Адамчук В. В.

Національний науковий центр “Інститут механізації та електрифікації сільського господарства”

Калетнік Г. М.

Вінницький національний аграрний університет

Булгаков В. М.

Черниш О. М.

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Adamchuk V. V.

National Scientific Center “Institute for Agricultural Engineering and Electrification”

Kaletnik G. M.

Vinnytsia National Agrarian University

Bulgakov V. M.

Chernysh O. M.

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

УДК 621.01:534.1

ТЕОРЕТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБУРЕНИХ ГАРМОНІЙНИХ КОЛИВАНЬ У ВІБРАЦІЙНИХ ПРИВОДАХ МАШИН

Розроблена та теоретичне досліджена модель, що описує рух збурених гармонійних коливань в пружних механічних системах у в'язкому середовищі. Досліджено випадок збурювання без впливу зовнішніх сил безпосередньо на вібруючу масу. При цьому вважалось, що збурювальна сила прикладена до вільного кінця пружного елемента так, щоб він рухався згідно із гармонійним законом. Отримано вираз еквівалентної пружної сили та еквівалентного диференціального рівняння гармонійного коливального руху. Проаналізовані режими таких коливань в умовах в'язкого середовища. Проаналізовані режими таких коливань в умовах в'язкого середовища.

Ключові слова: *пружна модель, збурювальна сила, вібруюча маса, система диференціальних рівнянь, пружний елемент, математична модель.*

Постановка проблеми. Кінематичні і динамічні параметри коливальних процесів у сільськогосподарському виробництві суттєво впливають на довговічність, якість і надійність механічного обладнання, а прогнозування і розрахунок заданих вібраційних режимів є основою для створення високоефективних машин вібраційної дії. Дослідження і моделювання вібрацій і коливань необхідні як при експлуатації сільськогосподарських машин, так і на стадії їх проектування.

Аналіз публікацій. Вібраційним і коливальним процесам, їх моделюванню та практичному застосуванню на сьогодні присвячено багато наукових досліджень і публікацій [1-4, 6-9, 11]. Основоположні підходи щодо особливостей створення загальних математичних моделей процесів, методів розрахунку та оцінки їх параметрів розглянуто у працях [6, 8-10]. Аналізу складних коливань присвячені праці [1, 3, 4]. При цьому використання сучасних чисельних методів базується на застосуванні останніх версій математичних пакетів комп'ютерної обробки даних [1, 8, 10]. Але проблема вибору теоретичних моделей, методики досліджень та розрахунків параметрів коливальних систем при розв'язанні технічних і наукових задач залишається актуальною.

Мета дослідження. Розглянути та проаналізувати теоретичну модель для аналітичного опису руху збурених гармонійних коливань в пружних механічних системах із в'язким опором середовища.

Результати дослідження. Одним із звичайних способів підтримки незатухаючих коливань є безперервний вплив на коливальну масу механічної системи збурювальної періодичної сили $\overline{F}(t)$, яка за величиною може довільно змінюватись в межах періоду T:

$$F(t) = F(t+T). \tag{1}$$

Звісно, якщо таку збурювальну силу $\overline{F}(t)$ прикласти до коливальної маси m пружної механічної системи, що знаходиться у середовищі із в'язким опором $F_{тр} = -\mu\dot{u}$, то диференціальне рівняння руху у проекції на напрямок цього руху u матиме вигляд:

$$m\ddot{u} = -\mu\dot{u} - cu + F(t). \tag{2}$$

Дослідження показують, що у випадку, коли збурювальна сила починає діяти раптово (в момент часу $t = 0$), то система почне коливатись поступово і через деякий час її рух стане усталеним. За порядком величини час встановлення цих змушених коливань буде збігатися із часом їх загасання:

$$\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{2m}{\mu}. \tag{3}$$

Зрозуміло, що параметри таких коливань будуть залежати від конкретного виду прикладеної до коливальної системи збурювальної сили $\overline{F}(t)$.

При цьому відомо, що будь-яку періодичну функцію, у тому числі і періодичну функцію збурювальної сили $F(t)$, можна представити у вигляді ряду Фур'є:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{0n} \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt + \psi_n\right). \tag{4}$$

Фізичний зміст такого розкладання полягає в тому, що періодичний вплив збурювальної сили $F(t)$ еквівалентний одночасному впливу сталої сили F_{00} і набору гармонійних сил із відповідними амплітудами F_{0n}, початковими фазами ψ_n та коловими частотами $\omega_n = \frac{2\pi}{T} n = \omega n$, які кратні найнижчій (основній) частоті $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Для того, щоб одержати повну картину змушених коливань під дією збурювальної сили (4), необхідно звернути увагу на лінійність рівняння (2). Це дозволяє представити його розв'язок $u(t)$ як суму гармонійних коливань:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{0n} \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt + \varphi_n\right), \tag{5}$$

які відбуваються із усталеними амплітудами u_{0n} і фазами φ_n на частотах ω_n, відповідно гармонікам збурювальної сили (4).

