ЕНЕРГОТЕХНОЛОГІЇ ТА АЛЬТЕРНАТИВНІ ДЖЕРЕЛА ЕНЕРГІЇ

УДК 519:620.9

МЕТОДИКА ПОРІВНЯННЯ ДЕЯКИХ ЕНЕРГЕТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК В СИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧАХ

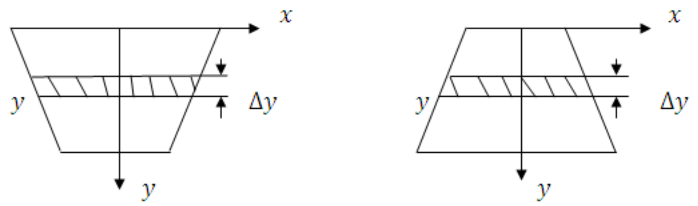
Дубчак Віктор Маколайович *к.т.н., доцент*
Новицька Людмила Іванівна *к.п.н., доцент*
Вінницький національний аграрний університет
Dubchak V.
Novitskaya L.
Vinnytsia National Agrarian University

Анотація: *розглядаються математичні моделі конкретних техніко-енергетичних завдань на підставі відомих законів фізики, досліджуються і порівнюються між собою протилежно орієнтовані по вертикалі наведені моделі.*
Ключові слова: *закон Паскаля, обчислення роботи, математичні моделі, сіметрічні задачі.*

Вступ

Мета даної роботи показати застосування методів інтегрального числення на основі відомих законів фізики та порівняти відповідні значення, визначені згідно цих законів, числових характеристик симетричних геометричних об’єктів з діаметрально протилежною орієнтацією їх розташування у просторі [1,2].

Постановка задачі №1 (Обчислення тиску на площадку з боку рідини згідно закону Паскаля). Порівняти величини тисків з боку рідини (води) на дамбу, виконану у вигляді рівнобічної трапеції (див. рис. 1).



a) *b*)

Рис. 1. Симетрично протилежне стосовно вертикалі розташування однакових за геометрією макетів трапецієвидних вертикальних площадок

Результати. Тут a і b – основи рівнобічної трапеції ($a<b$) , h – її висота. Згадаємо , що в основі розв’язку цієї задачі лежить відомий закон Паскаля [3]:

$P = \rho h S$,де ρ – щільність рідини, h - глибина занурення деякої площадки площі S, P – величина шуканого тиску.

Позначимо P_a та P_b величини шуканих тисків приведених моделей *а*) та *б*).

Очевидно, що $P_a/P_b > 1$, оскільки більша частина площі дамби моделі *б*) знаходиться глибше у порівнянні з моделлю *а*). Яким конкретно є це співвідношення, ми наразі дізнаємось.

Виділимо елементарні площадки цієї трапеції, що знаходяться на глибині y з елементарною товщиною Δy. Величини тисків з боку рідини на ці площадки позначимо відповідно ΔP_a та ΔP_b.

Тоді $\Delta P_a \approx \rho y \Delta S_a = \rho y 2x\Delta y$, якщо $x = \frac{a}{2} + t$, тоді $\frac{2t}{b-a} = \frac{h-y}{t}$, або $t = 0{,}5(b-a)(1-\frac{y}{h})$,

$$x = \frac{a}{2} + \frac{b-a}{2}\left(1 - \frac{y}{h}\right) = 0{,}5(b - \frac{y}{h}(b-a))$$

$$\Delta P_a \approx \rho y\left(b - \frac{y}{h}(b-a)\right)\Delta y,\ \ \Delta y \to 0$$

$$P_a = \int_0^{Hh} \rho(by - \frac{y^2}{h}(b-a))dy = \rho(b\frac{y^2}{2} - \frac{1}{h}\frac{y^3}{3}(b-a))!_0^h =$$

$$= \rho(0{,}5bh^2 - \frac{1}{3}(b-a)h^2) = \frac{1}{6}\rho h^2(b-2a).$$

Аналогічно $\Delta P_b \approx \rho y 2x, \quad x = \frac{a}{2} + t, \frac{2t}{b-a} = \frac{y}{h}$, або $t = 0{,}5(b-a)\frac{y}{h}$

$$x = \frac{a}{2} + \frac{b-a}{2}\frac{y}{h}$$

тоді $\Delta P_b \approx \rho y\left(a + \frac{y}{h}(b-a)\right)\Delta y, \ \ \Delta y \to 0$, або

$$P_b = \int_0^h \rho(ay + \frac{y^2}{h}(b-a))dy = \rho(a\frac{y^2}{2} - \frac{1}{h}\frac{y^3}{3}(b-a))!_0^H =$$

