Адамчук В. В.<sup>1</sup>Булгаков В. М.<sup>2</sup>Калетник Г. Н.<sup>3</sup>Куценко А. Г.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальный научный центр “Институт механизации и электрификации сельского хозяйства”

<sup>2</sup>Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

<sup>3</sup>Винницкий национальный аграрный университет

Adamchuk V. V.<sup>1</sup>Bulgakov V. M.<sup>2</sup>Kaletnik G. N.<sup>3</sup>Kutsenko A. G.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>National Scientific Center “Institute for Agricultural Engineering and Electrification”

<sup>2</sup>National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

<sup>3</sup>Vinnitsia National Agrarian University

УДК 534.1

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЯМОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН

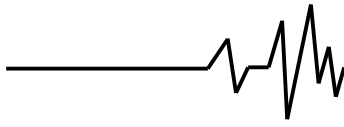
Аналитически рассмотрена и предложена схема прямого метода граничных элементов для случая стационарных колебаний пластин. Для конкретной численной реализации избраны линейные граничные элементы, на которых неизвестные функции заменяются неизвестными постоянными. Записаны соответствующие интегральные соотношения метода граничных элементов. Детально продемонстрирована процедура нахождения фундаментального решения и коэффициентов влияния.

**Ключевые слова:** пластина, волна, граничный элемент, фундаментальное решение, коэффициенты влияния.

**Введение.** Для современного развития сложной сельскохозяйственной техники характерно появление новых более мощных машин и механизмов. Увеличение мощности оборудования приводит к значительному росту действующих на него динамических нагрузок [5]. В связи с этим актуальной является проблема защиты элементов конструкций сельскохозяйственных машин от вибрационного и ударного действия, то есть

уменьшение уровня колебаний и повышение их надежности и долговечности.

Эту задачу можно решить, если правильно использовать элементы машин и механизмов, которые имеют периодическую структуру. В литературе хорошо известен тот факт, что данные элементы могут быть волноводами, которые имеют способность пропускать без искажений волны определенных частот, а другие при этом



гасяться полностью [1, 4, 7, 9, 13, 20]. Поэтому периодические механические системы можно на практике использовать как механические гасители колебаний элементов сельскохозяйственной техники.

В современной механике существует много методов исследования разного рода волн в периодических механических системах. Исследования одномерной и квазиодномерной проблемы распространения волн в балках и пластинах привело к разработке целого ряда аналитических методов [2]. Отметим метод матрицы переноса [19], суть которого состоит в построении матрицы, которая связывает динамические и кинематические характеристики на противоположных частях периода, и в последующем отыскании постоянных распространения волны через собственные значения этой матрицы. Так же хорошо известны метод разложения решения по пространственным модам [16] и вариационные методы [12], которые основаны на соотношениях баланса энергии и есть развитием метода Релея и Релея – Ритца.

Одним из популярных методов, который был успешно использован при рассмотрении существенно двухмерных задач – это метод конечных элементов [3, 6, 11, 14, 15, 18]. Однако метод конечных элементов нельзя рассматривать как лучшее дополнение к аналитическим методам исследования явления распространения волн в периодических системах, поскольку соответствующие задачи есть линейными граничными задачами для дифференциальных уравнений. В связи с последним обстоятельством лучшим для решения подобных задач является метод граничных элементов.

**Цель исследования.** Разработать схему построения прямого метода граничных элементов для исследования стационарных колебаний пластин, закрепленных периодически.

#### Результаты исследований.

Фундаментальному решению уравнения стационарных колебаний пластины должно удовлетворять следующее уравнение:

$$\Delta \Delta w^*(x, y) - p^4 w^*(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{D}. \quad (1)$$

Для его нахождения будем использовать преобразование Фурье:

$$W^*(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha x + \beta y)} w^*(x, y) dx dy. \quad (2)$$

Вследствие использования преобразования (2) к уравнению (1) и

последующего решения полученного алгебраического уравнения, находим:

$$W^*(\alpha, \beta) = \frac{1}{D} \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)^2 - p^4}. \quad (3)$$

Воспроизведение оригинала за формулой обращения:

$$w^*(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha x + \beta y)} W^*(\alpha, \beta) d\alpha d\beta. \quad (4)$$

Для освобождения от кратных интегралов перейдем к полярной системе координат:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \\ \alpha &= p \cos \vartheta, \quad \beta = p \sin \vartheta, \\ d\alpha d\beta &= p d\vartheta dp, \end{aligned} \quad (5)$$

