

ЛЕКЦІЯ 7

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ДИНАМИКИ МЕХАТРОННИХ СИСТЕМ

ПЛАН

- 7.1 Моделі динаміки мехатронних систем і форми їх подання
 - 7.2 Автоматизація моделювання динаміки мехатронної системи
 - 7.3 Порівняльний аналіз методів динаміки
 - 7.4 Метод пов'язаних графів
 - 7.5 Моделювання та автоматизація динаміки систем з використанням методу пов'язаних графів
- Контрольні запитання

7.1 Моделі динаміки мехатронних систем і форми їх подання

Методи математичного моделювання та проектування мехатронних систем, які розробляються, повинні ґрунтуватися на єдиному, комплексному підході щодо об'єкта проектування.

Моделлю (від лат. Modulus – зразок, міра) називається пристрій, що володіє основними властивостями досліджуваного об'єкта.

Моделювання як метод дослідження застосовується тоді, коли досліджуваний об'єкт, з яких-небудь причин, частково або повністю недоступний. Така ситуація виникає при проектуванні принципово нової техніки, так як для обґрунтування прийнятих проектних рішень необхідно досліджувати систему, поки ще не існуючу фізично.

Моделювання може бути:

– натурним, коли модель має ту ж фізичну природу, що і досліджуваний об'єкт;

– аналоговим, коли модель і об'єкт мають різну фізичну природу.

Якщо властивості досліджуваного об'єкта виражені математичними співвідношеннями (рівняннями, нерівностями), то говорять про наявність *математичної моделі*

Високий рівень розвитку обчислювальної техніки і програмного забезпечення, досягнутий до теперішнього часу, дозволяє розглядати математичне моделювання як потужний інструмент наукових досліджень. Через те що мехатронні системи являють собою технічно складні вироби, то їх проектування і підготовка до виробництва, а також значення математичного моделювання з використанням комп'ютерів, є визначальним.

Тому система автоматичного проектування (САПР) мехатронних систем обов'язково включає підсистему математичного моделювання динаміки, яка дозволяє в автоматизованому режимі розробляти моделі динаміки проектованого виробу, проводити дослідження, вирішувати інженерні задачі оптимізації та синтезу.

У завданнях автоматизації моделювання, дослідження і проектування мехатронних комплексів і систем використовуються такі основні форми подання математичних моделей динаміки:

- системою диференційних рівнянь;
- пов'язаних графів;
- структурно-динамічною схемою.

Рівняння динаміки є найбільш загальною формою подання математичної моделі мехатронної системи або її окремих підсистем. Вони являють собою рівняння, котрі пов'язують координати системи, її швидкості і прискорення з діючими на систему силами. Як координати можуть виступати не тільки лінійні і кутові положення ланок механічної частини машини, але і обсяги робочої рідини гідроприводу, електричні заряди, що протікають через поперечні перерізи провідників і тощо.

Силовими параметрами в рівняннях динаміки мехатронної системи, крім «механічних» сил і їх моментів відносно будь-яких осей, можуть бути також тиск робочої рідини (газу), електрична напруга, тощо.

Формування рівнянь динаміки електромеханічної системи в узагальнених координатах може бути здійснено методом Лагранжа [36], а також на основі пов'язаного графа системи, шляхом застосування до його вузлів законів Кірхгофа.

Перспективним в задачах моделювання динаміки мехатронних систем є підхід, який полягає в тому, що динаміка виконавчого механізму з декількома ступенями свободи в просторі узагальнених координат представляється як динаміка, що зображає точки у римановому просторі (диференціюються різноманіття, в якому дотичний простір в кожній точці є кінцевомірним евклідовим простором).

