

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Математичні задачі енергетики

Конспект лекцій

Вінниця 2019

ЗМІСТ

ВСТУП	4
<i>Лекція 1. Основи моделювання процесів і систем</i>	5
<i>Лекція 2. Класифікація проблем і задач прийняття рішень</i>	13
<i>Лекція 3. Методи й моделі рішення виробничо-господарських задач</i>	22
<i>Лекції 4, 5. Задачі упорядкування</i>	31
<i>Лекція 6. Задачі управління запасами</i>	45
<i>Лекція 7. Основи методології проектування системи об'єктів</i>	50
Список літератури	56

ВСТУП

У науці і техніці часто використовують такі поняття як «система» та «моделювання». Вони нерозривно пов'язані між собою. Грецьке слово «система» буквально означає «ціле, складене з частин». У широкому сенсі під системою прийнято розуміти упорядкованість частин, зв'язане ціле. Науково-технічні досягнення сучасності, складність та різноманітність проблем зумовили розвиток загальної теорії систем, яка заснована на системності, цілісності предметів та процесів.

Системний підхід у сучасних умовах покликаний високим ступенем інтеграції суспільних процесів, коли вирішення однієї проблеми залежить від розв'язання багатьох інших.

Системний підхід до вирішення проблем у господарській і науково-технічній діяльності передбачає використання спеціальних наукових методів, які дозволяють отримати кількісні оцінки варіантів, що розглядаються.

Основним методом вивчення складних систем є їхнє моделювання, яке відіграє особливу роль у вивченні об'єктів, що не піддаються безпосередньому спостереженню. До них слід віднести і виробничі системи.

Модель являє собою відображення характеристик об'єкта з метою його дослідження. Вона включає в себе не всі характеристики об'єкта, а лише ті, які найважливіші для конкретної задачі його вивчення (структуру, зв'язки, параметри функціонування і т. ін.).

Практичне значення мають моделі, які більш доступні для дослідження, ніж самі об'єкти. Така доступність моделей пов'язана з тим, що моделювання, як правило, супроводжується спрощенням самого об'єкта.

Оволодіння основами системного підходу та моделювання процесів і систем є відмітною особливістю підготовки сучасного спеціаліста до успішної практичної діяльності.

Лекція 1. ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ І СИСТЕМ

Моделювання

Основним засобом вивчення складних систем є їхнє моделювання, що відіграє особливу роль у вивченні об'єктів, які не піддаються безпосередньому спостереженню або експериментуванню. До них відносять і виробничі системи.

Модель являє собою відображення певних характеристик об'єкта з метою його дослідження. Вона відбиває не всі, а тільки істотні для конкретного дослідження характеристики об'єкта (структуру, зв'язки, властивості, параметри функціонування). Відповідність моделі об'єкту може бути різною й визначається методикою дослідження. Практичне значення мають моделі, які більш доступні для дослідження, ніж самі об'єкти. Передумовою більшої доступності моделі для дослідження порівняно з об'єктом, є те, що моделювання, як правило, супроводжується спрощенням образу об'єкта.

Відповідність моделі й об'єкта визначається поняттями ізоморфізму й гомоморфізму. Якщо елементи, зв'язки, перетворення двох систем перебувають у взаємно однозначній відповідності, то ці системи *ізоморфні*. Наявність ізоморфізму не є необхідною умовою відповідності моделі оригіналу. Одна система може виступати моделлю іншої і за *гомоморфного* відношення між ними, тобто коли відношення подоби систем у відповідному аспекті (структурному, функціональному та ін.) однозначне лише в одну сторону. У випадку гомоморфного відображення за моделлю не можна встановити усі характеристики оригіналу. Зазвичай, модель будується як гомоморфний образ системи у цілому, але ізоморфний образ досліджуваних характеристик. Для виробничих систем використовується сукупність різних моделей, здатна з достатнім ступенем точності відбити систему-оригінал.

Класифікація моделей

Складність систем, розмаїтість завдань їхнього дослідження, загальний стан науки про дані системи породжують різноманіття моделей. Класифікувати моделі можна за різними ознаками.

Залежно від використовуваних засобів для подання реальних об'єктів виділяють матеріальні й ідеальні моделі.

За виконуваною функцією розрізняють евристичні, прогностичні й прагматичні моделі. Моделі, що описують даний стан системи, є евристичними (пізнавальними, дискриптивними). Моделі можливого майбутнього стану системи відносять до прогностичних. Моделі, що використовуються як засіб перетворення системи в потрібному напрямі (наприклад, модель рішення) є прагматичними (практичними, нормативними).

За мовою, яку використано для вираження моделі, розрізняють неформальні моделі, втілені в природній мові, і формалізовані моделі, виражені формальною, математичною мовою.

Основним класом формалізованих знакових моделей є *математичні моделі* — математичні відношення, що описують системи й процеси. Математичне моделювання як процес складання моделі й дослідження з її допомогою властивостей об'єкта є основним методом рішення технічних, технологічних і економічних завдань. Математичне моделювання соціальних процесів у виробничих системах стикається з більшими труднощами. Основний компонент виробничої системи — людина, не тотожний жодному іншому. Його поведження визначається не тільки поведженням системи, але і його внутрішнім станом, що впливає на прийняті ним рішення. Тому формально-логічні, математичні прийоми не дозволяють із поведження людини вивести поведження системи. Разом з тим, створені й практично використовуються математичні моделі для деяких типів соціальних процесів, наприклад, моделі формування професійних схильностей молоді, мобільності трудових ресурсів, бюджету вільного часу, підбору й розміщення кадрів та ін.

Обмеженість чисто математичного моделювання соціальних систем, певною мірою, переборюється методами *евристичного моделювання*, заснованого на описі, систематизації й класифікації компонентів, функцій і структури систем, що імітують індуктивні умовисновки методами, схожими на ті, які використовує людський інтелект. Евристичне моделювання у сполученні з математичним дозволяє одержувати задовільні рішення соціальних завдань у виробничих системах.

Залежно від способу опису системи розрізняють моделі з непрямим і прямим описом об'єктів моделювання. До класу моделей з непрямим описом об'єктів відносяться математичні моделі, які не мають структурної

подібності з оригіналом. Мова таких моделей містить усього чотири основних елементи: даний, невідоме, математичний опис, обмеження. У моделях із прямим описом об'єктів досягається гомоморфна відповідність структури моделі структурі оригіналу. Такі моделі називаються *імітаційними*, використовуються в імітації процесів і систем на ПК, в імітаційних іграх і т. д. Відмітна риса імітаційних моделей полягає в тому, що в них відтворюються компонентні, структурні й функціональні характеристики об'єктів, тобто проводиться експеримент із системою. Імітаційне моделювання опирається на різноманітний математичний апарат, але при цьому є інтуїтивним процесом, внаслідок чого необхідно уважно розглядати конкретні ситуації, щоб зменшити ймовірність помилкових рішень.

Економіко-математичні моделі

Значну частину процесів, що протікають у виробничих системах, можна віднести до економічних. Для відбиття логічних і кількісних залежностей між компонентами виробничих систем, спрямованих на забезпечення соціально-економічної ефективності виробництва, використовують економіко-математичні моделі таких типів:

- за обліком фактора часу: статичні й динамічні;
- за видами цільових функцій і обмежень: лінійні та нелінійні;
- за обліком фактора випадковості: детерміновані та імовірнісні (стохастичні);
- за характером зміни залежностей, що описують досліджуваний процес: дискретні й безперервні.

Економіко-математичні моделі повинні відповідати таким загальним вимогам:

- базуватись на економічній теорії й відбивати об'єктивні закономірності процесів;
- правильно відбивати функціонально-структурні характеристики виробничих систем;
- задовольняти математичні умови (можливість розв'язання, погодженість, розмірність та ін.).

Основні передумови ефективного застосування економіко-математичних моделей:

- наявність єдиного, кількісно вимірного критерію оптимізації рішень;

- обмеженість засобів досягнення мети;
- взаємозамінність засобів і багатоваріантність їхнього використання для досягнення тих самих цілей.

Наявність єдиного критерію оптимізації є умовою можливого використання моделей оптимального програмування. Разом з тим, через багатоцільовий характер виробничих систем застосування економіко-математичних моделей з єдиним критерієм пов'язане з деяким спрощенням розглянутих проблем, що, однак, дозволяє одержувати прийнятні для практики рішення. Подальшим розвитком оптимізаційного підходу в моделюванні виробничих систем є використання багатоцільової (векторної) оптимізації, заснованої на розгляді простору локальних критеріїв з урахуванням їх важливості (пріоритету).

Комплекс ресурсів (трудових, матеріально-технічних, коштів, природно-екологічних, інформаційних, соціально-психологічних умов і факторів) завжди має певну обмеженість. По-перше, є об'єктивна обмеженість можливостей суспільства для максимального задоволення всіх потреб у конкретний момент. По-друге, природні непоновлювальні ресурси характеризуються абсолютною обмеженістю, що змінюється у часі стосовно відтворених ресурсів.

Багатоваріантність рішень пов'язана з обмеженістю й взаємозамінністю ресурсів і способів їхнього використання. У виробничих системах має місце, насамперед, пряма взаємозамінність ресурсів (видів устаткування, технологічних методів, матеріалів, напівфабрикатів). Поряд із цим можна виділити непряму взаємозамінність засобів, тобто через інші засоби. Наприклад, використання місцевих відходів виробництва глинозему як одного з основних компонентів шлаколужних в'язучих дозволяє відмовитися від застосування доставки цементу здалеку, що скорочує завантаження залізничного транспорту, а виробниче споживання шламу звільняє значні земельні площі для сільськогосподарського використання тощо. Наявність прямої й непрямой взаємозамінності засобів у виробничих системах створює велику кількість варіантів, які взаємно переплітаються, коли оптимальний вибір можливий лише із застосуванням економіко-математичних моделей.

Системне моделювання

Можна виділити такі основні принципи системного підходу до моделювання виробничих систем:

- подвійність розгляду системного об'єкта, використання макро- і мікропідходу, розгляд зв'язків системи з довкіллям без виділення внутрішніх характеристик і розгляд внутрішніх аспектів системи за умовного відокремлення від середовища;
- облік подвійності функціонування системи, що відбиває взаємозв'язок перспективного й ретроспективного її поведіння;
- однозначність відповідності речовинного й інформаційного перетворення, за якого будь-які виробничі системи можуть розглядатися як інформаційні й навпаки;
- необхідне різноманіття, що забезпечує більш широке різноманіття (досвід, знання, можливості тощо) регульовальних елементів порівняно з об'єктами регулювання;
- зовнішнє доповнення, що дозволяє будь-які впливи зовнішнього середовища представити як зовнішню доповнюючу систему;
- повнота й достатність інформації, що створює можливість детально й вірогідно описати функціонування системи.

На практиці часто виробничі системи базуються на здоровому глузді й накопиченому досвіді, а потім інтерпретуються в системних термінах і позначеннях. Такий підхід не гарантує достатню ефективність виробничої системи. Використання ж методології системного підходу дозволяє не тільки знизити трудомісткість створення, але й підвищити ефективність функціонування системних об'єктів.

Найбільш загальне значення мають методи системного дослідження: *аналіз* і *синтез* систем. *Аналіз* дозволяє виявити в досліджуваному об'єкті компоненти, зв'язки й структуру системи. *Синтез* забезпечує з'єднання компонентів у єдине ціле, у систему, що функціонує. Для аналізу й синтезу виробничих систем використовують економіко-математичні моделі.

У загальному вигляді принципова схема системного підходу представлена на рис. 1. На ній показано процедуру системного дослідження об'єктів, що включає: визначення цілей і задач, зв'язків із середовищем і обмеження; аналіз або синтез функцій і структури; опис компонентів системи; опис функціонування системи; оцінку ефективності й інтерпретацію отриманих результатів.

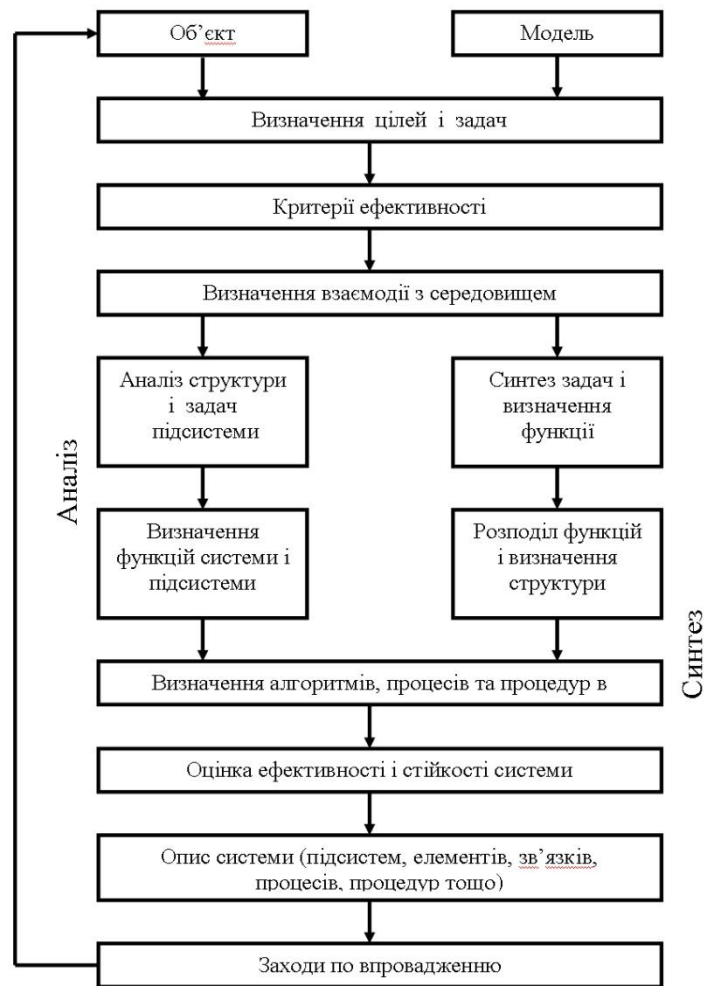


Рис. 1. Принципова схема системного моделювання

Методологія пошуку й вибору рішень.

Рішення в життєвому циклі виробничої системи

На всіх стадіях життєвого циклу виробничої системи людині (дослідникові, проектувальникові, організаторові, керівникові) доводиться приймати рішення щодо дозволу або заборони певних дій у процесі задоволення потреб. Раціональні рішення знижують випадковість дії. Ухвалення рішення – це процес, що починається з виникнення проблемної ситуації й закінчується вибором рішення – дії з усунення проблемної ситуації. У процесі ухвалення рішення можна виділити три етапи: постановка задачі, формування варіантів рішень і вибір оптимального рішення.

На *ідеальному етапі* життєвого циклу виробничої системи прийняття рішень пов'язане з одержанням відповідей на три основних запитання: 1 – навіщо створювати нову систему; 2 – що створювати, за яким варіантом;

З – як створювати, за яким проектом. Найбільш характерними завданнями, що виникають на цьому етапі, є: пошук і вибір принципів (фізичних, економічних та ін.) дії системи (компонента) для конкретних умов і вимог; вибір раціональних рішень (технічних, організаційних та ін.) відповідно до обраних принципів дії; визначення оптимальних значень параметрів обраних рішень.