что позволяет представить фундаментальное решение в следующем виде:

$$w^*(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{irp \cos(\varphi - \vartheta)} \frac{p d\vartheta dp}{\rho^4 - p^4}. \quad (6)$$

Поскольку производная по  $\varphi$  от подынтегральной функции есть функцией нечетной относительно  $\vartheta = \varphi$ , то сам интеграл по полному кругу  $\vartheta \in [0, 2\pi]$  не зависит от  $\varphi$ . Таким образом, не уменьшая общности, можем положить  $\varphi = \pi/2$ . Тогда принимая во внимание интегральное представление функции Бесселя первого рода [10, 17]:

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \vartheta) d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iz \sin \vartheta} d\vartheta. \quad (7)$$

Выражение (6) можно записать в виде:

$$w^*(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi p^2 D} \int_0^{\infty} J_0(r\rho) \rho \left[ \frac{1}{\rho^2 - p^2} - \frac{1}{\rho^2 + p^2} \right] d\rho. \quad (8)$$

Поскольку  $J_0(z)$  есть целой функцией в производной ограниченной области комплексной плоскости [17], тогда задача сводится к нахождению интегралов.

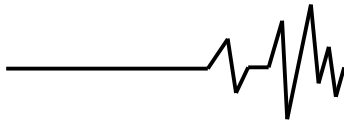
Для этого введем в рассмотрение функцию Ханкеля первого рода:

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z),$$

где  $Y_0(z)$  – функция Бесселя второго рода.

В отличии от  $J_0(z)$ , функция  $H_0^{(1)}(z)$  стает ничтожно малой независимо от направления, по котором ее аргумент приближается к бесконечно отдаленной точке.

Интеграл, который отвечает второму слагаемому в квадратных скобках (8), будет равным:



$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{J_0(r\rho)\rho}{\rho^2 + p^2} d\rho = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(r\rho)\rho}{\rho^2 + p^2} d\rho = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_0^{(1)}(r\rho)\rho}{\rho^2 + p^2} d\rho, \quad (9)$$

находится на основе контурного интегрирования вполне аналогично тому, как это было сделано в [8]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(r\rho) \frac{\rho}{\rho^2 + p^2} d\rho = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_L H_0^{(1)}(r\rho) \frac{\rho}{\rho^2 + p^2} d\rho = \operatorname{Res}_{\rho=ip} \frac{H_0^{(1)}(r\rho)\rho}{\rho^2 + p^2} = i\pi H_0^{(1)}(ir\rho) = 2K_0(r\rho), \quad (10)$$

где  $K_0(r\rho)$  – модифицированная функция Бесселя третьего рода (функция Макдональда).

Что касается интеграла, который соответствует первому слагаемому в квадратных скобках в (8):

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{J_0(r\rho)\rho}{\rho^2 - p^2} d\rho, \quad (11)$$

то для него тоже имеем полную аналогию с [8]. Значения этого интеграла будет зависеть от пути обхода полюсов на действительной оси.

В результате получим три возможных фундаментальных решений:

$$w^*(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi p^2 D} \left[ K_0(pr) - \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(pr) \right],$$

$$w^*(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi p^2 D} \left[ K_0(pr) + \frac{\pi i}{2} H_0^{(2)}(pr) \right], \quad (12)$$

$$w^*(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi p^2 D} \left[ K_0(pr) + \frac{\pi}{2} Y_0(pr) \right],$$

где  $H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z)$  – функция Ханкеля второго рода, причем:

$$r = |\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Первое из решений (12) соответствует волне, которая распространяется на бесконечность, второе – волне, которая распространяется с бесконечности, а третье есть суперпозицией первых двух.