Динаміка мехатронних систем та комплексів, як правило, описується нелінійними диференціальними рівняннями. Застосування ефективних методів аналізу і синтезу, розроблених в теорії лінійних систем автоматичного керування, передбачає лінеарізацію рівнянь динаміки [13, 41]. У свою чергу, лінійна модель динаміки системи може бути представлена у формі структурно-динамічної схеми. Іншими словами – у вигляді обмеженого набору лінійних динамічних ланок, об'єднаних в загальну структуру за допомогою прямих і зворотних зв'язків. Комп'ютерний аналіз і синтез систем автоматичного керування, який здійснюється на основі уявлення динаміки систем структурно-динамічними схемами, інтенсивно розвивався з 70-х рр. минулого століття і в даний час досить поширений (спеціальні програмні комплекси Simulink, VisSim і ін.). Суттєвими результатами, отриманими в цьому напрямку, є пакет програм ПДС (Проектування динамічних Систем).

Ряд завдань проектування мехатронних систем, що мають просторові механізми з великим числом ступенів свободи, або управління їх рухом, можна вирішити без складання і інтегрування складної системи рівнянь. При цьому можна обмежитись дослідженням інваріантів механічної частини (робота узагальнених сил на малих переміщеннях, кінетична енергія) за допомогою тензорно-геометричного методу.

7.2 Автоматизація моделювання динаміки мехатронної системи

Одним з напрямків наукових досліджень у мехатроніки є розробка загальних теоретичних положень, на основі яких можливе створення ефективних методів математичного моделювання мехатронних систем і алгоритмів автоматизації моделювання. Так як властивості об'єкта керування, виконавчого приводу і інформаційної системи повинні розглядатися в комплексі і враховуватися вже на ранніх стадіях проектування мехатронної системи, необхідно розробляти моделі динаміки як механічних, так і електричних підсистем за допомогою єдиного методу. При цьому метод математичного моделювання динаміки мехатронної системи повинен мати наступні властивості:

- інваріантністю до фізичної природи об'єктів, що моделюються;
- формальністю дій, які виконуються при реалізації методу;
- зручністю результатів обчислень для аналізу і використання в проектуванні.

Роботи-маніпулятори, мобільні роботи, багатокординативні верстати з ЧПУ і тощо, мають просторові виконавчі механізми, які можуть мати велике число ступенів свободи і містити замкнуті кінематичні контури. Це ускладнює математичне моделювання динаміки таких мехатронних систем. Багатоступінчасті передавальні механізми приводів, в свою чергу, представляють відомі труднощі при моделюванні динаміки, оскільки в них істотні такі відхилення від ідеальної механічної передачі, як інерційність, пружна піддатливість ланок, люфти і сухе тертя в кінематичних парах. Механічна частина машини, в окремих випадках, може являти собою не голономну систему (з наявністю диференційних неінтегрованих зв'язків). Тому метод, покладений в основу алгоритмів автоматизованого формування моделей динаміки мехатронних систем, повинен володіти спільністю, достатньою для обліку всіх перерахованих факторів.

Створення математичних моделей динаміки багатовимірних систем, що складаються з фізично різномірних функціональних частин, являє собою трудомістке і наукомістке завдання. Для його вирішення, в умовах жорстких обмежень часу, необхідно ефективно і максимально повне використання можливостей сучасних засобів автоматизації обчислень. До нових можливостей апаратних і програмних засобів автоматизації обчислень відносяться:

- висока обчислювальна потужність;
- автоматизація створення просторово-геометричних моделей (комп'ютерна графіка);

- автоматизація математичних обчислень в символному вигляді (комп'ютерна алгебра);
- розвинені системи обміну інформацією між програмними модулями різного цільового призначення;
- вільний доступ учасників проекту до проміжних результатів проектування, можливість оперативного використання раніше отриманих результатів в розробці нових проектів;
- доступність широкому колу користувачів, візуалізація та анімація модельованих об'єктів і процесів.

Відповідно завдання, автоматизація моделювання динаміки мехатронної системи полягає у наступному:

- аналізі існуючих методів динаміки і обґрунтуванні вибору методу, на базі якого буде розроблятися математичне забезпечення програмного модуля автоматизованого формування моделі динаміки мехатронної системи;
- розробки математичного, алгоритмічного та програмного забезпечення, орієнтованого на можливості сучасних засобів автоматизації обчислень.

