t) = 3,3t^2 + 19t + 130$ — t_0 - третя і четверта година робочого дня
23. $f(t) = (1+5,3t)e^{2,2t}$ — t_0 - чотири роки
24. $f(t) = -6,6t^2 + 40t + 230$ — t_0 - перші три години роботи
25. $f(t) = -t^2 + 6,5t + 30$ — t_0 - останні дві години роботи
26. $f(t) = \dfrac{1}{3,8t+2,6} + 4,2$ — t_0 - четверта і п'ята години робочого дня

27. $f(t) = -3,3t^2 + 10t + 112$ t_0 - п'ята і шоста години робочого дня

28. $f(t) = (5,2 + 3,9t)e^{2t} + 5t + 30$ t_0 - три роки

29. $f(t) = -2,4t^2 + 12t + 50$ t_0 - перші три години роботи

30. $f(t) = \dfrac{7}{4,8t + 2,2} + 3,2$ t_0 - друга година робочого дня

31. $f(t) = -5t^2 + 2,5t + 344$ t_0 - перші три години роботи

32. $f(t) = -5,5t^2 + 33t + 220$ t_0 - перша година роботи

33. $f(t) = \ln(1 + t)$ t_0 - перші п'ять годин робочого дня

34. $f(t) = \dfrac{6}{7t + 2} + 5$ t_0 - перші чотири години робочого дня

35. $f(t) = -0,5t^2 + 3t + 20$ t_0 - друга і третя години робочого дня

36. $f(t) = (1 + 4t)e^{3t}$ t_0 - чотири роки

37. $f(t) = -t^2 + 6t + 40$ t_0 - перша і друга година робочого дня

38. $f(t) = \dfrac{9}{3t + 1} + 2$ t_0 - четверта година робочого дня

39. $f(t) = -7,5t^2 + 45t + 300$ t_0 - повний робочий день

40. $f(t) = -5,2t^2 + 38,5t + 165$ t_0 - третя година роботи

41. $f(t) = (6 + 7t)e^{2t}$ t_0 - п'ять років

42. $f(t) = -7,5t^2 + 52,5t + 225$ t_0 - перші три години роботи

43. $f(t) = -4t^2 + 24t + 160$ t_0 - третя і четверта години робочого дня

44. $f(t) = (4 + 3t)e^{4t}$ t_0 - два роки

45. $f(t) = -3,5t^2 + 24,5t + 105$ t_0 - останні три години робочого дня

46. $f(t) = -4,5t^2 + 27t + 180$ t_0 - друга і третя година робочого дня

47. $f(t) = -3t^2 + 18t + 120$ t_0 - третя і четверта година робочого дня

48. $f(t) = \dfrac{4}{3t + 8} + 2$ t_0 - друга і третя година робочого дня

49. $f(t) = -3t^2 + 18t + 120$ t_0 - повний робочий день

50. $f(t) = (1 + 9t)e^{2t}$ t_0 - чотири години робочого дня

51. $f(t) = -2,5t^2 + 17,5t + 75$ t_0 - друга година робочого дня

52. $f(t) = 3t^2 + 18t + 120$ t_0 - третя і четверта година робочого дня

53. $f(t) = (1 + 5t)e^{2t}$ t_0 - чотири роки

54. $f(t) = -7t^2 + 42t + 280$ t_0 - перші три години роботи

55. $f(t) = -t^2 + 7t6 + 30$ t_0 - останні дві години роботи

56. $f(t) = \dfrac{1}{4t + 3} + 4$ t_0 - четверта і п'ята години робочого дня

57. $f(t) = -2,5t^2 + 15t + 100$ t_0 - п'ята і шоста години робочого дня

58. $f(t) = (5 + 4t)e^{2t} + 7t + 30$ t_0 - три роки

59. $f(t) = -2t^2 + 14t + 60$ t_0 - перші три години роботи

60. $f(t) = \dfrac{8}{5t + 2} + 3$ t_0 - друга година робочого дня

Контрольні питання

1. Послідовність. Границя послідовності. Єдиність границі послідовності.
2. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. Їх властивості.
3. Збіжні послідовності та їх властивості. Достатня умова збіжності послідовності.
4. Обмежені і необмежені послідовності.
5. Поняття невизначеності.
6. Границя функції в точці. Односторонні границі. Границя функції на нескінченості.
7. Основні теореми про границі. Обмежені і необмежені функції. Нескінченно малі та нескінченно великі функції, їх властивості.
8. Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні нескінченно малі. Таблиця еквівалентних нескінченно малих.
9. Перша та друга визначні границі. Їх різні форми запису.
10. Неперервність функції в точці. Точки неперервності та точки розриву функції. Класифікація точок розриву.
11. Операції над неперервними функціями. Неперервність основних елементарних функцій. Властивості функцій, неперервних на відрізку.
12. Похідна. Її фізичний та геометричний зміст. Правила диференціювання.
13. Похідна складної та оберненої функції.
14. Похідні обернених тригонометричних функцій.
15. Таблиця похідних.
16. Похідна функції, заданої неявно. Перша та друга похідна функції, заданої параметрично.
17. Рівняння дотичної та нормалі до кривої.
18. Похідна, як відношення диференціалів.