Для получения граничных интегральных уравнений воспользуемся вариационным принципом Максвелла – Бетти, согласно которого работа одной системы сил на перемещениях, вызванных другой системой

$$w(\vec{\xi}) = \int_{\Gamma} \left( -V^*(\vec{x}, \vec{\xi}) w(\vec{x}) - M^*(\vec{x}, \vec{\xi}) \theta(\vec{x}) + \theta^*(\vec{x}, \vec{\xi}) M(\vec{x}) + w^*(\vec{x}, \vec{\xi}) V(\vec{x}) \right) d\Gamma(\vec{x}) + \int_{\Omega} q^*(\vec{x}) w(\vec{x}, \vec{\xi}) d\Omega(\vec{x}) - \sum_{k=1}^K \bar{M}_{\tau}^*(\vec{s}_k, \vec{\xi}) w(\vec{s}_k) + \sum_{k=1}^K \bar{M}_{\tau}(\vec{s}_k) w^*(\vec{s}_k, \vec{\xi}) \quad (15)$$

сил, равна работе другой системы сил на перемещениях, вызванных первой системой:

$$\int_{\Gamma} \left( Q^*(\vec{x}) w(\vec{x}) + M^*(\vec{x}) \theta(\vec{x}) + M_{\tau}^*(\vec{x}) \theta_{\tau}(\vec{x}) \right) d\Gamma(\vec{x}) + \int_{\Omega} q^*(\vec{x}) w(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) = \int_{\Omega} q(\vec{x}) w^*(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) + \int_{\Gamma} \left( Q(\vec{x}) w^*(\vec{x}) + M(\vec{x}) \theta^*(\vec{x}) + M_{\tau}(\vec{x}) \theta_{\tau}^*(\vec{x}) \right) d\Gamma(\vec{x}) \quad (13)$$

Здесь введены обозначения:

$$M_n(\vec{x}) = M_x(\vec{x}) n_x^2 + M_y(\vec{x}) n_y^2 + 2M_{xy}(\vec{x}) n_x n_y,$$

$$M_{\tau}(\vec{x}) = M_{xy}(\vec{x}) (n_x^2 - n_y^2) - (M_x(\vec{x}) - M_y(\vec{x})) n_x n_y,$$

$$\theta_n(\vec{x}) = -\frac{\partial w(\vec{x})}{\partial x} n_x - \frac{\partial w(\vec{x})}{\partial y} n_y,$$

$$\theta_{\tau}(\vec{x}) = \frac{\partial w(\vec{x})}{\partial x} n_y - \frac{\partial w(\vec{x})}{\partial y} n_x,$$

где  $\vec{n} = (n_x, n_y)$  – вектор внешней нормали к границе  $\Gamma$ ;  $\vec{\tau} = (-n_y, n_x)$  – вектор касательной в направлении, которое совпадает с направлением интегрирования ( $d\tau = d\Gamma(\vec{x})$ ).

Направление интегрирования выбираем таким образом, чтобы область  $\Omega$  оставалась слева во время прохождения вдоль  $\Gamma$ .

В (13) интегралы по границе  $\Gamma$  соответствуют работе поверхностных сил, а интегралы по области  $\Omega$  – работе объемных сил.

Для формулирования утверждения теоремы взаимности в терминах эффективной перерезающей силы (13) можно записать в виде:

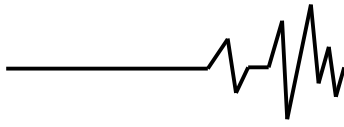
$$\int_{\Gamma} (V^* w + M^* \theta) d\Gamma + \int_{\Omega} q^* w d\Omega + \sum_{k=1}^K \bar{M}_{\tau}^* w = \int_{\Gamma} (V w^* + M \theta^*) d\Gamma + \int_{\Omega} q w^* d\Omega + \sum_{k=1}^K \bar{M}_{\tau} w^*, \quad (14)$$

где для упрощения опущен индекс  $n$ .

Если в качестве  $w^*$  взять фундаментальное решение уравнения стационарных колебаний пластины:

$$w^* = w^*(\vec{x}, \vec{\xi}) = w^*(\vec{x} - \vec{\xi}),$$

где  $\vec{\xi} = (\xi, \eta)$  – произвольная точка области  $\Omega$ , тогда в силу основного интегрального свойства дельта-функции соотношение (14) принимает вид:



Интегрально соотношение (15) основа прямого метода граничных элементов. Оно выражает прогиб посредине пластины через значения кинематических и динамических характеристик, заданных на ее границе.