Кожний доданок в (5) може розглядатись як змушене гармонійне коливання, що відбувається під дією зовнішньої гармонійної сили з амплітудою F_{0n} і частотою $\omega_n = \frac{2\pi}{T} n$.

З технічної точки зору до таких механічних коливальних систем не так просто прикласти гармонійну збурювальну силу безпосередньо до самої рухомої маси.

Але такі змушені коливання можна підтримувати іншим способом, не прикладаючи зовнішньої сил $F(t)$ безпосередньо до маси m.

Для цього можна застосувати пружну модель, де збурювальна сила $\overline{F}(t)$ прикладається лише до вільного кінця пружного елемента так, щоб цей кінець рухався за гармонійним законом:

$$\xi(t) = \xi_0 \sin \omega t. \tag{6}$$

При цьому подовження пружного елемента складе величину $u - \xi$, а сила пружності, що прикладена до маси m, буде дорівнювати

$$F_{пр} = -c(u - \xi). \tag{7}$$

В результаті диференціальне рівняння коливального руху маси m механічної пружної системи запишеться у вигляді:

$$m\ddot{u} = -\mu\dot{u} - c(u - \xi). \quad (8)$$

Якщо прийняти до уваги, що сила пружності при відсутності зміщення $(u = 0)$ дорівнює

$$F(t) = c\xi(t) = c\xi_0 \sin \omega t, \quad (9)$$

то диференціальне рівняння (8) буде повністю еквівалентним відомому диференціальному рівнянню змушених гармонійних коливань маси m у в'язкому середовищі:

$$m\ddot{u} = -cu - \mu\dot{u} + F_0 \sin \omega t. \quad (10)$$

При цьому сила (9) виконує роль зовнішньої гармонійної сили у звичайній пружній механічній системі.

Ця сила легко може бути візуалізована, оскільки її величина і напрямок однозначно визначається зміщенням вільного кінця рухомого пружного елемента. Це, у свою чергу, дає можливість наочно продемонструвати фазові співвідношення між силою $F(t)$ (або зміщенням $\xi(t)$) і зміщенням $u(t)$ коливальної маси.

Запишемо рівняння (8) наступним чином:

$$\ddot{u} + 2\delta\dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{F_0}{m}\sin \omega t, \quad (11)$$

де $F_0 = c\xi_0$.

Тепер розв'язок такого рівняння можна шукати у вигляді гармонійних коливань типу

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (12)$$

де амплітуда u_0 і фаза φ_0 можуть бути визначені, якщо підставити це рівняння в (11).

Із врахуванням вищесказаного проаналізуємо три важливі режими таких змушених коливань із в'язким опором.

У режимі низькочастотних коливань, якщо частота збурювальної сили значно менша частоти власних коливань системи ($\omega << \omega_0$), то швидкість $\dot{u}$ і прискорення $\ddot{u}$ коливальної маси будуть дуже малими. Тому першими двома членами в лівій частині рівняння (11) можна знехтувати і записати його в наближеному виді:

$$\omega_0^2 u = \frac{F_0}{m}\sin \omega t. \quad (13)$$

Розв'язок такого рівняння очевидний:

$$u(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2 t}\sin \omega t = \frac{F_0}{c}\sin \omega t. \quad (14)$$

У цьому режимі зміщення маси m пропорційне величині зовнішньої збурювальної сили і не залежить від маси. Цей розв'язок є по суті математичним виразом закону Гука для статичної деформації пружного елемента. Тому цей режим є квазістатичним.

Амплітуда коливань відповідно до даного закону буде $u_0 = \frac{F_0}{c}$, а зміщення $u(t)$ змінюється у фазі із зовнішньою силою.

Для моделі, що розглядається, це еквівалентно тому, що зміщення маси m практично повторює зміщення вільного кінця пружного елемента:

$$u(t) = \frac{F_0}{c}\sin \omega t = \frac{c\xi_0}{c}\sin \omega t = \xi(t). \quad (15)$$

Це цілком зрозуміло, тому що для руху маси m із нескінченно малим прискоренням $\ddot{u}$ не потрібно великих деформацій пружного елемента:

$$u(t) - \xi(t) \approx 0. \quad (16)$$

У режимі високочастотних коливань, якщо частота збурювальної сили значно більша частоти власних коливань системи ($\omega >> \omega_0$), то період змушених коливань $T = \frac{2\pi}{\omega}$ малий. Це означає, що на масу m діє в основному лише зовнішня збурювальна сила $F(t)$, а сила пружності cu і сила в'язкого тертя $\mu\dot{u}$ нескінченно малі.