На етапі *функціонування* виробничих систем проблеми, що вимагають вирішення, виникають у таких випадках: функціонування системи у цей момент не забезпечує досягнення поставленої мети; функціонування системи у майбутньому не забезпечить досягнення поставлених цілей; необхідна зміна цілей системи.

Під час проектування, організації, планування, керування виробничими системами процеси прийняття рішень характеризуються загальними методологічними положеннями.

Основні поняття теорії рішень

Будь-яке рішення спрямоване на визначення найкращого (оптимального) способу дій для досягнення поставлених цілей. Під *метою* розуміють ідеальне подання бажаного стану й результату функціонування системи. Коли фактичний стан не відповідає бажаному, виникає *проблема*. Умови, що визначають проблему, утворюють *проблемну ситуацію*, що дає вихідні дані для постановки завдання прийняття рішень. Рішення приймає людина (ОПР – особа, що приймає рішення, одна людина або група осіб) за допомогою експертів, які беруть участь у зборі та аналізі інформації й формуванні рішень.

Прийняття рішення — це процес, що розвивається у часі і включає етапи й процедури з усунення проблемної ситуації. У процесі прийняття рішень формуються альтернативні (взаємовиключні) варіанти рішень і оцінюється їхня перевага. *Перевага* являє собою інтегровану оцінку якості рішень. Вибір найкращого рішення визначається *критерієм вибору* (індивідуальне ОПР) або на основі *принципу узгодження* (групове ОПР).

Кінцевим результатом процесу прийняття рішень є рішення, що представляє собою приписання до дії (спосіб дії, план роботи, варіант проекту тощо). Основними ознаками рішення є: наявність вибору з безлічі можливих рішень; вибір орієнтований на свідоме досягнення цілей; вибір заснований на установці, що сформувався, до дії. Перша ознака вказує на

те, що у відсутності альтернатив немає вибору й немає рішення, тому що відпадає необхідність у розумовому волевиявленому акті. Вибір рішення завжди цілеспрямований і здійснюється свідомо, тому безцільний вибір та імпульсивні дії не можуть розглядатися як рішення. Якщо рішення задовольняє ресурсні, правові й морально-етичні обмеження, воно називається *припустимим*. Припустиме рішення, що забезпечує екстремум (максимум або мінімум) критерію вибору (індивідуальне ОПР) або задовольняє принцип узгодження (групове ОПР), є *оптимальним*.

Узагальнене рішення характеризується його *ефективністю*, що визначається ступенем досягнення цілей, віднесеною до витрат на їхнє досягнення.

Процес прийняття рішень складається з ряду послідовних етапів і процедур (рис. 2). На етапі постановки задачі перебувають відповіді на запитання: яку проблему й у яких умовах потрібно вирішувати? Коли її потрібно вирішувати? Якими силами й засобами вона буде вирішуватися? Метою другого етапу є формування варіантів рішень і оцінка їхніх переваг. На етапі вибору рішень із припустимих на основі критерію вибирається єдине. Ця схема в спрощеному вигляді описує реальний процес прийняття рішень, у дійсності ж він складніший і не завжди здійснюється за наведеною схемою.

З інформаційної точки зору, в процесі прийняття рішень відбувається зменшення невизначеності. Визначення проблемної ситуації порушує запитання: «Що ж робити?». Виконання процедур дозволяє сформулювати відповідь у вигляді «що й коли потрібно робити». У процесі прийняття рішень мають місце задачі пошуку, розпізнавання, класифікації, упорядкування й вибору. Їхня реалізація ґрунтується на аналізі й синтезі, індукції і дедукції, порівнянні й узагальненні. Процедури прийняття рішень виконують неформально та із застосуванням формальних засобів – математичних методів і ПЕОМ.

Запитання для самоконтролю

1. Розкрийте зміст поняття "моделювання".
2. На прикладі будь-якої виробничої системи покажіть використання принципів її моделювання.
3. Які вам відомі типи економіко-математичних моделей?
4. Охарактеризуйте основні принципи системного підходу до моделювання виробничих систем.
5. Охарактеризуйте поняття «прийняття рішення».

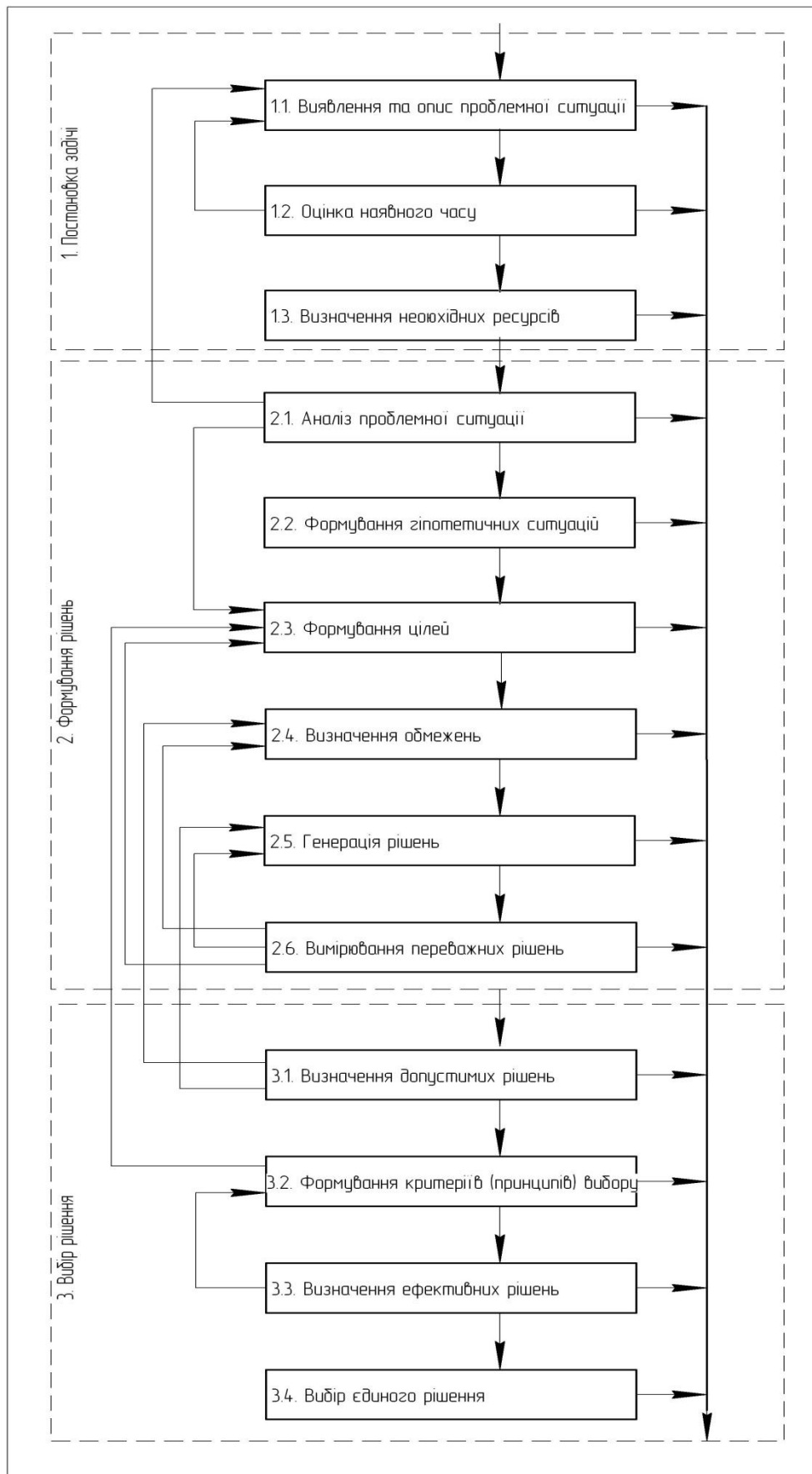


Рис. 2. Схема процесу прийняття рішення

Лекція 2. КЛАСИФІКАЦІЯ ПРОБЛЕМ І ЗАДАЧ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Типи проблем відрізняються ступенем їхньої структуризації, тобто повнотою інформації про логічні елементи проблеми. Структура будь-якої проблеми визначається такими логічними елементами: мета, досягнення якої буде означати, що проблема вирішена; альтернативні засоби й дії, за допомогою яких може бути досягнута мета; витрати ресурсів, необхідні для досягнення цілей; моделі, що відображають зв'язки між цілями, альтернативами й витратами; критерії, за допомогою яких зіставляються в кожному випадку мета й витрати та обирається оптимальне рішення.

Стандартні проблеми характеризуються повною ясністю й однозначністю цілей, альтернатив і витрат, а задачі прийняття рішень реалізуються на основі вироблених процедур і правил. Прикладами таких проблем можуть бути розрахунки потреби в устаткуванні, матеріалах, робочій силі, виходячи із заданої виробничої програми.

Добре структуровані проблеми мають різноманітний характер, всі їхні елементи й зв'язки можуть бути виражені кількісно. Для задач прийняття рішень у таких проблемних ситуаціях використовуються економіко-математичні моделі. До добре структурованих проблем можна віднести, наприклад, вибір оптимальних варіантів реконструкції підприємства, вибір варіантів найкращого завантаження виробничих потужностей та ін.

Слабоструктуровані проблеми містять поряд з добре вивченими, кількісно формалізованими елементами також невідомі або невимірні компоненти, що відрізняються значною невизначеністю. Прийняття рішень для таких проблем пов'язане із застосуванням методології, що сполучить математичні методи з якісними оцінками ОПР. До слабоструктурованих проблем можна віднести створення нових виробничих комплексів, вибір стратегії технічного розвитку підприємств, удосконалювання управління галуззю, виробничим об'єднанням, підприємством тощо.

Неструктуровані проблеми відрізняються значною невизначеністю й неформалізованістю цілей і альтернатив. У прийнятті рішень щодо таких проблемних ситуацій велику роль відіграють досвід, інтуїція ОПР і експертів. Наукові методи прийняття рішень ґрунтуються на використанні загальних ідей системного підходу й експертних опитувань. До цього типу

проблем відносяться, наприклад, формування довгострокових планів науково-технічних розробок, планів соціального розвитку колективів тощо.

Рішення стандартних і добре структурованих проблем, які можна програмувати, належать до тих, що піддаються оптимізації з використанням економіко-математичних моделей і ПЕОМ. Слабоструктуровані й неструктуровані проблеми належать до тих, які не програмуються.

Приналежність конкретної проблеми до одного з названих типів не носить постійного характеру. У процесі аналізу й вивчення неструктуровані проблеми можуть перетворитися в слабоструктуровані (відповідно до підвищення питомої ваги формально-логічного й математичного описів елементів і проблем), потім у добре структуровані (повністю описані економіко-математичними моделями), а у деяких випадках і в стандартні (зведені до прийняття рішень на основі використання рутинних, що піддаються повній автоматизації, процедур). Вибір конкретних методів прийняття рішень залежить від характеру завдань.

Загальними ознаками класифікації задач прийняття рішень є: ступінь визначеності інформації; використання експерименту для одержання інформації; кількість осіб, що приймають рішення; кількість цілей; зміст рішень; значущість і тривалість дії рішень.

Визначеність інформації характеризується вірогідністю й повнотою необхідних для прийняття рішень даних, відповідно до чого можна виділити такі класи задач прийняття рішень:

1. Задачі в умовах визначеності, коли є повна й достовірна інформація про проблемну ситуацію, ціль, обмеження й наслідки рішень. Для задач цього класу мета й обмеження формально визначаються у вигляді цільових функцій і нерівностей (рівностей), функція переваги у випадку однієї цілі збігається із цільовою функцією, а у випадку безлічі цілей - з деякою функціональною залежністю цільових функцій. Критерій вибору визначається мінімумом або максимумом цільової функції. Наявність цих умов дає можливість побудувати формальну математичну модель задачі прийняття рішень і алгоритмічно знайти оптимальне рішення. До числа таких задач можна віднести, наприклад, задачі розміщення ресурсів, призначення робіт, управління запасами, транспортні задачі тощо. Для рішення задач цього класу застосовують різні методи оптимізації, наприклад, методи математичного програмування (лінійного, нелінійного, динамічного). Роль людини в рішенні задач даного класу полягає у зведенні

реальної ситуації до типового завдання математичного програмування й у затвердженні одержуваного формально оптимального рішення.

2. Задачі в умовах імовірнісної визначеності реалізуються з використанням теорії статистичних рішень. Неповнота й невірогідність інформації в реальних задачах враховуються шляхом розгляду випадкових подій і процесів з використанням імовірнісних характеристик. Самі ймовірнісні характеристики є вже не випадковими, тому ними можна оперувати під час знаходження оптимального рішення, як з детермінованими величинами. Загальним критерієм знаходження оптимального рішення в теорії статистичних рішень є середній ризик. Роль людини в рішенні цього класу задач полягає в постановці задачі, зведенні реального завдання до типової математичної задачі, затвердженні отриманого оптимального рішення, а також (за відсутності статистичних даних) у визначенні суб'єктивних імовірнісних подій.

3. Задачі в умовах невизначеності характеризуються неповнотою й недостатністю інформації, різноманіттям і складністю впливу різних факторів (соціальних, економічних, політичних, технічних). Через це поки немає адекватних математичних моделей для визначення оптимальних рішень, а основну роль у пошуку оптимального або прийнятного рішення відіграє людина, формальні засоби виступають лише як допоміжний інструмент.

Математичні моделі, які використовують у задачах прийняття рішень в умовах визначеності й імовірнісної визначеності, описують лише найпростіші ситуації у виробничих системах. Задачі прийняття рішень в умовах невизначеності є більш загальними й включаються як окремий випадок прийняття рішень в умовах визначеності й імовірнісної визначеності.

Використання експерименту для одержання інформації приводить до поділу задач прийняття рішень на наступні класи:

1. Задачі прийняття рішень за апріорними даними характерні для умов визначеності й частково для умов імовірнісної визначеності, коли використовується відома інформація;

2. Задачі прийняття рішень за апостеріорними даними мають місце в умовах невизначеності за малої апріорної інформації, а для одержання нової інформації необхідне проведення експерименту.

За кількістю осіб, що приймають рішення, задачі поділяють на індивідуальні (рішення приймає одна особа) і групові (рішення приймає колектив).

За кількістю цілей розрізняють одноцільові й багатоцільові задачі прийняття рішень. У багатоцільових задачах необхідно погоджувати суперечливі цілі під час вибору рішень. За формалізованого опису цілей (у вигляді цільових функцій) одноцільові задачі називають однокритеріальними, а багатоцільові – багатокритеріальними задачами прийняття рішень.

Залежно від змісту задачі прийняття рішень класифікують за сферами і видам діяльності: економічні, політичні, ідеологічні, технічні, військові, дослідницькі, проектні, планові, організаційні, оперативні тощо.