Направляя точку  $\xi$  на границу  $\Gamma$ , получаем граничное интегральное уравнение вида:

$$w(\xi) = \int_{\Gamma} (-V^*(\bar{x}, \xi)w(\bar{x}) - M^*(\bar{x}, \xi)\theta(\bar{x}) + \theta^*(\bar{x}, \xi)M(\bar{x}) + w^*(\bar{x}, \xi)V(\bar{x}))d\Gamma(\bar{x}). \quad (16)$$

Поскольку на границе  $\Gamma$  задано только две из четырех величин  $w$ ,  $\theta$ ,  $M$  и  $V$ , тогда для того, чтобы получить замкнутую систему граничных интегральных уравнений, (16) нужно дополнить еще одним соотношением. Его можно получить, если продифференцировать (17) в направлении нормали в точке  $\xi$ :

$$\theta(\xi) = \int_{\Gamma} \left( -\frac{\partial V^*(\bar{x}, \xi)}{\partial \bar{n}_{\xi}} w(\bar{x}) - \frac{\partial M^*(\bar{x}, \xi)}{\partial \bar{n}_{\xi}} \theta(\bar{x}) + \frac{\partial \theta^*(\bar{x}, \xi)}{\partial \bar{n}_{\xi}} M(\bar{x}) + \frac{\partial w^*(\bar{x}, \xi)}{\partial \bar{n}_{\xi}} V(\bar{x}) \right) d\Gamma(\bar{x}). \quad (17)$$

Если  $\xi$  направить на границу  $\Gamma$ , тогда (16) и (17) будут собой представлять систему граничных интегральных уравнений стационарных колебаний пластин.

В случае простой геометрии области систему (16) – (17) можно исследовать аналитически.

В общем, для нахождения ее решения используют различные способы дискретизации интегралов, которые получили название метода граничных элементов.

Для конкретной численной реализации выбираем линейные граничные элементы, то есть границу аппроксимируем ломаной, а неизвестные функции заменяем неизвестными постоянными, которые соответствуют их значениям в средних точках элементов. Вследствие такой дискретизации граничные интегральные уравнения (16) – (17) сводятся к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} w(\bar{x}_i) &= \sum_{j=1}^N [A_{ij}w(\bar{x}_j) + B_{ij}\theta_n(\bar{x}_j) + C_{ij}M_n(\bar{x}_j) + D_{ij}V_n(\bar{x}_j)], \\ \theta_n(\bar{x}_i) &= \sum_{j=1}^N [E_{ij}w(\bar{x}_j) + F_{ij}\theta_n(\bar{x}_j) + G_{ij}M_n(\bar{x}_j) + H_{ij}V_n(\bar{x}_j)], \end{aligned} \quad (18)$$

$$A_{ij} = \frac{p}{4\pi} x_i^j \int_{-a_j}^{a_j} \left( Z_3(pr) - 4 \frac{Z_2(pr)}{pr} \right) \frac{dy^j}{r} - \frac{1-\nu}{4\pi} x_i^j Z_2(pr) \frac{y^j - y_i^j}{r^2} \Big|_{y^j=-a_j}^{y^j=a_j},$$

$i = 1, 2, \dots, N$ ,

где  $N$  – количество граничных элементов.

$$A_{ij} = - \int_{\bar{x} \in \Gamma_j} V_n^*(\bar{x}, \bar{x}_i) d\bar{x}, \quad B_{ij} = - \int_{\bar{x} \in \Gamma_j} M_n^*(\bar{x}, \bar{x}_i) d\bar{x},$$

$$C_{ij} = \int_{\bar{x} \in \Gamma_j} \theta_n^*(\bar{x}, \bar{x}_i) d\bar{x}, \quad D_{ij} = \int_{\bar{x} \in \Gamma_j} w^*(\bar{x}, \bar{x}_i) d\bar{x},$$

$$E_{ij} = - \int_{\bar{x} \in \Gamma_j} \frac{\partial V_n^*(\bar{x}, \bar{x}_i)}{\partial \bar{n}_{\xi}} d\bar{x}, \quad F_{ij} = - \int_{\bar{x} \in \Gamma_j} \frac{\partial M_n^*(\bar{x}, \bar{x}_i)}{\partial \bar{n}_{\xi}} d\bar{x}, \quad (19)$$

$$G_{ij} = \int_{\bar{x} \in \Gamma_j} \frac{\partial \theta_n^*(\bar{x}, \bar{x}_i)}{\partial \bar{n}_{\xi}} d\bar{x}, \quad H_{ij} = \int_{\bar{x} \in \Gamma_j} \frac{\partial w^*(\bar{x}, \bar{x}_i)}{\partial \bar{n}_{\xi}} d\bar{x}$$

В (19) даны коэффициенты влияния  $j$ -го элемента на прогиб и угол наклона  $i$ -го элемента.