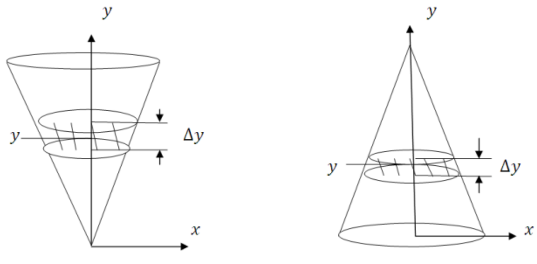
$$= \rho(0{,}5ah^2 + \frac{1}{3}(b-a)h^2) = \frac{1}{6}\rho h^2(a+2b).$$

Таким чином, $\frac{P_b}{P_a} = \frac{\frac{1}{6}\rho h^2(b-2a)}{\frac{1}{6}\rho h^2(a+2b)} = \frac{a+2b}{2a+b}$>1, якщо a<b.

Наслідки: 1-для прямокутної дамби (a=b) $\frac{P_b}{P_a} = 1,$ що і слідує очікувати;

2- для трикутної дамби, коли $a \to 0$, відношення $\frac{P_b}{P_a}$,очевидно, дорівнює 2.

Постановка задачі №2 (обчислення роботи). Порівняти величини енергетичних затрат робіт, необхідних для викачування однакової за щільністю рідини (води, пального) з двох однакових за геометрією резервуарів, виконаних у вигляді конуса, для одного з них вершина направлена донизу, для іншого – ця вершина направлена догори (див. рис.2).



a) *b*)

Рис. 2. Симетрично протилежне стосовно вертикалі розташування однакових за геометрією макетів резервуарів з деякою рідиною

Результати. При обчисленні величини роботи застосуємо відому фізичну формулу [3]:

$$A = mgh,$$

m – маса рідини, g – стала вільного падіння, h – висота підйому рідини.

Якісний розв'язок цієї задачі можливо подати і без відповідних розрахунків, оскільки для моделі *a*) більша частина маси рідини зосереджена зверху резервуару і підіймати її на верх на відміну від моделі *b*) необхідно на меншу висоту. Якщо A_a – величина необхідної роботи для викачування рідини з резервуару першої моделі *a*), A_b – та ж робота, але для моделі *b*), тоді, очевидно, $A_a < A_b$, або завжди $\frac{A_a}{A_b}$<1. Наша подальша задача полягатиме в знаходженні значення точної оцінки даного співвідношення.

Задамо геометрію симетричних резервуарів: нехай H- висота, R – радіус основи резервуарів, повністю наповнених рідиною щільності ρ. Для обчислення робіт відповідних моделей *a*) чи *b*) безпосередньо скористатись приведеною вище формулою ми не можемо, оскільки різні частини часток рідини перебувають на різних по висоті значеннях, і тому для кожної з моделей на довільній висоті y виділимо незначний (елементарний) прошарок рідини Δy, всі частки при умові $\Delta y \to 0$ можливо вважати зосередженими на висоті y. Тоді елементарна робота ΔA_a або ΔA_b визначатиметься так:

$$\Delta A_a \approx \Delta mg(H-y) = \rho\Delta Vg(H-y) = \rho g\pi r^2(H-y)\Delta y.$$

З подібності трикутників маємо умову: $\frac{R}{r} = \frac{H}{y}$, звідси $r = \frac{R}{H}y,$ тому

$$\Delta A_a \approx \rho g\pi\frac{R^2}{H^2}(H-y)y^2\Delta y,$$

при умові, що $\Delta y \to 0,$ прирости відповідних величин замінюємо їх диференціалами, і тоді наближений знак рівності замінимо точним:

$$A_a = \int_0^H \pi\rho g \frac{R^2}{H^2}(H-y)y^2 dy = \pi\rho g \frac{R^2}{H^2}\int_0^H (Hy^2 - y^3)dy =$$

$$= \pi\rho g \frac{R^2}{H^2}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^H = \pi\rho g \frac{R^2}{H^2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}\pi\rho g R^2 H^2.$$