За тривалістю дії розрізняють: довгострокові рішення, спрямовані на досягнення генеральних довгострокових цілей (наприклад, довгострокові національні програми); середньострокові рішення (наприклад, плани економічного й соціального розвитку); короткострокові рішення, орієнтовані на усунення поточних проблем.

Кожна конкретна задача ухвалення рішення з урахуванням розглянутої класифікації утворить певний тип відповідно до наявних в ній ознак. Наприклад, можна деяку задачу ухвалення рішення в умовах невизначеності вважати як групову за апріорними даними й багатоцільову. Кожному типу задачі відповідає особливий підхід до прийняття рішень.

Принципи постановки задач прийняття рішень

Загальними принципами постановки задач прийняття рішень у виробничих системах є такі:

1. Чітке визначення мети в конкретному, кількісно визначеному вигляді. Будь-яке рішення дає ряд результатів, і досягнення кожного з них може стати ціллю. З безлічі можливих цілей вибирають найважливішу, вважаючи інші підлеглими.

Як приклад, розглянемо задачу вибору варіанта технічного переозброєння підприємства. Нехай можливі варіанти заміни діючого устаткування характеризуються витратами, наведеними в табл. 1.

Прагнення досягти одразу двох цілей – економію витрат живої й матеріалізованої праці – призводить до явно не вигідного на фоні інших II варіанта. Вибір, як цілі, мінімуму витрат минулої праці теж призводить до вибору II варіанта. За мінімізації витрат живої праці буде обрано IV варіант. Правильне формулювання цілі – мінімізація сумарних витрат – приводять до III варіанта, за якого, незважаючи на зростання витрат матеріалізованої праці, у цілому досягається найбільша економія.

Показники за варіантами

Варіант	Витрати за варіантом, грн, на одиницю продукції		
	живої праці	минулої (матеріалізованої) праці	загальні
I (вихідний стан)	10	1	11
II	9,5	0,5	10
III	7	1,5	8,5
IV	6	3	9

2. Облік об'єктивних обмежень під час прийняття рішень, без чого рішення не може бути реалізовано.

Взаємодію між критерієм і обмеженнями можна пояснити таким прикладом.

Нехай відома залежність деякого показника (наприклад, прибутку) y від фактора x , представлена на рис. 3 кривою $y = f(x)$. Абсолютний максимум y_1 досягається в точці 1 за значення x , рівного x_1 . З урахуванням обмежень найвигідніше реально існуюче рішення досягається в точці 2 за x , рівного x_2 . Відповідне значення показника, що оптимізується, y_2 менше ніж y_1 , тобто відбувається втрата ефекту порівняно з випадком, коли обмежень немає. Однак рішення, отримане з урахуванням обмежень, може бути реалізоване в конкретних умовах, а взятий окремо критерій може привести до ідеалізованого рішення, не реалізованого в розглянутій обстановці.

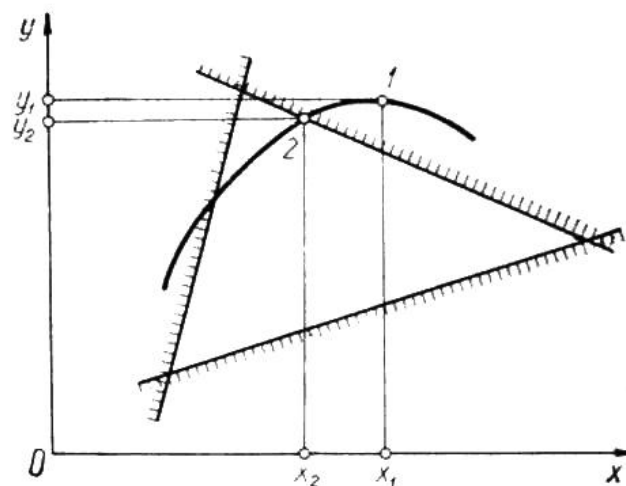


Рис. 3. Вплив обмежень на величину оптимуму, який знаходять

Більшість обмежень, що враховують під час вирішення задач прийняття рішень, відбивають або обмеженість ресурсів, які виділяю на розглянуті цілі (грошових, трудових, матеріальних, часу, потужності тощо), або вимоги до обсягів і якості продукції, що виготовляється (вироблених послуг).

3. Розгляд достатнього переліку альтернативних варіантів досягнення поставленої мети з урахуванням її багатоваріантності. Одноваріантність мислення під час постановки задач є проявом психологічних особливостей людини, однак об'єктивно не виправдана, тому що заздалегідь позбавляє можливості розглянути усі варіанти.

Наприклад, необхідно оцінити ефективність переведення підприємства з дво- на однозмінний режим роботи без втрати добового випуску продукції. У вихідному стані добовий випуск продукції становить 20 одиниць (по 10 одиниць за зміну). Заміна устаткування на більш продуктивне дозволяє зробити 20 одиниць продукції під час однозмінної роботи, що вивільняє частину робітників і дає економічний ефект. Але такий висновок недостатньо доведений, тому що не розглянутий варіант роботи підприємства з новим обладнанням у дві зміни. Збільшення добового обсягу виробництва може дати більший економічний ефект.

4. Досить повний облік різноманітних наслідків здійснення варіантів прийнятих рішень, які проявляються безпосередньо як в даній системі, так і в сполучених системах. Наприклад, під час оцінки проекту будівництва гідроелектростанції, що передбачає затоплення рудного родовища (нехай навіть зараз не розроблюваного, але кондиційного), до витрат на будівництво гідроелектростанції варто додати розрахунковий збиток від втрати запасів руди так, щоб він був врахований під час оцінки ефективності гідроелектростанції.

5. Відбиття взаємозв'язку окремих показників і компонентів виробничої системи. Це необхідно обов'язково робити у всіх випадках, коли поліпшення показників однієї підсистеми погіршує функціонування інших, суміжних. Облік взаємозв'язків здійснюється за допомогою економіко-математичних моделей.

Для прийняття обґрунтованих рішень необхідно використовувати моделі, що описують ціль і об'єктивні обмеження (умови) рішення задачі, дозволяють оцінити можливі варіанти рішень із урахуванням сполучених наслідків і зв'язків.

Оцінка ефективності рішень

Зазвичай, математичні моделі байдужі до смислового вмісту включених у них критеріїв, що призводить за моделей, складених з тих самих параметрів, але з різними критеріями оптимізації, до неоднакових найвигідніших варіантів. У більшості випадків прийняття рішень для виробничих систем основним є *критерій економічної ефективності*. Використання як критеріїв технічних або організаційних параметрів (ріст потужності, підвищення робочої швидкості, підвищення надійності процесу тощо) припустимо, якщо заздалегідь відомо, що їхнє максимальне значення приносить найбільший економічний ефект.

У виробничих системах відбувається перетворення одного набору ресурсів в інший. Ресурси, які використовують у процесі виробництва, витрачаються у формі витрат (V), а ресурси, отримані на виході процесу, утворюють результати (P). Ефективність процесу перетворення в загальному вигляді може бути охарактеризована співвідношенням показників витрат V і результатів P , при цьому жоден показник окремо не дає досить повної характеристики ефективності.

Сполучення витрат і результатів утворюють показники, що розкривають різні аспекти поняття ефективності:

$P/V \rightarrow \max$ – показник результату, який одержують з одиниці витрат;

$V/P \rightarrow \min$ – показник питомих витрат, що припадає на одиницю результату, який досягається;

$P - V \rightarrow \max$ – показник абсолютного ефекту;

$(P - V)/V \rightarrow \max$ – показник відносного ефекту;

$(P - V)/P \rightarrow \max$ – показник питомого ефекту.

Поняття витрат і результатів можуть мати різний конкретний зміст. Якщо результатом вважати обсяг продукції, що випускається, P , а витратами V – витрати праці, то відношення P/V – продуктивність праці, а V/P – трудомісткість продукції. Якщо прийняти V – витрати матеріалів, енергії, капітальні вкладення або повні експлуатаційні витрати, то V/P – відповідно матеріалоемність, енергоемність, капіталоемність і собівартість продукції. Якщо P виразити в обсягах реалізованої продукції, а V – в експлуатаційних витратах, то $P - V$ – прибуток, $(P - V)/V$ – рентабельність, визначена стосовно собівартості.

Можливі й інші сполучення спільного обліку витрат і результатів під час вибору ефективних варіантів рішень. Якщо задана (обмежена) величина витрат ($Z_{\text{доп}}$), відшукується варіант, у якого $P = \max$ за $Z \leq Z_{\text{доп}}$.

Може бути заздалегідь встановлений певний результат ($P_{\text{доп}}$), тоді знаходять рішення, що забезпечує мінімум витрат $P-B - \max$ за $P \leq P_{\text{доп}}$. Такі постановки задач, коли один з компонентів контролюється, а другий вводиться у вигляді обмеження, реалізуються методами лінійного програмування.

За принципової єдності перерахованих вище показників кожний з них відбиває різні сторони ефективності рішень і різні постановки задач. Із цієї причини й не збігаються оцінки ефективності тих самих варіантів за різними показниками. Різними проблемним ситуаціям об'єктивно властиві різні постановки задач і показники, які найбільш відповідають їхній сутності.

Наприклад, нехай є кілька варіантів з однаковим обсягом і номенклатурою продукції, але з різними значеннями витрат і результатів (табл. 2 – 3). Використовуючи як критерії різні показники, одержуємо різні результати під час оцінки ефективності тих самих варіантів. Так, за значеннями результату й ефекту, що доводяться на одиницю витрат, кращим виявляється I варіант. Найбільший абсолютний ефект дає IV варіант. За обмежених витрат краще III варіант, а за заданих вимог за обсягом продукції – II варіант.

Таблиця 2

Розрахункові показники за варіантами

Варіант	B, грн	P, грн
I	4	5
II	8,5	10
III	3	3,2
IV	8,6	10,2
V	3	3,1

Таблиця 3

Результати оцінки варіантів за різними критеріями

Прийнятий критерій ефективності	Варіанти, ранжовані зліва направо, у порядку зменшення ефективності, оціненої за даним критерієм				
	I	IV	II	III	V
$P/B \rightarrow \max$	I	IV	II	III	V
$P - B \rightarrow \max$	IV	II	I	III	V
$(P - B)/B \rightarrow \max$	I	IV	II	III	V
$3 \rightarrow \min$ за $P \geq 10$	II	IV	—	—	—
$P \rightarrow \max$ за $3 < 4$	III	V	—	—	—

З огляду на важливість і достатню складність вибору критерію ефективності, необхідна участь у такому виборі компетентних фахівців тієї галузі знань, до якої тяжіє задача прийняття рішень.

Запитання для самоконтролю

1. Перерахуйте відомі Вам типи проблем і охарактеризуйте їх.
2. Перерахуйте загальні принципи постановки задач прийняття рішень у виробничих процесах.
3. Покажіть, як розкриваються різні сторони ефективності виробничої системи, яка залежить від сполучення показників витрат і результатів.

Лекція 3. МЕТОДИ Й МОДЕЛІ РІШЕННЯ ВИРОБНИЧО-ГОСПОДАРСЬКИХ ЗАДАЧ

Операційний підхід до обґрунтування рішень

Сучасні наукові методи, які використовують для кількісного обґрунтування рішень у різних сферах людської діяльності, поєднуються за назвою *дослідження операцій*. Як науковий напрям, дослідження операцій зародилося у роки другої світової війни з метою найкращої організації бойових дій. Потім методи цієї науки застосовувались під час проектування авіаційних, ракетних і космічних комплексів, перспективного й поточного планування науково-дослідних робіт, проектування складних об'єктів, керування виробничими процесами, прогнозування розвитку різних галузей промисловості та в інших галузях.

Під *операцією* розуміють сукупність закономірно обумовлених дій, які виконує колектив виконавців або окремих виконавців за заздалегідь наміченим планом під чийм-небудь керівництвом і спрямованих на досягнення певної цілі. Вибір способу дій, що гарантує позитивний у заданому змісті результат, називається *рішенням*.

Основні етапи операційного дослідження:

- 1) постановка задачі та вибір критерію оптимізації;
- 2) виявлення основних особливостей, взаємозв'язків і кількісних закономірностей досліджуваної системи;

- 3) побудова математичної моделі системи (або процесу);
- 4) дослідження математичної моделі з використанням спеціальних методів.

Основними методами дослідження математичних моделей є:

- аналітичний метод, що дає наочну картину досліджуваної системи (процесу) і характеризує її параметри; він ґрунтується на використанні диференціального вирахування, методу множників Лагранжа тощо;
- чисельні методи з використанням ПЕОМ, у тому числі методи математичного програмування тощо;
- методи випадкового пошуку (статистичні методи), такі як метод Монте-Карло (ненаправлений випадковий пошук), пошук з парними пробами, лінійний і нелінійний пошук тощо.

Жоден з названих методів не є універсальним з погляду безумовного застосування до вирішення того або іншого завдання дослідження операцій. Основне застосування в дослідженні операцій для виробничих систем знаходять методи математичного програмування й статистичні методи.

Під час проведення операційних досліджень відшуковують рішення, що повністю задовольняють цілі виробничої системи, враховуючи взаємодії більшості підсистем. Такий характер операційних досліджень має приклад *системного підходу*. Дослідження операцій завжди спрямоване на пошук оптимального або близького до нього рішення в межах обмежень, що накладаються сучасним станом науки, недоліком часу, засобів і можливостей. Важливою відмітною рисою дослідження операцій є *багатоаспектний* підхід до системи (наприклад, з погляду фізичної, біологічної, психологічної, соціальної, економічної, інженерної тощо) і відповідно до цього, до складу дослідницької групи входять фахівці різних галузей знань.

Таким чином, операційний підхід до обґрунтування рішень включає системний підхід, математичне моделювання та використання комплексних груп дослідників. Ефективність операційних методів істотно зростає під час використання ПЕОМ, коли є можливість розглядати складні математичні моделі.

Основними класами задач дослідження операцій, для яких створені методи й засоби, є задачі, що розглядають процеси розподілу, упорядкування, обслуговування, заміни, керування запасами, пошуку. Реальні системи, звичайно, характеризуються не одним з перерахованих

процесів, а їх комбінаціями. Крім того, названі процеси не вичерпують всіх ситуацій, з якими доводиться стикатися під час рішення операційних задач. Комбіновані процеси піддаються послідовному рішенням задач певного типу з поетапним коректуванням одержуваних рішень.

Ознайомлення інженера із принципами, методами й засобами операційного підходу до обґрунтування рішень є важливою умовою його підготовки до практичної діяльності у сучасному виробництві.

Задачі розподілу

Загальними умовами цього класу задач є деяка обмеженість ресурсів, у загальному випадку недостатніх для виконання всіх робіт щонайкраще. У підсумку рішення задачі необхідно вибрати таке сполучення ресурсів і робіт, щоб домогтися найбільшого загального ефекту.