Для вычисления коэффициентов (19) были введены следующие обозначения. Перейдем от глобальной системы  $(x, y)$  к локальной системе, связанной с  $j$ -м элементом (рис. 1):

$$\begin{aligned} x^j &= (x - x_j) \cos \beta_j + (y - y_j) \sin \beta_j, \\ y^j &= -(x - x_j) \sin \beta_j + (y - y_j) \cos \beta_j. \end{aligned} \quad (20)$$

Кроме того, нормаль к  $i$ -му элементу в локальной системе, связанной с  $j$ -м элементом есть:

$$n^j = (n_{x_i}^j, n_{y_i}^j) = (n_1, n_2). \quad (21)$$

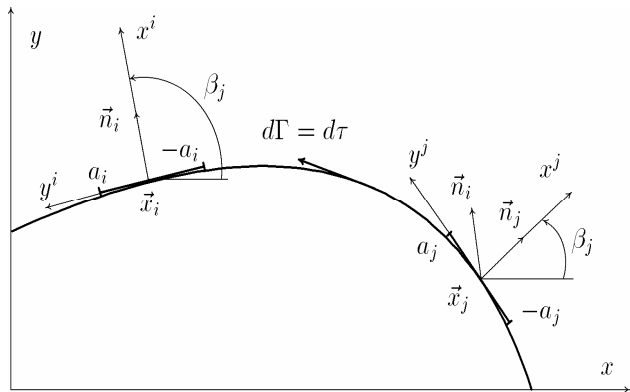
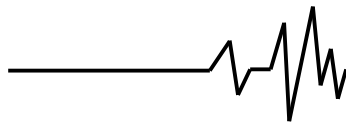


Рис. 1. Локальные системы координат, связанные с граничными элементами

После громоздких, но очевидных преобразований находим выражения для недиагональных коэффициентов ( $i \neq j$ ):



$$\begin{aligned}
 B_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-a_j}^{a_j} \frac{Z_2(pr)}{r^2} \left( (x_i^j)^2 + \nu(y^j - y_i^j)^2 \right) dy^j + \frac{(1+\nu)D}{x_i^j} C_{ij}, \\
 C_{ij} &= -\frac{x_i^j}{4\pi p D} \int_{-a_j}^{a_j} \frac{Z_1(pr)}{r} dy^j, \quad D_{ij} = \frac{1}{4\pi p^2 D} \int_{-a_j}^{a_j} Z_0(pr) dy^j, \\
 E_{ij} &= \frac{p}{4\pi} \left[ n_1 \left\{ p \int_{-a_j}^{a_j} \left[ Z_4(pr) \frac{(x_i^j)^2}{r^2} - Z_3(pr) \frac{r^2 + 6(x_i^j)^2}{pr^3} + Z_2(pr) \frac{4}{p^2 r^2} \right] dy^j - (1-\nu) \left[ \left( Z_3(pr) \frac{(x_i^j)^2}{r^2} - \frac{Z_2(pr)}{pr} \right) \frac{y^j - y_i^j}{r} \right] \Big|_{y^j=-a_j}^{y^j=a_j} \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + n_2 \left\{ \left[ Z_3(pr) - 4 \frac{Z_2(pr)}{pr} + (1-\nu) \left( Z_3(pr) \left( \frac{y^j - y_i^j}{r} \right)^2 - \frac{Z_2(pr)}{pr} \right) \right] \frac{x_i^j}{r} \right\} \Big|_{y^j=-a_j}^{y^j=a_j} \right], \\
 G_{ij} &= -\frac{n_1}{4\pi D} \int_{-a_j}^{a_j} \left( Z_2(pr) \frac{(x_i^j)^2}{r^2} - \frac{Z_1(pr)}{pr} \right) dy^j - \frac{n_2}{4\pi p D} Z_1(pr) \frac{x_i^j}{r} \Big|_{y^j=-a_j}^{y^j=a_j}, \\
 F_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \left[ p n_1 \int_{-a_j}^{a_j} \left( Z_3(pr) \frac{(x_i^j)^2}{r^2} + \nu(y^j - y_i^j)^2 \right) - (3+\nu) \frac{Z_2(pr)}{pr} \right] \frac{x_i^j}{r} dy^j + \\
 &\quad + n_2 \left( \frac{Z_2(pr)}{r^2} \left( (x_i^j)^2 + \nu(y^j - y_i^j)^2 \right) - (1-\nu) \frac{Z_1(pr)}{pr} \right) \Big|_{y^j=-a_j}^{y^j=a_j}, \quad H_{ij} = -C_{ij} n_1 + \frac{Z_0(pr)}{4\pi p^2 D} n_2 \Big|_{y^j=-a_j}^{y^j=a_j}.
 \end{aligned}$$