7.3 Порівняльний аналіз методів динаміки

В даний час відомо п'ять методів отримання рівнянь динаміки багатоланкових виконавчих механізмів:

- метод Лагранжа, заснований на рівняннях Лагранжа II роду і описі кінематики системи матрицями однорідних перетворень координат;
- модифікований метод Лагранжа, заснований на рівняннях Лагранжа II роду і рекурентному описі кінематики механічної системи;
- метод Ейлера, заснований на застосуванні другого закону динаміки і принципу Д'аламбера;
- метод Гауса, заснований на принципі найменшого примушування;
- метод зв'язаних графів.

Метод Лагранжа і метод Ейлера вважаються традиційними, як найбільш часто використовуються на практиці. Висновок рівнянь руху голономних механічних систем методом Лагранжа відрізняється простотою і єдністю підходу, а самі рівняння, що отримані цим методом, забезпечують опис динаміки і можуть бути використані для розробки законів керування у просторі приєднаних змінних [11]. Вирази для кінетичної і потенційної енергії ланок можна записати відносно координат ланок у нерухомій системі координат. Перевага методу Лагранжа дозволяє застосовувати його для виведення рівнянь руху механічних систем, що містять замкнуті контури. Як вже було зазначено, рівняння динаміки у формі Лагранжа можна скласти для електричної системи.

Застосування методу Ейлера призводить до системи прямих і зворотних рекурентних рівнянь, послідовно застосованих до ланок механічної системи. Даний метод найбільш ефективний з обчислювальної точки зору, що дозволяє використовувати його для керування системою в реальному часі [45, 46] і для моделювання її рухів на комп'ютері [15]. Перевагою методу Ейлера є також можливість обчислювати сили і моменти сил реакцій в кінематичних парах механізму. З точки зору аналізу, рекурентні співвідношення не є зручними. Тому метод Ейлера практично не застосовується в задачах синтезу законів керування.

Модифікований метод Лагранжа дозволяє отримати рівняння динаміки в векторно-матричній формі, зручній для аналізу. Крім того, ці рівняння забезпечують зниження обчислювальних витрат на розрахунок динамічних коефіцієнтів в порівнянні з рівняннями Лагранжа. З використанням коефіцієнтів є можливість розрізнити динамічні ефекти, що обумовлені обертальним і поступальним рухом ланок. Це необхідно використовувати при синтезі керування у просторі станів систем. Обчислювальна ефективність цих рівнянь обумовлена використанням для опису кінематики ланок матриць поворотів і векторів відносного положення. Використання модифікованого методу Лагранжа для аналізу систем, що містять замкнуті кінематичні контури, пов'язане з труднощами, тому що даний метод передбачає рекурентні обчислювальні процедури.

Метод, заснований на принципі Гауса, на відміну від методів, заснованих на рівняннях Лагранжа, дозволяє отримувати рівняння динаміки механічних систем, як з голономними, так і з неголономними зв'язками. При використанні принципу Гауса завдання зводиться до визначення прискорень істинного руху, які забезпечують мінімум виразу для примушування. Це досягається шляхом чисельної мінімізації примушування як функції узагальнених прискорень механічної системи методом динамічного програмування або невизначених множників Лагранжа. Безсумнівним достоїнством методу Гауса можна вважати можливість його застосування для дослідження руху механічних систем з нерегульованими зв'язками. Згідно, перевага методу Гауса досягається саме в тих випадках, коли використовуються чисельні методи мінімізації примушування на кожному кроці інтегрування рівнянь динаміки.

Метод зв'язкових графів ґрунтується на поданні системи (механічної, електричної, гідравлічної або комбінованої) у вигляді деякого кінцевого числа елементів, що мають формальний математичний опис і з'єднаних один з одним у загальну структуру за допомогою зв'язків. Цей метод є результатом розвитку теорії графів, одним з основоположників якої, був Л. Ейлер.