У загальному вигляді завдання розподілу записується у такий спосіб:

- необхідно знайти такий розподіл ресурсів, за якого цільова функція досягає максимуму:

$$y = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (1)$$

і виконуються обмеження за ресурсами:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

а також умови незаперечності величин

$$x_j \geq 0, \quad (3)$$

де b_i – наявні ресурси i -го типу, a_{ij} – потреба ресурсів i -го типу на виконання одиниці j -ої роботи; c_j – показник ефективності виконання j -ї роботи; x_j – обсяг (кількість) j -ої роботи, яку необхідно виконати.

Усі задачі розподілу вирішують за допомогою методів математичного програмування. Коли є можливість, їх намагаються звести до досить простих задач лінійного програмування, для яких є добре розроблені обчислювальні методи.

Якщо для виконання операції потрібний тільки один вид ресурсу, а число операцій збігається із числом ресурсів, то задача зводиться до вибору (призначення) по одному ресурсу на кожну операцію. Такі задачі одержали назву *задач про призначення* й записуються у вигляді:

$$y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1;$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо за } i \text{ закріплюється } j, \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$
(4)

Прикладів таких задач можна навести багато: закріплення робіт за машинами, проектувальників – за об'єктами проектування, монтажних кранів – за об'єктами монтажу, тобто у всіх ситуаціях, коли є фіксована кількість робіт і стільки ж виконавців.

Нехай є чотири роботи ($n = 4$), які можна виконати на чотирьох верстатах ($n = 4$). Відома вартість c_{ij} (або трудомісткість, час тощо) виконання кожної роботи на кожному верстаті (табл. 4).

Таблиця 4

Матриця вихідних даних

		Роботи				Кількість верстатів
		P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	
Станки	M ₁	3	7	5	8	1
	M ₂	2	4	4	5	1
	M ₃	4	7	2	8	1
	M ₄	9	7	3	8	1
Кількість робіт		1	1	1	1	

Задача полягає у такому розподілі робіт P_i між верстатами M_i , щоб загальна вартість була мінімальною. Математична модель завдання представлена у такому вигляді:

$$y = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min;$$

$$\sum_{i=1}^4 x_{ij} = \sum_{j=1}^4 x_{ij} = 1;$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$$

$$i, j = \overline{1, 4}.$$
(5)

Оптимальне рішення наведено в табл. 5. Число можливих рішень у завданнях про призначення дорівнює $n!$, тому простий перебір при більших n неможливий. Для рішення таких задач є кілька спеціальних методів, серед яких найпоширеніший угорський метод, що дозволяє за кінцеве число кроків одержати кінцеве оптимальне рішення.

Матриця оптимального рішення

		Роботи				$\sum_{i=1}^4 x_{ij}$
		P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	
Станки	M ₁	3	0	0	0	1
	M ₂	0	4	0	0	1
	M ₃	0	0	2	0	1
	M ₄	0	0	0	8	1
$\sum_{j=1}^4 x_{ij}$		1	1	1	1	

$$y = c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{44} = 17$$

Якщо для виконання деяких операцій може вимагатися більше одного виду ресурсів або ресурси одного виду можуть бути використані для декількох операцій, виникає необхідність розподілу ресурсів і операцій. Типовим різновидом таких задач є *транспортна задача*, що формулюється в загальному вигляді так: маємо m постачальників (підприємств, пунктів відправлення тощо), у яких в наявності деякі вироби, які вони повинні відправити n споживачам (пунктам призначення). Кожний постачальник може відвантажити не більше a_i , $i = \overline{1, m}$, виробів, а кожному споживачеві потрібно не менш b_j , $j = \overline{1, n}$, виробів. Витрати на перевезення з пункту i у пункт j рівні c_{ij} . Необхідно знайти таку схему перевезень, щоб мінімізувати загальні транспортні витрати. Модель транспортної задачі

$$y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}; \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i;$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j;$$

$$x_{ij} \geq \text{усіх } i \text{ та } j$$

У наведеній моделі зроблене припущення про однорідність продукції, що необхідно враховувати під час приведення конкретної ситуації до умов транспортної моделі. Наприклад, якщо на різних бетонних заводах виробляють бетонні суміші різних марок, а різні будівельні об'єкти мають потребу в різних марках бетонних сумішей, до однопродуктової моделі транспортної задачі можна прийти, обравши єдину міру, наприклад, кубічний метр.

Для вирішення транспортних задач використовуються спеціальні методи (потенціали, оптимізації на сітках тощо).

Можна виділити ще ряд різновидів задач розподілу. Наявних ресурсів може не вистачати для виконання всіх операцій, і виникає необхідність вибирати операції й способи їхнього виконання таким чином, щоб забезпечити одержання найбільшого ефекту за умови, що не всі операції обов'язково виконуються. Прикладами таких задач є вибір співвідношення й розташування заготовок під час розкрою аркушів, розподілу витрат на виконання проектних робіт тощо. Можуть бути ситуації, коли є можливість регулювати кількість ресурсів і визначати, які ресурси варто додати і які звідки зняти. Такого типу задачі виникають, коли, наприклад, потрібно встановити чи робити реконструкцію заводу, чи побудувати новий.

Задачі розподілу вирішуються методами математичного програмування, у тому числі лінійного, нелінійного, стохастичного, параметричного й динамічного.

Задачі масового обслуговування

Кожна людина знає, що черга – явище, яке досить часто спостерігається у повсякденному житті, у виробничій та в інших сферах діяльності людей. Черги, очікування пов'язані із процесами обслуговування, коли за рідкісним винятком або клієнтові (заявці на обслуговування), або обслуговуючому персоналу (каналу обслуговування), або й тому й іншому доводиться чекати. Обидва види очікувань пов'язані з витратами. Задача полягає в узгодженні пропускних спроможностей каналів обслуговування й потоку заявок на обслуговування з метою мінімізації сукупних витрат. Можна виділити два класи задач обслуговування: 1 – надходження заявок є випадковим і некерованим, необхідно визначити оптимальний склад каналів обслуговування; 2 – відомі склад і можливості каналів обслуговування, потрібно визначити оптимальний графік їхньої роботи. Перший клас задач вирішується з використанням методів теорії масового обслуговування. Задачі другого класу відносяться до задач упорядкування, для рішення яких використовуються комбінаторні методи.

У загальному вигляді систему масового обслуговування утворюють такі компоненти: вхідний потік заявок на обслуговування, черга, канали обслуговування, вихідний потік заявок (рис. 4).

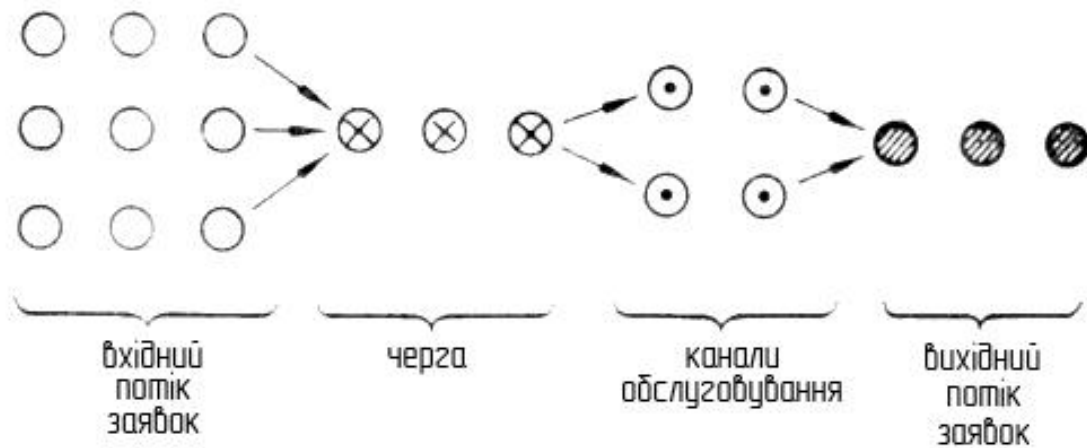


Рис. 4. Схема системи масового обслуговування

Потік заявок розглядається у часі. Він може бути стаціонарним, якщо його параметри в часі не міняються, і нестаціонарним при зміні параметрів у часі; без післядії, якщо число заявок не залежить від того, скільки їх надійшло в попередній момент часу або з післядією, якщо число заявок, що надійшли в цей момент часу, залежить від числа заявок, що надійшли в попередній момент часу. Потіки можуть бути ординарними, коли в один момент часу не може надійти кілька заявок, і неординарними, якщо заявки можуть надходити групами. Потік заявок, що володіє властивостями стаціонарності, ординарності й відсутністю післядії, є найпростішим. Для такого потоку задачі масового обслуговування мають порівняно прості рішення.

Системи масового обслуговування можуть бути одноканальними й багатоканальними, однорідними (складаються з однакових приладів) і неоднорідними, однофазними (заявка виконується в одній фазі) і багатofазними. Прилади в системі масового обслуговування можуть вводитись в дію в міру звільнення, у порядку розташування, випадковому порядку.

Дисципліна черги встановлюється за певними правилами: у міру надходження заявок (першим прийшов – першим обслуговується); у випадковому порядку; за пріоритетами (за важливістю, за терміновістю заявок).

Час обслуговування (виконання заявки) може бути випадковим або не випадковим. Залежно від того, якому імовірнісному закону підкоряються вхідний потік і розподіл тривалості обслуговування (пуасонівський, експонентний розподіл позначають M , розподіл Ерланга – E_{ky} , постійна

величина $-D$) і яке число обслуговуючих приладів у системі (S) різняться класи систем масового обслуговування.

Розглянемо систему обслуговування, яка має одне джерело заявок, що надходять на один прилад. Потік заявок і їхнє обслуговування характеризуються такими умовами: а – заявки надходять через однакові інтервали часу t_3 ; б – заявки виконуються за однакові інтервали часу t_0 ; як тільки закінчується обслуговування однієї заявки, прилад готовий до обслуговування наступної заявки; в – дисципліна черги (першим прийшов – першим обслуговується). Така система належить до класу детермінованих $D/D/1$ (система з одним приладом, що обслуговує заявки за суворо визначений час, потік заявок детермінований). Функціонування такої системи залежить від того, як пов'язані між собою t_3 і t_0 :

$$1) t_0 > t_3; \quad 2) t_0 = t_3; \quad 3) t_0 < t_3.$$

За $t_0 > t_3$ швидкість обслуговування ($1/t_0$) менше швидкості надходження заявок ($1/t_3$), тому буде утворюватися черга, причому вона буде невизначено зростати.

За $t_0 = t_3$, якщо немає в черзі заявок, то кожна заявка, що надійшла знову, почне виконуватися без очікування; якщо спочатку є черга, то її довжина буде залишатися постійною.

За $t_0 < t_3$ швидкість обслуговування більша, ніж швидкість надходження заявок і, отже, за будь-якого початкового числа заявок довжина черги буде скорочуватися.

Для таких систем можна встановити всі характеристики процесу обслуговування від його початку (час надходження заявки, час очікування, довжину черги тощо).

Більшість систем обслуговування не належить до цього типу; зазвичай, одна або більше змінних, що описують систему, підкоряються певному імовірнісному закону.

Розглянемо систему масового обслуговування з пуасонівським вхідним потоком заявок, експонентним часом обслуговування й одним каналом обслуговування — $M/M/1$.

Вхідний потік заявок – стаціонарний, ординарний, без післядії (найпростіший потік) — характеризується тим, що ймовірність надходження протягом інтервалу часу t рівно n заявок:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

де λ — щільність потоку заявок (середня швидкість надходження заявок).

Якщо щільність потоку заявок λ менше середньої швидкості обслуговування (інтенсивності обслуговування) μ , то згодом система ввійде в стаціонарний режим. Після досить великого часу з початку процесу розподіл довжини черги стане стаціонарним, тобто незалежним від t . Для таких умов:

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Частка простоїв каналу обслуговування (імовірність того, що канал вільний, тобто $n=0$)

$$P_0 = 1 - \lambda/\mu. \quad (9)$$

Середня довжина черги (число заявок у системі)

$$\bar{n} = \frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu}. \quad (10)$$

Середній час очікування обслуговування

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{\lambda/\mu}{\mu(1 - \lambda/\mu)}. \quad (11)$$

Нехай слюсарям-електрикам надходить відповідно до пуассонівського закону в середньому по три заявки за зміну на ремонтне обслуговування. Середній час обслуговування однієї заявки становить 2 год. і підкоряється експонентному закону. За тривалості зміни слюсаря-електрика 8 год. одержимо:

- середній час очікування однією заявкою обслуговування

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{3/4}{4(1 - 3/4)} = 3/4, \text{ т. е. } 6 \text{ ч.}$$

- час простоїв слюсаря-електрика за зміну

$$t_{\text{пр}} = 8P_0 = 8(1 - 3/4) = 2 \text{ год.}$$

Для систем класу $M/M/m$, тобто систем масового обслуговування, що мають m каналів обслуговування й характеризуються найпростішими потоками заявок і експонентним розподілом тривалості обслуговування, є досить прості обчислювальні методи, що дозволяє їх широко використовувати на практиці.

Задачі масового обслуговування досить різноманітні: визначення пропускної здатності ремонтної служби заводу, встановлення оптимального складу робітників у бригадах, розробка оптимальної структури органів управління тощо.

Аналіз і синтез систем масового обслуговування опираються на спеціальний математичний апарат теорії ймовірностей, диференціальних та інтегральних рівнянь. Для ситуацій, коли зустрічаються кілька взаємозалежних черг різної ймовірнісної природи, ефективнішими виявляються методи імітаційного моделювання.

Запитання для самоконтролю

1. Що входить у поняття «наукове дослідження операцій»?
2. Які Вам відомі основні етапи операційного дослідження?
3. Які Вам відомі методи дослідження математичних моделей, охарактеризуйте їх?
4. Які Вам відомі класи задач дослідження операцій?
5. Охарактеризуйте загальний випадок задач розподілу.
6. Поняття черги, як основної проблеми задач масового обслуговування та їх класи.
7. Що таке дисципліна черги?

Лекції 4, 5. ЗАДАЧІ УПОРЯДКУВАННЯ

Досить часто виникають проблеми вибору послідовності, маршруту й календарних строків виконання деяких робіт. Загальною властивістю таких процесів є фіксоване число каналів обслуговування, а визначенню підлягає або розподіл заявок, які надходять, або послідовність їхнього обслуговування, або обидві залежності. Задача полягає в знаходженні послідовності надходження заявок (дисципліни черги) або упорядкуванні робіт, які повинні бути виконані, щоб сума відповідних витрат була мінімальною. Прийнято розрізняти *задачі упорядкування* — устанавлення тільки порядку виконання деякого набору робіт; *задачі календарного планування* — встановлення строків виконання робіт, тобто встановлення моментів початку і закінчення робіт; *задачі вибору маршруту* — відшукування найкоротшого маршруту переміщення по декількох пунктах. Ці задачі відображаються моделями цілочисельного програмування, але через дуже велику розмірність (великого числа змінних і обмежень) їх прагнуть звести, за можливості, до комбінаторних і сітьових моделей, які залежно від ступеня визначеності параметрів поділяють на детерміновані й стохастичні.