где  $a_j$  – половина длины  $j$ -го граничного элемента,

$$Z_n(t) = \frac{\pi i}{2} H_n^{(1)} - K_n(t), \quad r = \sqrt{(y^j - y_i^j)^2 + (x_i^j)^2}.$$

Пять диагональных коэффициентов определяются сразу из предыдущих выражений для недиагональных коэффициентов, если положить, что:

$$x_i^j = y_i^j = 0, \quad n_1 = 1, \quad n_2 = 0,$$

тогда:

$$B_{jj} = -\frac{1}{2\pi p} \left[ \frac{\pi i}{2} I_H(pa_j) + I_K(pa_j) - (1-\nu)Z_1(pa_j) \right],$$

$$C_{jj} = 0,$$

$$D_{jj} = -\frac{1}{2\pi p^3 D} \left[ \frac{\pi i}{2} I_H(pa_j) - I_K(pa_j) \right],$$

$$G_{jj} = -\frac{1}{2\pi p D} \left[ \frac{\pi i}{2} I_H(pa_j) + I_K(pa_j) - Z_1(pa_j) \right],$$

$$H_{jj} = 0,$$

где

$$I_H(x) = \int_0^x H_0^{(1)}(x) dx, \quad I_K(x) = \int_0^x K_0(x) dx.$$

Другие три коэффициенты выражаются через сингулярные интегралы, которые следует рассматривать как главное значение по Коши. Поэтому для их определения граничный

элемент следует рассматривать в виде контура, изображенного на рис. 2 при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

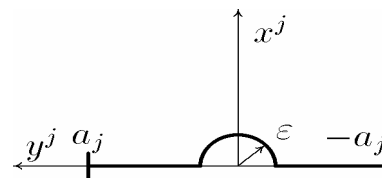


Рис. 2. Контур интегрирования для коэффициентов собственного влияния

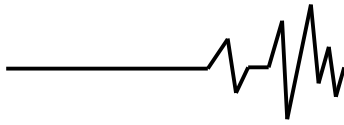
Конечный результат такого асимптотического анализа можно подать в виде:

$$A_{jj} = F_{jj} = 1/2,$$

$$E_{jj} = \frac{p}{2\pi} \left[ \int_0^{pa_j} Z_0(x) dx \frac{\pi i}{2} + Z_3(pa_j) - (3+\nu) \frac{Z_2(pr)}{pa_j} \right]. \quad (22)$$

Выражения для коэффициентов вместе с системой линейных алгебраических уравнений (18) составляют основу численной схемы решения граничных задач теории стационарных колебаний пластин. Значение прогиба во внутренних точках пластины после решения системы линейных алгебраических уравнений находятся из дискредитированного соответствующим образом соотношения (16).

Данная численная схема метода граничных элементов была реализована с



помощью языка программирования Pascal. Для ее апробации были проведены численные расчеты задач, которые имеют аналитическое решение. Сопоставление полученных результатов показало корректность реализации и высокую эффективность предложенного метода.

**Выводы.** Таким образом, в данной работе детально представлена численная схема метода граничных элементов для исследования явления распространения волн изгиба вдоль двоякопериодических механических систем на примере пластин.

Для увеличения эффективности использования метода граничных элементов в задачах о распространении волн в двоякопериодических системах, опираясь на использование метода функций влияния, можно разработать подход, который позволит сводить решение задач о стационарных колебаниях пластин, например, закрепленных периодическим образом, к обобщенной алгебраической проблеме на собственные числа.