Аналогічно обчислимо роботу A_b: $\Delta A_b \approx \rho g \pi (H-y) r^2 \Delta y$,

$\frac{r}{R} = \frac{H-y}{H}$, звідки $r = R(1 - \frac{y}{H})$ *тому* $\Delta A_b \approx \rho g \pi (H-y)\left(1 - \frac{y}{H}\right) R^2 \Delta y$, або

$$A_b = \int_0^H \pi\rho g \left(1 - \frac{y}{H}\right)(H-y)R^2 dy = \pi\rho g R^2 \int_0^H \frac{(H-y)^2}{H^2}(H-y)dy =$$

$$= -\pi\rho g \frac{R^2}{H^2}(H-y)^4\Big|_0^H = \frac{1}{4}\pi\rho g R^2 H^2.$$

Таким чином, $\frac{A_b}{A_a} = \frac{\frac{1}{4}\pi\rho g R^2 H^2}{\frac{1}{12}\pi\rho g R^2 H^2} = 3.$

Отже, для моделі b) необхідно виконати втричі більшу роботу для спустошення резервуара у порівнянні з моделлю a).

Висновок

При реалізації обчислення роботи, яку необхідно затратити на викачування рідини з конічного резервуара, потрібно виконати втричі більшу роботу для резервуара з вершиною конуса, направленого догори, у порівнянні з тим же резервуаром, якщо вершина конуса направлена донизу. Аналогічний результат в роботі приведено для оцінки величини тиску на трапецієвидну площадку з боку рідини в залежності від орієнтації цієї площадки стосовно вертикалі.

Список літератури

1. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу / Демидович Б.П. – Москва: Наука, 1971 г. – 472 с.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / пискунов Н.С. – Москва: Наука, 1978 г. – 575 с.

3. Балаш В.А. Задачи по физике и методы их решения / Балаш В.А. – Москва: Просвещение, 1974 г. – 430 с.

4. Электрические системы. Математические задачи электро-энергетики: Учебник для студентов вузов / Под ред. В.А. Веникова – 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. школа, 1981. – 288 с.

5. Зельдович Я.Б., Яглом И.М. Высшая математика для начи-нающих физиков и техников. – Москва: Наука, 1982. – 512 с.

References

1. Demidovich B.P. Zadachi i uprazhneniya po matematicheskomu analizu / Demidovich B.P. - Moskva: Nauka, 1971 g. - 472 s.

2. Piskunov N.S. Differentsial'noye i Integral'noye ischisleniye / Piskunov N.S. - Moskva: Nauka, 1978 g. - 575 s.

3. Balash V.A. Zadachi po fizike i metody ikh resheniya / Balash V.A. - Moskva: Prosveshcheniye, 1974 g. - 430 s.

4. Elektricheskiye sistemy. Matematicheskiye zadachi elektro-energetiki: Uchebnik dlya studentov vuzov / Pod red. V.A. Venikova - vtoroy izd., Pererab. i dop. M .: Vyssh. shkola, 1981. - 288 s.

5. Zel'dovich YA.B., Yaglom I.M. Vysshaya matematika dlya nachi-nayushchikh fizikov i tekhnikov. - Moskva: Nauka, 1982. - 512 s.

МЕТОДИКА СРАВНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Аннотация: *рассматриваются математические модели конкретных технико-энергетических задач на основании известных законов физики, исследуются и сравниваются между собой противоположно ориентированные по вертикали приведенные модели.*

Ключевые слова: *закон Паскаля, вычисления работы, математические модели, симметричные задачи.*

METHOD COMPARISON OF SOME CHARACTERISTICS OF ENERGY IN GEOMETRIC PROBLEMS

Summary: *the mathematical models of concrete technical and energy tasks are examined on the basis of the known laws of physics, investigated and compared inter se the brought models over oriented on a vertical line opposition.*

Keywords: *Pascal's law, the calculation of mathematical models, symmetric problem.*