Дослідження таких коливань вказують на те, що за половину короткого періоду коливань T, коли маса m рухається в одному напрямку, вона не встигає набрати як помітної швидкості $\dot{u}$, так і достатньої величини зміщення u від положення рівноваги.

Тому в рівнянні (11) можна вилучити члени, що містять u і $\dot{u}$, та записати його в іншому наближеному виді:

$$\ddot{u} = \frac{F_0}{m}\sin \omega t. \quad (17)$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо закон руху коливальної маси m:

$$u(t) = -\frac{F_0}{m\omega^2 t}\sin \omega t = \frac{F_0}{m\omega^2 t}\sin(\omega t - \pi). \quad (18)$$

Із отриманого рівняння зрозуміло, що зміщення по відношенню до зовнішньої збурювальної сили $F(t)$ запізнюється по фазі на π ($\varphi_0 = -\pi$), а амплітуда, звісно, зменшується із збільшенням частоти.

Для застосованої моделі у такому режимі вільний рухомий кінець пружного елемента і маса m завжди рухаються у протилежних напрямках:

$$u(t) = -\frac{c\xi_0}{m\omega^2}\sin\omega t = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\xi(t). \quad (19)$$

За абсолютною величиною зміщення маси m в $\frac{\omega^2}{\omega_0^2} >> 1$ раз менше зміщення вільного кінця пружини, тобто практично буде непомітне.

У режимі резонансних коливань, коли частота збурювальної сили співпадає з частотою власних коливань системи ($\omega >> \omega_0$), змушені коливання відбуваються на власній частоті системи.

Це означає, що

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0. \quad (20)$$

Отже, рівняння (11) із врахуванням (20) прийме вигляд:

$$2\delta\,\dot{u} = \frac{F_0}{m}\sin\omega t. \quad (21)$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо закон коливального руху маси m в умовах резонансу:

$$u(t) = \frac{F_0}{2\delta\, m\omega_0}\sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (22)$$

Вираз (22) можна записати як

$$u(t) = \frac{F_0}{c}Q\sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (23)$$

де $Q = \frac{\pi}{\delta T}$ – добротність коливальної системи.

Якщо добротність системи $Q >> 1$, то амплітуда коливань може значно перевищувати амплітуду низькочастотних квазістатичних коливань (14). Власне тому цей режим і є резонансним.

Оскільки швидкість $\dot{u}$, як видно із (21), змінюється у фазі із зовнішньою силою $F(t)$, то з енергетичної точки зору це сприяє процесу надходження енергії в коливальну систему.

Для застосованої моделі у резонансному режимі, як видно із розв'язку (23), амплітуда зміщення маси m в Q раз перевершує амплітуду зміщення вільного кінця пружного елемента:

$$u(t) = \xi_0 Q\sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (24)$$

При проходженні масою m положення рівноваги $u = 0$, коли її швидкість максимальна, вільний кінець пружного елемента зміщений на максимальну величину ξ_0 в напрямку швидкості руху маси. У цей момент часу потужність сили пружності має максимально можливе додатне значення при заданій величині ξ_0. В наступні моменти часу ця потужність також залишається додатною, що забезпечує найбільш ефективну передачу енергії тілу пружної системи при його коливальному русі у в’язкому середовищі.

Висновок. Таким чином, проаналізована пружна модель змушених гармонійних коливань в механічних системах із в’язким опором, яка дозволяє дослідити та описати найпростіші режими і види збуреного коливального руху. Досліджено випадок збурення коливань без впливу зовнішніх сил безпосередньо на вібруючу масу, а збурювальна сила прикладалась до вільного кінця пружного елемента так, щоб він рухався згідно гармонійному закону. Теоретичні дослідження коливальних систем із використанням альтернативних моделей аналогічного типу дають можливість у подальшому дослідити і визначити оптимальні параметри більш складних видів коливань.

Список використаних джерел

1. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах / В.С. Анищенко. – М.: Наука, 1990. – 312 с.
2. Анісімов І.О. Коливання та хвилі / І.О. Анісімов. – К.: Акад. прес, 2003. – 280 с.
3. Булгаков В.М. Теорія вібраційного викопування коренеплодів / В.М. Булгаков, І.В. Головач // Зб. наук. праць НАУ “Механізація сільськогосподарського виробництва”. – К.: НАУ, 2003. – Т.XIV. – С. 34-86.
4. Глухівський Л.Й. Нелінійні коливання: чисельне полігармонічне моделювання / Л. Й. Глухівський. – К. : Альфа Пік, 2008. – 204 с.
5. Павловський М.А. Теоретична механіка. Підручник / М.А. Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.