Математична модель динаміки системи відображається у вигляді схеми (графа), на підставі якої виводяться рівняння динаміки; при цьому механічна частина системи може бути неголономною. Основною перевагою методу зв'язкових графів є структурно-графічне представлення динаміки досліджуваних систем, що дозволяє простежити всі взаємовпливи елементів системи візуально і отримати рівняння динаміки шляхом застосування до зв'язного графу простих законів Кірхгофа. Використання методу зв'язкових графів дає найбільший ефект при описі, аналізі та проектуванні розгалужених систем з наявністю замкнутих кінематичних контурів.

Результати порівняльного аналізу, поміщені в таблиці 1.1 показують, що найбільш перспективним з точки зору автоматизації моделювання динаміки мехатронних систем є метод зв'язкових графів. Даний метод, з одного боку, має найбільшу спільність і необхідну інваріантність до фізичної природи об'єктів дослідження. З іншого боку, результатом його застосування є не тільки замкнута система диференціальних рівнянь динаміки, а й зв'язний граф досліджуваної системи. Це розширює можливості інженерного аналізу і автоматизації моделювання динаміки з використанням комп'ютерів.

Таблиця 7.1 – Результати порівняльного аналізу методів

Метод	Механічні системи			Електричні системи	Результат обчислень		
	ГОЛОНОМНІ	НЕГОЛОНОМНІ	с замкненими контурами		замкнена система дифрівняння.	рекурентне. рівняння	числений
Лагранжа			+				
модифікує ний	+	-	-	+	+	-	-
Ейлера	+	-	-	-	-	+	-
Гауса	+	+	+	-	-	-	+
зв'язкових графів	+	+	+	+	+	-	-

Таким чином, метод зв'язкових графів прийнятий в якості теоретичної основи рівнянь і алгоритмів автоматизованого моделювання динаміки мехатронічних систем.

7.4 Метод пов'язаних графів

Динамічні властивості технічної системи, що визначають характер процесів, можуть бути представлені у вигляді графа, на якому зв'язки між елементами системи відображаються лініями або стрілками. Метод отримання рівнянь динаміки системи шляхом застосування закону збереження до вузлових точок її графа, називається методом зв'язкових графів. Цей метод успішно застосовувався в задачах математичного моделювання динаміки різних технічних систем.

В основу методу зв'язкових графів покладено системний підхід щодо опису динаміки. Досліджуваний об'єкт розглядається у вигляді сукупності пов'язаних між собою у загальну структуру елементів, що функціонують як єдине ціле.

Динамічна система має входи і виходи, через які здійснюється обмін енергією з елементами більш широкої системи, до складу якої входить розглянута система. Наприклад, виконавчий привод робота отримує енергію від джерела живлення, перетворює її і поставляє на вхідні ланки механізмів робота. Отже, привод розглядається як підсистема робота. При цьому певна частина енергії живлення перетворюється приводом в теплову енергію і розсіюється. У свою чергу, робот також є підсистемою, яка взаємодіє з іншими одиницями технологічного обладнання і тощо.

Принципово важливо, що досліджувана динамічна система не розглядається поза зв'язком з елементами більш широкої системи, тобто, не є ізольованою.

Стан кожного елемента у фіксованій момент часу руху системи характеризується двома параметрами: величиною e (від англ. Effort – зусилля), що має фізичний сенс «зусилля, напруга» і величиною f (від англ. Flux – потік), що має фізичний сенс «швидкість» .

Розподіл потоків (зусиль) у вузлових точках зв'язкового графа підкоряється закону збереження енергії, сформульованому у вигляді першого (другого) закону Кірхгофа:

для вузла з одним і тим же значенням f

$$\sum_k f_k = 0; \quad (7.1)$$

для вузла з одним і тим же значенням e ;

$$\sum_k e_k = 0. \quad (7.2)$$

На підставі законів (2.1) і (2.2) формуються диференціальні рівняння динаміки досліджуваної системи. Елементами динамічної системи є: інерційний накопичувач енергії, ємнісний накопичувач енергії, дисипативний елемент, функціональний перетворювач, гіратор.