Типовим прикладом задач упорядкування є *задача визначення оптимальної послідовності обробки n різних виробів на m верстатах*. Щоб представити принципову складність задач цього класу, можна вказати, що у випадку обробки чотирьох виробів на п'яти верстатах існує $(4!)^5 = 7\,962\,624$ різних варіантів послідовностей обробки (частина цих послідовностей може бути нереалізованою через технологічні обмеження). Зрозуміло, що простим перебором таку задачу вирішити не можна, і на практиці використовують точні (для простих випадків) або наближені спеціальні методи.

Розглянемо просту ситуацію обробки n виробів на двох верстатах з такими умовами: кожний виріб спочатку проходить обробку на першому верстаті, потім на другому; черговість обробки кожного виробу на обох верстатах постійна (тобто, якщо якийсь виріб першим пройшов обробку на першому верстаті, то й на другому верстаті він буде оброблятися першим; допускається існування перерв в обробці виробів (через зайнятість верстата)). Задача полягає у визначенні послідовності, за якої загальний час обробки всіх виробів буде мінімальним і перерви в обробці виробів або простої верстатів будуть також мінімальними.

Нехай є дані про тривалість обробки виробів $n = 6$ на двох верстатах (табл. 6). На рис. 5, *a* наведено лінійний графік обробки виробів, на якому послідовність проходження виробів по верстатах прийнята за черговістю номерів виробів у таблиці вихідних даних.

Таблиця 6

Час і послідовність обробки виробів на верстатах

Порядковий номер виробу	Витрати часу, хв, на обробку на верстатах		Оптимальна черговість обробки
	I	II	
1	5	4	4
2	3	1	6
3	5	2	5
4	4	5	2
5	6	5	3
6	3	6	1

Загальний час обробки всіх виробів $T = 34$ хв, при цьому є чотири перерви у роботі верстатів загальною тривалістю $\sum_{i=1}^4 t_i^n = 11$ хв.

Скористаємося алгоритмом Джонсона для знаходження оптимальної послідовності обробки.

Крок 1. Знаходимо рядок у табл. 6 з мінімальним часом обробки. У нашому прикладі це рядок 2 (виріб 2).

Крок 2. Якби ця величина перебувала в I стовпчику, то j -й виріб помістили б на I верстат у першу чергу. Оскільки ця величина перебуває в II стовпчику, то j -й виріб займає останню чергу на I верстаті (тобто виріб 2 буде оброблятися останнім – шостим за рахунком).

Крок 3. Викреслюємо обраний виріб і продовжуємо процедуру пошуку, повторюючи кроки 1 і 2, поки закінчимо переглядати всі рядки таблиці. Отримана послідовність буде оптимальною.

На рис. 5, б представлена ця послідовність. Час обробки всіх виробів $T = 27$ хв і сумарний час простоїв $\sum_{i=1}^2 t_i^n = 4$ хв.

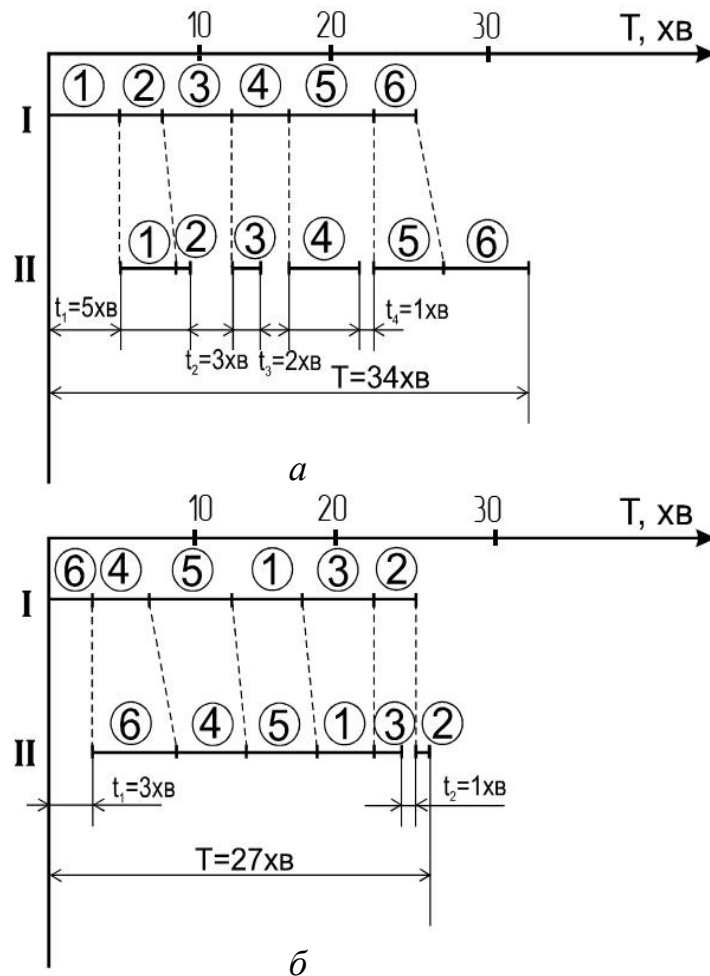


Рис. 5. Графіки обробки виробів:
а – вихідний; б – оптимальний

На практиці досить часто зустрічаються складні комплекси робіт, що представляють собою сукупності взаємозалежних і цілеспрямованих робіт із установленими відносинами порядку (черговості) їхнього виконання різними виконавцями (організаціями різної відомчої підпорядкованості). Прикладами таких комплексів робіт можуть бути будівництво заводу, підготовка до випуску нової продукції, ремонт технологічних агрегатів, впровадження нових технологічних процесів, проведення проектних або науково-дослідних розробок тощо. Сфера організаційних задач із названими властивостями дуже широка. Під час управління виконанням комплексів робіт використовують моделі, які адекватно відображають цілі, склад, порядок і умови виконання робіт – сітьові моделі.

Сітьова модель комплексу взаємозалежних робіт містить орієнтований граф, що відображає склад і послідовність виконання робіт і набір характеристик, що визначають час, вартість, ресурси і якість виконання робіт. Основними елементами комплексу робіт є роботи й події. *Робота* являє собою трудовий процес, у якому беруть участь люди, машини, механізми (виготовлення виробів, проектування агрегата, узгодження й затвердження плану тощо), або процес очікування (твердіння бетону, висихання пофарбованих поверхонь тощо); такий процес завжди протікає в часі. *Подія* означає певний стан у виконанні комплексу робіт. Подія, на відміну від роботи, не є процесом і не має тривалості.

Робота характеризується назвою (ідентифікатором-описом, номером, кодом тощо) і обсягом (трудомісткістю в людино- або машино-годинах, тривалістю в одиницях часу, фізичними розмірами, вартісними показниками). Подія, зазвичай, характеризується складом вхідних і вихідних робіт; їй присвоюється певний номер і дається визначення («вузли доставлено», «проект погоджено», «демонтаж вузла закінчено» тощо).

Відносини порядку між роботами (подіями) виражаються умовами передування (проходження), залежно від яких розрізняють: безпосередньо попередні даній події роботи – вхідні; безпосередньо наступні за даною подією роботи – вихідні.

Кожна робота пов'язує пару подій: *початкова подія* відповідає початку однієї або декількох вхідних робіт, а *кінцева* — закінченню однієї або декількох вхідних робіт.

Події, що не мають вхідних робіт, називаються *вихідними*, а не мають вихідних робіт – *завершальними подіями* комплексу; всі інші події називаються *проміжними*. Завершальні й деякі проміжні події, що означають

досягнення певної мети, називаються *цільовими*. Події, що представляють інтерес для управління комплексом робіт, називаються *контрольними*.

Відносини між роботами й подіями показують за допомогою орієнтованого графа, що складається з вершин (подій) і дуг (робіт). Орієнтований граф характеризується тим, що всі його дуги мають напрямок, тобто для кожної дуги зазначено, яка із двох її граничних вершин початкова, яка кінцева.

Послідовність різних дуг, у якій кінцева вершина кожної попередньої дуги збігається з початковою вершиною наступної дуги, називається *шляхом*. Шлях від вихідної вершини до завершальної називається *повним*.

Орієнтований граф, що відбиває відношення передування й безпосереднього передування між роботами комплексу, називається *сіттю комплексу*, а її графічне зображення — *сітьовим графіком*. Розрізняють сітьові графіки, орієнтовані на роботи («роботи-вершини») і орієнтовані на події («роботи-дуги»). Останні найпоширеніші й всі наступні викладення ведуться відповідно до цього типу.

Під час побудови сітьових графіків дотримуються ряд правил, що дозволяють однозначно відобразити відносини між роботами в комплексі (табл. 7).

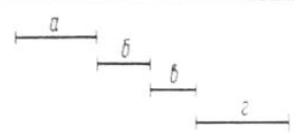
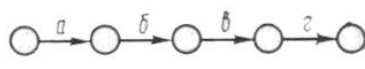
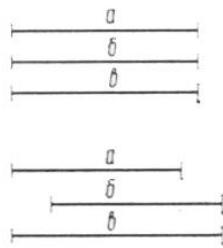
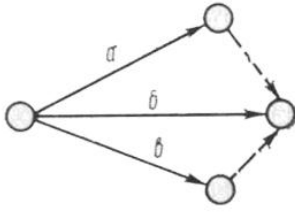
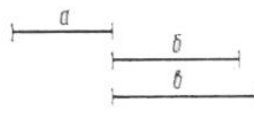
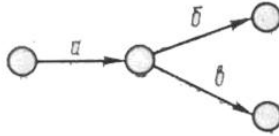
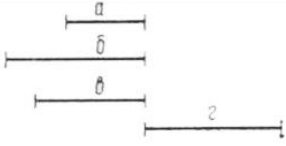
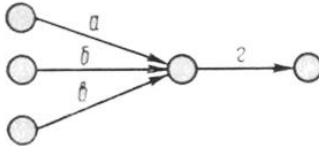
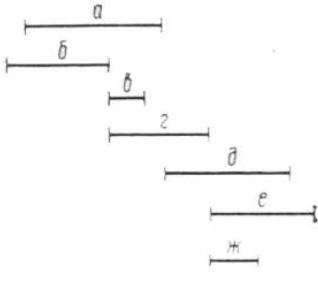
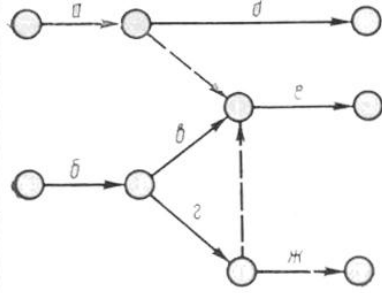
Сітьовий графік, побудований за цими правилами, має такі властивості:

- жодна подія не може настати доти, поки не будуть закінчені всі вхідні в неї роботи;
- жодна робота, що виходить із даної події, не може початися раніше, ніж настане ця подія;
- жодна наступна робота не може початися раніше, ніж будуть закінчені всі попередні їй роботи.

Вершини (події) сітьового графіка нумеруються з дотриманням умови $i < j$ (i — номер початкової, а j — кінцевої події); така нумерація значно зменшує обсяг обчислювальних робіт під час визначення параметрів. Для виконання зазначеної умови користуються таким алгоритмом:

- знаходять вихідну подію сіті, у яку не входить жодна робота, і присвоюють їй номер;
- позначають всі роботи, що виходять із пронумерованих подій; знаходять події, у яких всі вхідні роботи позначені, і присвоюють їм номери за зростанням; два останніх кроки повторюють доти, поки не будуть пронумеровані всі події.

Основні правила побудови сітьових графіків

Відносини між роботами	Лінійний графік	Сітьовий графік
Декілька робіт (а,б,в,г) виконуються послідовно		
Декілька робіт (а,б,в,г) виконуються паралельно (з однаковою і різною тривалістю)		
Декілька наступних робіт (б,в) починаються після однієї попередньої (а)		
Наступна робота (г) починається після декількох попередніх (а,б,в)		
Декілька наступних робіт залежать від декількох попередніх: роботи попередні роботи а - б - в б г б д а е а,в,г, ж г		

Крім графічного подання сіті використовуються також її таблична й цифрова форми, що є ізоморфними сітьовому графіку й містять еквівалентну інформацію про комплекс робіт. На рис. 6, а показано сітьовий графік, якому відповідає матриця інциденцій (попарних зв'язків), що є табличною формою подання сіті (рис. 6, б). На перетині рядків і стовпців проставлена мітка, яка вказує, що відповідні вершини (події) пов'язані між собою дугами (роботами). Цю матрицю можна використовувати також для перевірки правильності нумерації вершин у сіті;

у розглянутому прикладі всі події пронумеровані правильно ($i < j$), тому мітки в матриці розташовуються праворуч, вище її головної діагоналі.

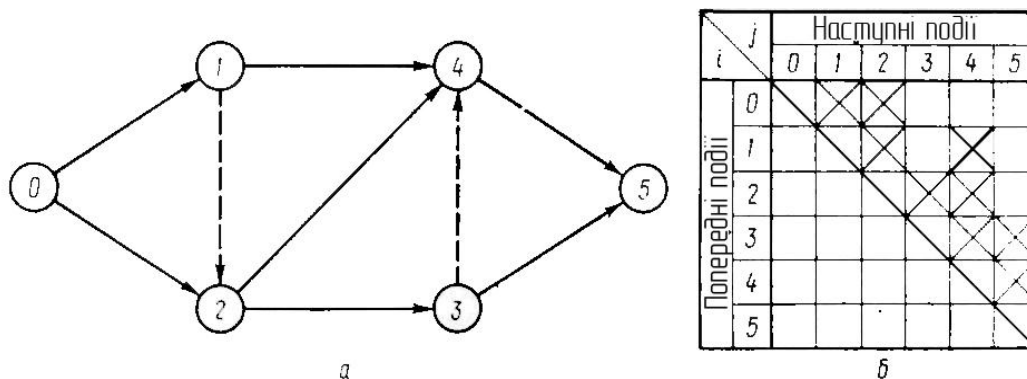


Рис. 6. Графічне і табличне подання сіті:
a – сітьовий графік; *б* – відповідна йому матриця інцидентцій

У цифровій формі сітьова модель представлена впорядкованими парами цифр i, j , що відповідають номерам початкових і кінцевих подій робіт. Ці пари розташовуються в порядку зростання номерів i , а за однакових їхніх значень — у порядку зростання номерів j . Для розглянутого прикладу цифрова форма подання сіті матиме такий вигляд: (0, 1); (0, 2); (1, 2); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (3, 4); (3, 5); (4, 5).

Розрізняють *канонічні* й *альтернативні* сіті. *Канонічні сіті* використовуються для відбиття комплексів робіт, у яких для початку всіх наступних робіт повинні бути виконані всі попередні їм роботи, тобто всі вхідні й вихідні роботи пов'язані між собою за схемою «І». У реальних комплексах робіт зустрічаються й інші залежності, коли деякі наступні роботи можуть починатися після виконання хоча б однієї з попередніх робіт - вхідні й вихідні роботи пов'язані за схемою «АБО».

Для відображення таких залежностей застосовуються *альтернативні сіті*, що дозволяють відбити багатоваріантність виконання комплексу робіт.