19. Диференціал функції. Його геометричний зміст та правила знаходження. Інваріантність форми диференціала.
20. Застосування диференціала в наближених обчисленнях.
21. Поняття екстремуму функції. Умови зростання та спадання функції. Критичні точки.
22. Опуклість та вгнутість функції. Точки перегину. Умови опуклості, вгнутості та перегину кривої.
23. Асимптоти кривої (похилі, горизонтальні, вертикальні).
24. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка.
25. Правило Лопіталя. Випадки його застосування.
26. Первісна та неозначений інтеграл. Властивості неозначеного інтеграла.
27. Таблиця основних інтегралів.
28. Правила знаходження неозначених інтегралів. Методи інтегрування.
29. Інтегрування раціональних дробів та найпростіших раціональних дробів.
30. Інтегрування тригонометричних функцій за допомогою універсальної тригонометричної підстановки.
31. Інтегрування тригонометричних функцій за допомогою частинних тригонометричних підстановок (не універсальної).
32. Інтеграли виду:
$\int \cos mx \cdot \sin kx\, dx$, $\int \cos mx \cdot \cos kx\, dx$, $\int \sin mx \cdot \sin kx\, dx$.
33. Поняття означеного інтеграла.
34. Властивості означеного інтеграла.
35. Теорема про середнє. Оцінка означеного інтеграла.
36. Формула Ньютона-Лейбніца.
37. Інтегрування частинами та методом підстановки в означеному інтегралі.
38. Застосування означеного інтеграла.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 1999.
2. Горстко А.Б. и др. Введение в моделирование эколого-экономических систем. – Ростов-на-Дону: Из-во Ростовского университета, 1998.
3. Засуха В. А., Осипова Т. Ю. Вища математика. Збірник задач та лабораторних робіт з використанням інформаційно-комп'ютерних технологій: Навч. посіб. для підгот. бакалаврів в агр. вищ. навч. закл. освіти II-IV рівнів акредитації напряму 1302 - "Зооінженерія" / Національний аграрний ун-т — К. : НАУ, 2006. — 226с.
4. Клименко Ю. И. Высшая математика для экономистов: теория, примеры, задачи / Экзамен, 2005 (ГУП ИПК Ульян. Дом печати) - 734 с.
5. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов: Учеб. пособие М. Изд. дом "ИНФРА-М", 1997 – 207 с.
6. Кремер Н. Ш Высшая математика для экономистов : практикум для студентов обучающихся по экономическим специальностям / под ред. Н. Ш. Кремера / Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2007 (Ульяновск : Ульяновский Дом печати). – 478 с.
7. Ляшенко И.Н. и др. Методы эколого-экономического моделирования. – Нукус, Билим, 1994.
8. Плис А.И. , Сливина Н.А. Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров : Учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по экон. и техн. специальностям / : М. Финансы и статистика, 2000 – 655 с.
9. Рюмина Б.В. Экологический фактор в экономико-математических моделях. – М.: Наука, 1980.
10. Сизоненко В. Л., Чібісов Д. В., Коваленко М. Й., Масленніков Д. І. Вища математика: Навч. посіб. для студ. аграр. вузів / Харківський держ. аграрний ун-т ім. В.В.Докучаєва. — Х., 1999. — 106с.

ЗМІСТ

Левчук О.В., Новицька Л.І.

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

методичні вказівки для проведення
практичних занять та самостійної підготовки
здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського)
освітнього рівня
галузі знань - 24 «Сфера обслуговування»,
спеціальності - 241 «Готельно-ресторанна справа»
в аграрних вищих навчальних закладах

частина II

ВІННИЦЯ
2017

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЛЕВЧУК О.В.
НОВИЦЬКА Л.І.

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

методичні вказівки для проведення
практичних занять та самостійної підготовки
здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського)
освітнього рівня
галузі знань - 24 «Сфера обслуговування»,
спеціальності - 241 «Готельно-ресторанна справа»
в аграрних вищих навчальних закладах

частина II

ВІННИЦЯ
2017