На входах і виходах системи розташовані джерела зусиль (потоків), що визначають дію з боку більш широкої системи, у складі якої знаходиться досліджувана система. Перейдемо до докладного розгляду кожного з елементів.

Динамічний стан інерційного накопичувача енергії у загальному випадку описується рівнянням:

$$e = \frac{d}{dt}(mf), \quad (7.3)$$

де $f = dq/dt$, $q = q_1(t)$ – координата;
 $m = m(t)$ – інерція накопичувача;
 t – час.

Інерційним накопичувачем в механічній системі є масивне тіло:

– якщо q – поступальне переміщення, то m – маса тіла, e – сила;

– якщо q – обертальний рух тіла навколо деякої осі, то m – момент інерції, e – момент сили відносно цієї осі.

– якщо в електричній системі у якості інерційного накопичувача виступає котушка індуктивності, то q – заряд, що протікає через поперечний переріз провідника, m – індуктивність, e – напруга на клемі котушки.

Ємнісний накопичувач енергії в загальному випадку описується рівнянням:

$$e = \int (kf) dt \quad (7.4)$$

де $k(q) = de / dq$ – жорсткість накопичувача.

У більшості інженерних задач жорсткість накопичувачів постійна і рівняння (2.4) використовується у вигляді $e = k \int f dt$.

Ємнісним накопичувачем в механічній системі є пружне тіло (пружина): якщо q – лінійна деформація, то k – коефіцієнт жорсткості; якщо q – кутова деформація, то k – крутильна жорсткість.

В електричній системі ємнісним накопичувачем енергії є конденсатор: q – заряд на обкладинках конденсатора; $k = 1/C$ де C – ємність конденсатора.

Очевидно, що одне і те ж фізичне тіло (електричний провідник) мають як властивості інерційного, так і властивості ємнісного накопичувача. Вибір елемента, математично описує тіло або провідник у конкретному завданні. Це залежить від того, яка властивість є більш істотною, і буде враховуватися у розрахунках.

Дисипативний елемент, який перетворює механічну або електричну енергію в теплову енергію, описується рівнянням:

$$e = dR\varphi(f), \quad (7.5)$$

де R – коефіцієнт, який в загальному випадку є функцією часу.

Найбільш часто у рівнянні (2.5) приймають $R = \text{const}$ и $\varphi(f) = f$ - лінійний опір з постійним коефіцієнтом. У механічних системах за допомогою дисипативного елемента враховують втрати енергії, що обумовлені наявністю сухого і в'язкого тертя. У електричних системах – це втрати енергії на активних опорах (резисторах).

Функціональний перетворювач перетворює енергію, що подається на його вхід з одними параметрами в енергію того ж виду, але з іншими параметрами. Це описується рівняннями:

$$e_{вих} = m^{-1}e_{вх}, \quad f_{вих} = mf_{вх} \quad (7.6)$$

де $e_{вх}, e_{вих}$ – зусилля;

$f_{вх}, f_{вих}$ – потоки на вході і виході перетворювача;

m – коефіцієнт перетворювача.

У загальному випадку m – є функція часу t , яка може бути задана неявно. При моделюванні динаміки механічних систем рівняння (2.6) використовуються для математичного опису ідеальних механізмів, у тому числі і з рідкими (газоподібними) робочими тілами. У електричних системах – для опису ідеальних перетворювачів електричних сигналів.

Теплові втрати в реальних механізмах і електричних ланцюгах враховуються шляхом додавання в розрахункову модель відповідних дисипативних елементів з наведеними значеннями опору при вирішенні конкретної задачі.

Гіратор (від грец. Gyros – коло, обертання) перетворює енергію одного виду в енергію іншого виду. Він описується рівняннями

$$e_{\text{max}} = kf_{\text{ax}}, \quad f_{\text{max}} = k^{-1}e_{\text{ax}} \quad (7.7)$$

де k – коефіцієнт гіратора.