6. Рудяк В.Я. Математические модели природных явлений и технологических процессов. Часть I / В.Я. Рудяк. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – Ч. I. – 181 с.
7. Сидоренко В.В. Малые колебания в механических системах / В.В. Сидоренко.– М.: МФТИ, 2004. – 37 с.
8. Струтинський В.Б. Математичне моделювання процесів та систем механіки / В.Б. Струтинський. – Житомир: ЖИТИ, 2001 – 613 с.
9. Тарасевич Ю.Ю. Математическое моделирование. Колебания и волны / Ю.Ю. Тарасевич, И.В. Водолазская. – Астрахань: Астрах. гос. унив., 2004. – 80 с.
10. Хуторова О.Г. Компьютерное моделирование физических процессов / О.Г. Хуторова, Ю.М. Стенин, Р.Х. Фахртдинов и др. – Казань: КГУ, 2001. – 53 с.
11. Kelly S. Mechanical Vibrations: Theory and Applications / S.G. Kelly. – Cengage Learning, 2011. – 876 p.

Список джерел в транслітерації

1. Anishchenko V.S. Slozhnyye kolebaniya v prostykh sistemakh / V.S. Anishchenko. – M.: Nauka, 1990. – 312 s.
2. Anisimov I.O. Kolyvannya ta Khvyli / I.O. Anisimov. – K.: Akad. pres, 2003. - 280 s.
3. Bulhakov V.M. Teoriya vibratsiynoho vikopuvannya koreneplodiv / V.M. Bulhakov, I.V. Holovach // Zb. nauk. prats NAU "Mekhanizatsiya silskohospodarskoho vyrobnytstva. – K.: NAU, 2003. – T.XIV. – S. 34-86.
4. Hlukhivskyy L.Y. Neliniyni kolyvannya: chyselnoho poliharmonichne modelyuvannya / L. Y. Hlukhivskyy. – K.: Alfa Pik, 2008. – 204 s.
5. Pavlovskyy M.A. Teoretychna mekhanika. Pidruchnyk / M.A. Pavlovskyy. – K.: Tekhnika, 2002. – 512 s.
6. Rudyak V.Ya. Matematicheskiye modeli prirodnykh yavleniy i tekhnologicheskikh protsessov. Chast I / V.Ya. Rudyak. – Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2003. – CH. I. – 181 s.
7. Sidorenko V.V. Malyye kolebaniya v mekhanicheskikh sistemakh / V.V. Sidorenko. – M.: MFTI, 2004. – 37 s.
8. Strutynskyy V.B. Matematychne modelyuvannya protsesiv ta system mekhaniky / V.B. Strutynskyy. – Zhytomyr: ZHITI, 2001 – 613 s.
9. Tarasevich Yu.Yu. Matematicheskoye modelirovaniye. Kolebaniya i volny / Yu.Yu. Tarasevich, I.V. Vodolazskaya. – Astrakhan: Astra. gos. univ., 2004. – 80 s.
10. Khutorova A.G. Komp'yuternoye modelirovaniye fizicheskikh protsessov / A.G. Khutorova, Yu.M. Stenina, R.KH. Fakhrtdinov i dr. – Kazan: KGU, 2001. – 53 s.
11. Kelly S. Mechanical Vibrations: Theory and Applications / S.G. Kelly. – Cengage Learning, 2011. – 876 p.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ВИБРАЦИОННЫХ ПРИВОДАХ МАШИН

Аннотация. *Разработана и теоретически исследована модель, описывающая движение вынужденных гармонических колебаний упругих механических систем в вязкой среде. Исследован случай возбуждения без влияния внешних сил непосредственно на вибрирующую массу. При этом считалось, что вынужденная сила приложена к свободному концу упругого элемента так, чтобы он двигался согласно гармоническому закону. Получено выражение эквивалентной упругой силы и эквивалентного дифференциального уравнения гармонического колебательного движения. Проанализированы режимы таких колебаний в условиях вязкой среды. Проанализированы режимы таких колебаний в условиях вязкой среды.*

Ключевые слова: *упругая модель, вынужденная сила, вибрирующая масса, система дифференциальных уравнений, упругий элемент, математическая модель.*

THEORETICAL STUDY OF FORCED HARMONIC OSCILLATIONS OF VIBRATING ACTUATORS MACHINES

Annotation. *Developed and investigated theoretically model describing the motion of forced harmonic oscillations of elastic mechanical systems in a viscous medium. The case of driving without the influence of external forces directly on the vibrating mass. It was assumed that the forced force is applied to the free end of the elastic member so as to move according to the harmonic law. An expression equivalent to the elastic force and the equivalent differential equation of harmonic vibrational motion. We analyzed the modes of oscillation in a viscous medium. We analyzed the modes of oscillation in a viscous medium.*

Key words: *elastic model, the forced power vibrating mass, the system of differential equations of the elastic member, a mathematical model.*