#### Список использованных источников

1. Alam N., Asani N.T. 1984: Vibration and damping analysis of multiplayered rectangular plate with constrained viscoelastic layers // *J. Sound and Vibr.* – Vol. 97, N 4. – S. 597–614.
2. Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д., Маслов В.П., Римский-Корсаков А.В. 1974: Распространение волн в конструкциях из тонких стержней и пластин. – М.: Наука, – 102 с.
3. Banerjee J.R., Su H. 2004: Development of a dynamic stiffness matrix for free vibration analysis of spinning beams // *Computers and Structures.* – Vol. 82. – S. 2189–2197.
4. Doyle J.F. 1997: Wave propagation in structures // Springer-Verlag.
5. Golovach I., Bulgakov V., Finko S. 2003: Yeksperimentalni doslidzhennya yenergetichnikh pokaznikov vibratsiyynogo vikopuyuchogo robochogo organu // IV Internatioal Research and Technical Conference, MOTROL – Vol. 6. – S. 32–40.
6. Duhamel D., Mace B.R., Brennan M.J. 2006: Finite element analysis of the vibration of waveguides and periodic structures // *J. Sound and Vibr.* – Vol. 294, N5. – S. 205 – 220.
7. Kutsenko A.G. 1997: Poshirennya khvil v balkakh, zakriplenikh periodichnim chinom // *Visnik Kіivskogo universitetu. Ser. fiz.-mat. nauk.*, N 3. – S. 69–76.
8. Куценко А.Г. 2014: Метод граничных элементов у задачах про стаціонарні коливання

одноімірних періодичних систем // *Механізація та електрифікація сільського господарства : Міжвідомчий тематичний наук. зб. – Глеваха. – Вип. 99. Т.2. – С. 401–411.*

9. A. Kutsenko, V. Yaremenko, O. Chernysh, M. Bondar O вынужденных колебаниях в периодических одномерных волноводах // *MOTROL – Vol. 16. No 3. – С. 248–252.*

10. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.: Физматгиз, 1963. – 379 с.

11. Lee J., Thompson D.J. 2001: Dynamic stiffness formulation, free vibration and wave motion of helical springs // *J. Sound and Vibr.* – Vol. 239. – S. 297–320.

12. Mead D.J., Mallik A.K. 1976: An approximate method of predicting the responds of periodically supported beams subjected to random con-vented loading // *J. Sound and Vibr.* – Vol. 47, N 4, P. 457–471.

13. Mead D.J. 1996: Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from Southampton, 1964-1995// *J. Sound and Vibr.* – Vol. 190, N3. – S. 495–524.

14. Mace B.R., Duhamel D., Brennan M.J., Hinke L. 2004: Wavenumber prediction using finite element analysis // *Eleventh International Congress on Sound and Vibration, St. Peterburg.*

15. Mencik J.M., Ichchou M.N. 2007: Wave finite elements in guided elastodynamics with internal fluid // *Inter. J. of Sol. And Structures.* – Vol. 44, – S. 2148–2167.

16. Ouyang H.J., Williams F.W., Kennedy D. 1994: A General method for an alyzing wave propagation along longitudinally periodic structures // *J. Sound and Vibr.* – Vol. 177, N2. – S. 277–281.

17. Справочник по специальным функциям. 1979: // Под. ред. М.А. Абрамовича, И. Стиган. – М.: Наука. – 832 с.

18. Tyutekin V.V. 2006: Circumferential and helical normal waves of a cylindrical waveguide: helical waves in s free space // *Acoustical Physics.* – Vol. 52, N 4. – S. 471–476.

19. Zhong W.X., Williams F.W. 1995: On the direct solution of wave propagation for repetitive structures // *J. Sound and Vibr.* – Vol. 181, N 3. – S. 485–501.

20. Wang D., Zhou C., Rong J. 2003: Free and forced vibration of repetitive structures // *Inter. J. of Solids and Structure.* – Vol. 40. – S. 5477–5494.

#### Список источников в транслитерации

1. Alam N., Asani N.T. 1984: Vibration and damping analysis of multiplayered rectangular

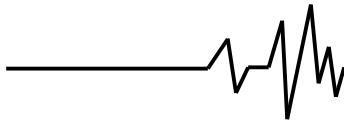


plate with constrained viscoelastic layers // J. Sound and Vibr. – Vol. 97, N 4. – S. 597–614.

2. Bobrovnikskiy Yu.I., Genkin M.D., Maslov V.P., Rimskiy-Korsakov A.V. 1974: Rasprostraneniye voln v konstruktsiyakh iz tonkikh sterzhney i plastin. – M.: Nauka, – 102 s.

3. Banerjee J.R., Su H. 2004: Development of a dynamic stiffness matrix for free vibration analysis of spinning beams // Computers and Structures. – Vol. 82. – S. 2189–2197.