Рівняння (2.7) відповідають ідеальному гіратору. При моделюванні гіраторів з урахуванням теплових втрат в розрахункову модель додаються дисипативні елементи. Прикладом гіратора є електричний двигун:

$$M_{\text{д}} = ki_a, \quad \omega_{\text{д}} = k^{-1}e_c; \quad k = k_{\text{д}}\Phi$$

де $M_{\text{д}}$ – момент двигуна;
 i_a – струм в ланцюзі якоря;
 $\omega_{\text{д}}$ – кутова швидкість,
 e_c – противо-ЕРС двигуна;
 Φ – магнітний потік двигуна;
 $k_{\text{д}}$ – конструктивний коефіцієнт.

7.5 Моделювання та автоматизація динаміки систем з використанням методу пов'язаних графів

Пов'язаний граф динамічної системи може бути побудований у двох еквівалентних варіантах. Граф, зв'язки якого не утворюють замкнутих контурів, називається безконтурним, в іншому випадку – контурним.

Більш традиційними в задачах моделювання динаміки технічних систем є контурні графи, які набули широкого поширення в електротехніці і гідравліки.

Безконтурні графи менш відомі. Вони застосовувалися окремими дослідниками при моделюванні динаміки систем, що складаються з матеріальних точок або з твердих тіл, які роблять прості рухи.

У таблиці 7.2 дані позначення елементів для двох зазначених варіантів зв'язаних графів. Таким чином, на контурному графі інерційний, ємнісний накопичувачі і дисипативний елемент є двохполюсниками, на безконтурном графі – одновходовими елементами.

Функціональний перетворювач і гиратор на контурному графі є чотиріполюсниками, а на безконтурном – двохходовими елементами. Розглянемо деякі приклади математичного моделювання з використанням пов'язаних графів.

З точки зору автоматизації найбільш складним є формування розрахункової схеми, тому що перехід від реального технічного об'єкта до його розрахункової схеми пов'язаний з необхідністю визначення сукупності факторів і умов, які будуть враховані при моделюванні.

Таблиця 7.2 – Позначення елементів зв'язаних графів

Найменування елемента	Позначення	
	Контурний граф	Безконтурний граф
Інерційний накопичувач енергії		
Ємнісний накопичувач енергії		
Дисипативний елемент		
Функціональний перетворювач		
Гіратор		

Твердження, згідно з якими одні діючі фактори визнаються істотними, а інші – незначними, ґрунтуються на інженерному досвіді і творчій інтуїції дослідника. Ця обставина в загальному випадку призводить до неможливості повністю автоматизувати процедуру формування розрахункової схеми технічного об'єкта. Виняток становлять лише конструкції, вузли та елементи, для яких існують готові розрахункові схеми. Наприклад, підшипникові опори валів редукторів, балкові конструкції, типові чотириполюсники з пасивними електротехнічними елементами і тощо. В інших випадках розрахункова схема, в достатній мірі відповідає властивостям реального технічного об'єкта, може бути складена лише інженером-фахівцем.

Контрольні запитання

1. Дати поняття моделі.
2. Які існують види моделювання?
3. Які існують форми подання моделей динаміки при дослідженні мехатронних комплексів і систем?
4. Проаналізувати особливості рівнянь математичних моделей мехатронних систем.
5. Які використовуються рівняння для характеристики динаміки мехатронних систем?
6. На чому базуються наукові дослідження мехатронних комплексів і систем?
7. Що відноситься до апаратних і програмних засобів автоматизації обчислень параметрів динаміки мехатронних комплексів і систем?
8. Перелічити методи отримання рівнянь динаміки багатоланкових виконавчих механізмів мехатронних комплексів і систем.
9. Проаналізувати і зрівняти методи Лангранжа, Ейлера і Гауса.
10. У чому полягає метод зв'язкових графів?
11. Особливості моделювання та автоматизація динаміки систем з використанням методу пов'язаних графів.
12. Проаналізувати особливості формування та моделювання автоматизованої розрахункової схеми з урахуванням визначення сукупності факторів і умов.