Важливими для комплексу робіт і кожної роботи є тимчасові, вартісні й ресурсні характеристики.

У найбільш простих моделях тривалість роботи вказується в припущенні її постійної швидкості виконання; при цьому тривалість роботи може бути як детермінованою, так і випадковою величиною, що задається законом її розподілу (щільністю розподілу).

Сітьова модель може включати також характеристики витрат часу на окремі роботи й весь комплекс у цілому. Залежно від умов виконання роботи змінюється її вартість. Найпоширеніші моделі, у яких вартість роботи залежить від тривалості й виражається функцією «час – вартість».

Для задач управління важливе значення має також інформація *про ресурси*, які використовуються під час виконання комплексу робіт. Розрізняють два типи ресурсів:

- непоновлювані ресурси типу матеріалів, що витрачаються у процесі виконання робіт; вони змінюють свою натуральну форму і їх повторне використання неможливе;

- поновлювані ресурси типу потужностей; такі ресурси в процесі виконання роботи самі не витрачаються, а беруть участь в утворенні деякого фактора, що витрачається (людино-години, машино-зміни тощо), і не допускають накопичення; їхнє недовикористання протягом деякого часу призводить до втрати певної кількості фактора, що витрачається.

Залежно від сполучення розглянутих вище властивостей застосовують різні типи сітьових моделей.

Вибір відповідного типу моделі ґрунтується на обліку суперечливих вимог: адекватності моделі й об'єкта та простоти моделі. Далі викладаються основні положення з використання в управлінні одноцільових детермінованих моделей з урахуванням тимчасових характеристик.

В управлінні комплексами робіт сітьова модель застосовується як на стадії планування, так і на стадії оперативного управління (регулювання) ходом виконання робіт. На етапі планування розглядаються задачі: визначення складу комплексу робіт, взаємозв'язку й послідовності їхнього виконання; оцінка часу виконання кожної роботи; розрахунок параметрів сітьових моделей; аналіз і оптимізація сітей.

Під час планування комплекс робіт розбивається на складові частини (етапи), за якими закріплюються відповідальні виконавці, що керують даним складом робіт. Час виконання робіт визначається за оцінками відповідальних виконавців і фахівців-експертів. Тривалість робіт, для яких існують норми трудомісткості, установлюється, виходячи з обсягів робіт і складу працівників, що беруть участь у їхньому виконанні. Тривалість роботи не можна однозначно визначити, якщо відсутні норми на її виконання (наприклад, на нові роботи, які раніше ніколи не виконувалися) або, якщо обсяг роботи й деякі параметри, що визначають її швидкість, є

випадковими величинами. У таких випадках застосовується метод експертних оцінок. Відповідальні виконавці або фахівці-експерти дають кілька оцінок можливої (очікуваної) тривалості роботи: $t_{ij \min}$ – мінімальний час виконання роботи (i, j) за найбільш сприятливого збігу обставин (оптимістична оцінка); $t_{ij \max}$ – максимальний час виконання роботи (i, j) за найбільш несприятливого збігу обставин (песимістична оцінка); $t_{ij \text{ н.в.}}$ – найбільш імовірний час виконання роботи (i, j) за обставин, які найчастіше зустрічаються (реалістична оцінка).

Залежно від функції розподілу тривалості робіт і числа оцінок (три або дві) очікувана тривалість роботи обчислюється за формулами:

$$\bar{t}_{ij} = \frac{t_{ij \min} + 4t_{ij \text{ н.в.}} + t_{ij \max}}{6}; \quad (12)$$

$$D_{ij} = \left(\frac{t_{ij \max} - t_{ij \min}}{6} \right)^2 \quad (13)$$

або

$$\bar{t}_{ij} = \frac{3t_{ij \min} + 2t_{ij \max}}{5}; \quad (14)$$

$$D_{ij} = \left(\frac{t_{ij \max} - t_{ij \min}}{5} \right)^2, \quad (15)$$

де D_{ij} — дисперсія одержуваної оцінки (міра невизначеності).

Отримані таким способом оцінки очікуваних тривалостей робіт використовуються для розрахунку параметрів сітьових моделей. Основними параметрами сітьового графіка є критичний шлях, резерви часу подій і резерви часу робіт.

Позначимо в сітьовому графіку очікувану тривалість робіт (числа над стрілками). Побудуємо для зручності розгляду параметрів масштабний лінійний графік, ізоморфний сітьовому (рис. 7). Кожній події поставимо у відповідність крапку (або кілька крапок, якщо подія належить декільком роботам), роботи розташуємо в словниковому порядку (за індексами i , що зростають, а за однакових індексів i — у порядку зростання індексів j).

Виходячи з визначення повного шляху, можна записати:

$$L_1 = (0,1); (1,4); (4,5) \quad t(L_1) = 2+1+6 = 9$$

$L_2 = (0,1); (1,2); (2,4); (4,5)$	$t(L_2) = 2+0+5+6 = 13$
$L_3 = (0,1); (1,4); (2,3); (3,4); (4,5)$	$t(L_3) = 2+0+7+0+6 = 15$
$L_4 = (0,1); (1,2); (2,3); (3,5)$	$t(L_4) = 2+0+7+4 = 13$
$L_5 = (0,2); (2,4); (4,5)$	$t(L_5) = 3+5+6 = 14$
$L_6 = (0,2); (2,3); (3,4); (4,5)$	$t(L_6) = 3+7+0+6 = 16$
$L_7 = (0,2); (2,3); (3,5)$	$t(L_7) = 3+7+4 = 14$

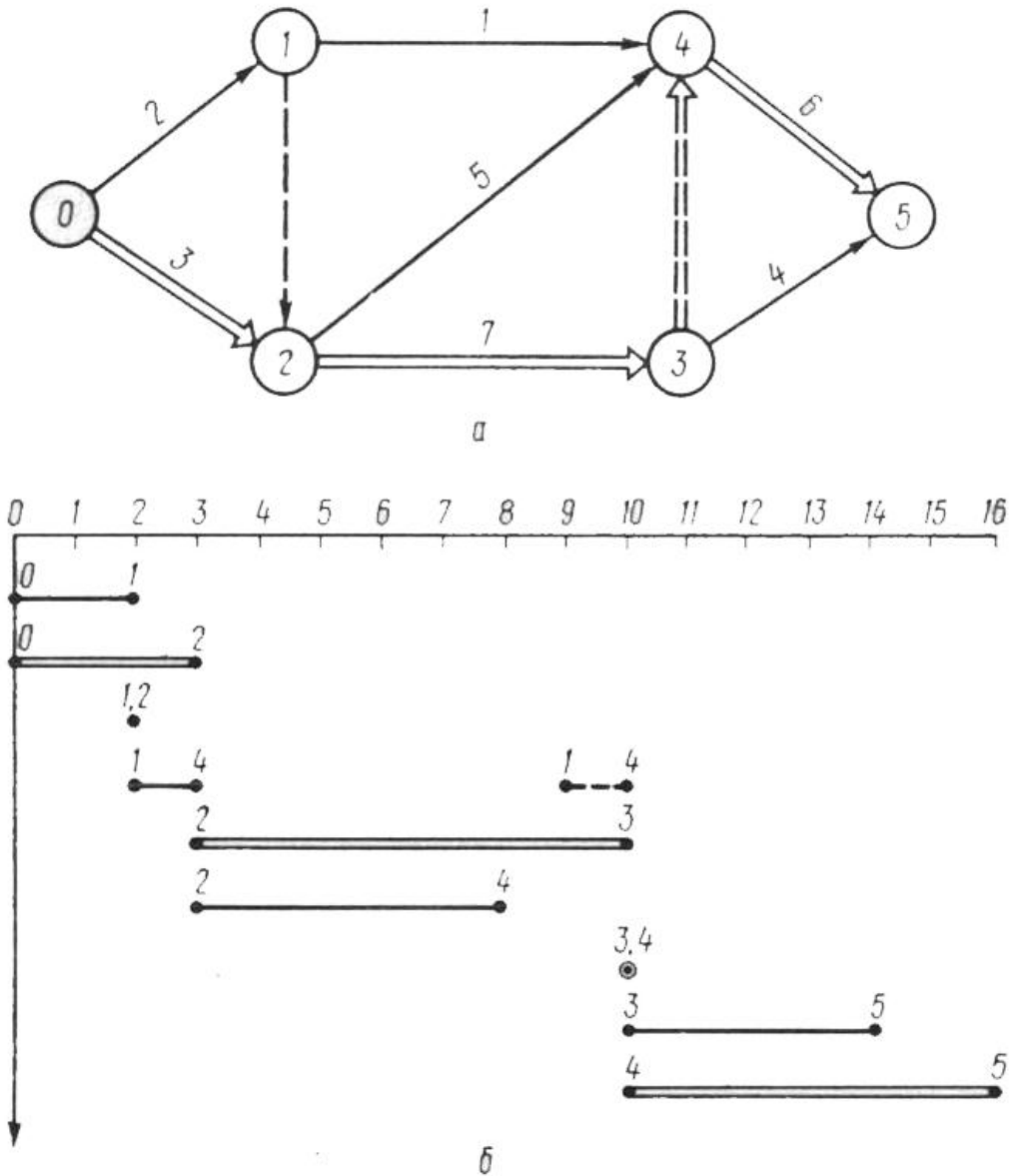


Рис. 7. Графічне подання сіті:
a – сітьовий графік; *б* – відповідний йому лінійний графік

Використовуючи очікувані тривалості робіт, визначимо довжину кожного шляху. Шлях L_6 має найбільшу довжину й визначає мінімальний

час виконання всього комплексу робіт $t(L_6) = 16$. Такий повний шлях максимальної довжини називається *критичним*, а його довжина визначає *критичний час*:

$$T_{кр} = t(L_{кр}) \quad (16)$$

Усі інші (k - ϵ) шляхи менші критичного, тобто мають резерви часу

$$R(L_k) = T_{кр} - t(L_k), \quad (17)$$

які відповідно рівні:

$$\begin{aligned} R(L_1) &= 7, \quad R(L_2) = 3, \quad R(L_3) = 1, \\ R(L_4) &= 3, \quad R(L_5) = 2, \quad R(L_6) = 2. \end{aligned}$$

У критичного шляху резерв часу дорівнює нулю. Роботи критичного шляху позначені подвійними стрілками (на лінійному графіку подвійними лініями). На графіку видно, що виконання некритичних робіт може бути зміщене без будь-якого впливу на довжину критичного шляху. Відповідно події цих робіт можуть наступати в різні моменти часу. Наприклад, подія 4 роботи (1,4) може наступити або в момент часу 3 (за шкалою поточного часу), або в момент часу 10. Аналогічні моменти настання можна виділити у всіх подій, вони позначаються: $T_i^{(p)}$ — ранній строк настання події; $T_i^{(n)}$ — пізній строк настання події.

Відповідно до властивостей сітьового графіка, ранній строк настання події – це довжина самого довгого шляху, що веде з вихідної події в ту, яку розглядають, а пізній строк настання події дорівнює різниці між довжиною критичного шляху й довжиною максимального шляху, що веде з розглянутої події в завершальну, тобто

$$T_i^{(p)} = t[L_{\max}(I \dots i)]; \quad (18)$$

$$T_i^{(n)} = t(L_{кр}) - t[L_{\max}(i \dots J)], \quad (19)$$

де I – вихідна подія; J – завершальна подія.

Якщо відомий ранній строк настання попередньої події, ранній строк настання наступної події

$$T_j^{(p)} = \max_{i \in j} \{T_i^{(p)} + t_{ij}\}. \quad (20)$$

Якщо відомо пізній строк настання наступної події, пізній строк настання даної події

$$T_j^{(n)} = \min_{i \in j} \{T_j^{(n)} - t_{ij}\}. \quad (21);$$

Різниця між пізнім і раннім строками настання подій – це *резерв часу події*

$$R_i = T_i^{(n)} - T_i^{(p)}. \quad (22)$$

Оскільки в робіт, що входять у критичні шляхи, $T_i^{(n)} = T_i^{(p)}$, то резерви часу подій, що належать цим роботам, дорівнюють нулю.

Під час планування виконання комплексу робіт потрібно визначати також *резерви часу робіт*. Повний резерв

$$r_{ij}^{(пн)} = T_j^{(n)} - T_i^{(p)} - t_{ij} \quad (23)$$

це максимальний час, на який можна відкласти початок або збільшити тривалість роботи (i, j) , не змінюючи ранній строк настання завершальної події.

Вільний резерв

$$r_{ij}^{(св)} = T_j^{(p)} - T_i^{(p)} - t_{ij} \quad (24)$$

це максимальний час, на який можна відкласти початок або збільшити тривалість роботи (i, j) за умови, що всі події сіті наступають у свої ранні строки.

На основі залежностей (20) – (24) побудовані різні алгоритми розрахунку параметрів сітьових моделей. На рис. 8 наведено приклад розрахунку параметрів безпосередньо в сіті.