4. Doyle J.F. 1997: Wave propagation in structures // Springer-Verlag.

5. Golovach I., Bulgakov V., Finko S. 2003: Yeksperimentalni doslidzhennya yenergetichnikh pokaznikiv vibratsiynogo vikopuyuchogo robochogo organu // IV International Research and Technical Conference, MOTROL – Vol. 6. – S. 32–40.

6. Duhamel D., Mace B.R., Brennan M.J. 2006: Finite element analysis of the vibration of waveguides and periodic structures // J. Sound and Vibr. – Vol. 294, N5. – S. 205 – 220.

7. Kutsenko A.G. 1997: Poshirennya khvil v balkakh, zakriplenikh periodichnim chinom // Visnik Kiivskogo universitetu. Ser. fiz.-mat. nauk., N 3. – S. 69–76.

8. Kutsenko A.H. 2014: Metod hranychnykh elementiv u zadachakh pro statsionarni kolyvannya odnomirnykh periodychnykh system // Mekhanizatsiya ta elektrifikatsiya silskoho hospodarstva: Mizhvidomchiy tematychnyy nauk. zb. – Hlevakha. – Vyp. 99. T.2. – S. 401–411.

9. A. Kutsenko, V. Yaremenko, O. Chernysh, M. Bondar O вынужденных колебаниях в периодических одномерных волноводах // MOTROL – Vol. 16. No 3. – С. 248–252.

10. Lebedev N.N. Spetsial'nyye funktsii i ikh prilozheniya. – M.: Fizmatgiz, 1963. – 379 s.

11. Lee J., Thompson D.J. 2001: Dynamic stiffness formulation, free vibration and wave motion of helical springs // J. Sound and Vibr. – Vol. 239. – S. 297–320.

12. Mead D.J., Mallik A.K. 1976: An approximate method of predicting the responds of periodically supported beams subjected to random con-veccted loading // J. Sound and Vibr. – Vol. 47, N 4, P. 457–471.

13. Mead D.J. 1996: Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from Southampton, 1964-1995// J. Sound and Vibr. – Vol. 190, N 3. – S. 495–524.

14. Mace B.R., Duhamel D., Brennan M.J., Hinke L. 2004: Wavenumber prediction using finite element analysis // Eleventh International Congress on Sound and Vibration, St. Peterburg.

15. Mencik J.M., Ichchou M.N. 2007: Wave

finite elements in guided elastodynamics with internal fluid // Inter. J. of Sol. And Structures. – Vol. 44, – S. 2148–2167.

16. Ouyang H.J., Williams F.W., Kennedy D. 1994: A General method for an alyzing wave propagation along longitudinally periodic structures // J. Sound and Vibr. – Vol. 177, N2. – S. 277–281.

17. Справочник по специальным функциям. 1979: // Под. ред. М.А. Абрамовича, И. Стиган. – М.: Наука. – 832 с.

18. Tyutekin V.V. 2006: Circumferential and helical normal waves of a cylindrical waveguide: helical waves in s free space// Acoustical Physics. – Vol. 52, N 4. – S. 471–476.

19. Zhong W.X., Williams F.W. 1995: On the direct solution of wave propagation for repetitive structures // J. Sound and Vibr. – Vol. 181, N 3. – S. 485–501.

20. Wang D., Zhou C., Rong J. 2003: Free and forced vibration of repetitive structures // Inter. J. of Solids and Structure. – Vol. 40. – S. 5477–5494.

#### ВИКОРИСТАННЯ ПРЯМОГО МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ СТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ ПЛАСТИН

*Анотація.* Аналітично розглянута і запропонована схема прямого методу граничних елементів для випадку стаціонарних коливань пластин. Для конкретної чисельної реалізації обрані лінійні граничні елементи, на яких невідомі функції замінюються невідомими постійними. Записані відповідні інтегральні співвідношення методу граничних елементів. Детально продемонстрована процедура знаходження фундаментального рішення і коефіцієнтів впливу.

**Ключові слова:** пластина, хвиля, граничний елемент, фундаментальне рішення, коефіцієнти впливу.

#### TO BOUNDARY ELEMENT METHOD IN PROBLEMS OF BENDING VIBRATIONS OF PLATES

*Annotation.* The schematic of boundary element method for the case of bending vibrations of plates is considered. For certain numeral realization linear border elements on that unknown functions replace unknown permanent are select. Corresponding integral correlations of method of border elements are written. Procedure of being of fundamental decision and coefficients of influence is shown in detail.

**Key words:** plate, wave, boundary element, fundamental decision, coefficients of influence.