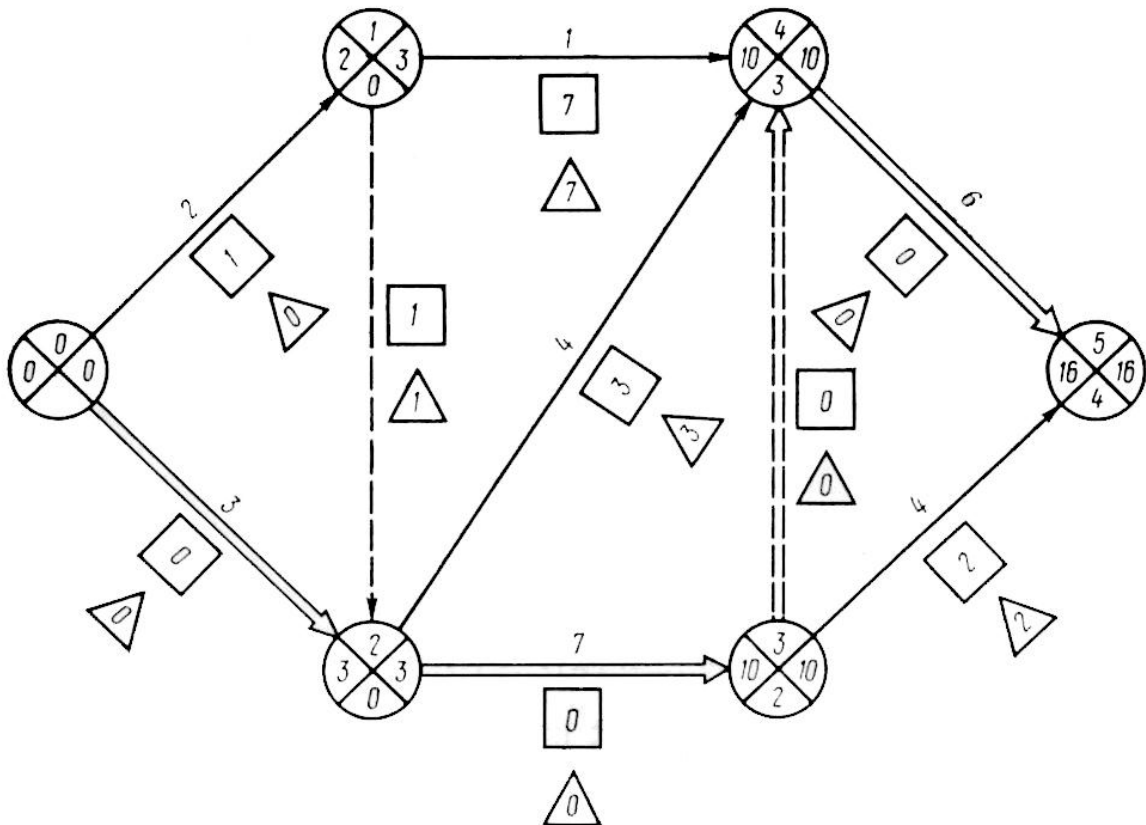


Рис. 8. Розрахунок параметрів сітьового графіка

Для зручності запису події зображені кружками, розділеними на чотири сектори. У верхньому секторі записується номер події, у лівому – ранній строк настання події, у правому – пізній строк настання події, у нижньому – номер події, з якої в розглянуту веде шлях максимальної довжини. Під стрілками записані повні (у прямокутниках) і вільні (у трикутниках) резерви часу робіт. Зліва направо, починаючи від вихідного, переглядаємо всі події (у порядку зростання їхніх номерів) і відповідно до формули (20) у ліві сектори записуємо максимальні суми строків лівих секторів попередніх подій і тривалості робіт та знаходимо в такий спосіб ранні строки настання подій. Для вихідної події приймаємо або заданий строк початку робіт, або нуль (початок відліку за шкалою поточного часу). Ранній строк настання завершальної події ($T_5^{(p)}=16$) визначає мінімальний час виконання всього комплексу робіт, тобто довжину критичного шляху. Оскільки події критичного шляху мають нульові резерви часу, тобто $R_5 = 0$, то $T_5^{(p)} = T_5^{(n)}$. На цій підставі записуємо в правий сектор завершальної події значення лівого сектора. Тепер, рухаючись справа наліво у порядку убуття номерів подій, визначаємо відповідно до формули (21) мінімальні різниці між значеннями правих секторів наступних подій і тривалостями попередніх робіт. У такий спосіб визначаємо пізні строки настання подій. Рівність пізнього й раннього строків вихідної події свідчить про правильність виконаних розрахунків. Якщо тепер виділити події, що мають нульові резерви часу, і врахувати напрямки максимальних шляхів (значення нижніх секторів), можна виділити роботи, що утворять критичний шлях (показані подвійними стрілками). Проходом справа наліво за формулами (23) і (24) визначаємо повні й вільні резерви часу робіт.

Отримані під час розрахунку сітьової моделі параметри використовуються для її аналізу з метою приведення її у відповідність із заданими обмеженнями, насамперед із плановими строками. Виходячи з відношення між критичним і директивним строками $T_{кр} \leq \geq T_{дир.}$, оцінюється необхідність коректування вихідної сітьової моделі. Якщо $T_{кр} > T_{дир.}$, то потрібно скоротити тривалість критичних робіт або шляхом уточнення їхньої очікуваної тривалості, або перерозподілом ресурсів (зняття з некритичних робіт), або зміною способів ведення робіт. Сітьова модель приводиться у відповідність із директивним строком її оптимізацією, тобто послідовним поліпшенням первісного варіанта з урахуванням витрат.

Після затвердження варіанта сітьової моделі визначаються строки завершення окремих етапів комплексу й відповідні контрольні події, складається перелік поставок матеріалів та устаткування із вказівкою строків і на цій основі відповідальними виконавцями (організаціями) розробляються плани реалізації комплексу у встановлений строк.

Сітьова модель використовується і для оперативного управління ходом робіт. При цьому із встановленою періодичністю оцінюється поточний стан процесу. Отримана інформація використовується для розрахунку й відновлення сітьової моделі, на основі чого приймаються рішення про керуючі впливи.

Сітьові моделі під час виконання складного комплексу робіт можуть мати разове застосування. Але найефективніше використовується сітьове моделювання як система організаційного керування, що входить до складу АСУ.

Певний практичний інтерес представляє *завдання вибору маршруту* (завдання комівояжера), що полягає в упорядкуванні ряду робіт з обладнання так, щоб мінімізувати деякі характеристики переходу з однієї роботи на іншу. Прикладом такого завдання може бути визначення послідовності запуску виробів у виробництво, щоб мінімізувати витрати на переналагодження обладнання.

Нехай витрати на переналагодження обладнання під час переходу з випуску виробу i на виріб j становлять c_{ij} ($i \neq j$). Необхідно знайти такі:

(25)

щоб мінімізувалася функція

$$y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad i = j = \overline{1, n}, \quad (26)$$

за

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1; \quad \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \quad (27)$$

де x_{ij} — позитивні цілі при всіх i і j . Для рішення таких задач використовуються різні модифікації методу відгалужень і границь.

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягає особливість задач упорядкування, скільки їх різновидів Вам відомо?
2. Охарактеризуйте поняття "сітьової моделі" та її компонентів.

3. Що таке орієнтований графік?
4. Які Вам відомі основні правила побудови сітьових графіків?
5. З якою метою будують і використовують матрицю інцидентів?
6. Дайте характеристику складного комплексу робіт.
7. Що таке метод експертних оцінок?
8. У якій послідовності розраховують параметри сітьових моделей?
9. Охарактеризуйте поняття "критичного шляху".

Лекція 6. ЗАДАЧІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

Задачі цього класу виникають, коли є як мінімум два види затрат (видів витрат), що змінюються зі зміною запасів, і потрібно знайти, скільки й коли замовляти (купувати, робити), щоб сукупні витрати були найменшими. До таких задач відносяться визначення оптимальної місткості складів на ДСК, оптимальної потужності обладнання, підготовки оптимальної кількості кадрів тощо. Запаси створюються з різних причин. Загальними проблемами управління запасами є визначення запасу N залежно від часу t . У загальному вигляді функцію зміни запасів можна виразити як $N = f(t)$ і представити зразковий характер її зміни у вигляді графіка (рис. 9). Як видно з рисунка, запас може поповнюватися миттєво або безупинно, попит на матеріал може бути постійним (рівномірне споживання) або характеризуватися нерівномірним споживанням. Із запасами пов'язані такі затрати (витрати): на поповнення запасу (замовлення, доставка, розвантаження); на зберігання (утримання) запасу; витрати, обумовлені дефіцитом, що виникає (під час зупинки виробництва, наприклад, у зв'язку з відсутністю матеріалу).

Розглянемо основну модель управління запасами за таких умов: попит постійний і безперервний, дефіцит відсутній, надходження відбувається миттєво, як тільки рівень запасу знижується до нуля (рис. 10). Введемо позначення: N – річна потреба в матеріалі; C_d – витрати на доставку партії; C_x – витрати на зберігання одиниці запасу за одиницю часу; C_z – вартість одиниці запасу; N_n – розмір партії поставки.

Щоб повністю задовольнити річний попит N за розміру поставки N_n , необхідно зробити N/N_n поставок за рік. Середній рівень запасу становить $N_n/2$. Рівняння витрат, пов'язаних з річними запасами має такий вигляд:

$$C = C_d N / N_{\Pi} + C_3 N + C_x N_{\Pi} / 2. \quad (28)$$

Для визначення значення N_n , що перетворює C у мінімум, прирівнюємо похідну $\frac{dC}{dN_{\Pi}}$ до нуля:

$$\frac{dC}{dN_{\Pi}} = -\frac{C_d N}{N_{\Pi}^2} + 0 + \frac{C_x}{2} = 0. \quad (29)$$

Вирішивши це рівняння відносно N_{Π} , знайдемо оптимальний розмір партії:

$$\bar{N}_{\Pi} = \sqrt{2C_d N / C_x}. \quad (30)$$

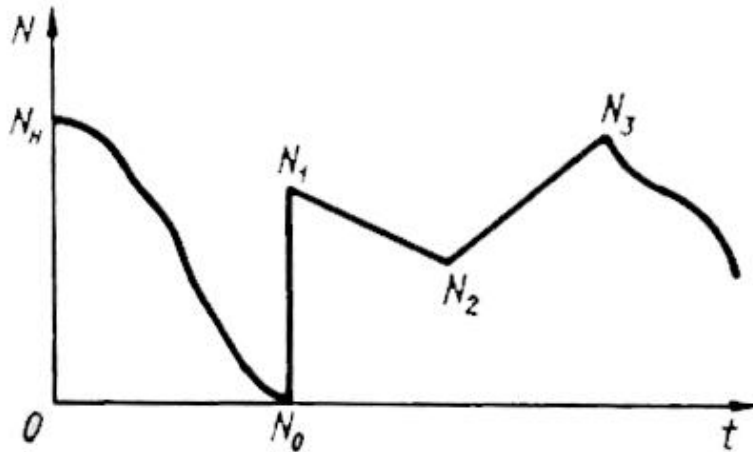


Рис. 9. Графік змін запасів (загальний випадок):

N_n, N_0, N_1, N_2, N_3 – відповідно початковий, нульовий і проміжний стани запасу;

$N_0 - N_1$ – миттєве поповнення від 0 до N_1 ;

$N_1 - N_2$ – постійний попит;

$N_2 - N_3$ – безперервне поповнення.

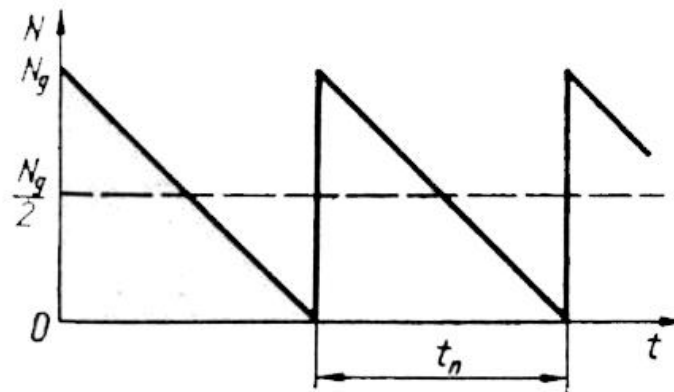


Рис. 10. Графік зміни запасів (основна модель)

На рис. 11 показана зміна річних витрат за різних розмірів поставок. Збільшення N_n веде до зниження витрат на доставку, а витрати на зберігання збільшуються зі швидкістю $C_x/2$.

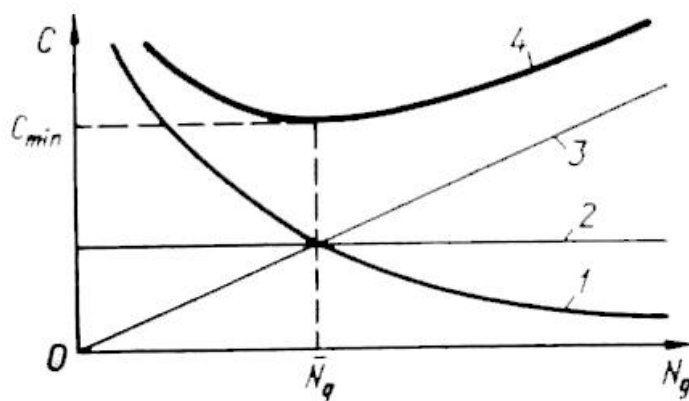


Рис. 11. Графік зміни витрат:

- 1 – витрати на доставку; 2 – вартість матеріалу;
3 – витрати на зберігання; 4 – сумарні витрати

Число поставок за рік

$$\bar{n}_{\Pi} = N/\bar{N}_{\Pi}. \quad (31)$$

Середній інтервал часу між черговими поставками

$$\bar{t}_{\Pi} = B/\bar{n}_{\Pi}, \quad (32)$$

де B – річний фонд часу, дн.

У розглянутій моделі виходили з детермінованого попиту. У реальних умовах виробництва попит може бути випадковим або невідомим, тому аналітичне рішення не завжди можливе. У загальному випадку завдання управління запасами зводяться до задач нелінійного програмування, у багатьох випадках гарні результати дають методи імітаційного моделювання.

Задачі заміни обладнання

У виробничих системах мають місце ситуації, коли з метою мінімізації експлуатаційних витрат і капітальних вкладень потрібно встановити порядок і час заміни (ремонт) обладнання через погіршення його характеристик у часі або визначити частоту й доцільність групової або індивідуальної заміни обладнання у зв'язку з можливими відмовами. Процеси заміни й ремонту відрізняються тільки об'єктом. Наприклад,

заміна віброблока віброплощини забезпечує ефективну її експлуатацію, а заміна віброплощини на нову являє собою ремонт формувального обладнання цеху. Іншими словами, ремонт – це процес заміни елементів. Тому в завданнях заміни обладнання розглядаються обидва процеси. Під обладнанням розуміють і окремий вузол якої-небудь машини, і машина в цілому, і комплекс машин, і ціле підприємство.

Задачі заміни поділяють на два класи: 1 – задачі заміни елементів, ефективність яких з часом зменшується (наприклад, формувальна установка); 2 – задачі заміни елементів, ефективність яких у часі майже не змінюється, а після закінчення деякого строку настає миттєвий вихід з ладу (наприклад, електрична лампочка).

У задачах першого класу визначається співвідношення між витратами на придбання нового обладнання й витратами, пов'язаними з експлуатацією наявного обладнання. Розрізняють такі терміни служби обладнання:

– фізичний t_{ϕ} , після закінчення якого обладнання непридатне до подальшої експлуатації, ремонту не підлягає і має бути зняте (демонтоване, здане в металобрухт, реалізоване тощо);

– економічний t_e , за якого мають місце мінімальні витрати на придбання й експлуатацію обладнання;

– раціональний t_p , що враховує крім економічності також і реальні можливості (виробничі, матеріальні, фінансові тощо) з відновлення обладнання.

Завжди виконується умова:

$$t_e \leq t_p \leq t_{\phi}. \quad (33)$$

Якщо можливості відновлення досить великі, то

$$t_e = t_p, \quad (34)$$

якщо ж можливості відновлення малі, то

$$t_p = t_{\phi}. \quad (35)$$

Коли немає обмежень з можливостей відновлення, то під час рішення задач заміни обладнання визначають економічні строки експлуатації. За обмежених можливостей відновлення визначається раціональний строк експлуатації. Ці строки і є оптимальними.

Задачі другого класу дозволяють визначати, які одиниці обладнання варто замінити і як часто проводити заміну, щоб мінімізувати загальні

витрати. Крайніми стратегіями є: заміна обладнання лише після виходу його з ладу; заміна всі деталей під час першої ж поломки. Оптимальна стратегія, звичайно, є проміжною.

Термін служби обладнання носить випадковий характер, тому для визначення характеристик (наприклад, середнього числа відмов під час роботи) використовують метод статистичних випробувань та ймовірнісні моделі динамічного програмування.

Задачі пошуку

Для задач цього класу характерний розподіл обмежених ресурсів з метою одержання найбільшої ймовірності виявлення шуканого об'єкта або події. Прикладами таких задач є пошук несправностей, браку інформації, правопорушень тощо. Основними параметрами процесу пошуку є: обсяг ресурсів, які виділяються на пошук; послідовність пошуку; спосіб аналізу інформації, отриманої під час пошуку. Проблема пошуку є об'єктом дослідження багатьох галузей знань: теорія оптимального планування експериментів (пошук закономірностей), математична статистика (пошук статистичних залежностей), теорія інформації (розпізнавання образів) тощо.

Принципові труднощі задач пошуку пов'язані з неможливістю охопити весь простір пошуку й у зв'язку із цим необхідно використовувати вибірку, що може призвести до помилок (вибірki й інформації). Підвищення точності пошуку пов'язане з витратами. Задачі пошуку в підсумку дають оптимальний план пошуку несправностей у технічній системі, план ревізії, оптимальну організацію роботи відділу технічного контролю тощо.

Розглянуті класи операційних задач, зазвичай, не охоплюють усього різноманіття постановок і підходів до обґрунтування рішень у виробничо-господарській діяльності. У дійсності найчастіше зустрічаються комбіновані задачі, що включають у себе елементи розглянутих вище задач. Знання основних методів і моделей рішення виробничо-господарських задач розглянутих класів дозволяє компетентно підійти до рішення комбінованих задач.

Запитання для самоконтролю

1. Вкажіть, за яких умов виникають задачі управління запасами.
2. У чому суть основної моделі управління запасами?

3. Як визначають число поставок запасів за рік та середній інтервал між черговими поставками?
4. Скільки класів задач заміни існує і в чому їх сутність?
5. Дайте характеристику проблеми задач пошуку як об'єкта дослідження багатьох областей знань.

Лекція 7. ОСНОВИ МЕТОДОЛОГІЇ ПРОЕКТУВАННЯ СИСТЕМНИХ ОБ'ЄКТІВ

Роль проектування в життєвому циклі системи

Проектування – це така сфера інженерної діяльності, що зв'язує наукові дослідження й практичну реалізацію. *Проектування* — процес складання опису, необхідного для створення ще не існуючого об'єкта (матеріалу, предмета, процесу, системи), на основі перетворення первинного опису, оптимізації заданих характеристик об'єкта й подання опису заданою мовою.

Створення об'єкта типу матеріал або предмет — це виготовлення об'єкта й додання йому заданих властивостей і характеристик, включаючи задану його взаємодію із зовнішнім середовищем. Створення об'єкта типу процес складається в його виконанні відповідно до заданого алгоритму. Створення системи являє собою її розміщення в часі й просторі та додання їй заданих властивостей і характеристик, включаючи задане функціонування відповідно до алгоритму.

Опис матеріалу, предмета або системи представляє опис заданих властивостей і (або) характеристик об'єкта, включаючи опис взаємодії між його частинами із зовнішнім середовищем і опис його функціонування.

Опис процесу — це опис результату процесу й заданих характеристик його виконання в часі й просторі, включаючи математичні й фізико-хімічні моделі.

Таким чином, результат проектування – це впорядкована сукупність відомостей, що виступають знаковою моделлю об'єкта, реально ще не існуючого в момент проектування.

Системні об'єкти — це такі об'єкти, які можуть бути розділені на підсистеми, що піддаються поділу на підсистеми нищого порядку. При цьому декомпозиція (поділ на підсистеми) системного об'єкта може бути:

– загальносистемною, що представляє найбільш загальний опис призначення об'єкта і його зв'язків з урахуванням тих змін, які внесе об'єкт у оточуюче його штучне й природне середовище;

– структурною, орієнтованою на опис структури об'єкта;

– функціональною, що описує закони функціонування підсистем об'єкта;

– конструктивною (елементною, приладовою, апаратною), що характеризує вибір і опис всіх елементів об'єкта.

Під час проектування системних об'єктів можливі й інші підходи декомпозиції: функціонально-вартісний, просторового компонування, кінематичного моделювання тощо. Під час проектування технологічних процесів використовується ієрархічна декомпозиція.

Через взаємозв'язок системних об'єктів повна ієрархія систем містить нескінченну кількість систем і підсистем. Під час проектування системні об'єкти включаються в ієрархію, що містить тільки системи й підсистеми на два порядки вище й нижче вихідного, які істотно пов'язані об'єктом, який проектується.

Класифікація об'єктів і задач проектування

Якщо представити об'єкт проектування як систему (рис. 12, а), що перетворить ресурси в продукцію, а проекту систему як систему, що перетворить вихідний опис (завдання) у проект (рис. 12, б), то залежно від ступеня невизначеності параметрів входу (I), виходу (O) і перетворень (X) можна виділити відповідні класи об'єктів і задач проектування (рис. 12, в).

Кожний з параметрів може розглядатися як тризначна змінна, задана однозначно (індекс j) множиною реалізацій (індекс r) і яка має бути визначена (індекс p). Усього можливо $27 = 3^3$ станів відповідних параметрів; практичне значення мають 17 класів об'єктів і 8 класів задач проектування. Найчастіше зустрічаються чотири об'єкти проектування:

1 – проектований об'єкт може бути скомпонований з наявних (готових) компонентів;

2 – немає повних наборів компонентів для проектованого об'єкта, але є аналогічні, з яких зміною параметрів можна одержати відсутні;

3 – немає повних наборів компонентів для проектованого об'єкта й не існує аналогічних, але відомі принципи їхньої побудови;

4 – немає повних наборів компонентів для проектованого об'єкта й не відомі принципи їхньої побудови.

Залежно від ступеня невизначеності умов прийняття рішень можна виділити три найбільш типові задачі проектування:

- 1 – проектні процедури детерміновані й усі вихідні дані є;
- 2 – проектні процедури алгоритмічно визначені, але з невизначеними вихідними даними.

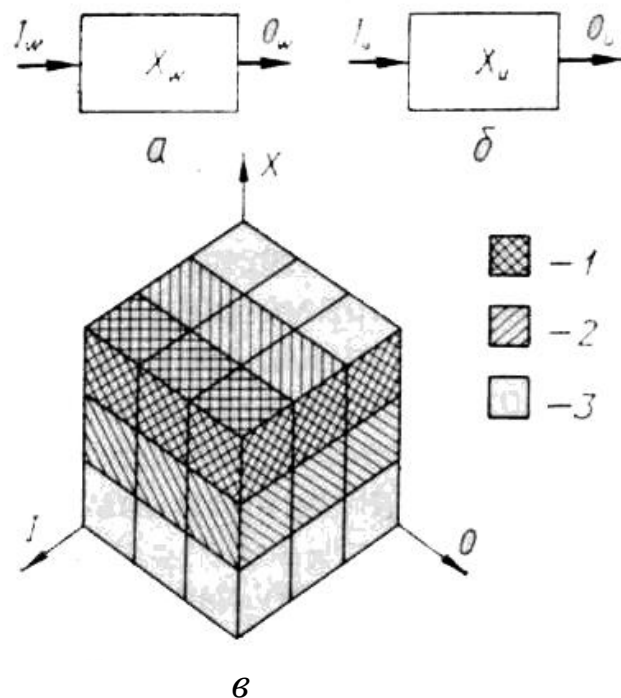


Рис. 12. Підхід до класифікації об'єктів і задач проектування:
a – схема об'єкта проектування (I_w , O_w , X_w – речовинно-енергетичні вхід, вихід і перетворення); *б* – схема процесу проектування (I_o , O_o , X_o – інформаційні вхід, вихід і перетворення); *в* – узагальнена модель можливих комбінацій; I, O, X (1 – відшукувані p ; 2 – різні відомі r ; 3 – єдина відома i)

Загальна характеристика процесу проектування

Процес проектування будь-яких системних об'єктів складається із стадій, які показано на рис. 13:

- формулювання задачі й визначення напрямку пошуку рішення;
- попереднє (пошукове) проектування, вибір і обґрунтування варіанта рішення;
- ескізне проектування, інженерний синтез (моделювання й оптимізація), оцінка проекту, ухвалення рішення;

- технічне проектування, виготовлення робочої документації, оцінка проекту, ухвалення рішення;
- уточнення рішення й коректування технічної документації.

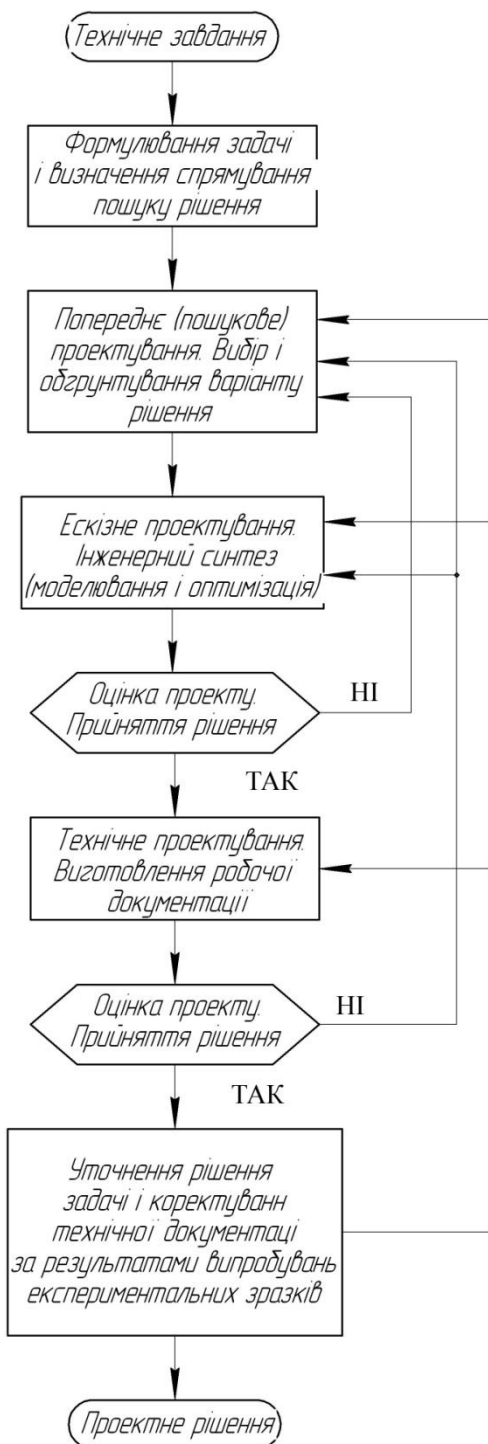


Рис. 13. Типова логічна схема проектування

Всі стадії процесу проектування складаються із сукупності проектних процедур і операцій. *Проектна процедура* — сукупність дій, що приводить до проектного рішення. Прикладами проектних процедур є

прогнозування, перевірка, оптимізація, моделювання, коректування тощо. Проектна процедура складається із *проектних операцій* — частин, алгоритми яких залишаються незмінними для ряду проектних процедур. Прикладами проектних операцій можуть бути обчислення, креслення, складання таблиць, введення, виведення даних тощо.

Найбільш складними класами проектування є ті, у яких здійснюється пошук нових рішень.

Розглянута характеристика процесу проектування системних об'єктів відбиває лише загальніші риси досить складного творчого процесу.

Основні принципи побудови процесу проектування системних об'єктів:

- принцип ієрархічності, що вимагає, щоб частина цілого проектувалася з погляду цілого й з урахуванням його інтересів;
- принцип оптимальної декомпозиції, що припускає розчленовування об'єкта на частини до двох системних рівнів вище й нижче розглянутого;
- принцип пріоритетності, що передбачає першочерговий розгляд частин, що визначають максимальну ефективність цілого;
- принцип функціонально-вартісної оцінки, що встановлює обов'язкове визначення витрат на реалізацію основних і допоміжних функцій об'єкта.

Автоматизація проектування

У сучасних умовах науково-технічного розвитку приблизно кожні десять років відбувається подвоєння різних класів технічних систем, а обсяг проектних робіт при цьому зростає приблизно в десять разів. Зростаюча складність об'єктів проектування вимагає їхньої декомпозиції й поділу задач проектування між різними виконавцями, що викликає необхідність погоджень і може призвести навіть за гарних приватних рішень до недостатньо ефективного загального рішення внаслідок того, що при декомпозиції губиться єдине ціле.

Якість проектування значною мірою залежить і від його строків, тому що закладені в проект науково-технічні ідеї й ухвалені рішення можуть морально застаріти ще до початку експлуатації об'єкта. Недостатнє опрацювання проектних рішень викликає, зазвичай, тривале доведення дослідних зразків, що призводить до втрати часу й додаткових витрат. Якість проектів знижується також внаслідок невідповідності між

складністю об'єктів проектування, що зростає, методами, що використовуються в проектуванні, і засобами.

Ці протиріччя усуваються застосуванням математичних методів і ПЕОМ, що дозволяють неавтоматизоване проектування, за якого всі перетворення описів об'єкта здійснює людина, замінити автоматизованим, коли окремі перетворення описів об'єкта виконуються під час взаємодії людини й ПЕОМ. Автоматизація проектування особливо ефективна, коли від автоматизації окремих розрахунків переходять до комплексної автоматизації на базі системи автоматизованого проектування (САПР). Автоматизація проектування органічно доповнює автоматизацію управління технологічними процесами (АСУ ТП) і автоматизацію управління підприємством (АСУП).

Під час створення САПР, переслідуються такі цілі:

- підвищення якості проектів за рахунок зменшення кількості помилок і використання оптимізаційних методів;
- рішення задач, з якими не можна впоратися без ПЕОМ;
- зниження вартості проектування;
- збільшення продуктивності у виконанні проектних робіт;
- скорочення строків проектування.

Застосування САПР у багатьох галузях вітчизняної промисловості (радіоелектроніці, машинобудуванні, будівництві) сприяє підвищенню продуктивності праці проектувальників в 4–5 разів, скороченню часу проектування в 5–10 разів, поліпшенню якості проєктованих об'єктів на 20–30 %.

Оволодіння сучасною методологією проектування системних об'єктів на основі САПР є важливою умовою формування кваліфікованого інженера в будь-якій сфері його предметно-технологічної діяльності.

Запитання для самоконтролю

1. Охарактеризуйте на прикладі відомого Вам підприємства процес проектування будь – якого об'єкту.
2. Дайте визначення поняття декомпозиції системного об'єкта за різним походженням (або підходами).
3. Вкажіть, які процеси включає логічна схема проектування.
4. Які Вам відомі найбільш типові задачі проектування, охарактеризуйте їх.
5. Наведіть відомі Вам математичні методи і ПЕОМ, які застосовують під час проектування.

Список літератури

1. *Антоненко Г.Я.* Организация, планирование и управление предприятиями строительных изделий и конструкций: учебник. – 2-е издание, перераб. и доп. – К.: Вища шк., Головное издательство, 1988. – 356 с.
2. *Антоненко Г.Я., Шейніч Л.О.* Основы проектування виробничих процесів виготовлення залізобетонних виробів: навч. посібник. – К.: НМК ЗО, 1992. –84 с.